



Universidad de Oviedo

Memoria del Trabajo Fin de Máster realizado por

Fidel Pérez Menéndez

para la obtención del título de

Máster en Ingeniería de Automatización e Informática Industrial

**Desarrollo de sistema de control para un
manipulador de seis grados de libertad**

Febrero, 2014

Índice

1. INTRODUCCIÓN	7
1.1. Estado actual de la robótica	7
1.2. Características actuales de los robots.....	8
1.2.1. Causas de la falta de precisión y continuidad de trayectorias.....	10
1.3. Objetivos del proyecto	11
1.4. Descripción del manipulador.....	12
1.4.1. Eslabones.....	13
1.4.2. Articulaciones.....	17
1.4.3. Compensadores.....	19
1.5. Estructura del Trabajo.....	19
1.5.1. Diagrama de Gantt	20
2. ESTUDIO CINEMÁTICO	22
2.1. Parámetros Denavit-Hartenberg	22
2.2. Matrices de Transformación Homogéneas	24
2.2.1. <i>Fixed Angles X-Y-Z</i>	26
2.3. Cinemática directa	27
2.4. Cinemática inversa: método geométrico.....	29
2.5. Cinemática de la Velocidad: el Jacobiano	40
2.5.1. Cálculo del Jacobiano.....	42
2.5.2. Singularidades.....	44
3. ESTUDIO DINÁMICO	46
3.1. Distribución de la Masa del Manipulador	46
3.1.1. Centros de Masas	46
3.2. Pseudo-Matriz de Inercia.....	47
3.3. Dinámica Inversa.....	49
3.3.1. Formulación Euler-Lagrange	50
3.3.1.1. Velocidad de un punto del manipulador	51
3.3.1.2. Energía Cinética.....	52
3.3.1.3. Energía Potencial.....	53
3.3.1.4. Ecuaciones del Movimiento del Manipulador.....	54
3.3.1.5. Introducción de los efectos de fricción.....	56
3.3.1.6. Dinámica de los actuadores	57

3.4.	Dinámica Directa	58
4.	CONTROL	60
4.1.	Generador de trayectorias	60
4.1.1.	Modelado matemático	63
4.2.	Sensores	66
4.2.1.	Sensores electromagnéticos rotativos.....	66
4.2.2.	Resolvers.....	67
4.2.3.	Encóder Incremental	69
4.3.	Actuadores	70
4.3.1.	Servomotores.....	71
4.3.1.1.	Motores <i>Brushless</i>	72
4.3.1.2.	Etapas reductoras.....	72
4.3.2.	Drivers.....	73
4.4.	Modelado del sistema de control	74
4.4.1.	Linealización.....	75
4.4.2.	Control por par calculado.....	76
4.4.2.1.	Controlador <i>PD</i>	79
4.4.2.2.	Espacio de estados (<i>PD</i>).....	80
4.4.2.3.	Elección de las ganancias.....	83
4.4.3.	Control por dinámica inversa	84
4.4.3.1.	Controlador lineal <i>PID</i>	86
4.4.3.2.	Espacio de estados (<i>PID</i>).....	88
4.4.4.	Control Digital	91
4.4.4.1.	Ecuaciones en diferencias.....	92
4.4.5.	Control en el Espacio Cartesiano.....	96
4.4.5.1.	Control con dinámica en el espacio articular	96
4.4.5.2.	El jacobiano en el dominio de fuerzas.....	101
4.4.5.3.	Control con dinámica en el espacio cartesiano.....	102
4.4.6.	Control de fuerza.....	104
4.4.6.1.	Control Híbrido Posición-Fuerza.....	106
5.	CÁLCULOS NUMÉRICOS	110
5.1.	Regulador <i>PID</i> en tiempo continuo	110
5.2.	Reguladores <i>PID</i> y <i>PD</i> en tiempo discreto	112
6.	SIMULACIÓN	114
6.1.	Simulación dinámica	114
6.2.	Simulación de trayectorias	115
6.3.	Control por par calculado	117

4. <i>Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad</i>	
6.4. Control por dinámica inversa	122
7. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	129
8. PRESUPUESTO	131
8.1. Hardware	131
8.2. Software.....	132
8.3. Costes de personal	132
8.4. Coste total del proyecto	133
9. BIBLIOGRAFÍA.....	134

MEMORIA

6. *Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad*

1. Introducción

El presente *Trabajo Fin de Máster de Ingeniería de Automatización e Informática Industrial* de la Universidad de Oviedo se ha elaborado durante la realización de las Prácticas en Empresa en la Fundación *PRODINTEC*. Este Trabajo forma parte del proyecto *MILL2MATIC*, actualmente en estado de desarrollo y enmarcado dentro del Programa Nacional de cooperación Público-Privada, dentro del subprograma *INNFACTO 2012*.

En este capítulo se muestra el sistema general en el que se engloba el proyecto *MILL2MATIC*, sus principales objetivos y la parte que este trabajo aporta a su desarrollo y consecución.



Figura 1. Celda robótica de la FUNDACION PRODINTEC

1.1. Estado actual de la robótica

Para comprender el objetivo que se plantea en este proyecto, es necesario conocer primero las posibilidades actuales de la robótica, especialmente la parte referida a manipuladores de seis grados de libertad, muy extendidos en la industria.

El campo de la robótica industrial se define como el estudio, diseño y uso de robots para la ejecución de procesos industriales. El estándar *ISO 8373:1994* (Robots Industriales Manipuladores) define un robot industrial como un manipulador programable en tres o más ejes multipropósito, controlado automáticamente y reprogramable.

En industrias como la de la automoción, donde se realizan muchas tareas repetitivas como operaciones de pintado, la soldadura o la manipulación, en las últimas décadas

8. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

se ha producido la progresiva implantación de sistemas robotizados para cumplir dichas tareas. Los robots desarrollados hasta el momento han mostrado ser capaces y eficientes, sustituyendo y mejorando los resultados de labores que anteriormente se realizaban de manera manual o semiautomática.

Sin embargo, en tareas en las que la repetitividad no es el factor determinante, por ejemplo, en las que se exigen otro tipo de cualidades como la precisión o la resolución de tareas complejas, la robótica no ha penetrado a un nivel comparable. En tareas donde se fabrican piezas únicas o series muy cortas, con tolerancias estrechas (del orden de 0,1 mm) y trayectorias complejas, hasta el momento las aplicaciones robotizadas no han pasado de instalaciones a nivel de laboratorio. La automatización de algunas de estas aplicaciones se consigue hoy en día a través de máquinas herramienta, como pueden ser los centros de mecanizado de alta velocidad o las máquinas de encintado automático (ATL), las cuales ofrecen soluciones con una gran robustez y fiabilidad, consiguiéndose una gran precisión en el seguimiento de trayectorias.

No obstante, las máquinas-herramienta traen consigo una serie de desventajas, como por ejemplo su elevado coste asociado, propósito específico, baja flexibilidad y volumen elevado, por lo que suelen necesitar de una gran superficie de planta para su instalación. La robótica, dada su flexibilidad, menor coste, polivalencia y alta productividad se presenta como una alternativa ventajosa de automatización para procesos como los anteriormente mencionados.

De esta manera, el objetivo general del proyecto *MILL2MATIC* es avanzar en la implementación de la robótica en la industria, acercándola en mayor medida a procesos donde no se aplica actualmente, mediante la superación de las limitaciones comentadas.

