

***Master interuniversitario en integridad estructural y  
durabilidad de materiales, componentes y estructuras***

---

**TRABAJO FIN DE MASTER**

***Título de trabajo:***

*DESARROLLO Y APLICACIÓN DE UN MODELO DE FISURA  
COHESIVA EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS*

***Tutores académicos:***

*COVADONGA BETEGÓN BIEMPICA*

*EMILIO MARTÍNEZ PAÑEDA*

***Departamento:***

*CONSTRUCCIÓN E INGENIERÍA DE FABRICACIÓN*

***Universidad de Oviedo***

*JULIO 2014*





# RESUMEN

Los recientes avances en el desarrollo de herramientas numéricas para modelizar el proceso de fractura de los materiales han sido de gran utilidad para evaluar la integridad de estructuras y componentes. Entre los diferentes instrumentos utilizados para analizar el inicio y la propagación del daño destaca por su popularidad el método de los elementos finitos (MEF). Asimismo, en el marco del MEF, se han desarrollado diversos modelos de daño que permiten simular los diferentes mecanismos de fractura que tienen lugar en los materiales. Entre ellos se encuentran los llamados modelos de zona cohesiva (CZM) que son especialmente atractivos al constituir un enfoque fenomenológico de gran utilidad práctica y permitir caracterizar el proceso de fractura mediante, generalmente, dos parámetros del material que pueden ser extraídos a partir de ensayos experimentales.

Sin embargo, los grandes avances de la comunidad científica de la mecánica de los sólidos en el desarrollo de modelos de fisura cohesiva no se han trasladado a la industria de forma mayoritaria por el impedimento que supone la ausencia de los CZM entre las prestaciones del software comercial de elementos finitos. Y es que si bien existen diferentes códigos comerciales que permiten el uso de elementos cohesivos, la totalidad de ellos están basados en CZM muy genéricos que no son apropiados para problemas complejos ni pueden adaptarse con facilidad a aplicaciones específicas.

En consecuencia, en el presente trabajo se desarrolla e implementa un elemento cohesivo en el código comercial de elementos finitos ABAQUS mediante la programación en lenguaje FORTRAN de una subrutina de usuario UEL. La formulación del elemento cohesivo es descrita en detalle en el marco del MEF y la correspondiente implementación numérica se valida comparando los resultados obtenidos a partir de la misma para diferentes modelos con las soluciones analíticas correspondientes y con resultados numéricos extraídos de la literatura. Asimismo, el elemento cohesivo desarrollado en el presente trabajo se utiliza con éxito para analizar el proceso de delaminación en materiales compuestos, de gran interés para la

industria aeronáutica. Además, la subrutina se desarrolla para incluir un coeficiente de estabilidad viscoso que permite solventar los problemas de convergencia intrínsecos a los CZM. De manera que en el presente trabajo se desarrolla un código versátil que permite adaptar el CZM implementado a diferentes aplicaciones de interés para la industria sin las limitaciones existentes en el software comercial de elementos finitos disponible.

# ABSTRACT

Progress in the development of numerical tools to model the fracture process in different kinds of materials has been very useful for assessing the integrity of structures and industrial components. Among the different instruments used to analyze the initiation and propagation of damage stands out for its popularity the finite element method (FEM). Within the framework of the FEM, several damage models have been developed through the years in order to allow for an accurate simulation of the different fracture mechanisms taking place in the failure of solids. These include the so-called cohesive zone models (CZM) that are especially attractive due to its phenomenological approach and the fact that they are able to characterize the fracture process by means of, generally, two material parameters that can be extracted from experimental tests.

However, major advances of the scientific community of solid mechanics in the development of CZM have not been largely transferred to industry due to the impediment posed by the absence of CZM among the features of commercial finite element software. Although it is true that several commercial codes allow for the use of cohesive elements, all of them are based on very general CZM that are not appropriate for complex problems and that cannot be easily adapted for specific applications.

As a consequence, in the present work a cohesive element is developed and implemented in the commercial finite element code ABAQUS by means of a user subroutine UEL programmed in FORTRAN. The formulation of the cohesive element is described in detail in the framework of the FEM and the corresponding numerical implementation is validated by comparing the results obtained from it for different models with the corresponding analytical solutions and numerical results extracted from the literature. Also, the cohesive element developed in this work has been successfully used to analyze the process of delamination in composite materials, a problem of great interest for the aeronautic industry. Furthermore, the subroutine is

developed to include a coefficient of viscous stabilization that eases the solution of convergence problems intrinsic to CZM. Therefore, a versatile code is developed in this work that allows to tailor the CZM implemented to different applications of interest for industry without the existing limitations in the commercial finite element software available.

# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	23
1.1. ANTECEDENTES .....	23
1.2. OBJETIVOS .....	24
1.3. CONTENIDO DE LA MEMORIA .....	25
2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA .....	27
2.1. MECÁNICA DE LA FRACTURA .....	27
2.2. MODELOS DE FISURA COHESIVA (CZM) .....	31
2.3. CZM EN EL SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS .....	34
3. METODOLOGÍA DEL MODELO NUMÉRICO .....	37
3.1. CZM EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS .....	37
3.2. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO DE FISURA COHESIVA ....	38
3.2.1. SEPARACIÓN LOCAL NODAL .....	39
3.2.2. SEPARACIÓN EN LOS PUNTOS DE INTEGRACIÓN .....	44
3.2.3. TENSIONES DE TRACCIÓN PARA LA LEY COHESIVA.....	47
3.2.4. MATRIZ DE RIGIDEZ Y FUERZA INTERNA COHESIVA .....	48
4. VALIDACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA .....	53



4.1. EJERCICIO Nº 1 DE VALIDACIÓN .....	53
4.1.1. MODELO NUMÉRICO .....	53
4.1.2. RESULTADOS.....	57
4.2. EJERCICIO Nº 2 DE VALIDACIÓN .....	61
4.2.1. MODELO NUMÉRICO .....	61
4.2.2. RESULTADOS.....	66
5. APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE DELAMINACIÓN.....	67
5.1. MODELO NUMÉRICO .....	67
5.2. OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LA LEY COHESIVA .....	72
5.3. RESULTADOS.....	75
5.2.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA.....	75
5.1.2. COMPARATIVA DE RESULTADOS .....	79
6. PROBLEMAS DE CONVERGENCIA .....	81
7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO.....	89
8. PRESUPUESTO .....	91
8.1. DESGLOSE DE TIEMPOS.....	91
8.2. CÁLCULO DE COSTES .....	93
8.2.1. GASTOS DE SOFTWARE .....	93
8.2.2. GASTOS DE PERSONAL .....	94

8.2.3. GASTOS DE MATERIAL FUNGIBLE.....	94
8.2.4. OTROS GASTOS .....	94
8.2.5. PRESUPUESTO TOTAL .....	95
9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	96



# ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2. 1. INCREMENTO ( $da$ ) DE LA LONGITUD DE LA GRIETA .....	27
FIGURA 2. 2. GRIETA PASANTE EN PLACA INFINITA.....	28
FIGURA 2. 3. DISTRIBUCIÓN TENSIONES DE UN ELEMENTO EN LA VECINDAD DE LA GRIETA.....	29
FIGURA 2. 4. TIPOS DE LEYES DE TRACCIÓN SEPARACIÓN .....	33
FIGURA 3. 1. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA ZONA COHESIVA .....	39
FIGURA 3. 2. ELEMENTO COHESIVO COORDENADAS GLOBALES (a) Y LOCALES (b).....	40
FIGURA 3. 3. LOCALIZACIÓN MID-POINTS ELEMENTO COHESIVO.....	41
FIGURA 3. 4. LOCALIZACIÓN PUNTOS DE GAUSS ELEMENTO COHESIVO.....	44
FIGURA 4. 1. GEOMETRÍA TEST VALIDACIÓN I, MODO I.....	54
FIGURA 4. 2. RESULTADOS VALIDACIÓN I: TRACCIÓN-SEPARACIÓN.....	59
FIGURA 4. 3. RESULTADOS VALIDACIÓN I: TRACCIÓN-DESPLAZAMIENTO .....	60
FIGURA 4. 4. RESULTADOS VALIDACIÓN I: SEPARACIÓN-DESPLAZAMIENTO .....	61
FIGURA 4. 5. GEOMETRÍA TEST VALIDACIÓN II, MODO I.....	62
FIGURA 4. 6. RESULTADOS VALIDACIÓN II: TRACCIÓN-DESPLAZAMIENTO.....	66

FIGURA 5. 1. GEOMETRÍA DE ENSAYO EN MODO MIXTO .....	67
FIGURA 5. 2. GEOMETRÍA DEL ESPÉCIMEN EN MODO MIXTO MMB .....	68
FIGURA 5. 3. MALLADO DEL MODELO ELEMENTOS FINITOS DEL ESPÉCIMEN EN MODO MIXTO .....	69
FIGURA 5. 4. SIMULACIÓN DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DEL ESPÉCIMEN EN MODO MIXTO .....	69
FIGURA 5. 5. RESULTADOS ANALÍTICOS VALIDACIÓN III .....	78
FIGURA 6. 1. REGULARIZACIÓN VISCOSA: $\sigma/\sigma_{max}$ VERSUS $U/\delta n$ .....	85
FIGURA 6. 2. REGULARIZACIÓN VISCOSA: $\Delta\delta n$ VERSUS $U/\delta n$ .....	86
FIGURA 7. 1. CRONOGRAMA DE TAREAS .....	92

# ÍNDICE DE CUADROS

CUADRO 4. 1. DEFINICIÓN DEL ELEMENTO DE USUARIO EN EL INPUT CORRESPONDIENTE A LA PRESENTE UEL. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 1. ....	55
CUADRO 4. 2. CONECTIVIDAD DEL ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 1. ....	56
CUADRO 4. 3. ASIGNACIÓN PROPIEDADES ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 1. ....	57
CUADRO 4. 4. DEFINICIÓN DEL ELEMENTO DE USUARIO EN EL INPUT CORRESPONDIENTE A LA PRESENTE UEL. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 2. ....	63
CUADRO 4. 5. CONECTIVIDAD DEL ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 2. ....	64
CUADRO 4. 6. ASIGNACIÓN PROPIEDADES ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 2. ....	65
CUADRO 5. 1. DEFINICIÓN DEL ELEMENTO DE USUARIO EN EL INPUT CORRESPONDIENTE A LA PRESENTE UEL. EJERCICIO DE ANÁLISIS 3. ....	70
CUADRO 5. 2. CONECTIVIDAD DEL ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE ANÁLISIS 3. ....	71
CUADRO 5. 3. ASIGNACIÓN PROPIEDADES ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE ANÁLISIS 3. ....	72

CUADRO 5. 4. PARÁMETROS REFERENCIA SUBROUTINA PARK&PAULINO. EJ-3. .... 73

# ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 2. 1. ESQUEMA DE LAS PRESTACIONES DE LOS PROGRAMAS COMERCIALES DE ELEMENTOS FINITOS QUE INCLUYEN ELEMENTOS COHESIVOS. ....	35
TABLA 3. 1. CÁLCULO DE LAS COMPONENTES DE LA MATRIZ $R'$ POR TRIGONOMETRÍA .....	43
TABLA 3. 2. COORDENADAS ( $\xi_1, \xi_2$ ) Y PESOS ( $\omega_1, \omega_2$ ) PARA DOS PUNTOS DE INTEGRACIÓN DE GAUSS. ....	51
TABLA 6. 1. VALORES COEFICIENTE VISCOSO ADIMENSIONALIZADOS .....	84
TABLA 7. 1. DESGLOSE TIEMPOS .....	91
TABLA 7. 2. GASTOS DE SOFTWARE .....	93
TABLA 7. 3. GASTOS DE PERSONAL .....	94
TABLA 7. 4. GASTOS MATERIAL FUNGIBLE.....	94
TABLA 7. 5. COSTE TOTAL.....	95





# TERMINOLOGÍA

- Se utilizan letras cursivas para las variables asociadas a escalares.
- Se utilizan letras cursivas en negrita para las variables asociadas a vectores, matrices y tensores.

$G, G_c$	Tasa de liberación de energía, tasa crítica de liberación de energía.
$a, a_0$	Longitud de grieta y longitud de grieta inicial.
$\sigma$	Tensor de tensiones de Cauchy.
$K_I$	Factor de intensidad de tensiones.
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	Componentes tensionales de un punto en el plano en coordenadas cartesianas.
$E$	Módulo elástico del material.
$\Gamma$	Energía cohesiva.
$\Delta_c$	Separación cohesiva.
$\delta\epsilon, \delta\mathbf{u}, \delta\Delta$	Deformación virtual, desplazamiento virtual y separación virtual.
$\mathbf{T}_{ext}$	Vector de tensión de tracción externo.

$\mathbf{R}'$	Matriz de transformación de coordenadas.
$\tilde{\mathbf{U}}$	Vector de desplazamientos nodales globales
$\tilde{\mathbf{u}}$	Vector de desplazamientos nodales locales
$\mathbf{R}$	Matriz rotacional de desplazamientos nodales.
$\mathbf{L}$	Matriz que relaciona desplazamientos locales y separación.
$\mathbf{B}_C$	Matriz que relaciona desplazamientos globales y separación.
$\theta$	Ángulo de rotación coordenadas globales y locales.
$\tilde{\mathbf{\Delta}}$	Vector de separación nodal en coordenadas locales.
$\tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_t$	Separaciones cohesivas normal y tangencial en coordenadas locales.
$\delta_n, \delta_t$	Separaciones normal y tangencial para el valor máximo de la tensión cohesiva.
$T_n, T_{t\alpha}$	Tensiones de tracción cohesivas normal y tangencial.
$\phi_n, \phi_t$	Energías de fractura normal y tangencial.
$q, r$	Parámetros intrínsecos a ley cohesiva de Xu-Needleman.
$x$	Coordenadas locales.
$\Omega$	Dominio de integración

$X$	Coordenadas globales.
$x_A, y_A$	Coordenadas cartesianas del punto medio A
$x_B, y_B$	Coordenadas cartesianas del punto medio B
$l_o$	Longitud del elemento cohesivo.
$\Delta_n^*$	Separación normal en el modelo de Xu y Needleman cuando se produce la separación crítica a cizalladura para un valor de la tensión cohesiva de tracción normal nulo.
$I$	Momento de inercia.
$P$	Carga aplicada.
$(T_n)_v, (T_t)_v$	Tensiones de tracción normal y tangencial para la ley cohesiva con término viscoso.
$\zeta_n, \zeta_t$	Parámetros que gobiernan la disipación de energía viscosa bajo tensión normal y tangencial para la ley cohesiva con término viscoso.
$\alpha, \beta$	Parámetros de forma en el modelo cohesivo PPR de Park & Paulino.
$\lambda_n, \lambda_t$	Indicadores de pendiente inicial en el modelo cohesivo PPR de Park & Paulino.
$N_1, N_2$	Funciones de forma del elemento.
$N$	Matriz de funciones de forma.

$f_{coh}$	Fuerza interna cohesiva.
$K_{coh}$	Matriz de rigidez del elemento cohesivo.
$T_c$	Vector tracción cohesiva.
$th$	Espesor del elemento cohesivo.
$\xi_1, \xi_2$	Coordenadas de los puntos de integración en el espacio isoparamétrico.
$\omega_1, \omega_2$	Pesos asignados a cada punto integración Gaussiano.
$\sigma_{max}, \tau_{max}$	Tensiones cohesivas normal y tangencial máximas.
$\phi$	Función potencial ley cohesiva.



## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1. Antecedentes

La fractura de los materiales es un problema al que la sociedad ha tenido que hacer frente desde la construcción de las primeras estructuras. Lejos de disminuir, con el paso del tiempo y el descubrimiento de nuevas tecnologías y materiales la problemática continúa. Afortunadamente, los avances en el campo de la mecánica de la fractura durante las últimas 6 décadas han ayudado a compensar algunos de estos fallos [1].

Habitualmente, en el estudio de la fractura, es necesario conocer la distribución de tensiones y de deformaciones del componente o la estructura que está siendo sometida a cargas o desplazamientos externos. Dado que la solución analítica solo puede determinarse en casos muy específicos, las herramientas numéricas han sido de gran utilidad para, junto con los ensayos experimentales, evaluar la integridad estructural de materiales y componentes. En los últimos 30 años se han utilizado diversos métodos numéricos para analizar problemas de fractura [1] siendo sin lugar a dudas el método de los elementos finitos [2] el más popular de todos ellos.

Asimismo, en el marco de los elementos finitos, se han desarrollado diversos criterios de fallo y modelos de daño que permiten simular los diferentes mecanismos de fractura que tienen lugar en los materiales [3]. Dentro de estos, son especialmente atractivos los modelos de zona cohesiva (CZM, del inglés *Cohesive Zone Models*), ya que constituyen un enfoque fenomenológico de gran utilidad práctica y, generalmente, solo requieren de dos parámetros que pueden ser ajustados con relativa facilidad a partir de ensayos experimentales [4].

El concepto de los modelos de zona cohesiva fue introducido por Barenblatt [5] y Dugdale [6] para aproximar el proceso no lineal que tiene lugar en la zona de proceso de fractura (FPZ, del inglés *fracture process zone*) evitando así recurrir a la irreal singularidad tensional de la mecánica de la fractura clásica en el medio continuo. Sin embargo pasaron más de 15 años hasta que los modelos de fisura cohesiva empezaron a alcanzar un uso generalizado, gracias al método de los elementos finitos



y a los trabajos de Hillerborg y sus colaboradores [7] en el análisis del proceso de fractura de materiales con comportamiento cuasi-frágil como el hormigón. En este material es donde los modelos de fisura cohesiva han alcanzado hasta la fecha las mayores cotas de popularidad, destacando los trabajos de Bazant [8], Elices et al. [9] y Planas et al. [10]. El uso de los modelos cohesivos se ha extendido a diversos tipos de materiales y aplicaciones, destacando especialmente en la modelización de diferentes mecanismos de fallo en materiales compuestos [11], donde se han convertido en una herramienta de gran utilidad para la industria aeronáutica. Asimismo, en los últimos años se ha despertado un creciente interés por la aplicación de los modelos de zona cohesiva para describir el proceso de fractura de materiales con comportamiento dúctil [12].

Sin embargo, los grandes avances de la comunidad científica de la mecánica de los sólidos en el desarrollo de modelos de zona cohesiva no se han trasladado a la industria de forma mayoritaria por el impedimento que supone la ausencia de los CZM entre las prestaciones del software comercial de elementos finitos. Y es que si bien existen diferentes códigos comerciales que permiten el uso de elementos cohesivos, la totalidad de ellos están basados en modelos de fisura cohesiva muy genéricos que no son apropiados para problemas complejos [13] ni permiten adaptarse con facilidad a aplicaciones específicas [4].

## 1.2. Objetivos

A raíz de las buenas prestaciones de los CZM en la simulación del daño en diferentes tipos de materiales, se propone el presente proyecto, que consiste en el desarrollo y la implementación de un modelo de fisura cohesiva en un software comercial de elementos finitos con los siguientes objetivos:

I. Desarrollar e implementar un elemento cohesivo en un código comercial de elementos finitos que permita caracterizar el daño por medio de CZM.

II. Validar la implementación numérica con ejercicios con solución numérica conocida y extender su uso a la simulación de modelos más complejos de interés práctico.



III. Comprender los fundamentos de los CZM y desarrollar un código versátil que permita adaptar el CZM implementado a aplicaciones y materiales de interés para un trabajo futuro.

A partir de los resultados obtenidos se extraen las pertinentes conclusiones y se establecen las líneas de trabajo futuro.

### **1.3. Contenido de la memoria**

La memoria consta de los siguientes apartados:

#### **Introducción:**

En este primer apartado se describe la problemática asociada a la fractura de los materiales, introduciendo el concepto de la mecánica de la fractura y las herramientas numéricas utilizadas en el marco de la misma, haciendo especial hincapié en el uso de los CZM a lo largo de los años para diferentes materiales y aplicaciones. Asimismo, se explican brevemente la motivación y los objetivos del presente trabajo, así como las metas que se pretenden alcanzar en él. Finaliza con una breve descripción de los contenidos de la memoria.

#### **Revisión bibliográfica:**

En este apartado se incluye, en primer lugar, una revisión bibliográfica de mecánica de la fractura, haciendo énfasis en los numerosos avances de la mecánica de la fractura y la formulación analítica asociada, con el propósito de contextualizar la teoría de la zona cohesiva. A continuación se describe el estado del arte en el campo de los CZM como herramienta para simular el proceso de fractura en diversos materiales y aplicaciones dentro del marco de los elementos finitos.

#### **Implementación numérica del modelo de fisura cohesiva:**

En este apartado se establece la metodología seguida para la implementación del modelo cohesivo en el software de elementos finitos. Para ello se describen en detalle los fundamentos matemáticos de los elementos cohesivos y los pasos que se han seguido para la implementación numérica de un CZM específico en el código ABAQUS por medio de una subrutina de usuario UEL programada en FORTRAN.





### **Validación de la implementación numérica:**

En este apartado se desarrollan dos modelos numéricos sencillos para evaluar el funcionamiento de la subrutina implementada y validar la misma a partir de la comparativa con resultados extraídos de la literatura.

### **Aplicación al análisis de problemas de delaminación:**

En este apartado se desarrolla un modelo numérico donde se reproduce el ensayo normalizado de flexión en modo mixto (MMB, del inglés *Mixed-Mode Bending test*) empleado para caracterizar el proceso de delaminación en composites permitiendo así evaluar en el análisis de problemas en modo mixto las prestaciones del CZM elegido y validar la implementación numérica desarrollada con las soluciones analíticas y numéricas disponibles.

### **Problemas de convergencia:**

En este apartado se incluye una breve explicación de los problemas de convergencia asociados a la implementación de elementos cohesivos en el marco del método de los elementos finitos. Se explica cómo reducir la inestabilidad introduciendo un término adicional viscoso en las ecuaciones de la ley cohesiva siguiendo un proceder popular en la literatura y su correspondiente inserción en la subrutina. Finalmente se valida la nueva implementación numérica comparando con otros resultados numéricos publicados.

### **Conclusiones y trabajo futuro:**

En este último apartado se exponen las conclusiones más importantes que se han extraído a lo largo del estudio, mencionando a continuación una serie de sugerencias para el trabajo futuro.



## 2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En este apartado se describe el estado del arte del presente trabajo, desde los conceptos pioneros más básicos de la mecánica de la fractura hasta los últimos avances en los modelos de fisura cohesiva (CZM).

### 2.1. Mecánica de la fractura

Los conceptos de Mecánica de Fractura, establecidos con anterioridad a 1960, se aplican únicamente a materiales que cumplen la Ley de Hooke. Desde 1960, han ido apareciendo diversas teorías de mecánica de fractura. Inglis [14] y Griffith [15] fueron los primeros en analizar problemas de integridad estructural desde la óptica de la mecánica de la fractura. Sin embargo, pasaron casi 30 años hasta que la comunidad ingenieril empezó a tener en consideración su trabajo, especialmente gracias a la labor de Irwin [16] en el desarrollo y la extensión del trabajo de Griffith al análisis de la fractura en materiales con comportamiento dúctil. Irwin [16], a sabiendas de que cerca de la fisura se produce una disipación de energía en forma de calor y plastificación, añadió un término disipativo al balance de energía planteado por Griffith. Este término recibe el nombre de tasa de liberación de energía  $G$ , y se corresponde con la energía disponible para la propagación de un incremento ( $da$ ) de la longitud de la grieta ( $a$ ), tal y como se aprecia en la Figura 2.1.

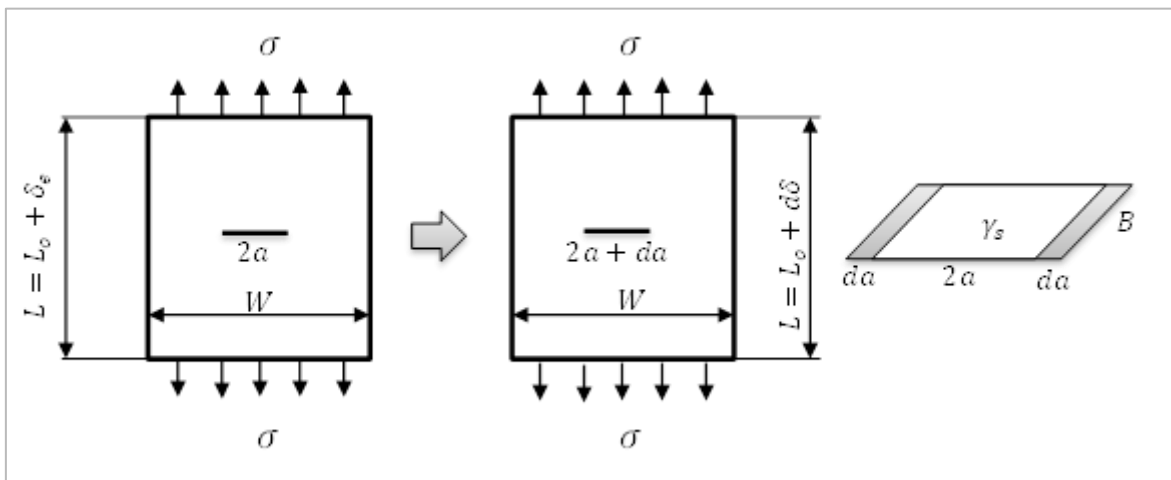


FIGURA 2. 1. INCREMENTO ( $da$ ) DE LA LONGITUD DE LA GRIETA



Para una grieta de tamaño  $2a$  en una placa infinita sometida a tensión de tracción  $\sigma$  como la que se aprecia en la Figura 2.2, la tasa de liberación de energía  $G$  se describe de acuerdo con la Ecuación 2.1:

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E} \quad (2.1)$$

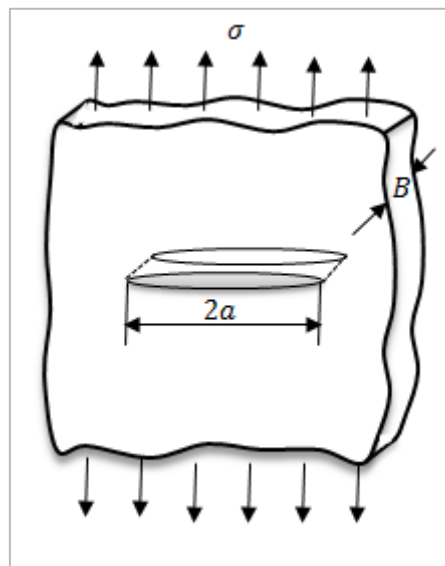


FIGURA 2. 2. GRIETA PASANTE EN PLACA INFINITA

En el preciso momento del fallo  $G = G_c$  y la tasa crítica de liberación de energía  $G_c$  se expresa en función de los valores límites de la tensión (tensión de fallo  $\sigma_f$ ) y el tamaño de grieta  $a_c$ , tal y como se aprecia en la Ecuación 2.2:

$$G_c = \frac{\pi \cdot \sigma_f^2 \cdot a_c}{E} \quad (2.2)$$

Este enfoque conlleva la importante asunción de que la resistencia del material a la fractura  $G_c$ , es independiente del tamaño y la geometría del espécimen agrietado. Siendo esta suposición válida únicamente cuando el comportamiento del material sea principalmente elástico lineal.



Además del enfoque energético, se ha desarrollado un gran interés por la evaluación de la mecánica de la fractura a partir del campo tensional y del pionero trabajo de Irwin [17]. Irwin introdujo el concepto el factor de intensidad de tensiones  $K_I$ , que está directamente relacionado con las tensiones en la vecindad de la punta de la grieta en un material elástico, tal y como se observa esquemáticamente en la Figura 2.3:

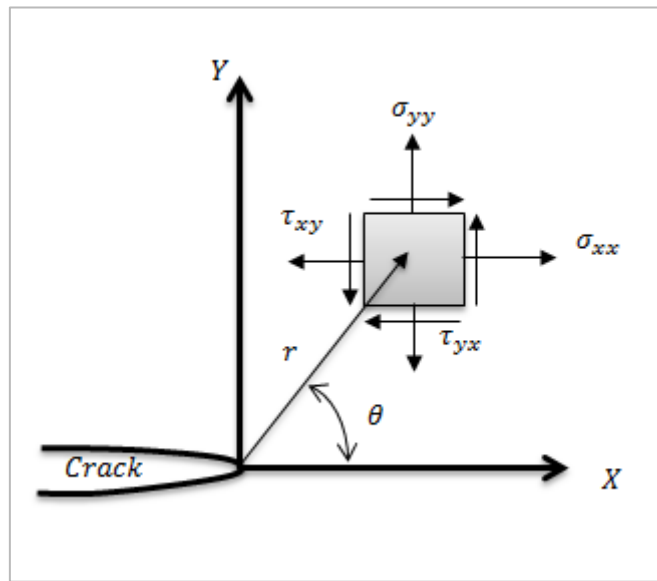


FIGURA 2. 3. DISTRIBUCIÓN TENSIONES DE UN ELEMENTO EN LA VECINDAD DE LA GRIETA

Las componentes de las tensiones están relacionadas con el factor de intensidad de tensiones mediante las ecuaciones siguientes:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2.3)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2.4)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.5)$$



Dónde se puede apreciar que todas las componentes tensionales son proporcionales a una constante  $K_I$  para las condiciones consideradas. Si dicha constante (el factor de intensidad de tensiones) es conocida, es posible conocer la distribución tensional en la vecindad de la punta de la grieta.

En el caso del espécimen de la Figura 2.3, el factor de intensidad de tensiones viene definido por la Ecuación 2.6 [1]:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.6)$$

De manera que si se asume que el material falla localmente para una determinada combinación de tensiones y deformaciones para una carga en modo I se puede deducir que el proceso de fractura tendrá lugar para un valor crítico del factor de intensidad de tensiones  $K_I$ . Y en consecuencia, el factor de intensidad de tensiones  $K_I$  constituye una medida alternativa de la tenacidad a la fractura del material. Dado que ambos enfoques (energético y tensional) de la mecánica de la fractura son equivalentes siempre que el material tenga un comportamiento elástico lineal, se puede extraer una relación entre ambas variables características ( $G$  y  $K$ ), tal y como se aprecia en la Ecuación 2.7:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (2.7)$$

Por desgracia, la mecánica de la fractura elástico-lineal está limitada a materiales donde la zona plástica en la punta de la grieta es pequeña en comparación con la dimensión de la grieta. Así, la mayor parte de los materiales ingenieriles muestran un comportamiento no lineal o inelástico bajo condiciones de carga suficientemente grandes. En consecuencia, es necesario otro enfoque más avanzado para poder predecir el crecimiento de las fisuras en materiales con comportamiento elastoplástico. Diversas herramientas y modelos se han utilizado a lo largo de los años en el marco de la mecánica de la fractura elasto-plástica para evaluar la resistencia a la fractura, donde destacan el CTOD (del inglés, *Crack-Tip Opening Displacement*) [18], la integral  $J$  [19] o los modelos de daño [20]. Basados en un enfoque fenomenológico, en este último grupo se encuentran los conocidos como modelos de



zona cohesiva (CZM), que han demostrado ser un instrumento de suma utilidad para predecir el daño en diversos materiales [9].

## 2.2. Modelos de fisura cohesiva (CZM)

Los modelos de fisura cohesiva (CZM) están basados en el trabajo de Barenblatt [5] y el posterior desarrollo de Dugdale [6] para los materiales con comportamiento perfectamente plástico. Sin embargo, su uso generalizado como herramienta para analizar la fractura de diversos materiales surgió a partir de su implementación en el método de los elementos finitos desarrollada por Hillerborg y sus colaboradores [7]. Posteriormente surgieron diversos modelos [21], donde las principales diferencias residen en la definición de la forma de la ley de tracción separación y de los parámetros que caracterizan a la misma.

El uso de los CZM como herramienta para caracterizar el inicio y la propagación del daño rápidamente se extendió a otros materiales o procesos de daño. Así, gracias a los trabajos desarrollados por Tvergaard [22] y Beaupaire y Schuëller [23] se pudo definir, en un único CZM implementado en el marco de los elementos finitos, un ciclo completo de fatiga, es decir en un solo modelo se incluía tanto la fase de iniciación como la fase de evolución tras el daño.

Dentro del marco de los composites fueron Moroni y Pironi [24] quienes sugirieron el uso de los CZM para la predicción de la fractura, incorporando en su modelo unas relaciones entre la tensión normal/tangencial y la apertura/desplazamiento de las caras de la grieta. Kromishad et al. [25] formularon una ley de tracción-separación bi-lineal para simular la evolución del daño debido a la fatiga en uniones adhesivas, problema que fue abordado por Min Jung et al. [26] por medio de una ley de tracción separación que venía definida por tres parámetros fundamentales: la rigidez inicial, la fuerza cohesiva crítica y la tenacidad a la fractura. Mientras que Li et al. [27] extendieron su uso a la simulación del daño en modo mixto. En el marco de los materiales visco-elásticos y polímeros, Rahulkumar et al. [28] definieron un CZM que permitía analizar la propagación de la fractura en materiales visco-elásticos, usando elementos cohesivos en la zona que se encontraba por encima



del frente de grieta. Pero fueron Maiti y Philippe [29] los primeros en desarrollar un CZM específico para polímeros con una alta sensibilidad en el crecimiento de grietas.

Una de las aplicaciones más populares de los CZM es, sin lugar a dudas, el inicio y la propagación de grietas en el hormigón, en gran parte gracias a los trabajos realizados por Elices et al. [9], Planas et al. [10] y Bazant [8]. Cabe destacar el reciente trabajo de Rosa et al. [30], quienes introdujeron un CZM dependiente del tiempo para poder tener en cuenta la influencia de la tasa de carga a la que está siendo sometido el hormigón por medio de unos parámetros viscosos-cohesivos. Además, los CZM han sido utilizados en otras muchas aplicaciones, como la modelización del proceso de fragilización por hidrógeno [31], el análisis de la fractura en materiales avanzados [32-34] o la fractura intergranular [35], entre otros.

Uno de los problemas fundamentales en la aplicación de los CZM es la elección de la ley de material en la zona cohesiva. A lo largo de los años se han utilizado diversas leyes de tracción-separación en función del material o la aplicación a analizar, mostrándose en la Figura 2.4 las más populares.

Así, la primera de ellas, Figura 2.4 (a), fue desarrollada por Tvergaard para analizar la separación de las fibras en un metal reforzado [22], aunque unos años más tarde utilizó con Hutchinson [36] una ley cohesiva trapezoidal, Figura 2.4 (b), para evaluar la tenacidad a fractura en materiales elasto-plásticos.

Esa misma ley cohesiva, o la versión suavizada de Scheider y Brocks [37], Figura 2.4 (c), se han utilizado en numerosas ocasiones para evaluar el proceso de fractura en materiales con comportamiento dúctil.

Ortiz y Pandolfi [38] desarrollaron una ley cohesiva exponencial, Figura 2.4 (d), para evaluar la propagación de grietas bajo condiciones dinámicas.

La ley cohesiva lineal, Figura 2.4 (e), es una de las más populares, especialmente en el análisis del hormigón, donde también goza de popularidad la curva bi-lineal [38-39] Figura 2.4 (f), o en problemas de impacto [40].

En general, las leyes de tracción-separación pueden definirse en base a tres parámetros: la energía cohesiva ( $\Gamma$ ), la tensión cohesiva ( $T$ ), y la separación en la descohesión del material ( $\Delta$ ), estando todos ellos relacionados, de manera que la curva cohesiva se puede definir inequívocamente con dos de estos tres parámetros.

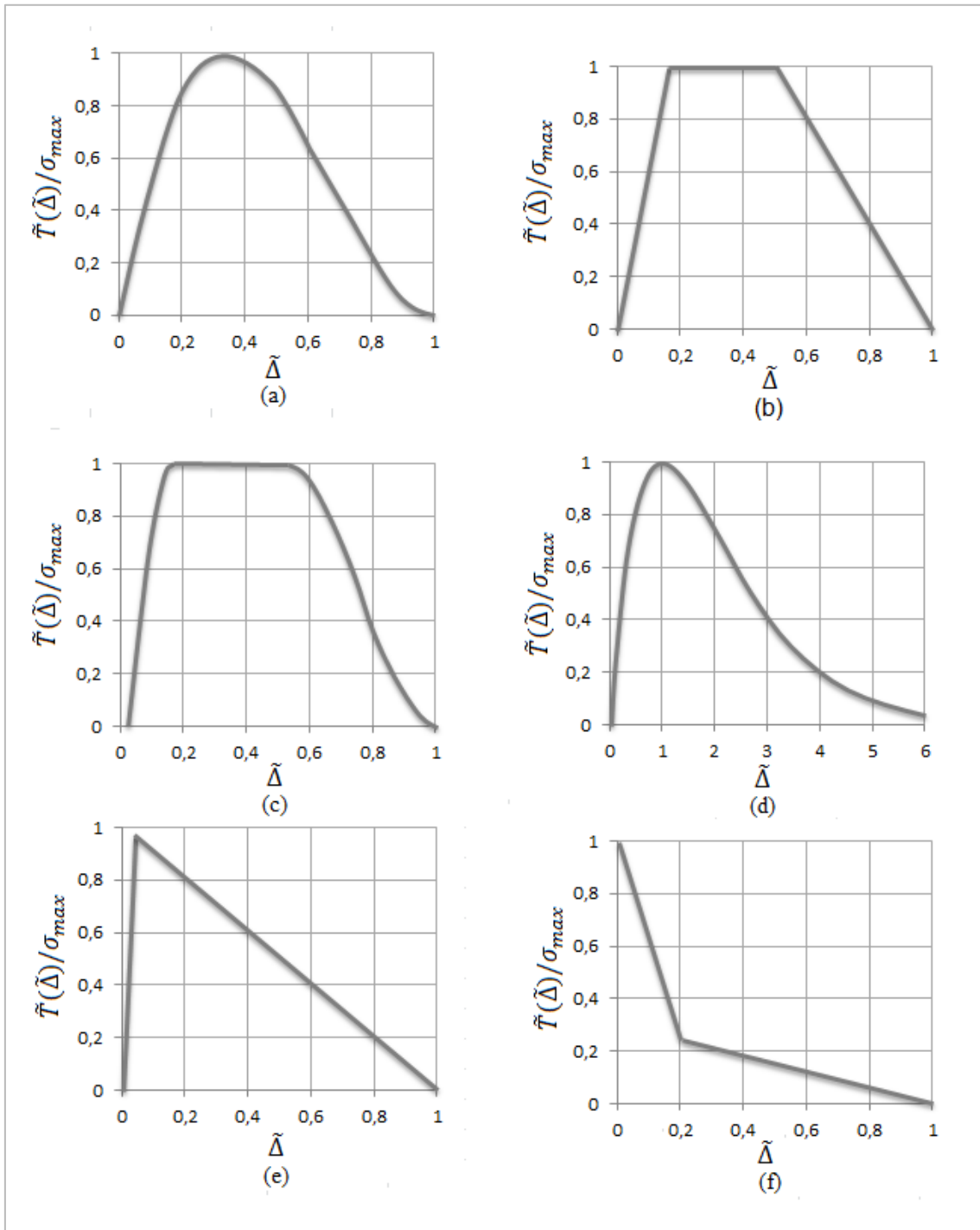


FIGURA 2. 4. TIPOS DE LEYES DE TRACCIÓN SEPARACIÓN

Además, en las leyes cohesivas definidas en la Figura 2.4 se pueden apreciar tres áreas de interés. La primera, el comportamiento elástico previo al inicio del daño.





La existencia de una pendiente finita en la ley cohesiva antes del inicio del daño no tiene sentido físico y su uso está justificado para facilitar la implementación en un código de elementos finitos, ya que los elementos cohesivos no pueden tener rigidez infinita. En consecuencia, la pendiente de esta región debe de ser lo más grande posible para reducir al mínimo la deformación que tiene lugar en la zona cohesiva previa a la ruptura. El segundo lugar de interés radica en el punto de inicio del daño, este se alcanza cuando se produce una combinación crítica de tensión y separación y a partir del mismo se inicia la última región de interés: la curva de ablandamiento.

A diferencia de la pendiente inicial, que se establece en base a criterios numéricos, los valores de inicio del daño y la curva de ablandamiento son parámetros puramente fenomenológicos y en consecuencia deben de ser analizados para cada material y fenómeno correspondiente. La posibilidad de describir el proceso de fractura sin sensibilidad a la malla y con únicamente dos parámetros del modelo hace que los modelos de zona cohesiva sean una herramienta muy interesante.

### **2.3. CZM en el software de elementos finitos**

A pesar de las buenas prestaciones de los CZM para simular la propagación del daño en diversos materiales y aplicaciones, muchos de los avances llevados a cabo por la comunidad científica de la mecánica de los sólidos en la caracterización del proceso de fractura por medio de CZM no se han incluido aún en los códigos comerciales de elementos finitos. Así, de acuerdo con lo especificado en [4], las prestaciones de los principales códigos de elementos finitos se pueden esquematizar en la siguiente tabla:



Software	Dimensión de los elementos cohesivos	Leyes cohesivas de tracción-separación
ABAQUS	2D, 3D	Lineal, exponencial y tabular.
ANSYS	2D, 3D	Exponencial
MARC	2D, 3D	Lineal y exponencial
WARP3D	3D	Exponencial
ZEBULON	2D, 3D	Lineal y exponencial
FRANC2D	2D	Lineal y exponencial

TABLA 2. 1. ESQUEMA DE LAS PRESTACIONES DE LOS PROGRAMAS COMERCIALES DE ELEMENTOS FINITOS QUE INCLUYEN ELEMENTOS COHESIVOS.

Aunque han pasado dos años desde la publicación de la referencia [4] (2012) y la tabla podría no reflejar las prestaciones actuales (la última versión de ANSYS incluye también la ley cohesiva lineal), queda patente la poca versatilidad de los códigos comerciales de elementos finitos disponibles para utilizar diferentes leyes cohesivas, limitando fuertemente el uso de los CZM en numerosas aplicaciones. A modo de ejemplo, la ley trapezoidal característica de la fractura de materiales dúctiles [12] no estaría disponible en ninguno de los códigos del listado, a pesar de que algunos de ellos son programas más orientados hacia la investigación y específicos de fractura (WARP3D, FRANC2D). Además, el enfoque utilizado para tratar problemas de fractura en modo mixto en los CZM implementados en estos programas podría no ser apropiado [13].

A juzgar por la información de [4], ABAQUS sería el software comercial de elementos finitos que más ha desarrollado la implementación de CZM, siendo el único software que permitiría en teoría al usuario utilizar una ley cohesiva a su gusto por medio de la opción tabular. Sin embargo, a juzgar por la información de la documentación del programa, ABAQUS permite introducir de forma tabular la relación existente entre la variable  $D$  y la separación o el desplazamiento relativo ( $\delta - \delta_0$ ), siendo  $\delta_0$  la separación correspondiente al punto del inicio del daño. De manera que, a sabiendas de que se asume un comportamiento lineal entre los puntos que se definen en la tabla y que  $D$  es una variable de daño que está relacionada con la tensión



cohesiva  $T$ , la separación  $\delta$  y la pendiente o rigidez del tramo elástico inicial  $K$  mediante la siguiente expresión:

$$T = (1 - D) \cdot K \cdot \delta \quad (2.8)$$

Podemos extraer la correspondiente ley cohesiva (véase, relación entre  $T$  y  $\delta$ ) a partir de cada uno de los valores de  $D$  introducidos en la tabla ( $D_1$  y  $D_2$ ) y los correspondientes valores del desplazamiento ( $\delta_1$  y  $\delta_2$ ):

$$T = \left( 1 - D_1 + \frac{\delta_1(D_2 - D_1)}{\delta_2 - \delta_1} - \frac{\delta(D_2 - D_1)}{\delta_2 - \delta_1} \right) \cdot K \cdot \delta \quad (2.9)$$

Que se corresponde con una ecuación de segundo orden sin término independiente. De manera que, si bien ABAQUS permite introducir de forma tabular la variación de la variable de daño  $D$  en función del desplazamiento (o mejor dicho, del desplazamiento relativo) permitiendo la representación de cualquier curva mediante una aproximación lineal a trozos, debido a la relación existente entre  $T$  y  $D$  no es posible que el usuario introduzca una ley cohesiva cualquiera donde exista una variación lineal entre los puntos de la misma, dificultando así la definición de leyes cohesivas como la trapezoidal, Figura 2.4 (b), o la bi-lineal, Figura 2.4 (f), entre otras.

De cualquier manera, ABAQUS es el software comercial de elementos finitos que más ha desarrollado la implementación de los CZM y como consecuencia de ello es el utilizado en el presente trabajo. Nótese en cualquier caso que el elemento cohesivo programado en este trabajo mediante una subrutina de usuario podría utilizarse en cualquier código de elementos finitos modificando previamente, si las hubiera, las pertinentes diferencias de terminología o lenguaje de programación.



### 3. METODOLOGÍA DEL MODELO NUMÉRICO

En el presente apartado se describe en detalle la formulación del elemento cohesivo desarrollado en el presente trabajo y su implementación numérica en el software comercial de elementos finitos ABAQUS por medio de una subrutina de usuario UEL.