De manera resumida, las necesidades actuales, y por tanto, los retos a los que se enfrenta el proyecto global se pueden enunciar como:

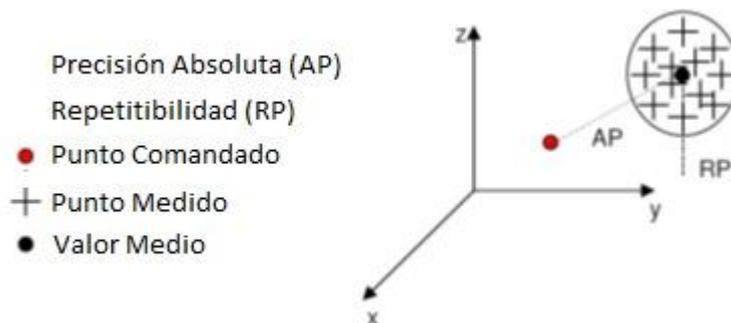
- Obtención de una mayor precisión de posicionamiento en los robots o manipuladores, tanto de forma puntual como a lo largo de una trayectoria, a fin de garantizar la fabricación de piezas con reducidas tolerancias.
- Mejora en la continuidad en las trayectorias a elevadas velocidades, a fin de alcanzar productividades y acabados similares a las de una máquina herramienta.

1.2. Características actuales de los robots.

A partir de la definición y de las características mencionadas en el apartado anterior, se pueden destacar como principales virtudes de la robótica industrial actual la polivalencia y la flexibilidad. Hablamos de dispositivos polivalentes porque son máquinas de propósito general que deben ser programadas para una determinada tarea. Su función se determina, además de por la programación, por la herramienta utilizada para llevar a cabo la tarea. Su flexibilidad reside en que la programación y el cambio de herramienta pueden cambiar a lo largo de su vida útil con una simple

reconfiguración de sus parámetros. A estas virtudes hay que sumar la repetitividad que presentan en la posición alcanzada (en torno a 0.1 mm de margen). Por último cabe destacar la alta productividad que consiguen gracias a que la ligereza de la estructura posibilita movimientos muy veloces.

En cuanto a las limitaciones, las más importantes se centran en la dificultad de programación, en la baja precisión de posicionamiento alcanzable y en la falta de continuidad en trayectorias de gran densidad de puntos. Respecto a la falta de precisión, cabe mencionar que es debida principalmente a la elasticidad de su estructura, que produce deflexiones importantes difíciles de modelar de forma precisa. Otra causa es el control, que no utiliza un sistema de lazo cerrado en el que se realimente con un sistema de medición externo la posición de la herramienta, sino que por el contrario son los resolver de los motores los que controlan la posición de las articulaciones, lo que por definición no permite alcanzar altas precisiones. En cuanto a la continuidad en las trayectorias, ésta resulta totalmente satisfactoria en el caso de trabajos a baja velocidad. Sin embargo, cuando se trata de aumentar la velocidad de operación, el control no es capaz de mantener la suavidad en el movimiento debido a que no tiene un tiempo de respuesta lo suficientemente corto y, en menor medida, a problemas mecánicos como holguras, imprecisiones en la fabricación, etc. El hecho de que se trate de un sistema de baja precisión pero alta repetitividad se debe a que cuando el robot es enviado a un punto objetivo y a una orientación dada, el control hace los cálculos necesarios para que cada eje se posicione hasta llegar a esa posición y orientación real calculada, que tiene una desviación respecto al objetivo. Habitualmente no existe una medida directa de la posición y orientación del efector final: uno debe confiar en la geometría asumida del manipulador y en su rigidez para calcular la posición del efector final a partir de las posiciones de las articulaciones medidas. De este modo, la precisión se ve afectada por errores computacionales, errores de fabricación, flexión de los eslabones, backlash en las unidades de reducción, etc. Este error resulta ser aproximadamente constante, por lo que cada vez que el robot va a un punto lo hará desviándose del punto objetivo una distancia igual al valor de la precisión, pero siempre caerá dentro de una esfera de radio el valor de la repetitividad. Es decir, es probable que en x movimientos del robot a un punto objetivo determinado nunca estemos sobre dicho punto objetivo, pero siempre tendremos la certeza de que la posición real del robot se encuentra dentro de una esfera de radio RP marcada por la repetitividad, siendo la precisión absoluta AP el valor de la distancia entre el punto objetivo y el centro de esa esfera de radio RP. Todos estos conceptos pueden verse representados en la Figura 2 a continuación:



10. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Figura 2. Concepto de precisión y repetitividad

En cuanto a la falta de continuidad de las trayectorias, ésta está motivada por una actuación de los motores más lenta que la que demanda para el movimiento del manipulador. Este fenómeno se materializa en forma de microparadas en cada uno de los puntos que forman la trayectoria, que generan vibraciones y otras perturbaciones que afectan al proceso de fabricación. Por ejemplo, en el caso del mecanizado, el acabado de las superficies teóricamente lisas resulta deficiente debido a la elevada rugosidad y a la presencia de muescas.

A la vista de estas limitaciones se puede entender por qué las aplicaciones habituales de los robots en la industria son aquellas que se caracterizan por ser sencillas, repetitivas, y no requerir precisión o que debido a la alta productividad es asumible un tiempo de programación y puesta a punto elevado. Se justifica así la baja implantación en aplicaciones con altos requisitos de tolerancia o con necesidad de trayectorias complejas.

1.2.1. Causas de la falta de precisión y continuidad de trayectorias

En cuanto a la precisión y a la continuidad de trayectorias, se ahondará en este apartado en las causas por las que estos aspectos son limitantes a la hora de utilizar manipuladores robóticos en tareas en las que se precisan dichas características. Las principales causas son:

- **Sensórica:** las desviaciones atribuibles a la sensórica integrada en los sistemas robóticos actuales tiene una implicación directa en el correcto funcionamiento del mismo, ya que son los elementos que devuelven los valores utilizados para el posicionamiento del robot o manipulador. Este tipo de defectos se pueden corregir mediante calibraciones. Las desviaciones derivadas de la sensórica pueden venir de:
 - **Precisión del sensor:** capacidad que tiene el sensor de tener una precisión interna adecuada, es decir, de su repetitividad y de su capacidad de transformar la medición de dichos parámetros en medidas digitales.
 - **Resolución:** limitación del sensor, según su características mecánicas constitutivas.
 - **Excentricidad:** defectos asociada al montaje del sensor en el sistema.
 - **Influencias externas:** errores que proceden de influencias externas, como pueden ser cargas adicionales, temperaturas, interferencias, etc.
- **Control:** es el responsable del correcto funcionamiento y movilidad del sistema, y por esta razón, la mayor fuente de desviaciones. Las desviaciones de las que es fuente el control se pueden englobar en:
 - **Transformaciones Matemáticas:** Todo el funcionamiento del manipulador es controlado, a grandes rasgos, por algoritmos matemáticos que representan su funcionamiento y que ante

determinados valores de entrada ofrecen los valores de salida programados. Estos algoritmos, que representan no solo el funcionamiento cinemático y dinámico, sino también la manera como el robot se mueve en espacio y controla sus actuadores, están diseñados en base a desarrollos matemáticos que tienen errores asociados y altos costes computacionales.

- Precisión computacional: El hardware diseñado para poder albergar toda esta matemática, trabaja con un determinado tipo de variable, limitadas en espacio y tamaño.
 - Capacidad computacional: En función de la matemática desarrollada y de la precisión requerida, se desarrolla el hardware que tenga la capacidad operativa de realizar las operaciones para poder enviar las señales a la actuación. En realidad, el hardware tiene retrasos y sumados a los ya mencionados antes, se obtiene el tiempo total de refresco o la capacidad del sistema para actuar frente a determinados estímulos. Este tiempo de refresco impone el límite de actuación del control y por consiguiente la capacidad del sistema para poder moverse con una precisión determinada.
- Mecánica: La constitución mecánica de un robot y sus accionamientos son también una de las fuentes principales de pérdida de precisión. En este sentido, las deformaciones que sufren los eslabones del robot en su movimiento provocan que exista una diferencia entre la definición matemática teórica de funcionamiento y su comportamiento real. Del mismo modo, los actuadores tienen un límite de operación, viéndose afectados por factores externos, por lo que pierden resolución en función de los mismos parámetros que la mecánica.
 - Instalación: La puesta en marcha de uno de estos equipos supone un reto desde el punto de vista de la precisión del mismo, ya que muchos de los defectos asociados a un robot se crea en ese momento. Los errores de posicionamiento y la falta de una calibración en la instalación final hacen de esta fase una fuente de pérdida de precisión en su funcionamiento.