#### 3.1. CZM en el método de los elementos finitos

En el modelo cohesivo de formulación débil, las relaciones cohesivas y de equilibrio a lo largo de la interfaz se obtienen a partir del principio de los trabajos virtuales (PTV). De acuerdo con el PTV si aplicamos un campo de desplazamientos virtual se cumplirá que el trabajo virtual externo y el trabajo virtual interno son iguales, siendo el trabajo externo igual a las fuerzas externas por los desplazamientos virtuales y el trabajo interno igual a la tensión por la deformación. En el caso de los CZM el trabajo virtual interno está compuesto de la suma de la energía de deformación y la energía cohesiva de fractura correspondiente a los elementos cohesivos en la superficie de fractura, según se deduce de la Ecuación 3.1:

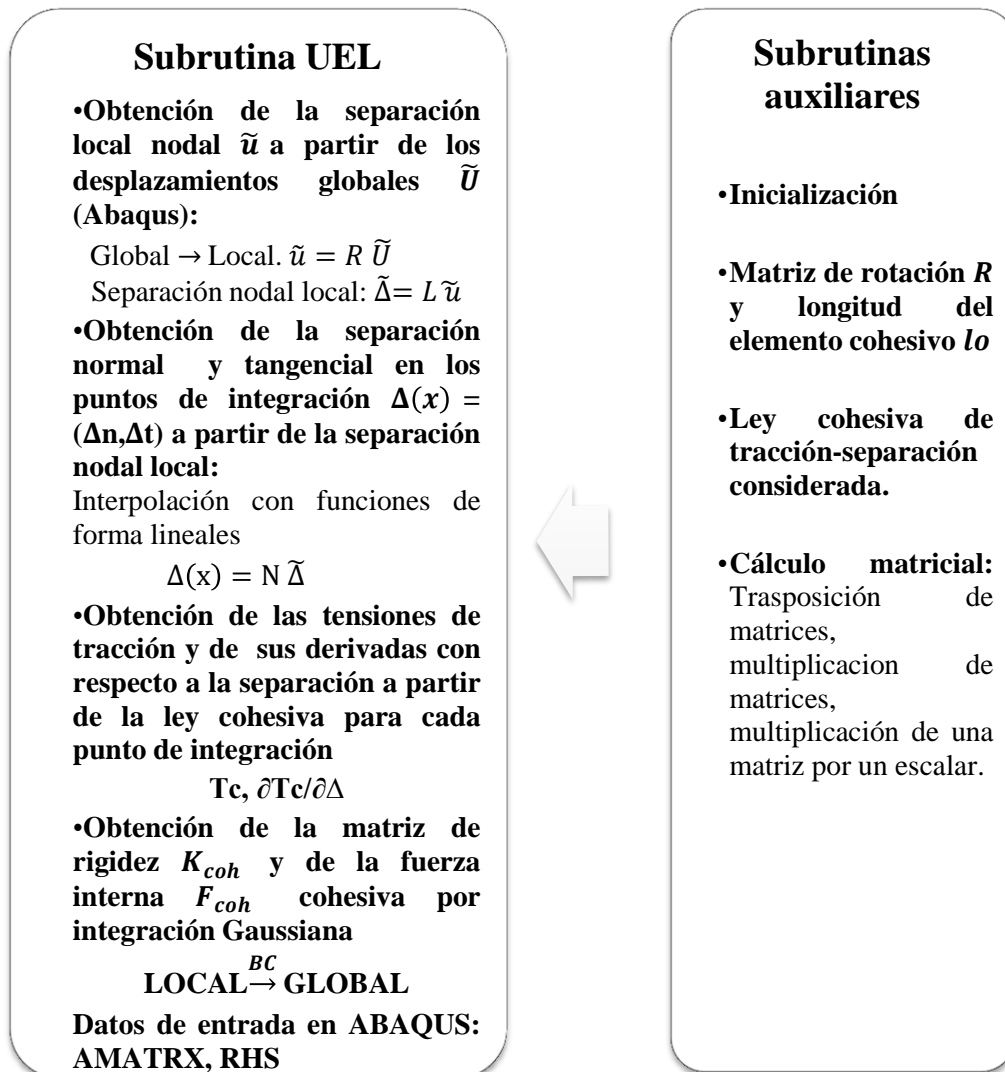
$$\int_{\Omega} \delta \epsilon : \sigma dV + \int_{\Gamma_c} \delta \Delta \cdot \mathbf{T}_c \cdot dS = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_{ext} \cdot dS \quad (3.1)$$

Donde  $\delta \epsilon$ ,  $\delta \mathbf{u}$  y  $\delta \Delta$  son la deformación virtual, el desplazamiento virtual y la separación virtual,  $\sigma$  es el tensor de tensiones en la configuración deformada,  $\mathbf{T}_c$  es la tracción cohesiva a lo largo de la superficie de fractura, y  $\mathbf{T}_{ext}$  el vector de tracción externo. Donde el dominio  $\Omega$  se discretiza con elementos finitos y las integrales anteriores se evalúan usando la cuadratura de Gauss. Una vez descrito el ensamblaje de los CZM en la formulación del método de los elementos finitos (MEF) se detalla el desarrollo y la implementación numérica de un elemento cohesivo.



### 3.2. Implementación numérica del modelo de fisura cohesiva

Para la implementación del CZM se programó en lenguaje FORTAN un elemento cohesivo lineal mediante la subrutina de usuario UEL para su ejecución en ABAQUS. El mismo consta de cuatro nodos, con dos grados de libertad por nodo (desplazamiento horizontal y vertical). La subrutina se formula de manera para que el espesor del elemento cohesivo y los datos correspondientes al CZM considerado se introduzcan en el fichero .inp de ABAQUS o en el modelo desarrollado en el CAE. En el Cuadro 3.1 se ofrece una visión esquemática de los principales pasos a seguir para implementar la subrutina principal así como las subrutinas auxiliares que se han definido en la UEL para facilitar la comprensión del código.



CUADRO 3. 1. PASOS IMPLEMENTACIÓN ELEMENTO COHESIVO



### 3.2.1. Separación local nodal

En el MEF, como su nombre indica, el dominio se discretiza con elementos finitos, y el campo de desplazamientos se aproxima interpolando el valor del desplazamiento en los nodos por medio de funciones de forma. Los desplazamientos nodales en un sistema de coordenadas global son extraídos por ABAQUS a raíz de la resolución de las ecuaciones de equilibrio en los nodos. Habida cuenta de que, tal y como se refleja en la Figura 3.1, dos puntos del material que inicialmente están unidos se separan a medida que el proceso de fractura evoluciona, la separación entre ellos se corresponderá con la diferencia entre su desplazamiento relativo. De manera que para obtener la separación nodal a partir de los desplazamientos nodales globales es necesario previamente cambiar a un sistema de coordenadas locales.

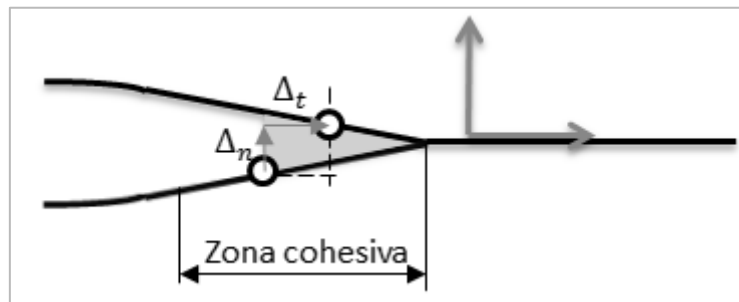


FIGURA 3. 1. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA ZONA COHESIVA

El campo de los desplazamientos en un sistema de coordenadas global, para un elemento cohesivo bidimensional de cuatro nodos, dos grados de libertad por nodo viene definido por:

$$\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3, \tilde{U}_4, \tilde{U}_5, \tilde{U}_6, \tilde{U}_7, \tilde{U}_8) \quad (3.2)$$

Como se puede ver en la Figura 3.2, en un sistema de coordenadas global aparecen rotaciones del elemento con la deformación. Por este motivo se realiza un cambio del sistema de coordenadas global a local. El sistema de referencia local al estar en movimiento con el elemento cohesivo no se ve afectado por la rotación. El campo de desplazamientos en el sistema de coordenadas local viene definido por:

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4, \tilde{u}_5, \tilde{u}_6, \tilde{u}_7, \tilde{u}_8) \quad (3.3)$$

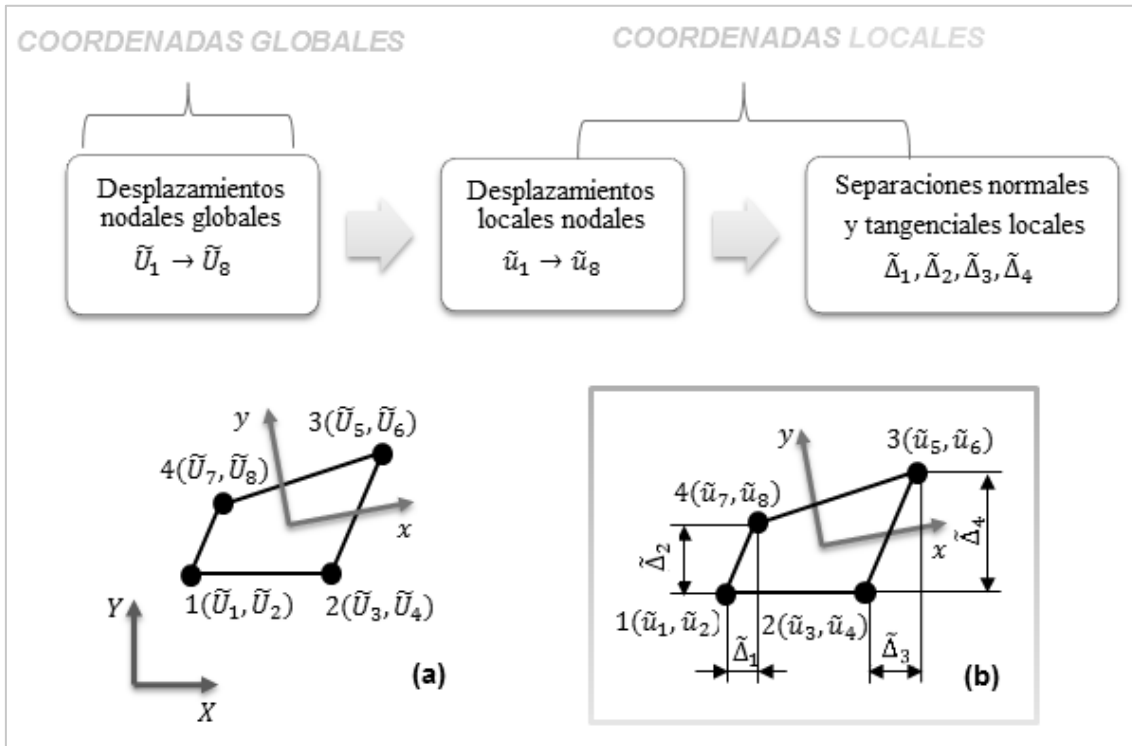


FIGURA 3. 2.ELEMENTO COHESIVO COORDENADAS GLOBALES (a) Y LOCALES (b).

Los desplazamientos globales  $\tilde{U}$  se transforman en desplazamientos locales  $\tilde{u}$  por medio de una matriz de rotación  $R$ :

$$\tilde{u} = R \tilde{U} \quad (3.4)$$

Siendo la matriz de rotación igual a:

$$R = \begin{bmatrix} R' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R' \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Donde la matriz de transformación de coordenadas  $R'$  es igual a:

$$R' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$



Siendo  $\theta$  el ángulo de rotación o ángulo entre las coordenadas globales y locales. Para obtener las componentes de la matriz de rotación  $R$  en el caso del elemento cohesivo bidimensional de cuatro nodos considerado en este trabajo se parte de la configuración deformada, tal y como se puede ver en la Figura 3.3, con el objetivo de conocer el ángulo de rotación  $\theta$ .

Para ello es preciso conocer la longitud del elemento cohesivo  $l_o$  y las coordenadas de los puntos medios o *mid-points* del elemento.

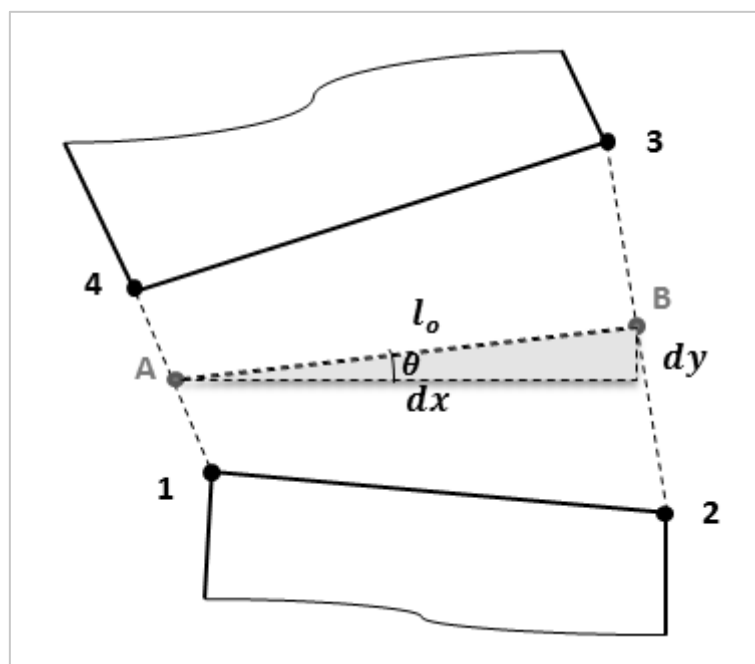


FIGURA 3. 3. LOCALIZACIÓN MID-POINTS ELEMENTO COHESIVO

Designamos como punto medio  $A$  al correspondiente al segmento formado por los nodos 1 y 4 y el punto medio  $B$  será el correspondiente al segmento formado por los nodos 2 y 3, tal y como se aprecia en la figura.

De manera que siguiendo los pasos que se detallan a continuación es posible obtener el ángulo de rotación  $\theta$  y con ello la matriz de rotación  $R$ :





- Obtención de las coordenadas nodales de la configuración deformada  $(x_i, y_i)$  a partir de las coordenadas de los nodos en la configuración sin deformar  $(X_i, Y_i)$  y de los desplazamientos globales nodales  $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3, \tilde{U}_4, \tilde{U}_5, \tilde{U}_6, \tilde{U}_7, \tilde{U}_8)$ :

$$(x_1, y_1) = (X_1 + \tilde{U}_1, Y_1 + \tilde{U}_2) \quad (3.7)$$

$$(x_2, y_2) = (X_2 + \tilde{U}_3, Y_2 + \tilde{U}_4) \quad (3.8)$$

$$(x_3, y_3) = (X_3 + \tilde{U}_5, Y_3 + \tilde{U}_6) \quad (3.9)$$

$$(x_4, y_4) = (X_4 + \tilde{U}_7, Y_4 + \tilde{U}_8) \quad (3.10)$$

- Cálculo de las coordenadas correspondientes a cada punto medio:

$$(x_A, y_A) = (x_1 + x_4, y_1 + y_4) \cdot 0.5 \quad (3.11)$$

$$(x_B, y_B) = (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \cdot 0.5 \quad (3.12)$$

- Cálculo de los incrementos de longitud correspondientes a cada coordenada cartesiana  $dx$  y  $dy$  (ver Figura 3.3):

$$dx = x_B - x_A \quad (3.13)$$

$$dy = y_B - y_A \quad (3.14)$$

- Cálculo de la longitud inicial  $l_o$  del elemento cohesivo a partir de  $dx$  y  $dy$  por medio del teorema de Pitágoras.

$$l_o = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (3.15)$$



- Cálculo de las componentes de la matriz de transformación de coordenadas (y por ende, de la matriz de rotación) aplicando trigonometría:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} R'_{11} & R'_{12} \\ R'_{21} & R'_{22} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

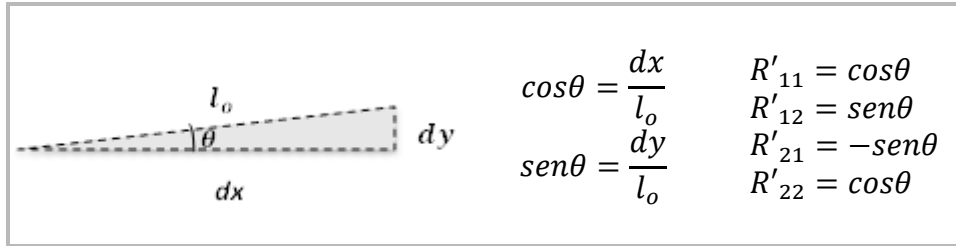


TABLA 3. 1. CÁLCULO DE LAS COMPONENTES DE LA MATRIZ  $\mathbf{R}'$  POR TRIGONOMETRÍA

La matriz de rotación nos permite obtener los desplazamientos nodales en un sistema de coordenadas local a partir de los desplazamientos globales que ha extraído ABAQUS para cada nodo a partir de la resolución de las ecuaciones de equilibrio.

A partir de los desplazamientos nodales en el sistema de coordenadas local es posible obtener directamente la separación o distancia total entre nodos ( $\tilde{\Delta}$ ) en las direcciones normales y tangenciales a la superficie, estando relacionados de forma matricial en base a la Ecuación 3.17:

$$\tilde{\Delta} = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.17)$$

Donde  $\mathbf{L}$  es una matriz de relación local entre desplazamiento y separación. En el caso del elemento bidimensional que estamos considerando, tal y como se puede apreciar en la Figura 3.2, las componentes de la separación local normal y tangencial ( $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_3, \tilde{\Delta}_4$ ) se pueden obtener a partir de los desplazamientos nodales locales tal que:

$$\tilde{\Delta}_1 = \tilde{u}_7 - \tilde{u}_1 \quad (3.18)$$

$$\tilde{\Delta}_2 = \tilde{u}_8 - \tilde{u}_2 \quad (3.19)$$



$$\tilde{\Delta}_3 = \tilde{u}_5 - \tilde{u}_3 \quad (3.20)$$

$$\tilde{\Delta}_4 = \tilde{u}_6 - \tilde{u}_4 \quad (3.21)$$

De manera que  $L$  es igual a:

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.2.2. Separación en los puntos de integración

La ley cohesiva correspondiente se evalúa en los puntos de integración. La ubicación de los puntos de integración Gaussianos se puede apreciar en la Figura 3.4 tanto para la configuración deformada como para la configuración sin deformar en el espacio isoparamétrico lineal. Es decir, que para obtener la separación en los puntos de integración de Gauss se interpola la separación nodal local usando funciones de forma lineales.

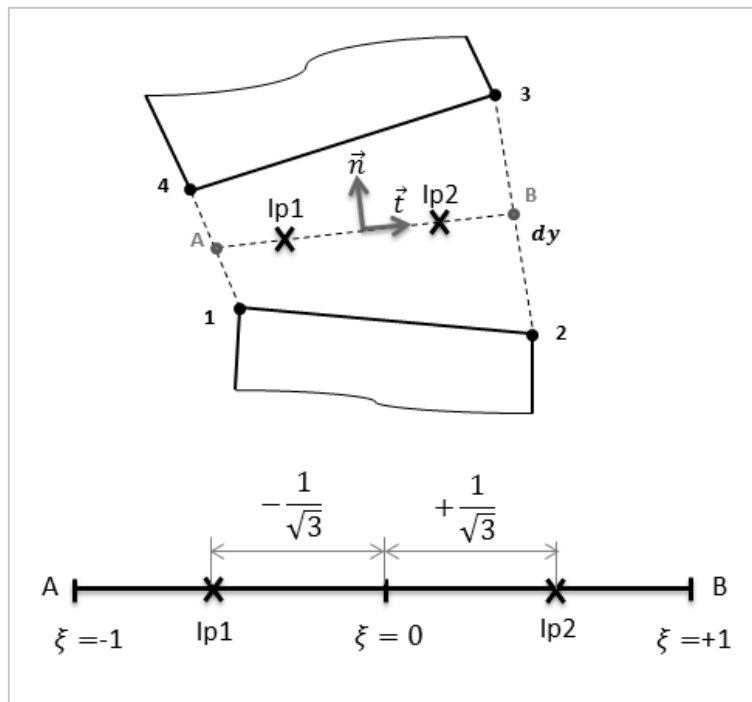


FIGURA 3. 4. LOCALIZACIÓN PUNTOS DE GAUSS ELEMENTO COHESIVO



La separación  $\Delta(\mathbf{x})$  a lo largo del elemento cohesivo se calcularía según la Ecuación 3.23 a partir de la separación nodal  $\tilde{\Delta}$  utilizando las funciones de forma:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{N} \tilde{\Delta} \quad (3.23)$$

Siendo  $\mathbf{N}$  la matriz de funciones de forma, que para el elemento cohesivo considerado en este trabajo es:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Donde las funciones de forma lineales  $N_1$  y  $N_2$  en el espacio isoparamétrico lineal se calculan como:

$$N_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad (3.25)$$

$$N_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (3.26)$$

Sustituyendo y resolviendo nos queda:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_t \\ \tilde{\Delta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_2 \\ \tilde{\Delta}_3 \\ \tilde{\Delta}_4 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\tilde{\Delta}_t = N_1 \cdot \tilde{\Delta}_1 + N_2 \cdot \tilde{\Delta}_3 \quad (3.28)$$

$$\tilde{\Delta}_n = N_1 \cdot \tilde{\Delta}_2 + N_2 \cdot \tilde{\Delta}_4 \quad (3.29)$$



Donde  $\tilde{\Delta}_t$  es la separación tangencial y  $\tilde{\Delta}_n$  la separación normal en el sistema local de referencia empleado.

De manera que, ensamblando las expresiones anteriores, se puede obtener la Ecuación 3.31 que representa una relación directa entre la separación local  $\Delta(\mathbf{x})$  y el desplazamiento global nodal  $\tilde{\mathbf{U}}$ , tal que:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{N} \tilde{\Delta} = \mathbf{N} \mathbf{L} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \mathbf{L} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{U}} \quad (3.30)$$

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_c \tilde{\mathbf{U}} \quad (3.31)$$

Donde se puede apreciar que  $\mathbf{B}_c$  es una matriz global que relaciona desplazamientos y separación. Para el elemento cohesivo bidimensional de este trabajo vendría definido por la Ecuación 3.33:

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{N} \mathbf{L} \mathbf{R} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -CN_1 & -SN_1 & -CN_2 & -SN_2 & CN_2 & SN_2 & CN_1 & SN_1 \\ SN_1 & -CN_1 & SN_2 & -CN_2 & -SN_2 & CN_2 & -SN_1 & CN_1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Donde  $C$  y  $S$  son respectivamente  $\cos\theta$  y  $\sin\theta$ . De manera que a partir de los desplazamientos nodales podemos obtener la separación normal y tangencial. A sabiendas de que la ley cohesiva de tracción-separación relaciona la tensión cohesiva  $\mathbf{T}_c$  con la separación  $\Delta$  mediante una determinada función o potencial, una vez que hemos obtenido la separación local podemos extraer las dos variables que la subrutina UEL debe devolver al programa: la fuerza interna cohesiva del elemento  $\mathbf{f}_{coh}$  y la matriz de rigidez del elemento cohesivo  $\mathbf{K}_{coh}$ .



### 3.2.3. Tensiones de tracción para la ley cohesiva

La tensión de tracción cohesiva  $T_c$  se extrae a partir de la correspondiente ley cohesiva considerada y de la separación local que hemos calculado por medio de los desplazamientos globales nodales que envía ABAQUS a la subrutina siguiendo el proceder detallado en los apartados anteriores. En este caso, por su popularidad, se ha implementado la ley cohesiva exponencial de Xu y Needleman [41] cuyas características se reflejan en la Figura 3.5. Nótese en cualquier caso que la subrutina desarrollada permite incluir cualquier tipo de ley cohesiva, lo que habilita al usuario para adaptar la misma a un determinado material o aplicación.

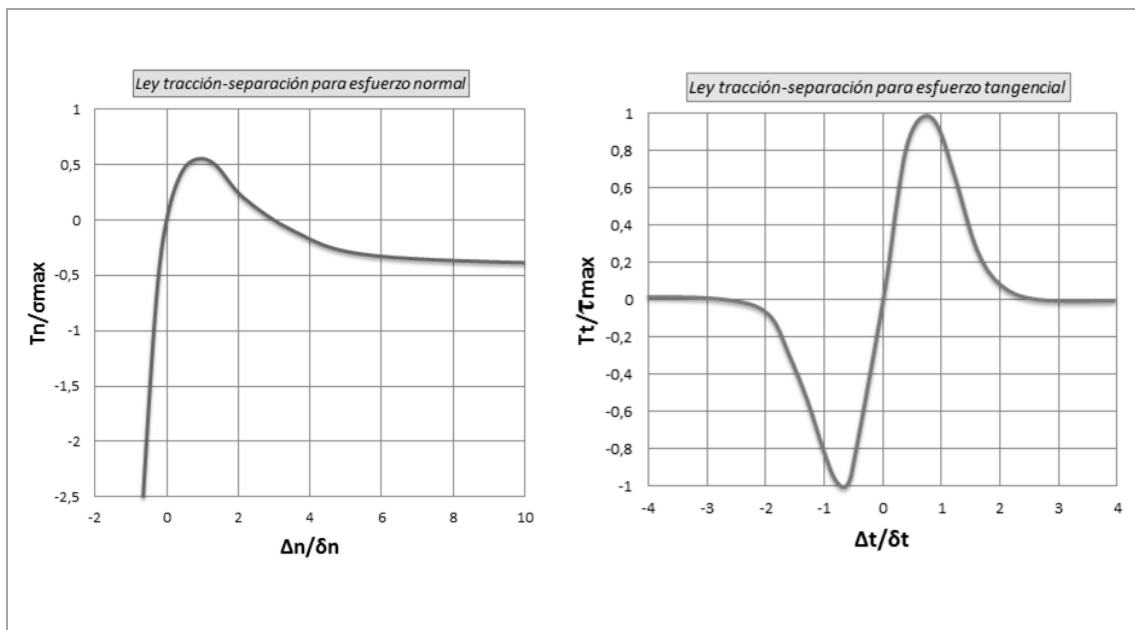


FIGURA 3. 5. LEY TRACCIÓN-SEPARACIÓN DE XU Y NEEDLEMAN

De manera que la relación entre las separaciones normal  $\Delta_n$  y tangencial  $\Delta_t$  y las correspondientes tensiones cohesivas normal  $T_n$  y tangencial  $T_{t\alpha}$  que nos permitirán extraer la tensión cohesiva  $T_c$  viene dada en la ley cohesiva de Xu y Needleman [41] en base al siguiente potencial  $\phi(\Delta_n, \Delta_t)$  calculado según la Ecuación 3.34:



$$\phi(\Delta_n, \Delta_t) = \phi_n + \phi_n \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \left[1 - r + \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right] \frac{1-q}{r-1} - \left[ q + \left(\frac{r-q}{r-1}\right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \exp\left(-\frac{\Delta_{t\alpha}^2}{\delta_{t\alpha}^2}\right) \right\} \quad (3.34)$$

De manera que para calcular las tensiones de tracción normal  $T_n$  y tangencial  $T_{t\alpha}$  es necesario derivar el potencial con respecto a la separación:

$$T_n = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_n} \quad (3.35); \quad T_{t\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_{t\alpha}} \quad (3.36)$$

Operando se obtiene:

$$T_n = \frac{\phi_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \frac{\Delta_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) + \frac{1-q}{r-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right)\right] \left[r - \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right] \right\} \quad (3.37)$$

$$T_{t\alpha} = 2 \left(\frac{\phi_n \Delta_t}{\delta_t^2}\right) \left[ q + \left(\frac{r-q}{r-1}\right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \quad (3.38)$$

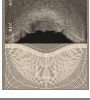
El trabajo de separación  $\phi_n$  que representa el área bajo la curva tracción-separación para el esfuerzo normal, se puede calcular a partir de la Ecuación 3.39:

$$\phi_n = \sigma_{max} \cdot \exp(1) \cdot \delta_n \quad (3.39)$$

Dónde todos los términos son conocidos, ya que  $q$  y  $r$  son parámetros constitutivos del material intrínsecos a la ley cohesiva de Xu y Needleman.

### 3.2.4. Matriz de rigidez y fuerza interna cohesiva

Por último, una vez que se ha obtenido la tensión de tracción cohesiva  $T_c$  para la separación local que tiene lugar se deben obtener a partir de la misma la fuerza interna cohesiva del elemento  $f_{coh}$  y la matriz de rigidez del elemento cohesivo  $K_{coh}$ .



La fuerza interna cohesiva del elemento  $f_{coh}$  se puede extraer en base a la Ecuación 3.40:

$$f_{coh} = \int_{\Gamma_c} \mathbf{B}_c^T \mathbf{T}_c dS \quad (3.40)$$

Mientras que la matriz de rigidez del elemento cohesivo se corresponde con el gradiente interno de la fuerza cohesiva del mismo y se calcula a partir de la Ecuación 3.41:

$$\mathbf{K}_{coh} = \frac{\partial f_{coh}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = \int_{\Gamma_c} \mathbf{B}_c^T \frac{\partial \mathbf{T}_c}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} dS = th \int_{L_{el}} \mathbf{B}_c^T \frac{\partial \mathbf{T}_c}{\partial \Delta} \mathbf{B}_c \cdot dl \quad (3.41)$$

Donde  $l$  es la longitud del elemento cohesivo y  $th$  su espesor. De manera que para obtener la matriz de rigidez del elemento cohesivo es preciso obtener previamente la derivada parcial de la tensión con respecto a la separación  $\partial \mathbf{T}_c / \partial \Delta$  en cada punto de integración de Gauss según ecuación 3.42.

$$\frac{\partial \mathbf{T}_c}{\partial \Delta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_t}{\partial \Delta_t} & \frac{\partial T_t}{\partial \Delta_n} \\ \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_t} & \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Los términos de esta matriz son:

$$\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n} = \frac{\phi_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{\delta_n} - \frac{\Delta_n}{\delta_n^2} \right] \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) + \frac{1-q}{r-1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \right] \left[ -\frac{r}{\delta_n} + \frac{\Delta_n}{\delta_n^2} - \frac{1}{\delta_n} \right] \right\} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \Delta_t} = \frac{\phi_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ -2 \frac{\Delta_n}{\delta_n} \frac{\Delta_t}{\delta_t^2} \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) + 2 \frac{1-q}{r-1} \frac{\Delta_t}{\delta_t^2} \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \left[ r - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \right\} \quad (3.44)$$

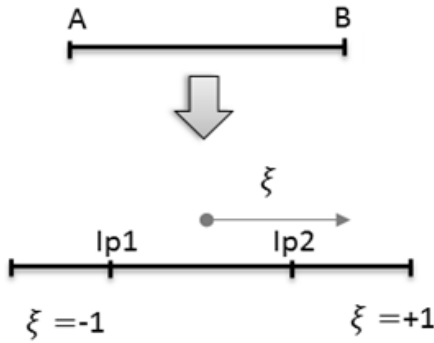
$$\frac{\partial T_t}{\partial \Delta_n} = 2 \frac{\phi_n}{\delta_t^2} \frac{\Delta_t}{\delta_t} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \left[ \frac{r-q}{r-1} \left( 1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) - q \right] \quad (3.45)$$





$$\frac{\partial T_t}{\partial \Delta_t} = 2 \frac{\phi_n}{\delta_t^2} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left[ q + \frac{r-q}{r-1} \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \left[ 1 - \frac{2\Delta_t^2}{\delta_t^2} \right] \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \quad (3.46)$$

En la formulación de elementos finitos es usual trabajar en el espacio isoparamétrico y resolver las integrales por integración Gaussiana. Para ello se tienen que expresar las integrales anteriores en el espacio isoparamétrico lineal, tal que:



$$f_{coh} = h \cdot \frac{l_0}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}_c^T \mathbf{T}_c d\xi \quad (3.47)$$

$$\mathbf{K}_{coh} = \frac{\partial f_{coh}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = th \cdot \frac{l_0}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}_c^T \frac{\partial \mathbf{T}_c}{\partial \Delta} \mathbf{B}_c d\xi \quad (3.48)$$

Y finalmente, se aplica el método de Gauss (Ecuación 3.49) para resolver las integrales anteriores:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx \sum_i^p \omega_i f(\xi_i) \quad (3.49)$$

Donde para el elemento cohesivo bidimensional de cuatro nodos se precisa de dos puntos de integración. Las coordenadas locales de los puntos de integración  $\xi_1$  y  $\xi_2$  y los pesos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se pueden ver en la Tabla 3.2:



Coordenadas locales	Pesos
$\xi_1 = -1/\sqrt{3}$	$\omega_1 = 1$
$\xi_2 = +1/\sqrt{3}$	$\omega_2 = 1$

TABLA 3. 2. COORDENADAS ( $\xi_1, \xi_2$ ) Y PESOS ( $\omega_1, \omega_2$ ) PARA DOS PUNTOS DE INTEGRACIÓN DE GAUSS.

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{coh}$  se obtendría aplicando la Ecuación 3.50:

$$\mathbf{K}_{coh} = th \cdot \frac{l_0}{2} \cdot 1 \cdot \sum_i \mathbf{B}_c^T \frac{\partial \mathbf{T}_c}{\partial \Delta} \mathbf{B}_c \quad (3.50)$$

Donde el subíndice  $i$  hace referencia a los puntos de integración. De manera que se devuelve a ABAQUS la contribución del elemento cohesivo al PTV finalizando así la implementación de la subrutina.





## 4. VALIDACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Una vez desarrollada la implementación numérica del elemento cohesivo en la subrutina de usuario UEL se procede a validar la misma. Para este fin se procede a verificar los resultados numéricos obtenidos con otros existentes en la literatura en dos modelos sencillos bidimensionales en modo I de carga.

### 4.1. Ejercicio Nº 1 de Validación

#### 4.1.1. Modelo numérico

La configuración del primer ejercicio de validación se muestra en la Figura 4.1, donde todas las unidades están en mm. En la misma se aprecia que el modelo consta de dos elementos continuos que están unidos por un elemento cohesivo. La placa bidimensional analizada está empotrada en su extremo inferior y como condición de contorno se le ha impuesto un desplazamiento en el extremo superior de 0.1 mm. Se asume un comportamiento elástico y lineal para los elementos continuos con un módulo de Young de 3640 MPa y un coeficiente de Poisson de 0.3.

Asimismo, en la Figura 4.1 se puede apreciar una imagen de la configuración deformada del modelo simulado en ABAQUS, donde se aprecia la disposición de los nodos de los elementos y se intuye la ubicación del elemento cohesivo, ya que ABAQUS/Viewer no muestra los elementos de usuario. Los elementos continuos utilizados son elementos cuadriláteros lineales de 4 nodos con integración reducida (tipo CPS4R) y están unidos por un elemento cohesivo cuyo comportamiento viene definido por la subrutina UEL definida anteriormente.

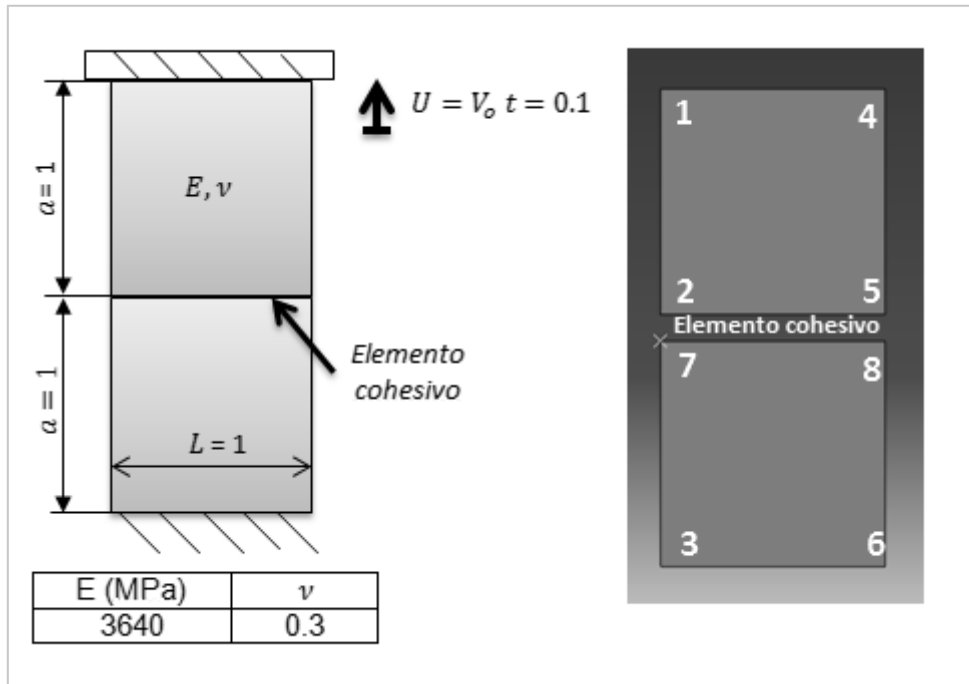
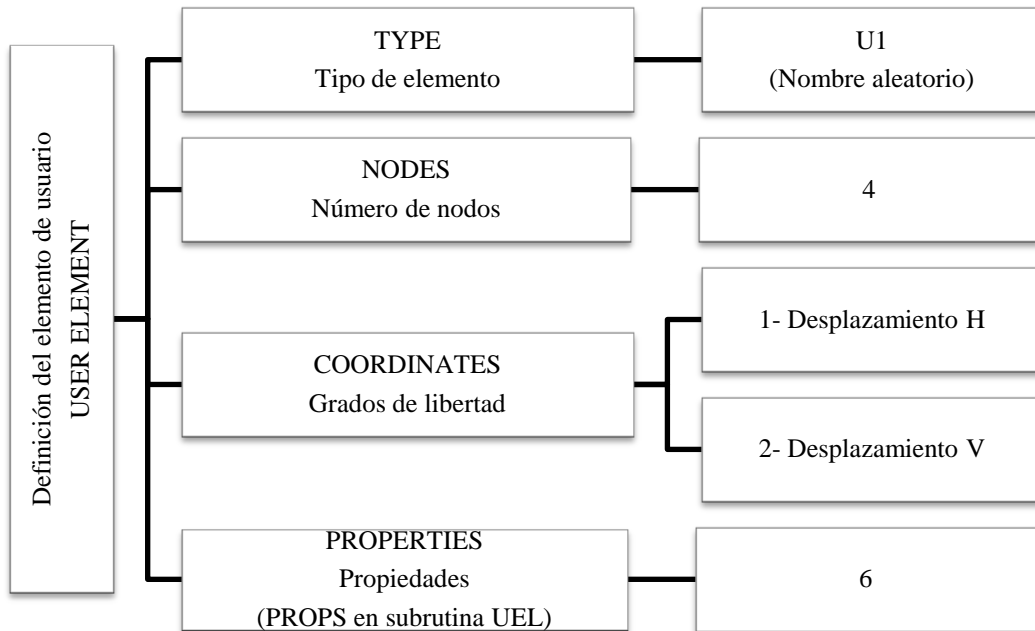


FIGURA 4. 1. GEOMETRÍA TEST VALIDACIÓN I, MODO I

Como se ha mencionado en el capítulo anterior de la memoria, la subrutina UEL desarrollada en el presente trabajo se ha programado con vistas a introducir en el archivo input de ABAQUS (o el correspondiente modelo en ABAQUS/CAE) los valores de las variables que caracterizan el comportamiento cohesivo del elemento y su grosor. A continuación se indican las líneas de comando necesarias para la definición del elemento de usuario utilizado en la subrutina.

\*USER ELEMENT, TYPE=U1, NODES=4, COORDINATES=2, PROPERTIES=6

1,2



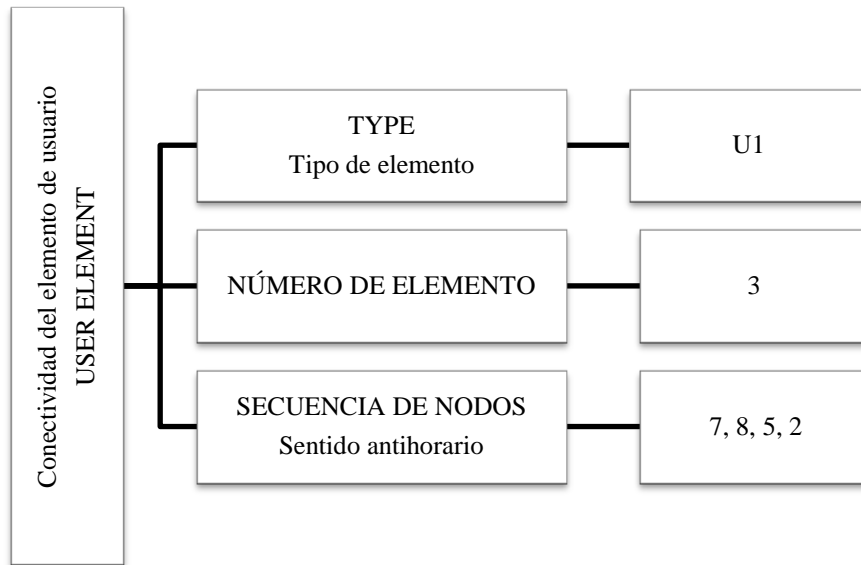
CUADRO 4. 1. DEFINICIÓN DEL ELEMENTO DE USUARIO EN EL INPUT CORRESPONDIENTE A LA PRESENTE UEL. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 1.

Tal y como se puede apreciar, en primer lugar se definen en el input el nombre del tipo de elemento (un identificador para todos los elementos que tengan dicho comportamiento), el número de nodos, el número de grados de libertad y el número de propiedades que se van a definir en el input para ser consideradas bajo la variable PROPS en la subrutina y que en este caso caracterizan el comportamiento cohesivo y el espesor del elemento. En la siguiente línea se especifican los grados de libertad del elemento: desplazamiento vertical (1) y desplazamiento horizontal (2).

A continuación se define la conectividad del elemento. Señalando su tipo, aglutinándolo en un Set para facilitar su identificación y especificando la numeración del elemento (3 por ejemplo en este caso, ya que 1 y 2 son los elementos continuos) y los nodos siguiendo la notación habitual de ABAQUS: se numera en sentido anti-horario comenzando por la esquina inferior izquierda.

\*ELEMENT, TYPE=U1, ELSET=CZ

3, 7, 8, 5, 2

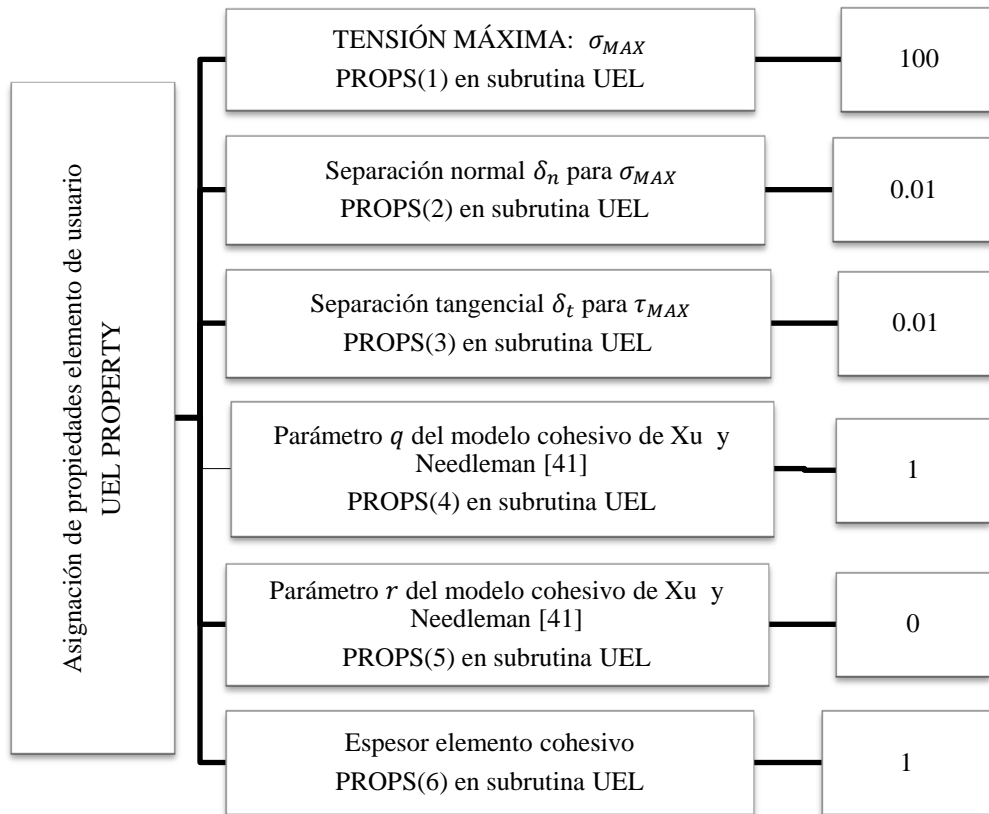


CUADRO 4. 2. CONECTIVIDAD DEL ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 1.

Finalmente se definen las propiedades del elemento que se utilizarán en la subrutina UEL como PROPS. En este caso son 6 y se corresponden con el espesor del elemento cohesivo, PROPS (6), y los diferentes parámetros que caracterizan el comportamiento cohesivo del CZM de Xu y Needleman [41]: la tensión de tracción cohesiva normal máxima  $\sigma_{MAX}$ , PROPS (1), la separación normal para la tensión de tracción cohesiva normal máxima  $\delta_n$ , PROPS (2), la separación tangencial para la tensión de tracción cohesiva tangencial máxima  $\delta_t$ , PROPS (3) y los parámetros constitutivos  $q$ , PROPS (4), y  $r$ , PROPS (5), de la ley cohesiva de Xu y Needleman [41], que representan el ratio de acoplamiento entre la energía de separación normal y tangencial y que habitualmente adopta un valor igual a 1 y 0 respectivamente [42].

\*UEL PROPERTY, ELSET=CZ

100, 0.01, 0.01, 1, 0, 1



CUADRO 4. 3. ASIGNACIÓN PROPIEDADES ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 1.

El comportamiento cohesivo se caracteriza asignando valores de  $\sigma_{MAX} = 100$  MPa,  $\delta_n = 0.01$  mm y  $\delta_t = 0.01$  mm para poder comparar con los resultados obtenidos por Gao y Bower [43] para el mismo modelo.

#### 4.1.2. Resultados

Además de poder comparar con los resultados numéricos extraídos por Gao y Bower [43] por medio del método de los elementos finitos según la ley cohesiva de Xu y Needleman [41], es posible extraer una solución analítica al tratarse de un modelo sencillo.