Se identifican por tanto el control del robot y la sensórica integrada como los factores limitantes fundamentales de cara a mejorar tanto la precisión absoluta del robot (capacidad para situarse en un punto determinado dentro del volumen de trabajo) como en la continuidad en trayectorias.

1.3. Objetivos del proyecto

El objetivo general del proyecto *MILL2MATIC* consiste en la mejora de las capacidades actuales de los manipuladores o robots industriales, de manera que puedan presentarse como una alternativa a las máquinas herramienta para determinados procesos donde las tolerancias estrechas y las trayectorias complejas hacen que la robótica actual no sea una alternativa factible.

12. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

La consecución de este objetivo general implica el cumplimiento de los siguientes objetivos específicos, que representan una mejora con respecto a los sistemas actuales:

- Desarrollo de un sistema de control con nuevas capacidades, que tenga en cuenta el origen de las desviaciones (mecánicas, externas, matemáticas, etc.) que dan lugar a la falta de precisión actual de los robots, a través de su implementación en un hardware específico.
- Integración de sistemas de medición externos basados en interferometría láser que no estén en contacto con la mecánica del robot y que permitan un mejor posicionamiento tanto estático como dinámico del conjunto gracias al cierre del lazo de control de posicionamiento de la herramienta. Se busca conseguir así una mayor precisión y una mejora en la continuidad de las trayectorias.

El resultado final esperado es la obtención de un sistema de control que mejore la precisión y exactitud del posicionamiento del efector final. Esa mejora vendrá dada por un menor periodo de funcionamiento del lazo de control, por el uso de modelos matemáticos más completos del manipulador, y por la adición de sensorica que proporcione otro tipo de datos que permitan mejorar el sistema de control.

El objetivo de este Trabajo Final de Máster, englobado dentro de los objetivos del proyecto *Mill2Matic*, será la propuesta y realización de lazos de control que permitan llevar a cabo las mejoras propuestas anteriormente.

1.4. Descripción del manipulador

Un manipulador robótico es un conjunto de cuerpos conectados en una cadena por medio de juntas o articulaciones. Estos cuerpos se denominan enlaces o eslabones. Cada una de las articulaciones une a dos eslabones consecutivos. En los manipuladores pueden existir dos tipos de articulaciones: la prismática y la rotatoria. Una articulación prismática, también conocida como junta deslizante, posibilita a un eslabón el movimiento lineal sobre el otro eslabón que conecta la articulación. Una articulación rotatoria permite el giro un eslabón con respecto al otro eslabón que conecta la articulación. En el caso del manipulador *KUKA KR500-2* todas las articulaciones que lo conforman son de tipo rotatorio. Cada una de ellas a su vez establece cada uno de los grados de libertad, por lo que el manipulador tiene 6 articulaciones. Este modelo de manipulador es un modelo destinado a cargas muy pesadas, lo que hace de él un sistema especialmente adecuado para su utilización en procesos de mecanizado. Además ofrece una capacidad de carga y un espacio de trabajo mucho mayor, y prolonga considerablemente las distancias entre los puntos de gravedad de referencia. Además, posee una alimentación de energía estrechamente ceñida al cuerpo o directamente integrada, lo cual le permite reducir los contornos de perturbación de manera que la superficie de colocación del robot resulta mucho más aprovechable.

1.4.1. Eslabones

En las siguientes figuras se separa la estructura del manipulador para diferenciar las partes fundamentales que lo componen:

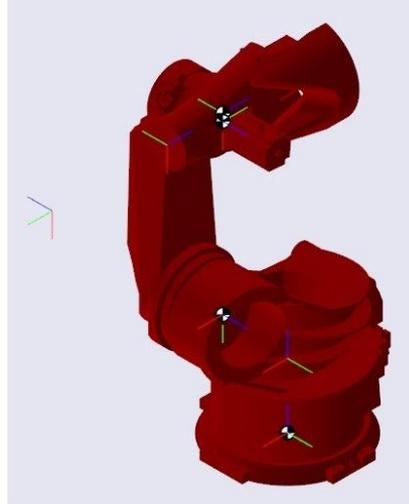


Figura 3. Brazo del manipulador

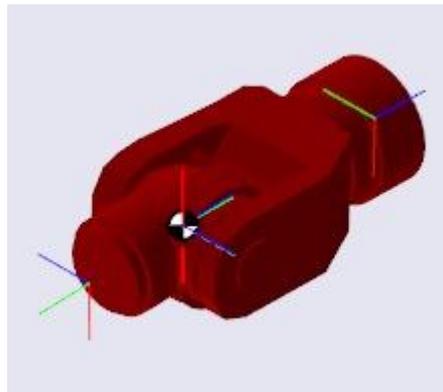


Figura 4. Muñeca del manipulador

La figura 3 constituye el brazo antropomórfico del manipulador y es la responsable de su posicionamiento en el espacio, mientras que la figura 4 constituye la muñeca del sistema y supondrá la orientación final del sistema de coordenadas del extremo del robot (efector final). Realmente, la posición y orientación alcanzadas finalmente no dependerán únicamente de las partes respectivas mencionadas, sino que será un conjunto de ambas, ya que la muñeca posiciona el efector final en función del posicionamiento previo del brazo. Lo mismo sucede con el brazo respecto de la muñeca. Tanto el brazo como la muñeca forman un conjunto, que es el manipulador, y deben coordinarse conjuntamente para posicionar y orientar el efector final.

Cada una de las dos partes estará dividida a su vez en eslabones conectados a través de articulaciones rotativas. Cada una de ellas se muestra a continuación de manera independiente del resto del manipulador resaltada en color amarillo frente al resto de eslabones.

14. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

El primer eslabón se mostrará en las dos partes que lo componen, ya que está compuesto por dos piezas que forman el conjunto que se estudia en relación al movimiento de la articulación. La primera de ellas es la base:

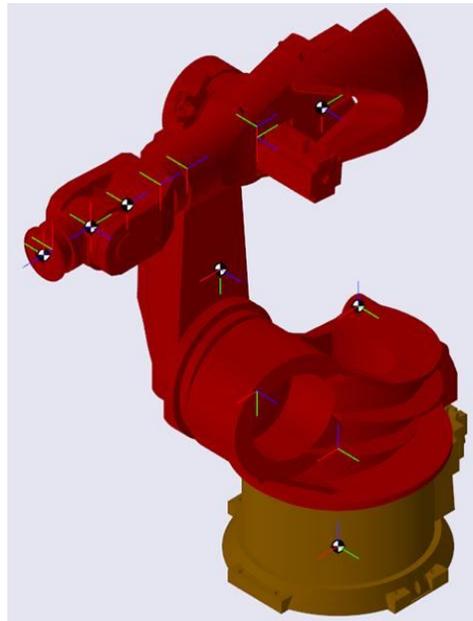


Figura 5. Base (primer eslabón)

En ella se encuentra el sistema de referencia del manipulador. Es una parte fija sobre la que se ancla el manipulador al suelo, por ello el sistema de referencia está situado sobre ella, y es el punto al que se refieren los datos de posición y orientación del efector final en lo que se denominará espacio cartesiano. La segunda pieza que conforma el primer eslabón se muestra en la siguiente figura:

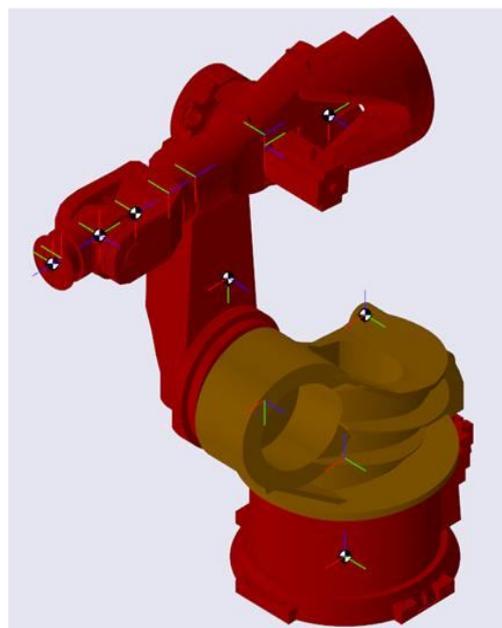


Figura 6. Primer eslabón

Esta pieza es la que rota en torno a la base formando la primera articulación. El segundo eslabón es el siguiente:

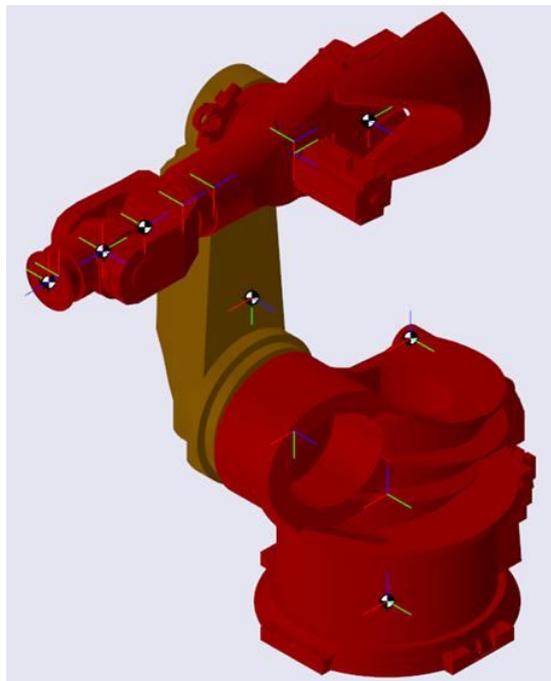


Figura 7. Segundo eslabón

Este segundo eslabón está formado por una única pieza, al igual que el resto de los eslabones siguientes. El tercer eslabón se muestra a continuación:

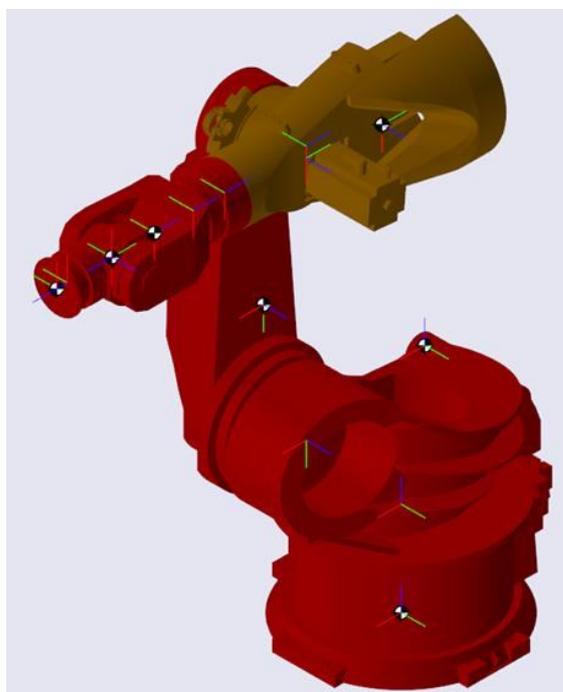


Figura 8. Tercer eslabón

16. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Este es el último eslabón que conforma el brazo. Los siguientes forman parte de la muñeca del manipulador. Todos ellos se muestran a continuación:

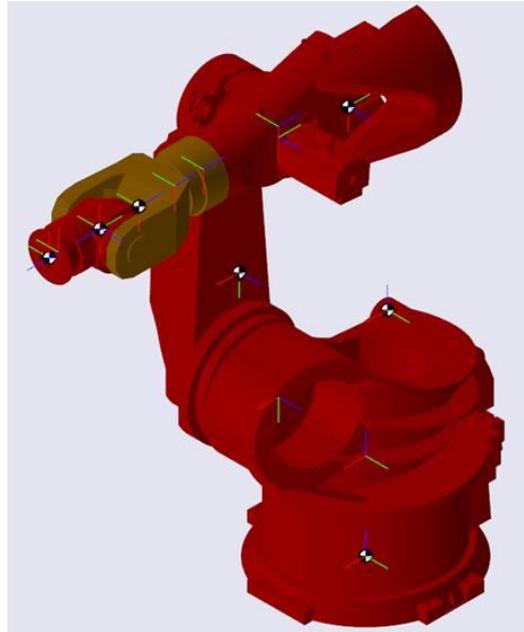


Figura 9. Cuarto eslabón

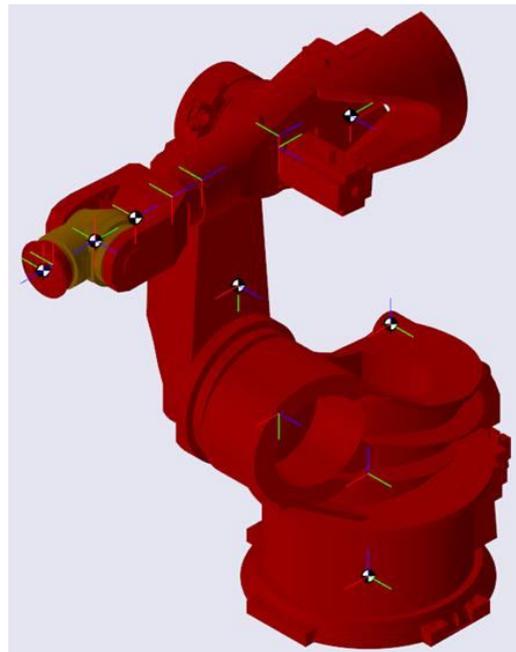


Figura 10. Quinto eslabón

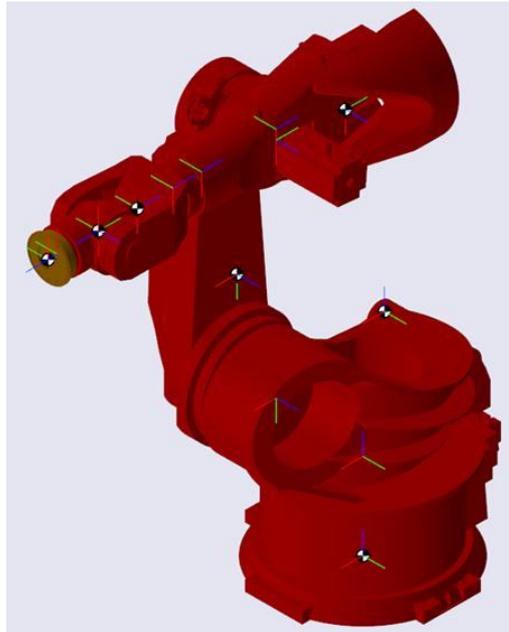


Figura 11. Sexto eslabón

El último eslabón, el sexto, está formado por la pieza resaltada de la figura anterior. En ella se incluye el efector final, que representa un offset que no será tenido en cuenta para los cálculos cinemáticos del manipulador, ya que el uso de una herramienta modificaría ese offset, permitiendo mantener los modelos matemáticos que se desarrollarán en el apartado 2.

1.4.2. Articulaciones

Además de los eslabones que contiene el manipulador, otra parte fundamental para su estudio son las articulaciones sobre las que se produce el movimiento de los propios eslabones. El manipulador Kuka KR500-2 es un manipulador de seis grados de libertad. Cada uno de ellos es aportado por cada una de sus seis articulaciones, todas ellas rotacionales. En la siguiente figura se representa el manipulador con el eje de giro de cada una de ellas:

18. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

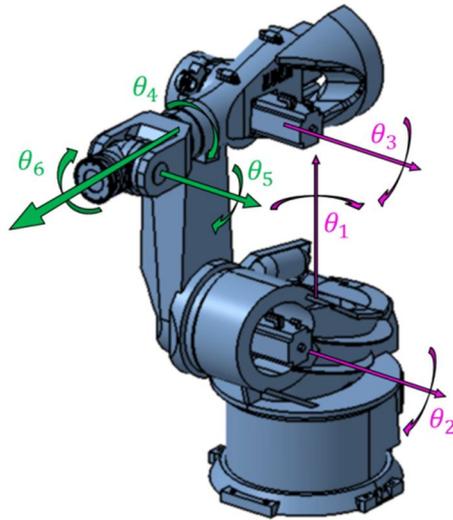


Figura 12. Ejes de rotación

En rosa aparecen las articulaciones del brazo, que posicionan el efector final; y en verde se muestran las articulaciones de la muñeca, que lo orientan.