Así, la tensión de tracción se obtiene analíticamente en base a la Ecuación 4.1 [43]:

$$\sigma = \sigma_{MAX} \cdot \frac{\Delta}{\delta_n} \cdot e^{\left(1 - \frac{\Delta}{\delta_n}\right)} \quad (4.1)$$

Dónde  $\sigma$  representa la tensión de tracción y  $\Delta$  se corresponde con la separación de la interfaz. Teniendo en cuenta los valores de  $\sigma_{MAX} = 100$  MPa y  $\delta_n = 0.01$  mm asignados previamente quedaría:

$$\sigma = 10000 \cdot \Delta \cdot e^{\left(1 - \frac{\Delta}{0.01}\right)} \quad (4.2)$$

Además, el desplazamiento aplicado  $U$  estaría relacionado con la separación  $\Delta$  mediante la Ecuación 4.3: [43]

$$U = \frac{\Delta \cdot 2 \cdot a \cdot \sigma_{MAX}}{\delta_n \cdot E} \cdot \left( \Lambda + e^{\left(1 - \frac{\Delta}{\delta_n}\right)} \right) \quad (4.3)$$

Dónde  $\Lambda = E \delta_n / 2 \cdot a \cdot \sigma_{MAX}$  es una variable que representa la relación entre la rigidez del sólido y la rigidez de la interfaz cohesiva. Siendo  $a$  la dimensión característica del modelo, tal y como se aprecia en la Figura 4.1. A sabiendas de que  $E = 3640$  MPa y  $a = 1$  mm, la expresión quedaría tal que:

$$U = \Delta \cdot \frac{1}{0.182} \cdot \left( 0.182 + e^{\left(1 - \frac{\Delta}{0.01}\right)} \right) \quad (4.4)$$

De manera que se pueden comparar los resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo con la solución analítica y los resultados numéricos de Gao y Bower [43].



### Tensión de tracción vs Separación

En la Figura 4.2 se representan los resultados obtenidos en este trabajo para la tensión de tracción  $\sigma_{22}$  en función de la separación  $\Delta$  que tiene lugar en la interfaz. Asimismo, se representan también los obtenidos por Gao y Bower [43] para la misma ley cohesiva y la solución analítica.

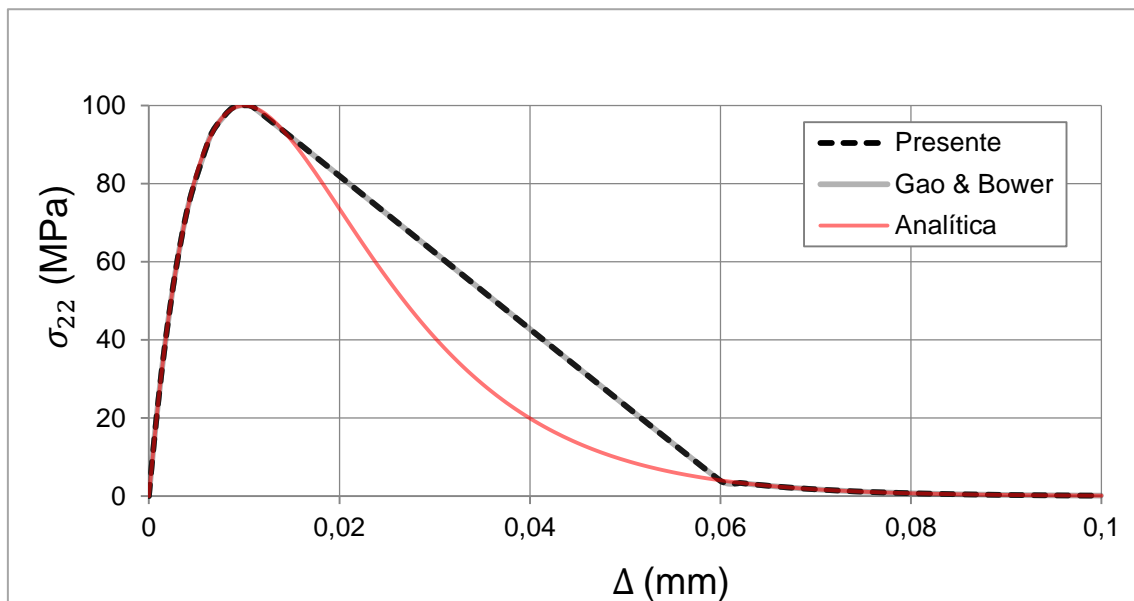


FIGURA 4. 2. RESULTADOS VALIDACIÓN I: TRACCIÓN-SEPARACIÓN

Tal y como se puede apreciar, los resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo coinciden exactamente con los extraídos por Gao y Bower [43] bajo las mismas condiciones. Además, se aprecia como ambos resultados concuerdan razonablemente bien con la solución analítica, existiendo ligeras diferencias a partir del inicio del daño como consecuencia del gran tamaño de incremento que es necesario utilizar para evitar problemas de convergencia en esa zona. Estos problemas de convergencia se analizan en detalle en el capítulo 6.

### Tensión de tracción vs Desplazamiento

De igual manera, se representan en la Figura 4.3 los resultados obtenidos numéricamente en este trabajo para la tensión de tracción  $\sigma_{22}$  normalizada en función



del desplazamiento impuesto  $U$  normalizado por la separación normal para la tensión de tracción cohesiva normal máxima  $\delta_n$ .

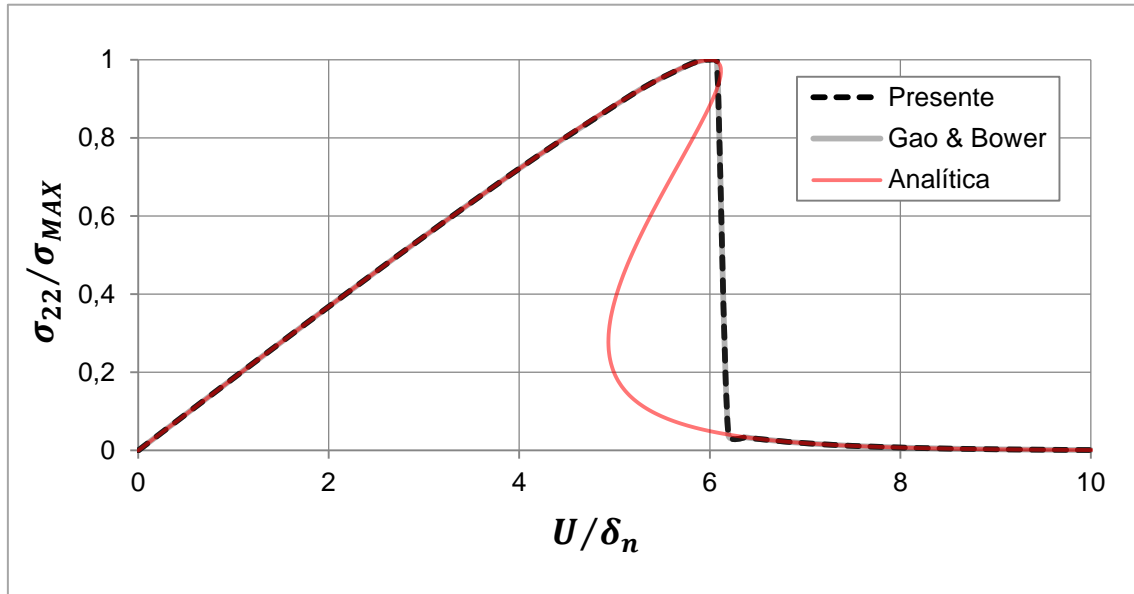


FIGURA 4. 3. RESULTADOS VALIDACIÓN I: TRACCIÓN-DESPLAZAMIENTO

De nuevo los resultados obtenidos son idénticos a los alcanzados por Gao y Bower [43] para la misma ley cohesiva. Y como era de esperar se aprecian unas ligeras diferencias con el resultado analítico como consecuencia del tamaño de incremento mínimo que se puede utilizar sin encontrar problemas de convergencia.

#### Separación vs Desplazamiento

Por último se representan en la Figura 4.4 la solución analítica y los resultados numéricos obtenidos en [43] y en este trabajo respectivamente para la curva normalizada separación  $\Delta/\delta_n$  versus desplazamiento  $U/\delta_n$ .

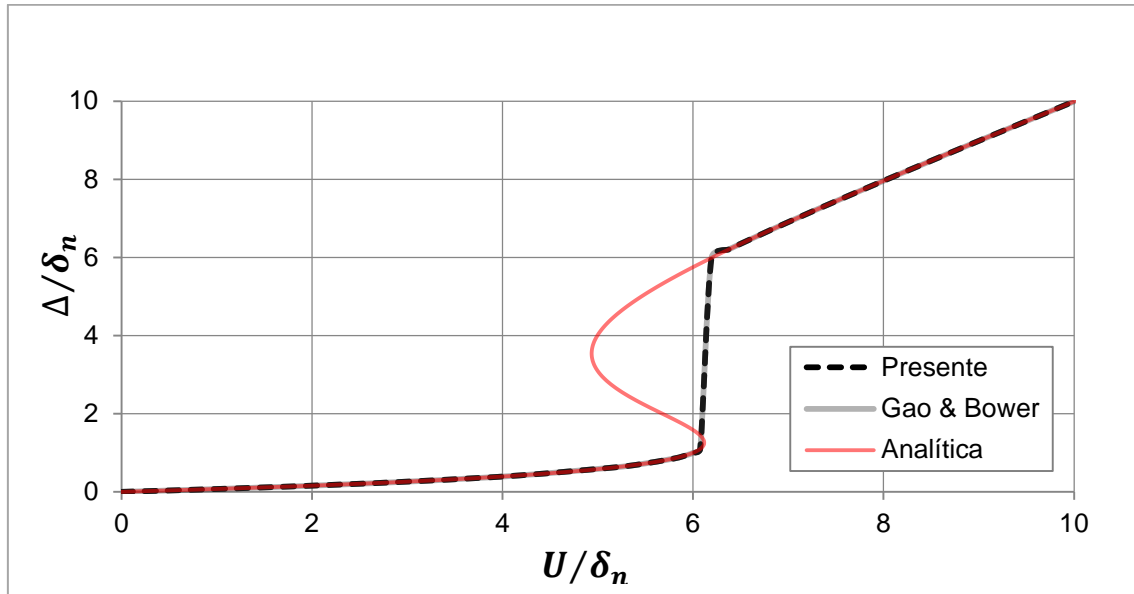


FIGURA 4. 4. RESULTADOS VALIDACIÓN I: SEPARACIÓN-DESPLAZAMIENTO

Dónde de nuevo se aprecia una excelente concordancia entre los resultados de este trabajo y los obtenidos por Gao y Bower [43] con la misma ley cohesiva [41]. Ambos resultados numéricos se aproximan muy bien al resultado analítico aunque existen ligeras discrepancias como consecuencia de los problemas de convergencia y el tamaño de incremento utilizado como consecuencia de los mismos.

## 4.2. Ejercicio Nº 2 de Validación

### 4.2.1. Modelo numérico

Las prestaciones de la subrutina UEL desarrollada se evalúan para un segundo modelo, con el objetivo de validar la implementación de la misma. Este segundo ejercicio consiste en un modelo básico de un solo elemento continuo que ha sido utilizado para evaluar las prestaciones del modelo cohesivo de Park-Paulino-Roesler (PPR) [44], lo que permitirá establecer una comparativa con resultados numéricos obtenidos para una ley cohesiva diferente. Tal y como se aprecia en la Figura 4.5, el elemento continuo está unido en su extremo inferior a un elemento cohesivo cuyo desplazamiento vertical está restringido, estando totalmente empotrado en su nodo inferior izquierdo. La carga se aplica como un desplazamiento impuesto en el extremo



superior del elemento continuo de manera que estamos de nuevo ante un caso de Modo I de carga en un estado de tensiones bidimensional. La disposición de los nodos se puede apreciar en la Figura 4.5 dónde los nodos 3 y 4 son comunes al elemento continuo y al elemento cohesivo y coinciden en su posición geométrica con los nodos 1 y 2 del elemento cohesivo (en este trabajo utilizaremos siempre elementos cohesivos de espesor geométrico nulo). El elemento continuo utilizado es un elemento cuadrilátero lineal de 4 nodos (tipo CPS4) que tiene un comportamiento elástico lineal caracterizado por un módulo de Young de 32000000 MPa y un coeficiente de Poisson de 0.2 tal y como se aprecia en la Figura 4.5, donde también se especifican las dimensiones del modelo en mm.

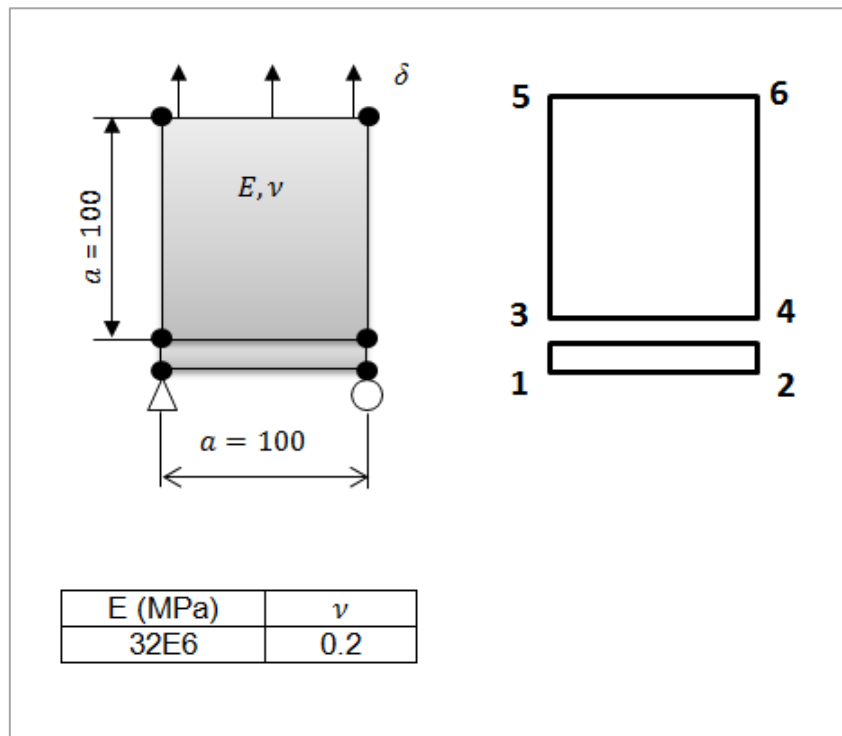


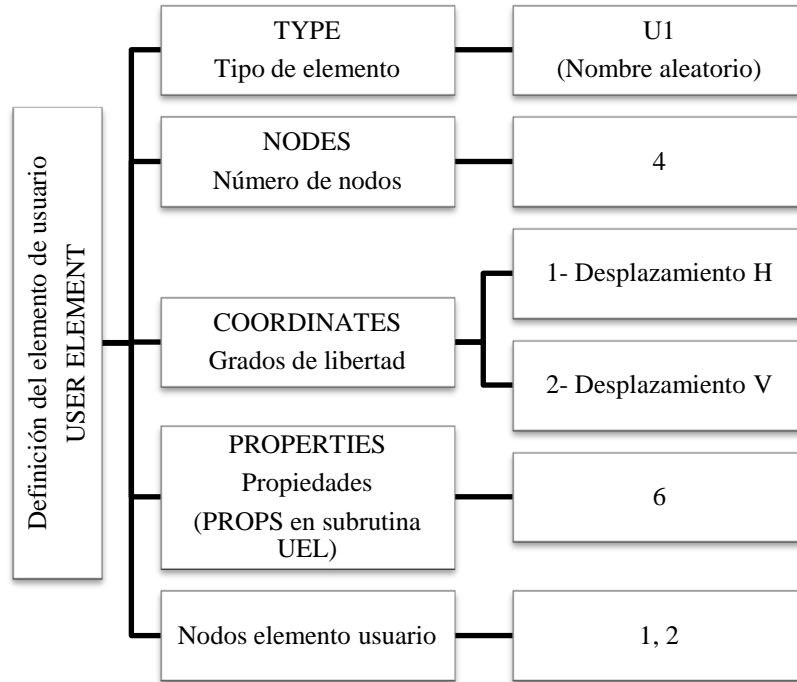
FIGURA 4. 5. GEOMETRÍA TEST VALIDACIÓN II, MODO I

Al igual que sucedía en el caso del primer modelo de validación, es necesario definir en el archivo input de ABAQUS las características del elemento de usuario que se está definiendo en la subrutina. Las líneas de comando necesarias para caracterizar el elemento de usuario utilizado en el presente trabajo se indican a continuación:



\*USER ELEMENT, TYPE=U1, NODES=4, COORDINATES=2, PROPERTIES=6

1, 2



CUADRO 4. 4. DEFINICIÓN DEL ELEMENTO DE USUARIO EN EL INPUT CORRESPONDIENTE A LA PRESENTE UEL. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 2.

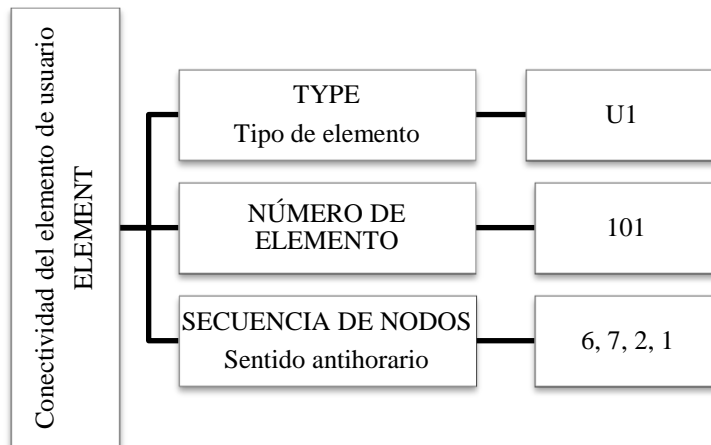
Al igual que en el ejercicio de validación anterior, en primer lugar se definen en el input el identificador de los elementos que tengan dicho comportamiento (en este caso hay un único elemento), el número de nodos, el número de grados de libertad y el número de propiedades que se van a definir en el input para ser consideradas bajo la variable PROPS en la subrutina y que en la subrutina del presente trabajo caracterizan el comportamiento cohesivo y el espesor del elemento. Asimismo, en la siguiente línea se especifican los grados de libertad del elemento.

A continuación se define la conectividad del elemento: se señalando su tipo, se aglutina en un Set para facilitar su identificación y se especifica la numeración del elemento (101 por ejemplo en este caso) y los nodos siguiendo la notación habitual de ABAQUS.



\*ELEMENT, TYPE=U1, ELSET=CZ

101, 6, 7, 2, 1

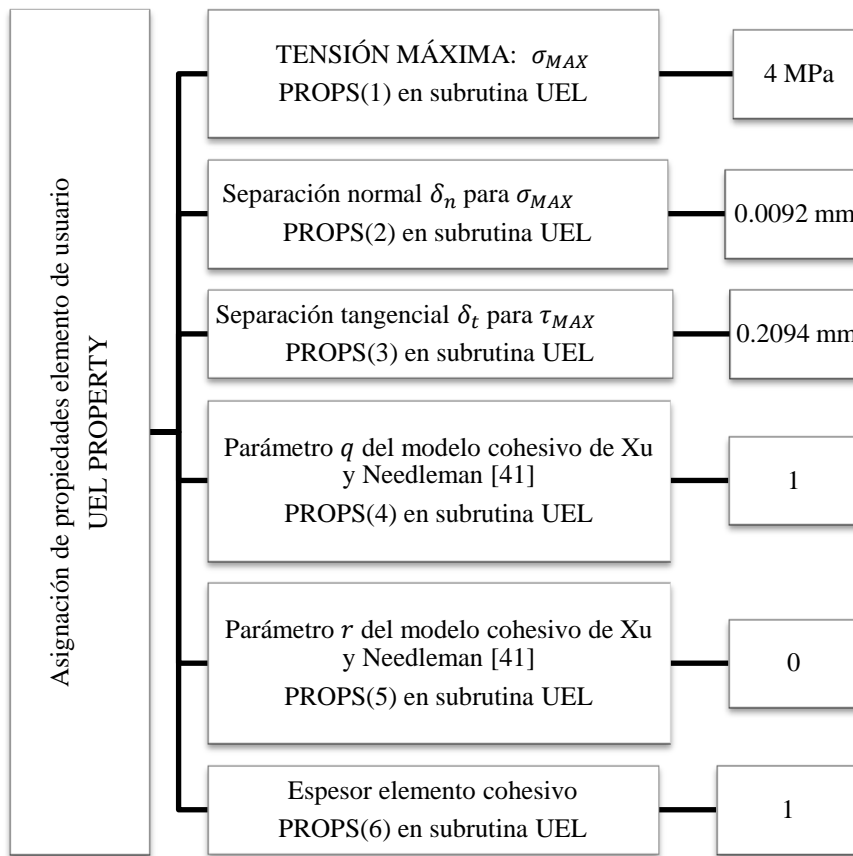


CUADRO 4. 5. CONECTIVIDAD DEL ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 2.

Finalmente se definen las propiedades del elemento que se utilizarán en la subrutina UEL como PROPS. En la subrutina del presente trabajo son 6 y se corresponden con el espesor del elemento cohesivo, PROPS (6), y los diferentes parámetros que caracterizan el comportamiento cohesivo del CZM de Xu y Needleman [41]: la tensión de tracción cohesiva normal máxima  $\sigma_{MAX}$ , PROPS (1), la separación normal para la tensión de tracción cohesiva normal máxima  $\delta_n$ , PROPS (2), la separación tangencial para la tensión de tracción cohesiva tangencial máxima  $\delta_t$ , PROPS (3) y los parámetros constitutivo  $q$ , PROPS (4), y  $r$ , PROPS (5), de la ley cohesiva de Xu y Needleman [41].

\*UEL PROPERTY, ELSET=CZ

4, 0.02, 0.01, 1, 0, 1



CUADRO 4. 6. ASIGNACIÓN PROPIEDADES ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBRUTINA. EJERCICIO DE VALIDACIÓN 2.

Los parámetros constitutivos  $q$  y  $r$  de la ley cohesiva de Xu y Needleman [41] adoptan un valor igual a 1 y 0 respectivamente, de acuerdo con el proceder habitual en la literatura [42]. El resto de valores que caracterizan la ley cohesiva, y que se pueden observar en el Cuadro 4.6, han sido asignados en coherencia con el comportamiento cohesivo definido en [44] por Park y Paulino, con el objetivo de poder establecer una comparativa con los resultados numéricos obtenidos en su trabajo a pesar de los diferentes CZM utilizados. Más información al respecto de la relación entre los parámetros que caracterizan el modelo PPR y el modelo cohesivo de Xu y Needleman que ha sido implementado en el presente trabajo, se puede encontrar en el capítulo siguiente.