Las articulaciones tienen unas limitaciones angulares y velocidades de funcionamiento, que definen el *dextrous space* (puntos alcanzables con cualquier orientación) y el *espacio alcanzable* del robot (puntos alcanzables):

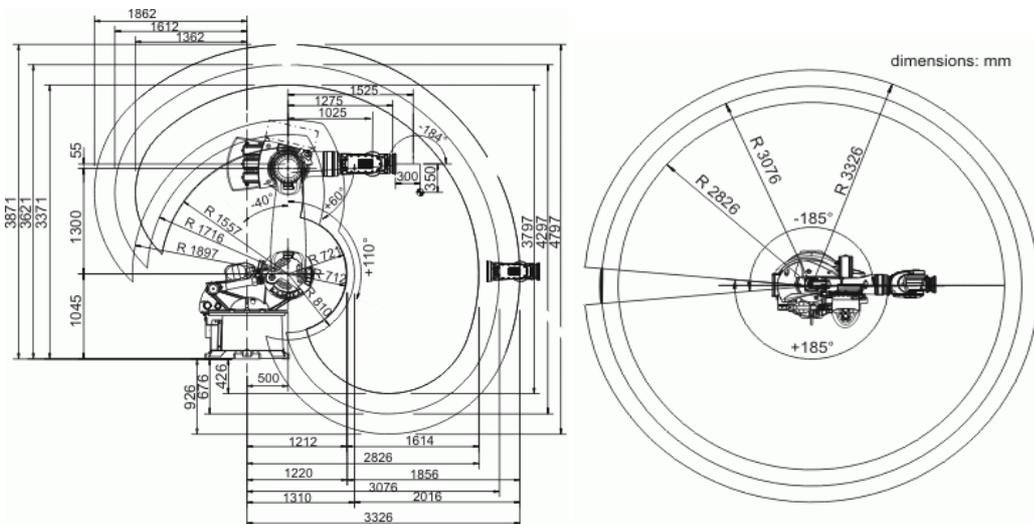


Figura 13. Dextrous space y espacio alcanzable

Las limitaciones de dichas articulaciones, tanto de posición como de velocidad, están definidas a continuación:

Eje	Limites	Velocidad Máxima
-----	---------	------------------

A1 (θ_1)	$\pm 185^\circ$	69 °/s
A2 (θ_2)	+110° a -40°	69 °/s
A3 (θ_3)	+60 a -184°	69 °/s
A4 (θ_4)	$\pm 350^\circ$	77 °/s
A5 (θ_5)	$\pm 118^\circ$	76 °/s
A6 (θ_6)	$\pm 350^\circ$	120 °/s

Tabla 1

1.4.3. Compensadores

Además de los eslabones y las articulaciones, el manipulador dispone de un sistema de compensación dinámica, conformado por un cilindro hidráulico-neumático. El objetivo de este sistema es compensar el peso de los eslabones posteriores a la segunda articulación y de la carga en el efector final o herramienta, que tiene un efecto dinámico muy elevado sobre la segunda articulación, al ser ésta la articulación posterior a la base y sobre la que se articula el resto del peso del manipulador. Además de este sistema, en el codo del robot se incorpora un contrapeso cuyo objetivo es compensar el peso de la carga, así como de los eslabones cuarto, quinto y sexto, de manera que las posiciones más extremas no tengan un efecto dinámico muy elevado que exigiese una actuación muy exigente para el actuador de la articulación.

1.5. Estructura del Trabajo

Para el desarrollo del trabajo se han hecho una serie de tareas que se describirán a continuación:

- Documentación: recopilación de información sobre robótica e introducción de los objetivos a realizar durante la elaboración del proyecto.
- Desarrollo matemático e implementación de la cinemática directa: a partir de la documentación recopilada se afronta el problema cinemático directo del manipulador *Kuka KR500-2*.
- Desarrollo matemático e implementación de la cinemática inversa: con el desarrollo de la cinemática directa ya realizado, se procede entonces a resolver

20. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

el problema cinemático inverso para el manipulador dado a través del método geométrico.

- Desarrollo matemático e implementación de la cinemática de la velocidad: para completar el estudio cinemático del manipulador, se desarrollan e implementan los desarrollos de la cinemática de velocidad, cuyo principal objetivo es permitir conocer el Jacobiano.
- Desarrollo matemático e implementación de la dinámica: con los modelos cinemáticos ya realizados, se avanza un paso más considerando el movimiento en relación a las fuerzas que lo originan.
- Estudio de sistemas de control para manipuladores: estudio de leyes de control compatibles con los modelos desarrollados del manipulador. Aprendizaje de los métodos existentes y adaptación a las necesidades propias del proyecto.
- Desarrollo de la simulación del manipulador: a través de *toolboxes* de *Simulink* se realizan diferentes modelos que representan virtualmente las características cinemáticas y dinámicas del manipulador.
- Implementación de sistemas de control: realización de lazos de control de acuerdo con los modelos implementados en *Simulink* con el fin de comprobar la corrección de los mismos y realizar posteriormente pruebas *HIL* en el hardware de control específico.
- Realización de la memoria del Trabajo Fin de Máster: redacción de la memoria que recoge el trabajo realizado previamente.

1.5.1. Diagrama de Gantt

Cada una de las tareas descritas es mostrada en un diagrama de Gantt, junto con la planificación temporal del desarrollo de cada una de ellas. Se ha utilizado para su realización el software *Gantt Project*.

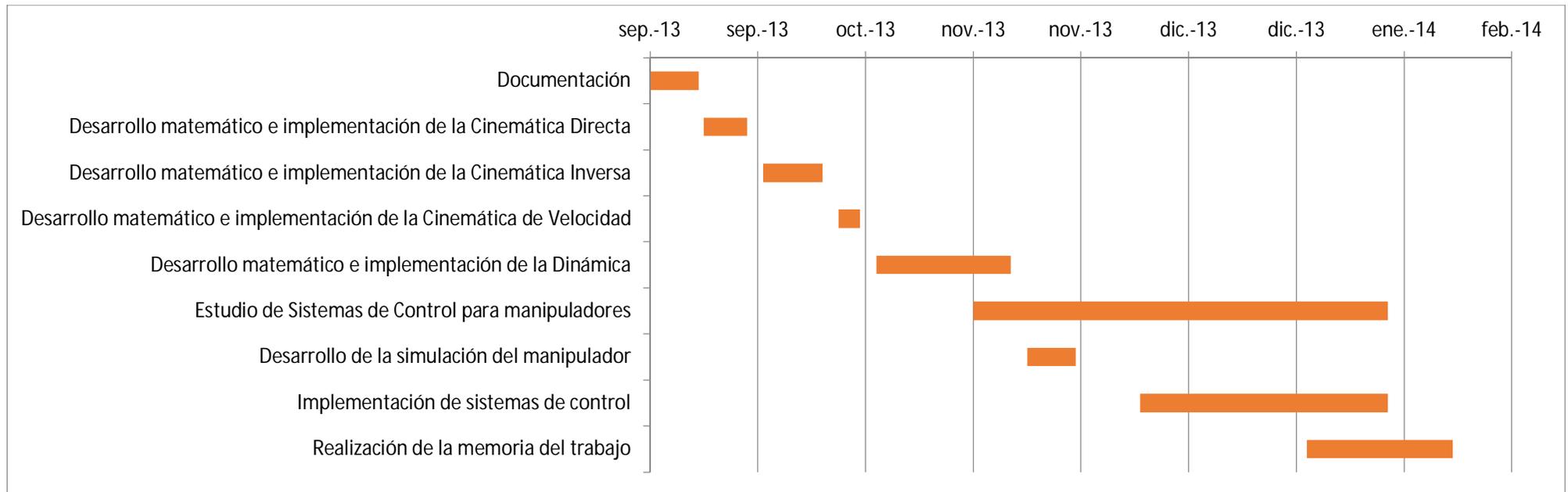


Figura 14. Diagrama de Gantt

2. Estudio cinemático

Tras la descripción inicial del sistema se ha procedido a su descripción matemática, desarrollada a continuación para poder ser implementada más adelante mediante el uso del software de simulación *MATLAB*. El uso de este software, nos permitirá tener un modelo sobre el que implementar los conceptos de control propuestos y probar los resultados previamente a su desarrollo sobre el *hardware* de control.