#### 4.2.2. Resultados

En este ejercicio de validación solo disponemos de la gráfica de tensión de tracción versus desplazamiento que, al tratarse de un modelo de un solo elemento, debería de reflejar de forma aproximada la forma de la ley cohesiva para el modo I de fractura. Tal y como se aprecia en la Figura 4.6, los resultados numéricos obtenidos muestran una tendencia muy similar a la reflejada por la curva exponencial para el esfuerzo normal de Xu y Needleman [41]. Asimismo, también se muestran los resultados obtenidos por Parks y Paulino [44], cuyo valor máximo de la tensión  $\sigma_{22}$  es coincidente con el obtenido en el presente trabajo. Existen diferencias en la curva como consecuencia de las diferentes leyes cohesivas utilizadas.

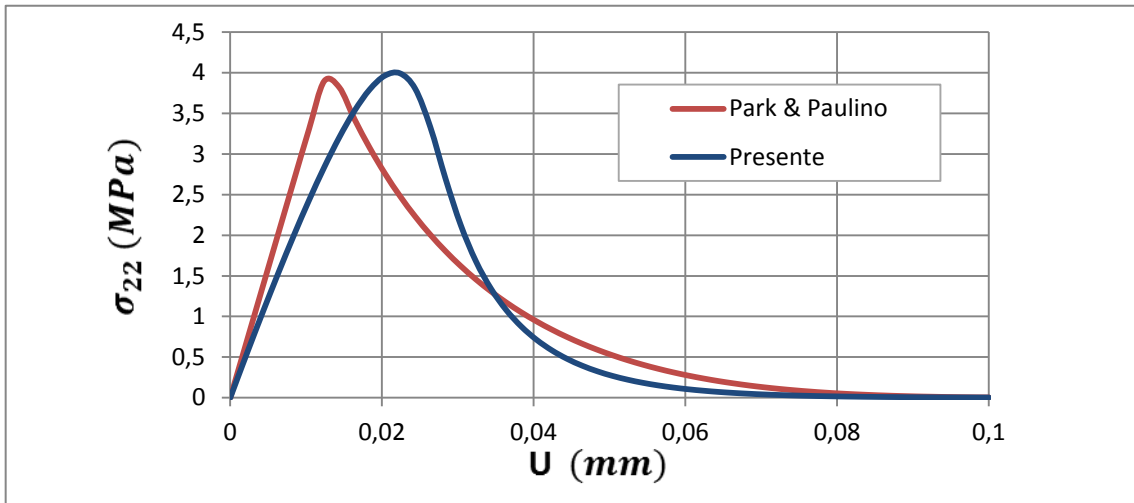


FIGURA 4. 6. RESULTADOS VALIDACIÓN II: TRACCIÓN-DESPLAZAMIENTO

Los buenos resultados alcanzados en los dos sencillos modelos de validación planteados sin que se haya apreciado ningún problema de compilación llevan a concluir que la implementación numérica del elemento cohesivo desarrollado en este trabajo se ha realizado satisfactoriamente y como consecuencia su uso puede ser extendido a problemas más complejos de interés práctico e ingenieril.



## 5. APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE DELAMINACIÓN

### 5.1. Modelo numérico

Una vez validado el elemento cohesivo desarrollado en la subrutina UEL por medio de sencillos modelos numéricos procedemos a extender su uso a aplicaciones prácticas más complejas con solución analítica y numérica conocida, lo que permitirá evaluar sus prestaciones y validar la implementación numérica en problemas más complejos. Para ello se reproduce el ensayo normalizado de flexión en modo mixto (MMB, por sus siglas en inglés) que se utiliza para evaluar el problema de la delaminación en materiales compuestos y que está recogido en la norma ASTM D6671 [45].

Este ensayo, cuya geometría y configuración se muestra en la Figura 5.1, analiza condiciones de modo mixto de carga y ha sido simulado numéricamente por Park y Paulino [44] utilizando el modelo cohesivo PPR. Además, es posible extraer una solución analítica del mismo a partir de las correspondientes aproximaciones de la teoría de vigas y la mecánica de la fractura elástico-lineal.

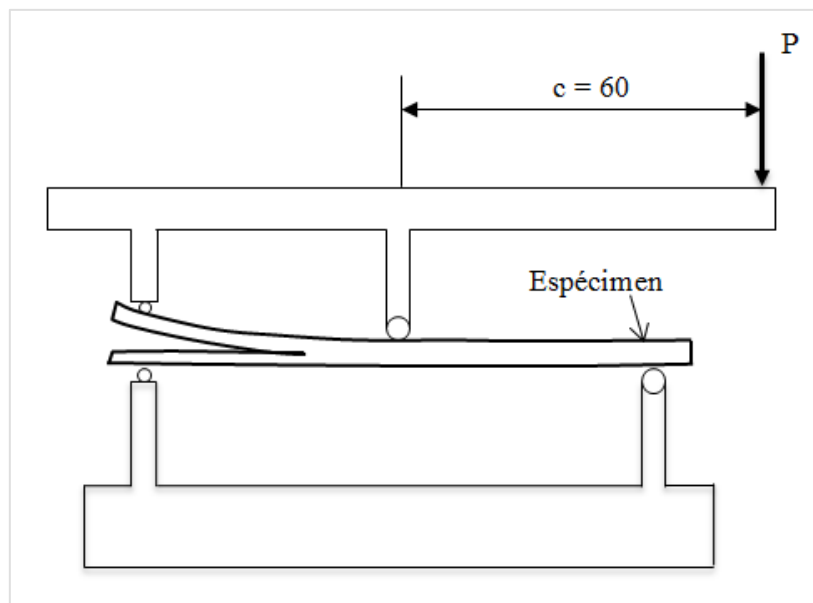


FIGURA 5. 1. GEOMETRÍA DE ENSAYO EN MODO MIXTO



Las dimensiones de la probeta simulada se muestran en la Figura 5.2 y se corresponden con las consideradas en [44], donde  $B$  representa el espesor de la probeta. Tal y como se puede apreciar en la figura, se introduce un injerto en la probeta de dimensión  $a_0$  que hace de grieta pre-existente. En el extremo pre-agrietado los desplazamientos vertical y horizontal están impedidos mientras que en el otro extremo solamente están restringidos los desplazamientos verticales. En el modelo numérico se aplican dos cargas puntuales en sentidos opuestos en la ubicación que se precisa en la Figura 5.2 para simular el estado de cargas al que se somete la probeta en el ensayo.

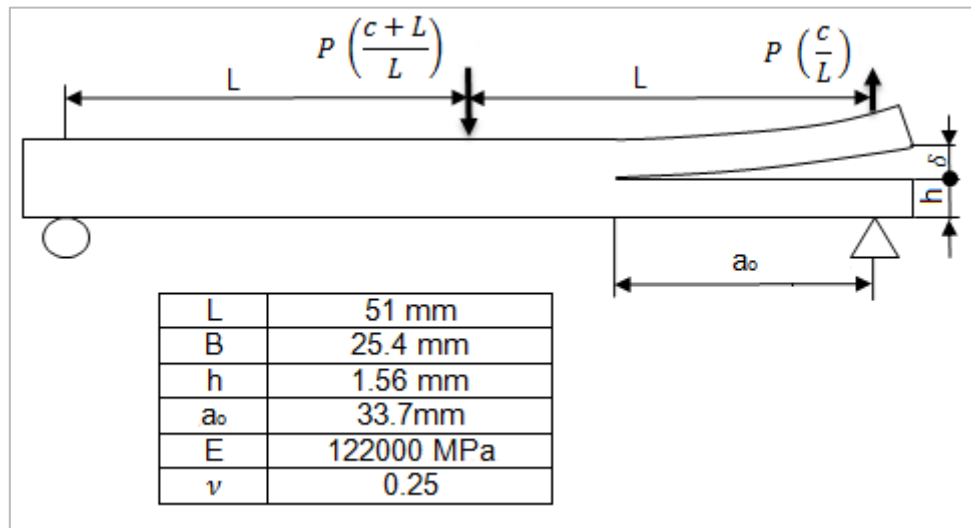


FIGURA 5. 2. GEOMETRÍA DEL ESPÉCIMEN EN MODO MIXTO MMB

La probeta se discretiza con una malla semi-uniforme de elementos bidimensionales cuadriláteros lineales y se introducen elementos cohesivos en la línea horizontal más allá de la punta de la grieta creando una interfaz cohesiva que simula el proceso de delaminación del composite a analizar. En la Figura 5.3 se muestran varias imágenes de la malla de elementos finitos utilizada mientras que en la Figura 5.4 se refleja la deformación y propagación de la grieta pre-existente durante el proceso de delaminación simulado en ABAQUS.

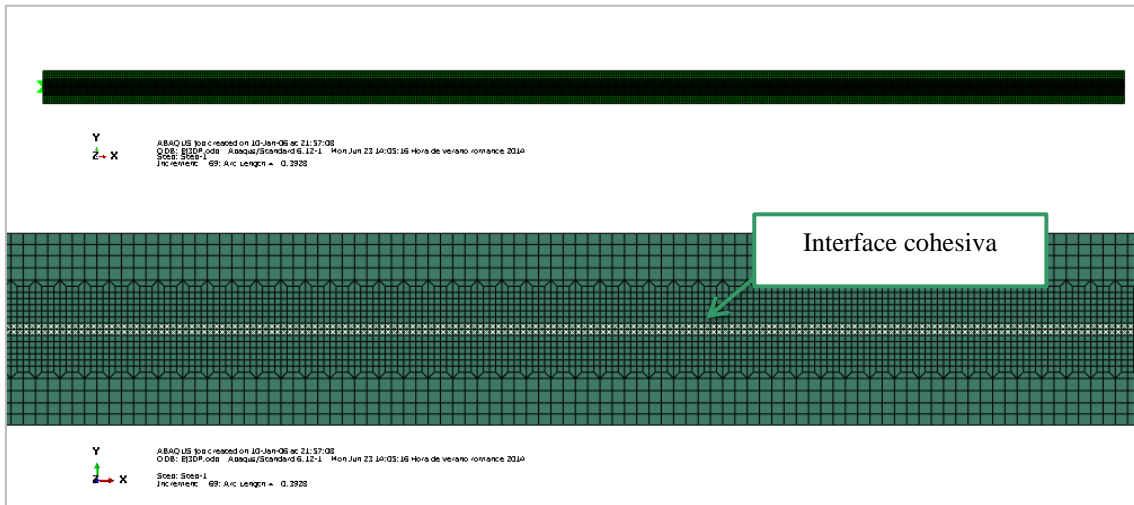


FIGURA 5. 3. MALLADO DEL MODELO ELEMENTOS FINITOS DEL ESPÉCIMEN EN MODO MIXTO

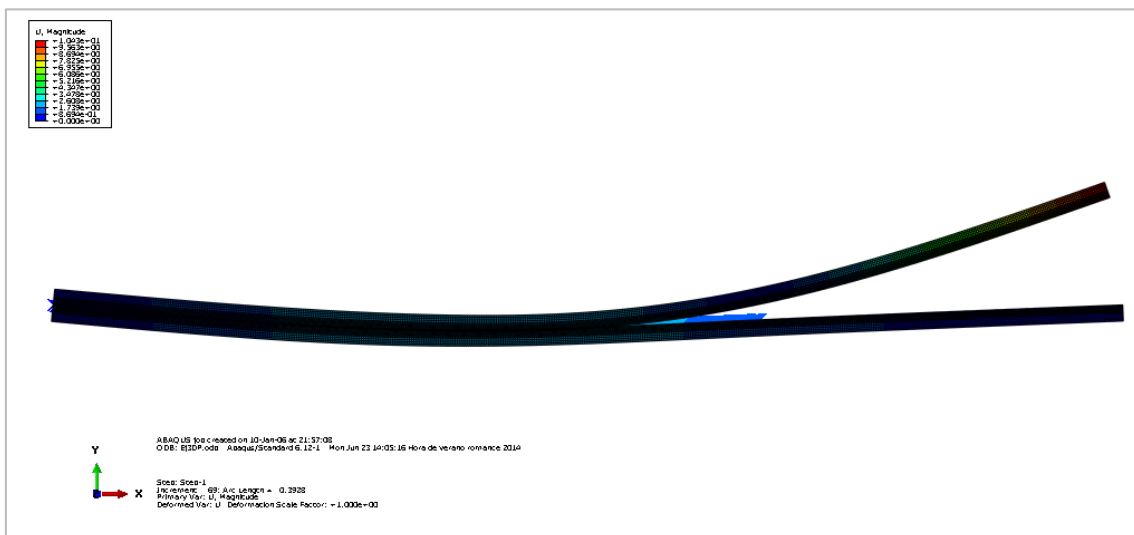


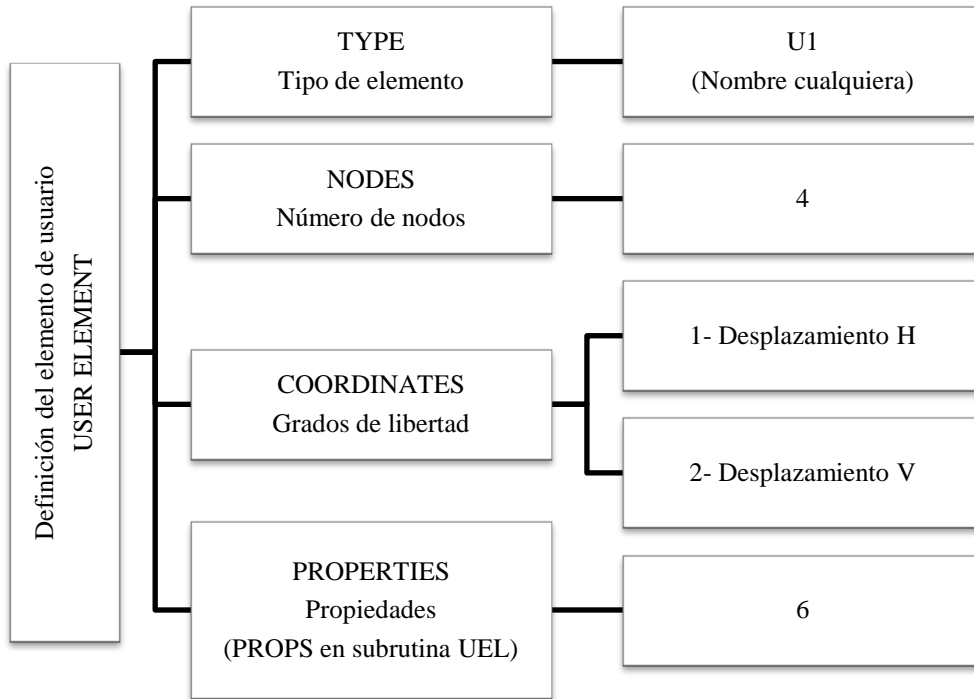
FIGURA 5. 4. SIMULACIÓN DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DEL ESPÉCIMEN EN MODO MIXTO

El comportamiento de los elementos cohesivos introducidos en la interfaz está caracterizado por el CZM implementado en la subrutina de usuario y las propiedades cohesivas que se introducen en el archivo input correspondiente. Al igual que en los modelos de validación, se presentan a continuación los comandos necesarios para definir el elemento de usuario para la subrutina desarrollada en el presente trabajo.



\*USER ELEMENT, TYPE=U1, NODES=4, COORDINATES=2, PROPERTIES=6

1,2



CUADRO 5. 1. DEFINICIÓN DEL ELEMENTO DE USUARIO EN EL INPUT CORRESPONDIENTE A LA PRESENTE UEL. EJERCICIO DE ANÁLISIS 3.

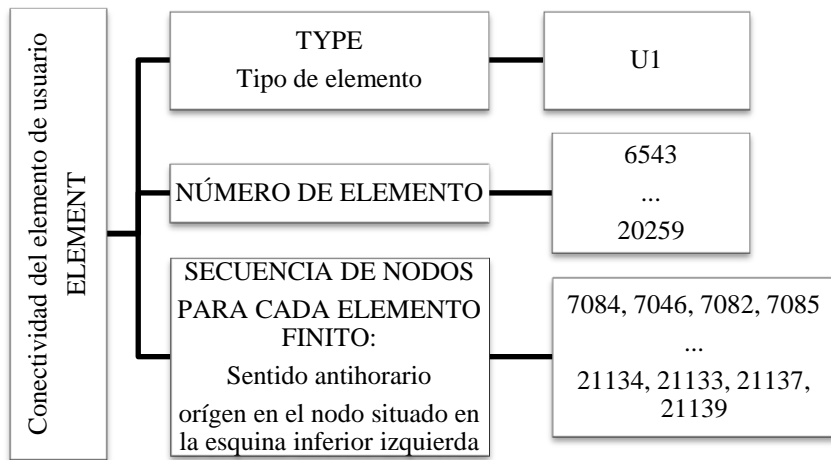
Los primeros comandos a introducir son idénticos a los definidos en los modelos de validación analizados en el capítulo anterior. Y es que el número de grados de libertad, de nodos por elemento y de propiedades cohesivas no varía. Sin embargo, el modelo es mucho más complejo y requiere de un gran número de elementos cohesivos con lo que la numeración de los elementos y la definición de su conectividad son mucho más tediosas, aunque ambas siguen el mismo criterio que los ejercicios anteriores. Se muestran a modo de ejemplo las líneas correspondientes al primer y al último elemento definido.

\*ELEMENT, TYPE=U1, ELSET=CZ

6543, 7084, 7046, 7082, 7085

....

20259, 21134, 21133, 21137, 21139

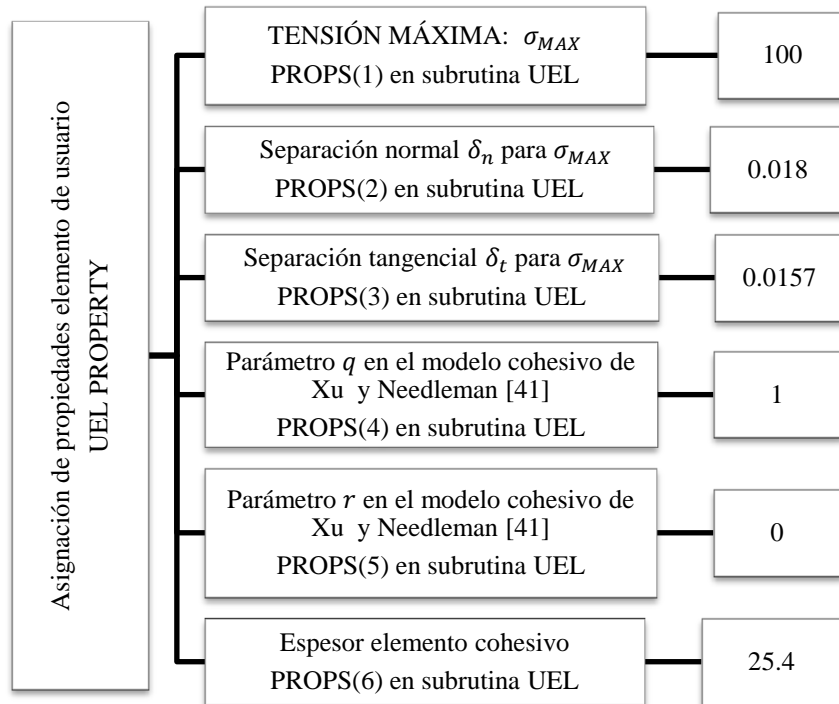


CUADRO 5. 2. CONECTIVIDAD DEL ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE ANÁLISIS 3.

Siguiendo el proceder habitual se definen por último el espesor del elemento cohesivo y los parámetros que caracterizan el comportamiento cohesivo. En este caso, al igual que en el ejercicio de validación nº2, se establecerá una comparativa entre los resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo con aquellos alcanzados por Park y Paulino [44] para el modelo de fisura cohesiva PPR. En consecuencia, los valores de los parámetros cohesivos que caracterizan la ley cohesiva de Xu y Needleman [41] considerada en este trabajo se establecen buscando la mayor correlación posible con los parámetros que caracterizan la ley cohesiva PPR utilizados en la referencia [44]. La correlación existente entre los parámetros de las diferentes leyes cohesivas se detalla en el apartado siguiente.

\*UEL PROPERTY, ELSET=CZ

100, 0.018, 0.0157, 1, 0, 25.4



CUADRO 5. 3. ASIGNACIÓN PROPIEDADES ELEMENTO DE USUARIO DEFINIDA EN EL INPUT PARA LA PRESENTE SUBROUTINA. EJERCICIO DE ANÁLISIS 3.

## 5.2. Obtención de los parámetros de la ley cohesiva

Como se va a establecer una comparativa con los resultados numéricos obtenidos por Park y Paulino [44] para el modelo de fisura cohesiva PPR es necesario establecer una correlación entre los valores de los parámetros de dicho modelo y CZM de Xu y Needleman [41] que ha sido adoptado en este trabajo. Así, los resultados numéricos mostrados en [44] para una probeta con las características señaladas en el apartado anterior han sido obtenidos para los parámetros cohesivos que se reflejan en el Cuadro 5.4. Tal y como se puede apreciar, en el mismo se incluye el valor asignado en [44] a cada variable y una pequeña descripción de las mismas. La terminología empleada es la misma que emplearon Park y Paulino en la referencia [44].



Energías cohesivas normal y tangencial	$\phi_n$	0.5 N/mm
	$\phi_t$	0.5 N/mm
Tensiones normal y tangencial máximas	$\sigma_{MAX}$	100 MPa
	$\tau_{MAX}$	100 MPa
Parámetros de forma en el PPR	$\alpha$	3
	$\beta$	3
Indicadores de pendiente inicial en el PPR	$\lambda_n$	0.02
	$\lambda_t$	0.02

CUADRO 5. 4. PARÁMETROS DE REFERENCIA SUBROUTINA PARK&PAULINO. EJ-3.

Como se ha ido viendo a lo largo de toda la memoria, la ley cohesiva de Xu y Needleman [41] se caracteriza por completo con 5 variables: la tensión de tracción cohesiva normal máxima  $\sigma_{MAX}$ , la separación normal para la tensión de tracción cohesiva normal máxima  $\delta_n$ , la separación tangencial para la tensión de tracción cohesiva tangencial máxima  $\delta_t$  y los parámetros constitutivos  $q$  y  $r$  que representan el ratio de acoplamiento entre la energía de separación normal y tangencial. En consecuencia, la obtención de  $\sigma_{MAX}$  es inmediata, ya que el parámetro es idéntico al establecido en la ley PPR, con lo que adopta un valor de 100 MPa. Sin embargo, será necesario comprender el significado del resto de parámetros, relacionarlos y operar para extraer los valores correspondientes.

#### **Parámetro constitutivo $q$**

El parámetro  $q$  es un parámetro constitutivo que se define como la relación entre la energía cohesiva tangencial y normal. Así, de acuerdo con la expresión proporcionada por Xu y Needleman en [46] y teniendo en consideración la terminología empleada en [44] este se puede calcular tal que:





$$q = \frac{\phi_t}{\phi_n} = \frac{0.5}{0.5} = 1 \quad (5.1)$$

### Parámetro constitutivo $r$ :

El parámetro  $r$ , según [46], es un parámetro constitutivo que viene definido como la relación entre la separación normal  $\Delta_n^*$  para una separación tangencial de  $\Delta_t = \frac{1}{2} \delta_t$  bajo condición de tensión normal nula ( $T_n = 0$ ); y la separación normal cuando la tensión es máxima  $\delta_n$ :

$$r = \frac{\Delta_n^*}{\delta_n} \quad (5.2)$$

Habida cuenta de que no tenemos suficientes datos para obtener su valor, que los que usan el modelo Xu y Needleman consideran  $r = 0$  [42] y que es el valor recomendado por los propios autores [41], en un principio se asume para el parámetro constitutivo  $r$  un valor nulo.

### Parámetros $\delta_n$ y $\delta_t$ :

Los parámetros  $\delta_n$  y  $\delta_t$  se corresponden con las separaciones normal y tangencial cuando la tensión es máxima (en [44] estos parámetros se denominan respectivamente  $\delta_{nc}$  y  $\delta_{tc}$ ). De acuerdo con las expresiones proporcionadas en [46] y siguiendo la terminología de [44] podemos extraer los valores correspondientes para  $\delta_n$  y  $\delta_t$  según las siguientes expresiones:

$$\delta_n = \frac{\phi_n}{\sigma_{max} \cdot e^1} = \frac{0.5}{100 \cdot e^1} = 0.0018 \text{ mm} \quad (5.3)$$

$$\delta_t = \frac{\phi_t \cdot \pi}{\tau_{max}} = \frac{0.5 \cdot \pi}{100} = 0.0157 \text{ mm} \quad (5.4)$$



Nótese que la separación para la tensión tangencial máxima toma en realidad el valor  $\Delta_t = \frac{\delta_t}{\sqrt{2}}$ , como puede observarse en la Fig.1 de [43].

## 5.3. Resultados

### 5.2.1. Solución analítica

La solución analítica consta de 3 zonas diferenciadas [43, 47]. La primera de ellas (“Analítica 1”) se extrae por aplicación de la teoría de vigas mientras que las otras dos (“Analítica 2” y “Analítica 3”) se obtienen a partir de la mecánica de la fractura elástico-lineal.

#### Analítica 1:

La solución analítica del tramo lineal inicial se obtiene a partir de la relación entre la carga y la separación de una viga en voladizo según la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, con lo que quedaría:

$$\Delta = \frac{2}{3} \left( \frac{3c - L}{4L} \right) \frac{P a_0^3}{EI} \quad (5.5)$$

Donde  $P$  es la carga aplicada,  $I$  el momento de inercia correspondiente a la sección transversal de la viga,  $E$  el módulo de Young y  $a_0$  la longitud de grieta inicial.

Expresando la expresión anterior en función de la carga  $P$  y la separación  $\Delta$  quedaría:

$$P = \frac{3\Delta}{2} \left( \frac{4L}{3c - L} \right) \frac{E b h^3}{12 a_0^3} \quad (5.6)$$

Sustituyendo valores de acuerdo con la geometría de la probeta a analizar en este caso se obtiene:



$$P = \frac{3 \Delta}{2} \left( \frac{4 \cdot 51}{3 \cdot 60 - 51} \right) \frac{122000 \cdot 25.4 \cdot 1.56^3}{12 \cdot 33.7^3} = 60.7614 \cdot \Delta \quad (5.7)$$

Nótese que esta solución analítica tiene solo validez hasta el inicio de propagación de fisura.

### Analítica 2:

La solución analítica en el segundo tramo se obtiene a partir del concepto de energía de fractura en el marco de la mecánica de la fractura elástica lineal [47]. En estas condiciones la carga aplicada  $P$  versus separación  $\Delta$  se calcularía a partir de la Ecuación 5.8:

$$\Delta = \frac{2 P_I}{3 EI} \left( \frac{8 BEI}{\frac{8 P_I^2}{\phi_n} + 3 P_{II}^2 / (8 \phi_t)} \right)^{3/2} \quad (5.8)$$

Dónde:

$$P_I = \frac{(3c - L)P}{4L} \quad (5.9)$$

$$P_{II} = \frac{(c + L)P}{L} \quad (5.10)$$

Sustituyendo valores de acuerdo con la geometría de la probeta representada en las Figuras 5.1 y 5.2 se obtiene la Ecuación 5.12:

$$\Delta = \frac{2(3c - L)P}{3 EI \cdot 4L} \left( \frac{8 BEI}{\frac{8 (3c - L)^2 P^2}{\phi_n (4L)^2} + 3 \frac{(c + L)^2 P^2}{L^2 (8 \phi_t)}} \right)^{3/2} \quad (5.11)$$



$$\Delta = 4.3002 \cdot 10^{-7} - 7 \cdot P \cdot \left( \frac{1.9921 \cdot 10^8}{9.9507 \cdot P^2} \right)^{3/2} \quad (5.12)$$

Si se expresa carga aplicada  $P$  versus separación  $\Delta$  la expresión anterior quedaría:

$$P = \frac{38519}{\Delta} \quad (5.13)$$

Nótese que la expresión analítica deducida solo es aplicable cuando el tamaño de la grieta  $a$  es menor que la mitad de la longitud de la viga  $L$ , o sea cuando  $a < L$ . En el caso de que  $a$  sea mayor que  $L$  se aplicaría la solución "Analítica 3".

### Analítica 3:

La solución analítica en el tercer tramo se obtiene para  $a > L$ . En este caso, la expresión para la carga aplicada  $P$  versus separación  $\Delta$  es la siguiente [47]:

$$\Delta = \frac{2}{3} \left( \frac{3c - L}{4L} \right) \frac{P a^3}{EI} \quad (5.14)$$

$$\Delta = \frac{2}{3} \left( \frac{3c - L}{4L} \right) \frac{12 P a^3}{E b h^3} \quad (5.15)$$

Sustituyendo valores de acuerdo con la geometría de la probeta analizada en este trabajo quedaría:

$$\Delta = \frac{2}{3} \left( \frac{3 \cdot 60 - 51}{4 \cdot 51} \right) \frac{12 P a^3}{122000 \cdot 25.4 \cdot 1.56^3} = 4.3002 \cdot 10^{-7} \cdot P a^3 \quad (5.16)$$

El tamaño de la grieta  $a$  puede obtenerse a partir de la Ecuación 5.17 [47]:



$$\left(\frac{8 P_I^2}{\phi_n} + \frac{3 P_{II}^2}{8\phi_t} - \frac{8 P_I P_{II}}{\phi_t}\right) a^2 - \left(\frac{3 P_{II}^2 L}{2\phi_t} - \frac{8 P_I P_{II} L}{\phi_t}\right) a + \frac{3 P_{II}^2 L^2}{2\phi_t} - 8 BEI = 0 \quad (5.17)$$

Teniendo en cuenta que:

$$P_I = \frac{(3c - L)P}{4L} = 0.6324 \cdot P, \quad P_{II} = \frac{(c + L)P}{L} = 2.1765 \cdot P \quad (5.18)$$

Se obtendría la Ecuación 5.19 de segundo grado:

$$(-12.0709P^2) a^2 + (398.4157 P^2) a + 36964 P^2 - 1.9921 \cdot 10^8 = 0 \quad (5.19)$$

En la Figura 5.5 se representan los resultados analíticos obtenidos para la curva carga aplicada  $P$  versus separación  $\Delta$  para cada uno de los tramos analizados:

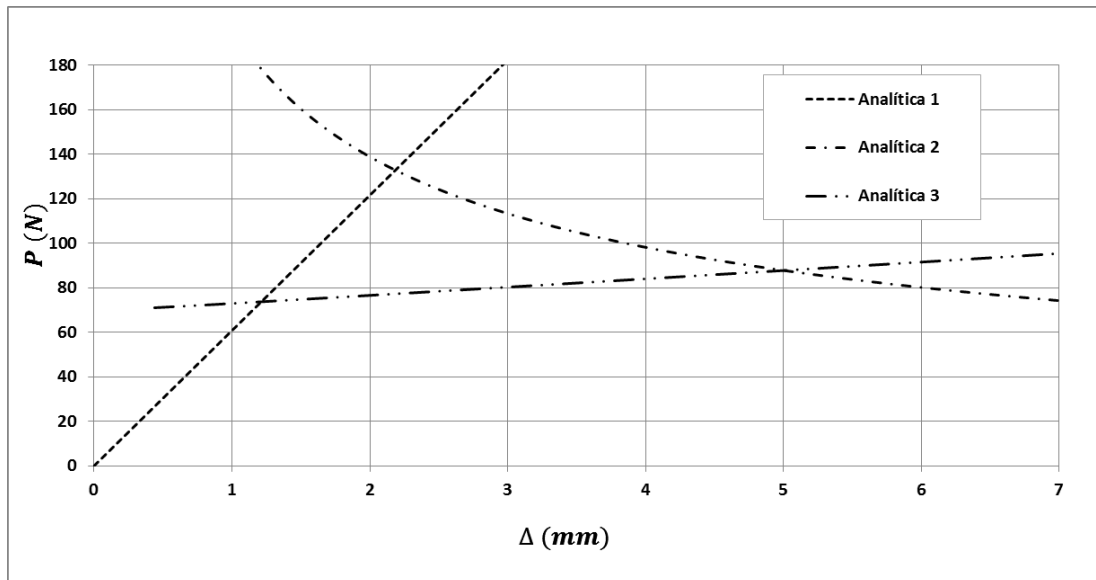


FIGURA 5. 5. RESULTADOS ANALÍTICOS VALIDACIÓN III



### 5.1.2. Comparativa de resultados

En la Figura 5.6 se muestran los resultados numéricos obtenidos para el presente trabajo así como los resultados extraídos por Park y Paulino para el modelo de fisura cohesiva PPR.

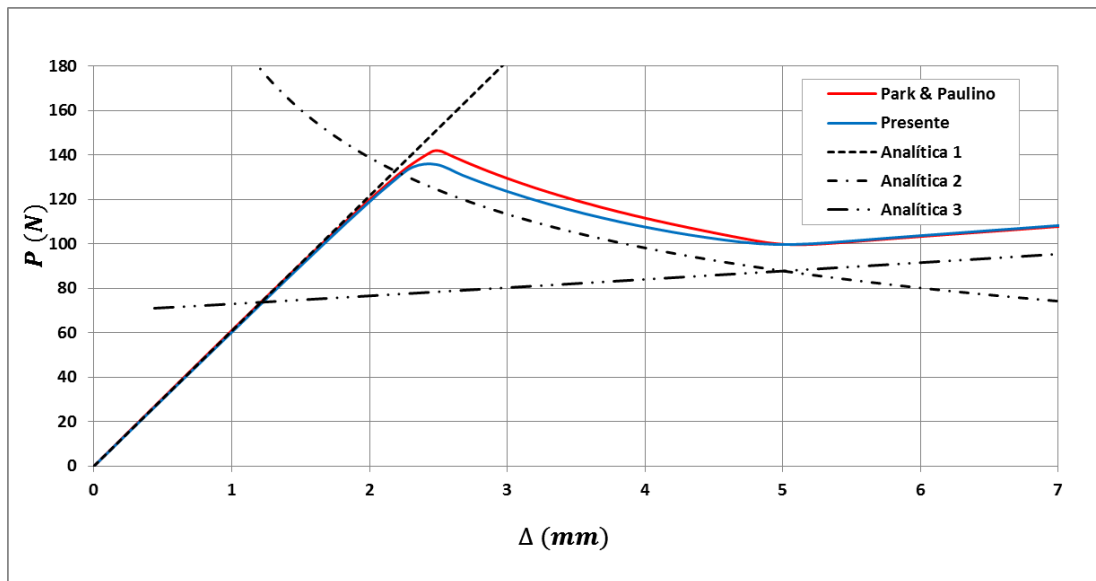
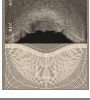


FIGURA 5. 6. COMPARATIVA DE RESULTADOS VALIDACIÓN III

Tal y como se puede apreciar en la Figura 5.6, los resultados numéricos del presente trabajo aproximan muy bien la solución analítica, mejorando incluso el ajuste obtenido por Park y Paulino [44]. Los presentes resultados numéricos permiten validar la correcta implementación de la subrutina para problemas complejos y reflejar sus buenas prestaciones en la simulación de casos de interés práctico para la industria.





## 6. PROBLEMAS DE CONVERGENCIA

Durante la resolución de los diferentes modelos numéricos del presente trabajo se han apreciado con relativa frecuencia problemas de convergencia. Estos problemas de convergencia son comunes al uso de elementos cohesivos [47] y radican en el hecho de que, en los modelos de elementos finitos no-lineales, las ecuaciones de equilibrio se resuelven mediante el algoritmo iterativo de Newton-Raphson, de manera que cuando el proceso de ablandamiento de la interfaz cohesiva presenta una fuerte pendiente, el elemento cohesivo deja de transmitir tensión de forma casi inmediata impidiendo alcanzar la estabilidad y finalizando el cálculo de forma prematura.

Un método ampliamente utilizado para mejorar la convergencia es la técnica de regularización viscosa [43], que consiste en introducir un término ficticio adicional viscoso en las ecuaciones de la ley cohesiva que caracteriza la interfaz.

Así, las tensiones de tracción normal  $(T_n)_v$  y tangencial  $(T_{t\alpha})_v$  considerando el término viscoso quedarían:

$$(T_n)_v = \frac{\phi_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \frac{\Delta_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) + \frac{1-q}{r-1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \right] \left[ r - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \right\} + \zeta_n \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) \quad (6.1)$$

$$(T_{t\alpha})_v = 2 \left( \frac{\phi_n \Delta_{t\alpha}}{\delta_t^2} \right) \left[ q + \left( \frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_{t\alpha}^2}{\delta_t^2}\right) + \zeta_t \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta_{t\alpha}}{\delta_t} \right) \quad (6.2)$$

Dónde  $\zeta_n$  y  $\zeta_t$  son parámetros de viscosidad que gobiernan la disipación de energía viscosa bajo tensión normal y tangencial respectivamente. Téngase en cuenta que dicha energía carece de sentido físico y es introducida únicamente con el objetivo de regularizar las inestabilidades.

La nueva matriz de rigidez  $\partial(\mathbf{T}_c)_v/\partial\Delta$  teniendo en cuenta el coeficiente viscoso quedaría definida por la Ecuación 6.3:





$$\left[ \frac{\partial(\mathbf{T}_c)_v}{\partial \Delta} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial(T_t)_v}{\partial \Delta_{t\alpha}} & \frac{\partial(T_t)_v}{\partial \Delta_n} \\ \frac{\partial(T_n)_v}{\partial \Delta_{t\alpha}} & \frac{\partial(T_n)_v}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Los términos de la matriz se calcularían como sigue a continuación:

$$\frac{\partial(T_n)_v}{\partial \Delta_n} = \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n} + \left( \frac{\zeta_n}{\delta_n \cdot \Delta t} \right) \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial(T_n)_v}{\partial \Delta_{t\alpha}} = \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_{t\alpha}} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial(T_{t\alpha})_v}{\partial \Delta_n} = \frac{\partial T_{t\alpha}}{\partial \Delta_n} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial(T_{t\alpha})_v}{\partial \Delta_{t\alpha}} = \frac{\partial T_{t\alpha}}{\partial \Delta_{t\alpha}} + \left( \frac{\zeta_t}{\delta_t \cdot \Delta t} \right) \quad (6.7)$$

Dónde  $\left( \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n}, \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_{t\alpha}}, \frac{\partial T_{t\alpha}}{\partial \Delta_n}, \frac{\partial T_{t\alpha}}{\partial \Delta_{t\alpha}} \right)$  son los términos originales de la matriz de rigidez (ver capítulo 3) sin incluir el comportamiento viscoso.

Para implementar estas ecuaciones se recurre a resolver las derivadas mediante derivación numérica tal y como se realiza en [48]. Con lo que las derivadas de la separación normal y tangencial con respecto al tiempo se calcularían tal que:

$$\frac{d(\Delta_n)}{dt} = \dot{\Delta}_n \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\Delta_n|_{t+\Delta t} - \Delta_n|_t}{\Delta t} \quad (6.8)$$

$$\frac{d(\Delta_{t\alpha})}{dt} = \dot{\Delta}_{t\alpha} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\Delta_{t\alpha}|_{t+\Delta t} - \Delta_{t\alpha}|_t}{\Delta t} \quad (6.9)$$

Téngase en cuenta que el incremento de la separación se calcula como la diferencia entre la separación en el incremento actual y la obtenida en el incremento



anterior. Para ello, es necesario definir 4 variables de estado “SVARS” con el fin de que el estado anterior correspondiente a la separación normal y tangencial para cada punto de integración sea almacenado. El incremento de tiempo es conocido y se refiere a la variable “DTIME” que ABAQUS facilita a la subrutina.

Nótese que además de modificar la subrutina, es necesario extender uno de los comandos a introducir en el archivo .inp de ABAQUS:

```
*USER ELEMENT, TYPE=U1, NODES=4, COORDINATES=2, PROPERTIES=5, VARIABLES=4
```

Para evaluar las prestaciones de los parámetros de viscosidad sobre los resultados numéricos se analiza el ejercicio de validación 1 (capítulo 4) para diferentes valores del coeficiente de viscosidad. Los resultados obtenidos se comparan con los extraídos por Gao y Bower [43] y con la solución analítica correspondiente a cada caso, tal y como se refleja en el mismo trabajo. Así, considerando que la influencia de un valor determinado del coeficiente de viscosidad  $\zeta$  sobre los resultados y sobre el ratio de convergencia es relativa al valor de los parámetros que caracterizan la ley cohesiva, Gao y Bower [43] analizaron numéricamente el ejercicio 1 de validación bajo las mismas condiciones de contorno pero introduciendo esta vez un coeficiente de estabilización cohesiva. Éste se mantiene constante en todos los cálculos realizados y su influencia sobre los resultados numéricos se evalúa modificando los valores de la ley cohesiva.

En primer lugar es necesario ser consciente de que para la configuración evaluada, tal y como se determina en [43], solo se encuentran problemas de inestabilidad para valores de  $\Lambda$  inferiores a  $e^{(-1)}$ , siendo  $\Lambda$  la variable que representa la relación entre la rigidez del sólido y la rigidez de la interfaz cohesiva, tal y como se ha definido en el capítulo 4. Y es que tal y como se puede extraer a partir de la solución analítica, para valores de  $\Lambda$  mayores de  $e^{(-1)}$ , la tensión y la separación constituyen una función de valor único del desplazamiento, evitando así inestabilidades e implicando una separación fluida en la interfaz. En consecuencia se asume en todo momento un valor constante de  $\Lambda = 0.2$  con el objetivo de evaluar las prestaciones del coeficiente viscoso en condiciones de inestabilidad.



Como estamos analizando un modelo cargado en modo I el comportamiento cohesivo viene caracterizado por las variables  $\delta_n$  y  $\sigma_{MAX}$ , con lo que, siguiendo el proceder de Gao y Bower [43], la influencia relativa del coeficiente de estabilidad viscoso se evalúa a partir de la simulación de cuatro modelos con diferente valor de la viscosidad adimensionalizada, tal y como se muestra en la Tabla 6.1.

	Coefficiente viscoso adimensionalizado
Caso 1	$\zeta_n \cdot \frac{V_0}{(\sigma_{max} \delta_n)} = 0$
Caso 2	$\zeta_n \cdot \frac{V_0}{(\sigma_{max} \delta_n)} = 0.001$
Caso 3	$\zeta_n \cdot \frac{V_0}{(\sigma_{max} \delta_n)} = 0.01$
Caso 4	$\zeta_n \cdot \frac{V_0}{(\sigma_{max} \delta_n)} = 0.1$

TABLA 6. 1. VALORES COEFICIENTE VISCOSO ADIMENSIONALIZADOS

Tal y como se ha mencionado previamente y en concordancia con [43] se asume un valor constante del coeficiente de estabilidad viscoso tal que:

$$\zeta_n = 0.0001 \cdot \sigma_{max} \quad (6.10)$$

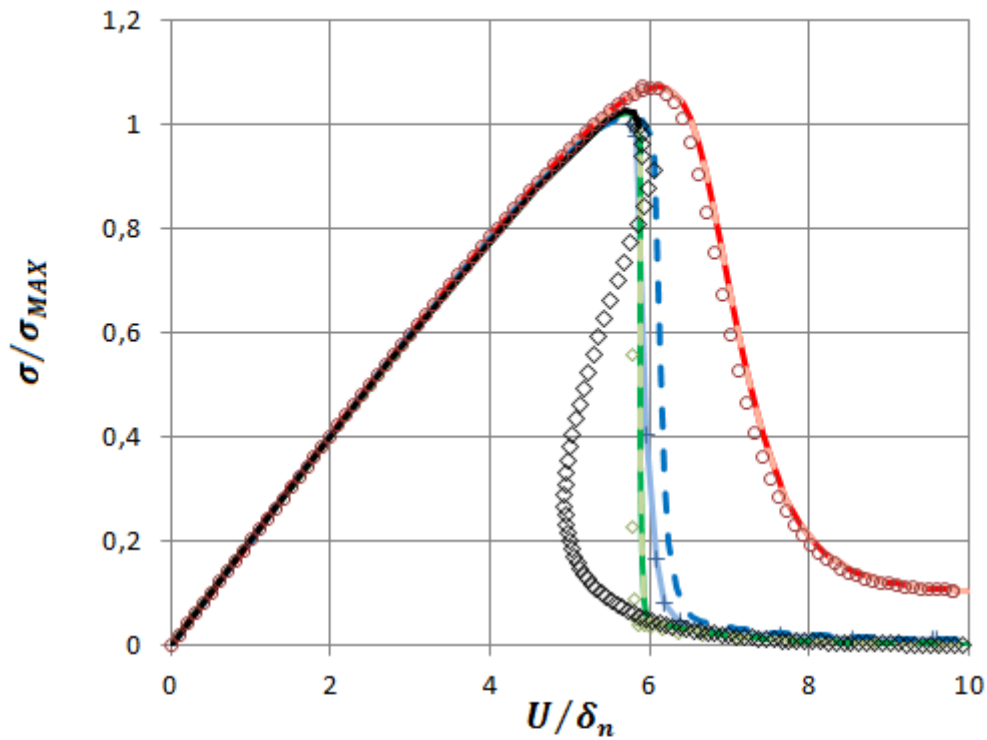
De manera que a sabiendas de que  $\Lambda$  es igual a 0.2 y siendo su relación con los parámetros cohesivos la siguiente:

$$\Lambda = \frac{E \delta_n}{2 \cdot a \cdot \sigma_{MAX}} \rightarrow 0.2 = \frac{3640 \cdot \delta_n}{2 \cdot 1 \cdot \sigma_{MAX}} \quad (6.11)$$

Es posible extraer los valores correspondientes de  $\delta_n$  y  $\sigma_{max}$  para cada caso de la Tabla 6.1. Lo que nos permitirá extraer las correspondientes soluciones analíticas y numéricas para la configuración y condiciones de contorno descritas en el



capítulo 4. Así, en la Figura 6.1 se representa la variación de la tensión normalizada  $\sigma/\sigma_{MAX}$  frente al desplazamiento normalizado  $U/\delta_n$  para cada uno de los casos recogidos en la Tabla 6.1. Como se puede apreciar, además de los resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo se representan también las soluciones analíticas y los resultados numéricos de Gao y Bower [43] tal y como se refleja en la Figura 4 (a) de dicho trabajo.