El desarrollo de los modelos matemáticos que definen las cinemáticas del manipulador es el primer paso a realizar para el estudio mecánico que dará el conocimiento del comportamiento del sistema para poder controlarlo. A través de la cinemática directa se podrá conocer la posición del extremo o punto final del manipulador, que será el punto de interés dado que es donde se encontrará sujeta la herramienta que se utilizará para realizar el trabajo oportuno, a través de las posiciones de cada una de sus articulaciones. La cinemática inversa, por el contrario, permite conocer las posiciones articulares de los datos de posición y orientación del extremo del manipulador.

La cinemática es la ciencia que trata el movimiento sin tener en cuenta las fuerzas que lo causan. Dentro de la cinemática, se estudia la posición, la velocidad y la aceleración. Por lo tanto, el estudio de la cinemática de manipuladores se refiere a todas las propiedades geométricas y basadas en el tiempo de los movimientos. El estudio de la cinemática del manipulador implica, entre otras cosas, suponer cambios en la ubicación de los sistemas de referencia de cada articulación a medida que el mecanismo se mueve.

La notación de las articulaciones se hará comenzando desde la base (primera articulación) hasta el efector final (sexta articulación), siguiendo la cadena mecánica que forma el manipulador.

2.1. Parámetros Denavit-Hartenberg

Para el desarrollo de los modelos tanto de la cinemática directa como de la inversa, se utilizará la representación de *Denavit-Hartenberg*. Se trata de un procedimiento que asigna a cada una de las articulaciones un sistema de referencia, estando el origen sobre el eje de la articulación de dicho sistema y dotándolo de tres ejes (X , Y , Z). Se establecen así coordenadas cartesianas o coordenadas rectangulares, que son un tipo de coordenadas ortogonales usadas en espacios euclídeos para la representación del movimiento o posición en física, caracterizadas porque usa como referencia ejes ortogonales entre sí que se cortan en un punto origen. Las coordenadas cartesianas se definen así como la distancia al origen de las proyecciones ortogonales de un punto dado sobre cada uno de los ejes. Si el sistema en si es un sistema tridimensional, se denomina espacio cartesiano.

Los sistemas de referencia se definen de la siguiente manera:

- El eje Z se coloca en la dirección del eje de articulación.

- El eje X es paralelo a la normal común entre Z_{n-1} , Z_n . Si no hay una única normal común (ejes Z paralelos), entonces d (abajo) es un parámetro libre.
- El eje Y es orto-normal a los dos anteriores según la regla de la mano derecha.

Los parámetros de *Denavit-Hartenberg* permiten el paso de un eslabón al siguiente, es decir, los eslabones unidos por una articulación, mediante cuatro transformaciones básicas. Las transformaciones dependen exclusivamente de las características constructivas del robot. Las transformaciones básicas son:

- Rotación α_i alrededor del eje \hat{x}_{i-1} es el ángulo entre \hat{z}_{i-1} y \hat{z}_i
- Rotación θ_i alrededor del eje \hat{z}_i es el ángulo entre \hat{x}_{i-1} y \hat{x}_i
- Traslación d_i a lo largo del eje \hat{z}_i entre \hat{x}_{i-1} y \hat{x}_i
- Traslación a_i a lo largo del eje \hat{x}_{i-1} entre \hat{z}_{i-1} y \hat{z}_i

La definición de estas características puede variar respecto del eje de referencia utilizado (el i o el $i-1$). Es importante tener en cuenta la definición establecida y no cambiarla en ningún momento para que los parámetros utilizados conduzcan al resultado correcto de las cinemáticas directa e inversa. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de dos articulaciones unidas por un eslabón, en la que se identifican las transformaciones básicas de *Denavit-Hartenberg*:

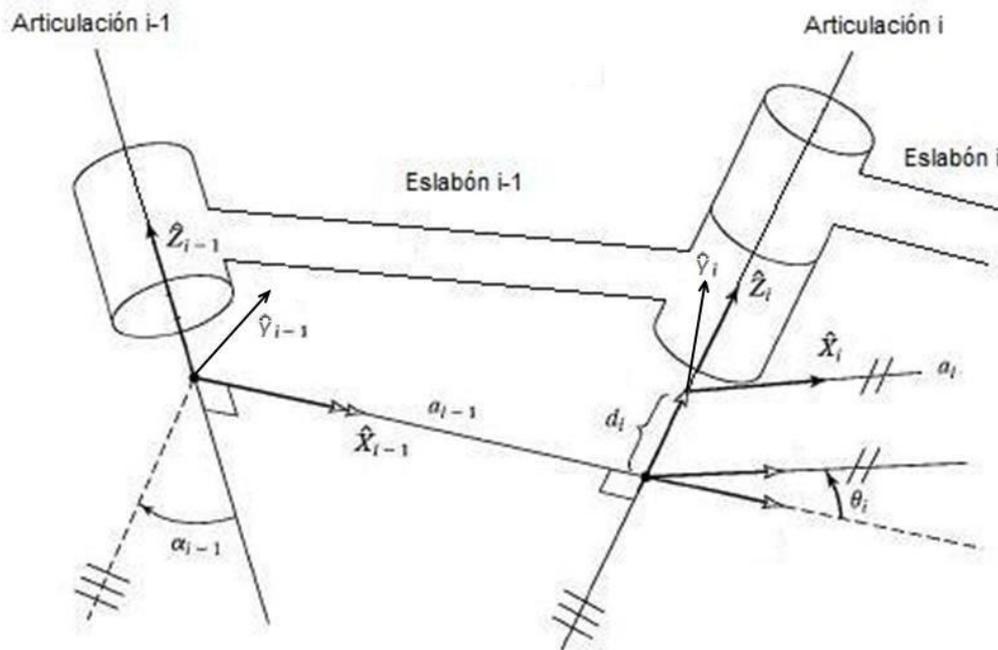


Figura 15

Conociendo cómo deben colocarse los ejes en cada articulación y como se realizan las transformaciones básicas, se procede ahora a obtener los parámetros de *Denavit-Hartenberg* para el manipulador *Kuka KR500-2*. Se colocarán en la siguiente tabla, que recoge los parámetros de cada uno de los eslabones:

24. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

i	α_{i-1} (rad)	a_{i-1} (m)	d_i (m)	θ_i (rad)
1	$-\pi/2$	0,500	1,045	θ_1
2	0	-1,300	0	θ_2
3	$-\pi/2$	-0,055	0	θ_3
4	$\pi/2$	0	-1,025	θ_4
5	$-\pi/2$	0	0	θ_5
6	0	0	0,290	θ_6

Tabla 2

2.2. Matrices de Transformación Homogéneas

Continuando con la notación de *Denavit-Hartenberg*, se puede obtener una matriz de transformación homogénea para cada grado de libertad en la cual ya estarán incluidos todos los parámetros antes descritos. Utilizando las transformaciones homogéneas a través de las matrices homogéneas, es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los distintos eslabones que componen el manipulador. Las matrices de transformación homogénea se representan con la letra *T*, precedida de un subíndice y un superíndice, que representan el sistema de referencia de la articulación precedente (*i-1*), y del posterior (*i*) respectivamente.

Si se desea describir la transformación completa entre las dos articulaciones, es decir, entre los sistemas de coordenadas $\{i\}$ e $\{i-1\}$, se puede escribir:

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}T_R \cdot {}^R T_Q \cdot {}^Q T_P \cdot {}^P T_i \cdot T^i P \quad (2.1)$$

Siendo ${}^i P$ un punto definido en el sistema de referencia $\{i\}$, proyectado en el sistema de referencia $\{i-1\}$. Operando sobre la expresión anterior se obtiene:

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}T \cdot {}^iP \quad (2.2)$$

De donde se deduce que:

$${}^{i-1}T = {}^{i-1}T \cdot {}^R_Q T \cdot {}^Q_P T \cdot {}^P_i T \quad (2.3)$$

Si consideramos esta matriz de transformación, formada por cuatro transformaciones individuales, podemos ver que la expresión anterior puede interpretarse como una serie de rotaciones y desplazamientos alrededor de los ejes X y Z:

$${}^{i-1}T = R_X(\alpha_{i-1}) \cdot D_X(a_{i-1}) \cdot R_Z(\theta_i) \cdot D_Z(d_i) \quad (2.4)$$

Si se utiliza la notación *screw*, en el que un movimiento es la combinación de una rotación y una traslación alrededor de un eje, la expresión anterior puede representarse mediante:

$${}^{i-1}T = \text{Screw}_X(\alpha_{i-1}, a_{i-1}) \cdot \text{Screw}_Z(\theta_i, d_i) \quad (2.5)$$

La expresión anterior puede ser expresada por sus términos matriciales de la siguiente manera:

$${}^{i-1}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cdot \cos\alpha_{i-1} & \sin\theta_i \cdot \sin\alpha_{i-1} & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cdot \cos\alpha_{i-1} & -\cos\theta_i \cdot \sin\alpha_{i-1} & a_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Así se obtiene la forma general de la matriz de transformación homogénea, que expresa la transformación entre los sistemas de coordenadas de dos eslabones consecutivos. Además, se puede expresar la relación entre cualquier par de eslabones, aunque no sean consecutivos. Así se puede obtener una matriz de transformación que será muy importante para los desarrollos cinemáticos y dinámicos del manipulador: la matriz de transformación entre la base y el efector final, que expresará la orientación y posición del efector final en las coordenadas cartesianas. Cada una de las columnas expresa en sus tres primeras filas, comenzando por la izquierda y hacia la derecha, el vector de orientación en el eje X, el Y, el Z y la posición en el mismo orden de

26. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

coordenadas. Por lo tanto las tres primeras columnas se corresponden con la matriz de rotación entre los eslabones tratados, y la última será el vector de posición. La última fila se utiliza para que la matriz sea cuadrada y poder realizar operaciones matriciales de manera más sencilla. En la práctica tiene significado físico y expresa la relación con transformaciones de perspectiva y escalado, que pueden tener aplicación en otros campos como la visión artificial.

2.2.1. Fixed Angles X-Y-Z

Para representar e interpretar las orientaciones se utilizará además de los vectores correspondientes de las matrices de transformación homogéneas, otra notación diferente llamada *fixed angles X-Y-Z*. Se utilizará por la mayor simplicidad a la hora de representar las orientaciones, al tratarse de datos únicos y no de vectores, además de ser la manera más común utilizada en la industria para transmitir este tipo de información, pudiendo tratarse de la notación aquí propuesta o a través de la notación de Euler. En cualquier caso, la información recogida en una matriz de rotación puede ser representada por tres datos cuya información es equivalente. En este proyecto su uso se limita para representar la orientación del efector final respecto de la base del manipulador, ya que el resto de relaciones serán tratadas mediante las matrices de transformación homogéneas. Cada uno de los tres datos se llamará giro (α), inclinación (β) y oscilación (γ). Para la introducción de referencias, estos parámetros serán el formato utilizado, y a través de su conversión a vectores de orientación, se trabajará con ellos en los modelos matemáticos.

El origen de la matriz de rotación equivalente ${}^A_B R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)$, es sencillo, porque todas las rotaciones se producen alrededor de los ejes del sistema de referencia, es decir:

$$\begin{aligned} {}^A_B R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \text{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\text{sen}\gamma \\ 0 & \text{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Es importante tener en cuenta el orden de las rotaciones utilizadas en la expresión anterior. Pensando en los términos de las rotaciones como operadores, se han aplicado las rotaciones (desde la derecha) de $R_x(\gamma)$, después $R_y(\beta)$, y finalmente $R_z(\alpha)$. Multiplicando la expresión, se obtiene:

$$\begin{aligned} {}^A_B R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) &= \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma - \text{sen}\alpha \cdot \cos\gamma & \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \cos\gamma + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\gamma \\ \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta & \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma & \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \text{sen}\gamma \\ -\text{sen}\beta & \cos\beta \cdot \text{sen}\gamma & \cos\beta \cdot \cos\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

El problema inverso, la de extracción de ángulos equivalentes fijos X-Y-Z desde una matriz de rotación, es también un proceso de interés. La solución depende de la resolución de un conjunto de ecuaciones trascendentales: hay nueve ecuaciones y tres incógnitas si la ecuación (2.8) es equiparada a una matriz de rotación dada. Entre las nueve ecuaciones hay seis dependencias, por lo que, en esencia, tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas. Expresando:

$${}^A_B R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Cada uno de los parámetros de inclinación, giro y oscilación (en este sentido) equivalen entonces a:

$$\beta = \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \quad (2.10)$$

$$\alpha = \text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos\beta}, \frac{r_{11}}{\cos\beta}\right) \quad (2.11)$$

$$\gamma = \text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos\beta}, \frac{r_{33}}{\cos\beta}\right) \quad (2.12)$$

Aunque existe una segunda solución, mediante el uso de la raíz cuadrada positiva en la fórmula de β , calculamos siempre la solución única para la cual $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$. Esto es generalmente una buena práctica, porque entonces se puede definir una relación *uno-a-uno* entre las funciones de orientación. Sin embargo, en algunos casos, el cálculo de todas las soluciones es importante. Si $\beta = \pm 90^\circ$ (por lo que $\cos\beta = 0$), la solución degenera. En esos casos, sólo la suma o la diferencia de α e γ puede ser calculada. Una convención posible es elegir $\alpha = 0$ en estos casos.

2.3. Cinemática directa

El objetivo del desarrollo del modelo cinemático directo del manipulador es obtener, para unos valores de articulaciones dados, tanto la posición como la orientación del efector final. De esta manera, mediante la medición de la posición de las articulaciones se puede conocer, para cualquier valor de éstas, donde se encuentra el extremo del robot.

Para la resolución de este modelo matemático es necesario utilizar las matrices de transformación homogéneas descritas en el apartado anterior. Como se vio, cada una de ellas representa el giro y la posición relativa de cada uno de los eslabones,

28. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

proporcionando la información de la posición y orientación de la articulación posterior al eslabón tratado. Se relaciona así el sistema de coordenadas de un eslabón con el de su eslabón anterior. Después, se procede a encadenar las transformaciones individuales, de forma que se obtiene la posición y orientación de un link n respecto al eslabón 0 (base).

Una vez que se han definido los parámetros de *Denavit-Hartenberg* y según se definan las matrices de transformación de toda la cadena cinemática del manipulador, el planteamiento de las ecuaciones de la cinemática directa del manipulador se hace de forma directa.