	Analítica	Presente	Gao & Bower
$\zeta_n V_0 / (\sigma_{MAX} \delta) = 0$	◇	—	—
$\zeta_n V_0 / (\sigma_{MAX} \delta) = 0.001$	◇	—	—
$\zeta_n V_0 / (\sigma_{MAX} \delta) = 0.01$	+	—	—
$\zeta_n V_0 / (\sigma_{MAX} \delta) = 0.1$	○	—	—

FIGURA 6. 1. REGULARIZACIÓN VISCOsa:  $\sigma/\sigma_{max}$  VERSUS  $U/\delta_n$



Asimismo, los resultados numéricos del presente trabajo obtenidos para la separación normalizada en función del desplazamiento normalizado en los cuatro casos mencionados se reflejan en la Figura 6.2 acompañados de la solución numérica obtenida por Gao y Bower y las correspondientes soluciones analíticas, de acuerdo con la Figura 4 (b) de la referencia [43].

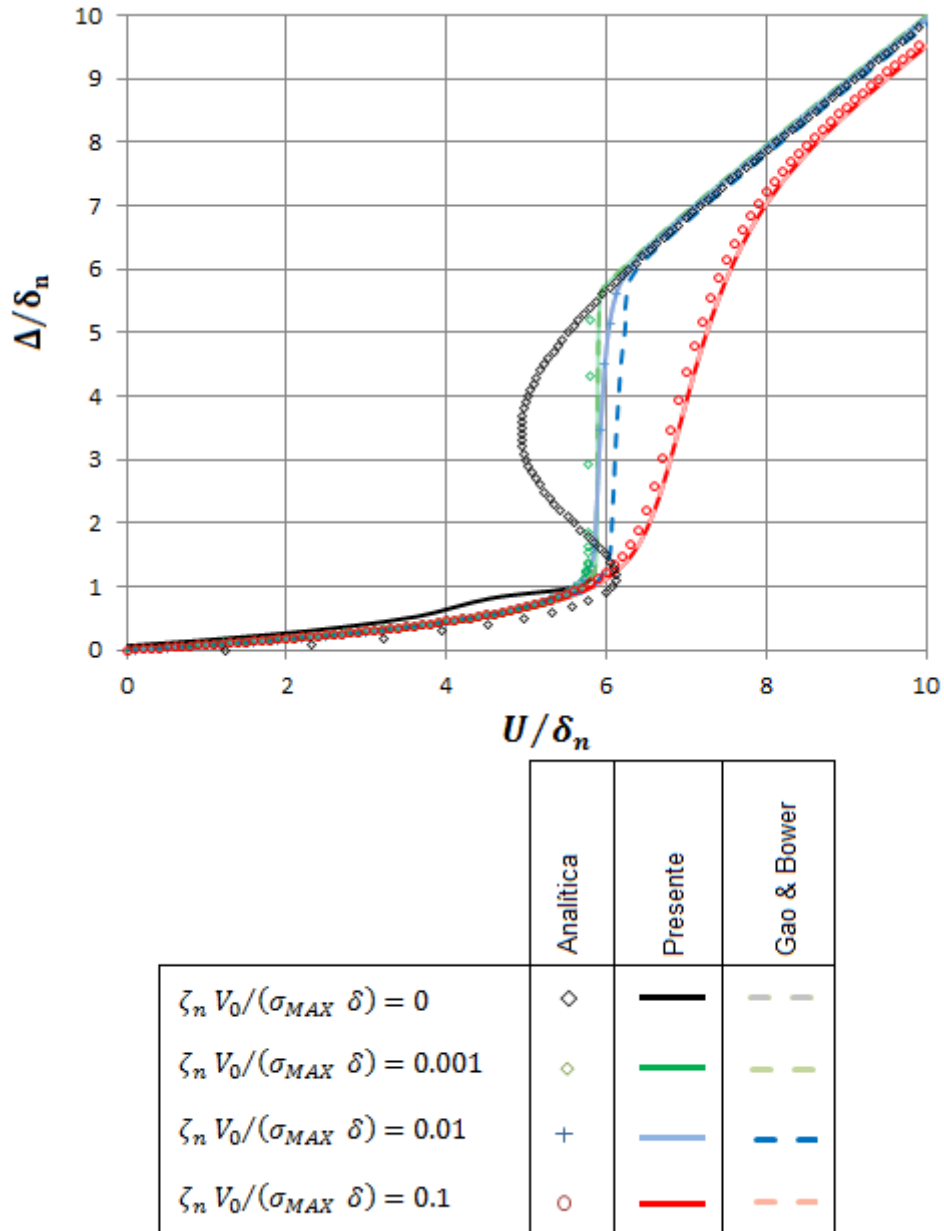


FIGURA 6. 2. REGULARIZACIÓN VISCOZA:  $\Delta/\delta_n$  VERSUS  $U/\delta_n$



Tal y como se puede apreciar en la leyenda de ambas figuras, los resultados numéricos del presente trabajo se representan con líneas continuas, mientras que los cálculos obtenidos por Gao y Bower [43] se representan con líneas discontinuas y las soluciones analíticas, que han sido extraídas de la Figura 4 de [43], se representan con símbolos. Los resultados de las Figuras 6.1 y 6.2 reflejan que a medida que aumenta el valor de la relación entre el coeficiente de estabilidad viscoso y los parámetros cohesivos, la convergencia mejora y como consecuencia es posible utilizar un tamaño de incremento más pequeño, lo que permite que los resultados numéricos se aproximen más a la solución analítica. Nótese que, en el caso de un valor nulo del coeficiente viscoso (caso 1 en la Tabla 6.1), no es posible alcanzar la solución de equilibrio para un tamaño de incremento inferior al utilizado en el Capítulo 4, poniendo de relieve las buenas prestaciones del coeficiente de estabilización viscoso en lo que a la resolución de problemas de convergencia se refiere.

En cualquier caso, como el coeficiente de viscosidad definido en la ley cohesiva de la interfaz no representa ningún tipo de mecanismo físico de disipación de energía, es importante asegurarse de que el valor de la viscosidad utilizado sea lo suficientemente pequeño como para que las predicciones numéricas sean insensibles al mismo. Para ello, dentro del marco de problemas cuasi-estáticos, Gao y Bower [43] proponen que la relación entre el coeficiente de estabilidad viscoso y el parámetro cohesivo  $\delta_n$  venga determinado por la relación:  $\zeta a V_0 / (E' \delta_n^2) \ll 1$ .

La inclusión de un coeficiente viscoso a las ecuaciones que gobiernan el comportamiento cohesivo y su correspondiente implementación numérica por medio de la subrutina dotan al elemento cohesivo desarrollado en este trabajo de una herramienta muy eficaz para abordar los problemas de convergencia intrínsecos a estos modelos.





## 7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En el presente trabajo se describen en detalle la formulación y la implementación de un elemento cohesivo por medio de una subrutina de usuario UEL en el software comercial de elementos finitos ABAQUS. La metodología numérica desarrollada se valida en diferentes modelos con resultados numéricos de otros autores y soluciones analíticas disponibles. Se analizan satisfactoriamente modelos más complejos de interés práctico para la industria y se incluye un coeficiente de estabilidad viscoso cuyas prestaciones para reducir los problemas de convergencia son evaluadas. Las conclusiones más relevantes extraídas durante el transcurso de la investigación se exponen a continuación:

- Los CZM son herramientas numéricas muy útiles para caracterizar el inicio y la propagación del daño en numerosas aplicaciones de interés ingenieril.
- El elemento cohesivo programado en este trabajo constituye un entorno idóneo para implementar de forma inmediata cualquier tipo de ley cohesiva, proporcionando además herramientas para disminuir los problemas de convergencia y permitiendo la modelización de casos complejos.

Además de su inmediata extensión a problemas tridimensionales, la gran versatilidad de la subrutina desarrollada en este trabajo garantiza un uso recurrente de la misma para su adaptación a futuras líneas de trabajo, algunas de las cuales se indican a continuación:

- Caracterización numérica mediante CZM del proceso de fractura de materiales con comportamiento dúctil.
- Desarrollo de un modelo numérico de fisura cohesiva capaz de predecir el daño causado por el medio ambiente, especialmente a raíz de la fragilización provocada por la difusión de hidrógeno.







## 8. PRESUPUESTO

En este apartado se recoge un desglose de tiempos de las horas destinadas a la realización del proyecto de investigación, así como los costes humanos y materiales necesarios para la ejecución del mismo. Finalmente se incluye la cuantía total de presupuesto.

### 8.1. Desglose de tiempos

El desglose de tiempos para las tareas realizadas durante la realización del TFM se recoge a continuación y está basado en el cronograma que se puede consultar en la Figura 7.1.

Téngase en cuenta que para el cálculo de la duración estimada se ha considerado una dedicación de 8 horas diarias.

Descripción tarea	Días	Horas
Investigación previa	20	160
Programación	50	400
Documentación	18	144
Difusión	9	72
Duración estimada	97	776

TABLA 7. 1. DESGLOSE TIEMPOS

En la Figura 7.1 se representa un cronograma mensual de las tareas realizadas durante la ejecución del TFM.

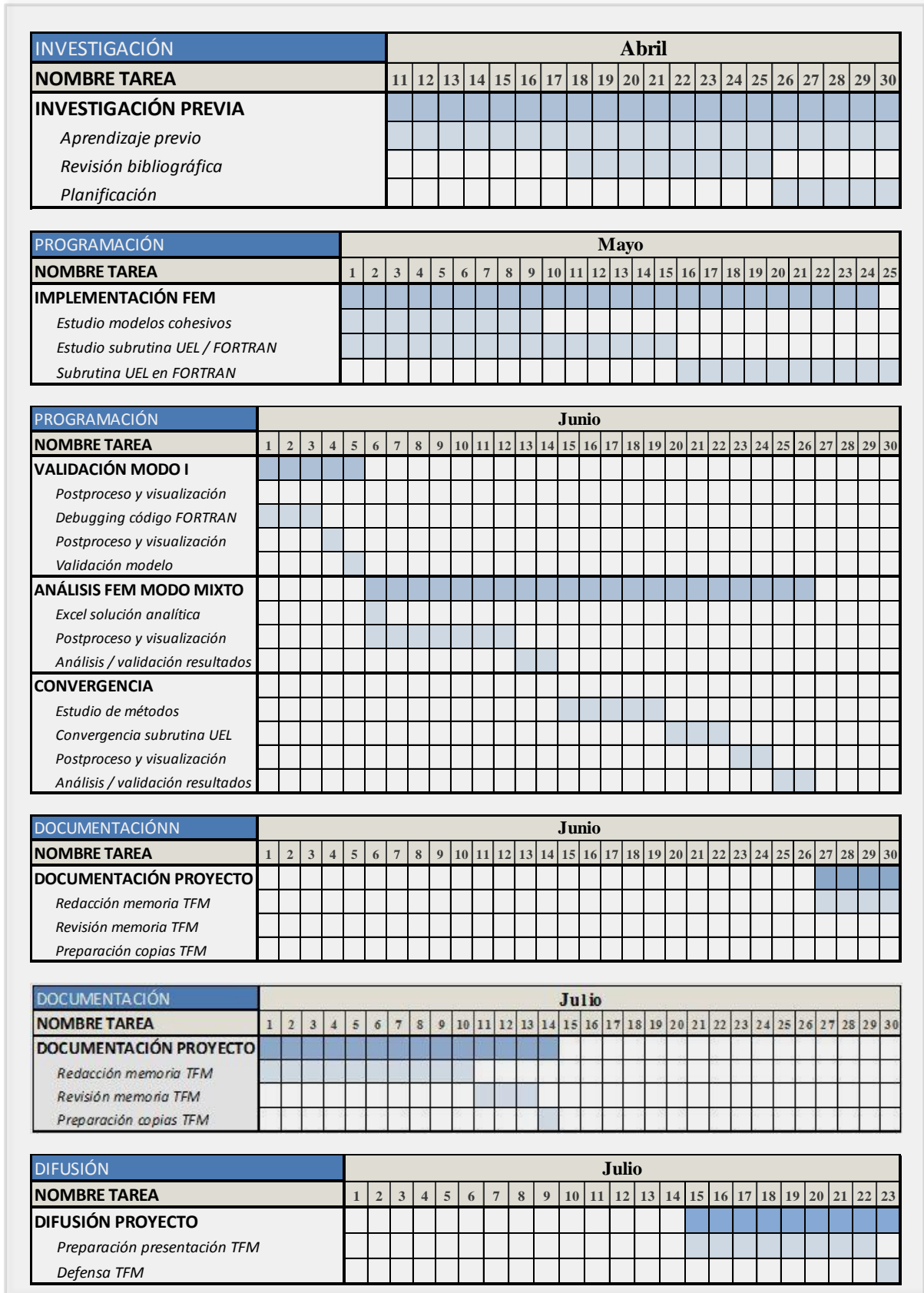


FIGURA 7. 1. CRONOGRAMA DE TAREAS



## 8.2. Cálculo de costes

El desglose de costes se realiza en base a la siguiente distribución:

- Gastos de software.
- Gastos de personal.
- Gastos de material fungible.

### 8.2.1. Gastos de software

Para la estimación de los costes relativos a software se aplica:

$$C_i = C_T \cdot \frac{T_u}{T_A} \cdot \frac{U}{100} \cdot K$$

Dónde:

$C_i$ : es el coste imputable al software.

$C_T$ : es el coste total de la adquisición.

$T_u$ : es el tiempo de uso, en años.

$T_A$ : es el tiempo estimado de amortización en años.

$U$ : es la utilización porcentual del equipo.

$K$ : es el índice de inflación y reparaciones. Se toma como valor 1,4.

Concepto/Referencia	$C_T$	$T_u$ (años)	$T_A$ (años)	$U$ (%)	$C_i$
Abaqus 6.12	35000	0.26	1	80	10192
Microsoft Visual Studio 2008	219	0.26	1	80	63.77
				TOTAL	10255.77 €

TABLA 7. 2. GASTOS DE SOFTWARE



### 8.2.2. Gastos de personal

Concepto	Nº unidades / horas	Precio unitario	Total
Investigación	160	20	3200
Programación	400	20	8000
Documentación	144	20	2880
TOTAL			14080 €

TABLA 7. 3. GASTOS DE PERSONAL

### 8.2.3. Gastos de material fungible

Concepto/Referencia	Cantidad	Precio unitario	Total
Papel	1	4	4
Tóner	1	145	145
Encuadernación	3	1.80	5.4
TOTAL			154.4 €

TABLA 7. 4. GASTOS MATERIAL FUNGIBLE

### 8.2.4. Otros gastos

Se establece una partida de 100 € para gastos de electricidad, telefonía, etc.




### 8.2.5. Presupuesto Total

Partida	Coste (€)
Gastos de software	10255.77
Gastos de personal	14080
Gastos de material fungible	154.4
Otros gastos	100
Total antes de beneficios e impuestos en €	24590.17
Beneficio Industrial (6%)	1475.41
Total antes de impuestos en €	26065.58
I.V.A. (21%)	5473.77
Coste Total del Proyecto €	31539.35 €

El coste total de proyecto asciende a TREINTA Y UN MIL QUINIENTOS TREINTA Y NUEVE CON TREINTA Y CINCO CÉNTIMOS DE EURO.

Gijón a 23 julio de 2014

El proyectista



Susana del Busto González

TABLA 7. 5. COSTE TOTAL

## 9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] T. L. Anderson, T.L. Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. (3rd Ed), Taylor and Francis CRC Press, 2005.
- [2] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. The Finite Element Method. (4th ed.) McGraw-Hill, New York, 1989.
- [3] Kuna, M., Finite Elements in Fracture Mechanics. Springer, 2013.
- [4] Schwalbe, K.-H. , Scheider, I. and Cornec, A. Guidelines for applying cohesive models to the damage behavior of engineering materials and structures. Springer, 2012.
- [5] Barenblatt, G.I., The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture.” *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 7, Academic Press, 1962, pp. 55–129.
- [6] Dugdale, D.S., “Yielding in Steel Sheets Containing Slits.” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.8, 1960, pp.100-104.
- [7] Hillerborg, A., Modeer, M., and Petersson, P.E., “Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements.” *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, 1976, pp. 773–782.
- [8] Bazant, Z.P. “Concrete fracture models: testing and practice”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, 2002, pp.165-205.
- [9] Elices M, Guinea G.V., Gómez J. and Planas J. “The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges”. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, 2002, pg 137-163.
- [10] Planas J., Guinea G.V. and Elices M. “Size effect and inverse analysis in concrete fracture”, *International Journal of Fracture*, Vol. 95, 1999, pp.165-205.
- [11] Turon, A., Dávila, C. G., Camanho, P.P and Costa, J. “An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models”. *Engineering Fracture mechanics*, Vol. 74, 2007, pp.1665-1682.
- [12] Cornec, A. Scheider, I. and Schwalbe, K-H. “On the practical application of the cohesive model”. *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003) pp. 1963-1987.

- [13] Park, K. and Paulino, G. H., "Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces." *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 64 (6), 2011, p. 061002.
- [14] Inglis, C.E., "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners." *Transactions of the Institute of Naval Architects*, Vol. 55, 1913, pp. 219–241.
- [15] Griffith, A.A. "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids". *Philosophical Transactions, Series A*, Vol.221, 1920, pp 163-198.
- [16] Irwin, G.R., "Fracture Dynamics." *Fracturing of Metals*, American Society for Metals, Cleveland, OH, 1948, pp. 147–166.
- [17] Irwin, G.R., "Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate." *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, 1957, pp. 361–364.
- [18] Wells, A.A., "Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture." *Proceedings of the crack propagation symposium*, Vol. 1, Paper 84, Cranfield, UK, 1961.
- [19] Rice, J.R., "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks". *Journal of Applied Mechanics*. Vol 35, 1968, pp.379-386.
- [20] Law, S.-S. and Zhu, X-Q., *Damage models and algorithms for assessment of structures under operating conditions*, Structures and Infrastructures book series Vol. 5, CRC Press, 2009.
- [21] Needleman ,A. "A Continuum model for void nucleation by inclusion debonding". *Journal of Applied Mechanics*; Vol. 54, 1987, pp.25-531.
- [22] Tvergaard, V., "Effect of fiber debonding in a whisker-reinforced metal." *Material Science and Engineering*, Vol. 125, 1990, pp. 203–213.
- [23] Beaurepaire P. and Schuëller G.I. "Modeling of the variability of fatigue crack growth using cohesive zone elements." *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.78, 2011, pp. 2399–2413.
- [24] Moroni F. and Pirondi A. "Cohesive zone model simulation of fatigue debonding along interfaces". *Procedia Engineering* Vol.10, 2011 pp.1829–1834.



- [25] Khroramishad H., Crocombe A.D., Katnam K.B. and Ashcroft I.A., “Predicting fatigue damage in adhesively bonded joints using a cohesive model”, *International Journal of Fatigue*, 2010, pp.1146-1158.
- [26] Min J. L., Tae M. C., Won S. K., Byung C. L. and Jung J. L., “Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model” *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 30,2010, pp. 322–328.
- [27] Li.S, Thouless M.D, Waas A.M, Chroeder J.A. and Zavattieri P.D. “Mixed-mode cohesive-zone models for fracture of an adhesively bonded polymer-matrix composite”. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, 2006, pp. 64–78.
- [28] Rahulkumar P., Jagota A., Bennison .S.J and Saigal S. “Cohesive element modeling of viscoelastic fracture application to peel testing of polymers”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, 2000, pp.1873-1897.
- [29] Spandan Maiti, Philippe H. and Geubelle, “A cohesive model for fatigue failure of polymers” *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72, 2005, pp. 691–708.
- [30] Rosa A.L, Yu R.C, Ruiz G., Saucedo L. and Sousa J.L.A.O. “A loading rate dependent cohesive model for concrete fracture Engineering” *Fracture Mechanics*, Vol. 82, 2012, pp. 195–208.
- [31] Scheider, I., Pfuff, M. and Dietzel,W., “Simulation of hydrogen assisted stress corrosion cracking using the cohesive model”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75,2008, pp. 4283–4291.
- [32] Martínez-Pañeda, E. “Análisis por el método de los elementos finitos de problemas de fractura en FGM”. Msc Thesis. Universidad de Granada. 2013.
- [33] Martínez-Pañeda, E. and R. Gallego. “Numerical analysis of quasi-static fracture in functionally graded materials”. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. Vol 10, 2014.
- [34] Jin Z.-H., Paulino G. H. and Dodds, R.H. Jr, “Cohesive fracture modeling of elasticplastic crack growth in functionally graded materials.”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 70, 2003, pp. 103-115.

- [35] Walter, M.E., Ravichandran, G., and Ortiz, M., "Computational Modeling of Damage Evolution in unidirectional fiber reinforced ceramic matrix composites". *Computational Mechanics*, Vol. 20 ,1997, pp.192-198.
- [36] Tvergaard, V., and Hutchinson, J. W., "The Influence of Plasticity on Mixed Mode Interface Toughness," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 41(6), 1993, pp.1119–1135.
- [37] Scheider, I., and Brocks, W., "Simulation of Cup-Cone Fracture Using the Cohesive Model.", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 70, 2003, pp. 1943–1961.
- [38] Ortiz, M., and Pandolfi, A, "Finite-Deformation Irreversible Cohesive Elements for Three Dimensional Crack-Propagation Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, 1999, pp. 1267–1282.
- [39] Wittmann, F. H., Rokugo, K., Bruehwiler, E., Mihashi, H., and Simonin, P., "Fracture Energy and Strain Softening of Concrete as Determined by Means of Compact Tension Specimens," *Materials and Structures*, Vol. 21,1998, pp. 21–32.
- [40] Camacho, G. T., and Ortiz, M., "Computational Modelling of Impact Damage in Brittle Materials," *International Journal of Solids and Structure*, Vol. 33, 1996, pp. 2899–2938.
- [41] X.-P. Xu and A. Needleman, "Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids". *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 42, 1994, pp. 1397-1434.
- [42] J. P. McGarry, E. O Máiritín, G. Parry and G. E. Beltz. "Potential-based and non-potential-based cohesive zone formulations under mixed-mode separation and over-closure. Part I: Theoretical analysis", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 63. 2014. 336-362.
- [43] Y. F. Gao and A. F. Bower, "A simple technique for avoiding convergence problems in FE simulations of crack nucleation and growth on cohesive interfaces," *Modelling Simul. Eng.* Vol.12,2004, pp. 453-463.
- [44] K. Park, G. H. Paulino, "Computational implementation of the PPR potential-based cohesive model in ABAQUS", *Engineering Fracture Mechanics: Educational perspective*. Vol. 93, 2012, pp. 239-262.

[45] Standard Test Method for Mixed Mode I – Mode II Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber Reinforced Polymer Matrix Composites. ASTM D6671/D6671M 2013.

[46] Xu, A. Needleman, “Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix”, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* Vol.1, 1993, pp. 111-132.

[47] K. Park, G. H. Paulino and J. R. Roesler, “A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* Vol. 57, 2009, pp. 891-908.

[48] Numerical tools for the finite element modeling of fracture and crystal plasticity. G.T. Diego, M.E. José Manuel and G.S. Javier. PhD Thesis. University of Navarra. 2008.