El primer paso consiste entonces en determinar cada una de las matrices de transformación siguientes:

$${}^0T_1, {}^1T_2, {}^2T_3, {}^3T_4, {}^4T_5, {}^5T_6 \quad (2.13)$$

A partir de ellas, se calculará la matriz homogénea que relacione el efector final con la base, que será la matriz que permitirá obtener de forma directa los datos en el espacio cartesiano del efector final. Para ello se multiplicarán de forma encadenada las matrices de las que se dispone, utilizando la siguiente propiedad:

$${}^0T_N = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot \dots \cdot {}^{N-1}T_N \quad (2.14)$$

Así, la matriz a calcular 0T_6 se obtendrá de la siguiente expresión:

$${}^0T_6 = {}^0T_1(\theta_1) \cdot {}^1T_2(\theta_2) \cdot {}^2T_3(\theta_3) \cdot {}^3T_4(\theta_4) \cdot {}^4T_5(\theta_5) \cdot {}^5T_6(\theta_6) \quad (2.15)$$

Donde cada una de las matrices se define para el manipulador *Kuka KR500-2*:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & a_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & a_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_3 & a_3 \cdot \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 & a_3 \cdot \sin\theta_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & 0 & \sin\theta_4 & 0 \\ \sin\theta_4 & 0 & -\cos\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & 0 & -\sin\theta_5 & 0 \\ \sin\theta_5 & 0 & \cos\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$${}^5_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2.4. Cinemática inversa: método geométrico

Para el desarrollo de la cinemática inversa existen diferentes métodos. El método elegido se basa en el estudio de la geometría del manipulador respecto de cada una de las articulaciones rotativas que lo componen. Otro tipo de métodos de resolución suponen un desarrollo más largo y complejo, como es la resolución algebraica. Dado que cualquier método conduce a la resolución de los valores articulares para una posición y orientación dadas del efector, se eligió un método de sencilla resolución desde el punto de vista computacional, factor importante para finalmente conseguir que los modelos se ejecuten rápidamente para conseguir una alta frecuencia de funcionamiento del lazo de control a implementar.

La expresión $\arctan2$ que aparece en este apartado equivale a la función arcotangente con dos argumentos. El propósito de utilizar dos argumentos en lugar de uno es reunir

30. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

información sobre los signos de las entradas con el fin de devolver el cuadrante correspondiente del ángulo calculado.

El sistema de referencia del manipulador es el único cuya articulación rota (la dirección Z) perpendicular a la base del robot (primera articulación). Por lo tanto, para poder calcular el ángulo girado basta con utilizar la posición del plano perpendicular a la dirección del giro (formado por X e Y) del efector final (parámetro conocido). Para conseguir que el modelo sea más flexible y poder utilizar herramientas de cualquier morfología, en lugar del punto marcado por el efector final (sin herramienta), se utilizará el sistema de referencia anterior, es decir, sin tener en cuenta la brida y la herramienta si la hubiera. Ese punto será la ubicación de la quinta articulación por tanto, y se llamará P . Para calcularlo, a la posición marcada por la posición y orientación del efector final, se deben restar las dimensiones de la herramienta acoplada. En el caso actual, en el que se supone el manipulador sin ningún tipo de herramienta, el punto P se calcula:

$$P = [x, y, z] - d_6 * Z_6 \quad (2.22)$$

d_6 representa el parámetro de Denavit-Hartenberg que se corresponde con la longitud de la brida, que se resta a la posición del efector final en la dirección Z de la última articulación.

A través de sus coordenadas X e Y se puede conocer por tanto el giro de la primera articulación.

$$\theta_1 = \arctan2(P_x, P_y) \quad (2.23)$$

Para calcular el giro de la segunda articulación es necesario un planteamiento geométrico más complejo que para la primera.

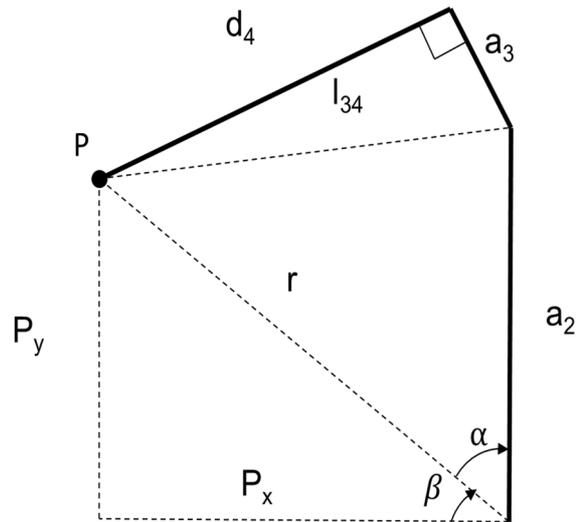


Figura 16

El primer paso es el cálculo del segmento que une la tercera articulación con el efector final, con el fin de tener una medida directa evitando el *offset* que tiene el manipulador en el codo:

$$l_{34} = \sqrt{a_3^2 + l_3^2} \quad (2.24)$$

A partir de las coordenadas X e Y de la posición del efector final respecto del sistema de referencia actual, se calculará la distancia entre la segunda articulación y el extremo del robot:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \quad (2.25)$$

El ángulo formado por el segmento que une ambos puntos con la dirección X del sistema de referencia de la segunda articulación será necesario para el posterior cálculo del ángulo de giro de la articulación:

$$\beta = \arctan2(-P_x, P_y) \quad (2.26)$$

Otro ángulo que es necesario calcular es el del mismo segmento r con respecto al segundo eslabón. Para la obtención de este ángulo se recurre a la ley de los cosenos:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{l_2^2 + r^2 + l_{34}^2}{2 \cdot r \cdot l_2}\right) \quad (2.27)$$

32. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Con estos dos últimos valores ya es posible calcular el ángulo de giro de la segunda articulación. Dependiendo de la configuración del manipulador puede tratarse de dos giros diferentes. En el caso de que la tercera articulación sitúe al efector final entre ella y la segunda articulación en la dirección Z del sistema de referencia original (el de la primera articulación), la configuración que se produce se llamará *codo abajo* y hace que el cálculo del giro de la segunda articulación se realice con la siguiente expresión:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta \quad (2.28)$$

Un ejemplo de configuración de *codo abajo* sería el siguiente:

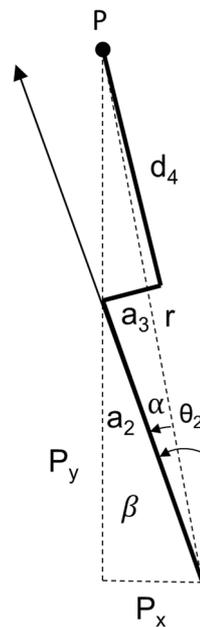


Figura 17

Se observa que respecto de la vertical, que sitúa la posición de referencia (cero grados), teniendo en cuenta el sentido de los ángulos calculados, se debe seguir la expresión anterior para poder calcular el ángulo θ_2 . El caso contrario se llama *codo arriba*, e implica para el cálculo de la segunda articulación la utilización de la siguiente expresión:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \quad (2.29)$$

Un ejemplo de esta configuración aparece en la siguiente imagen:

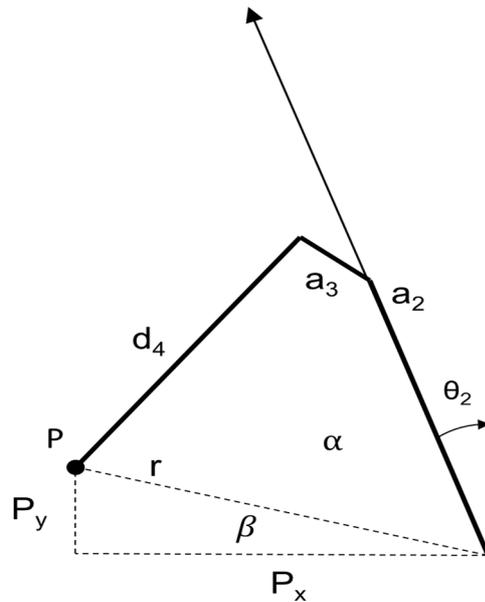


Figura 18

En este caso los sentidos de los giros hacen que sea necesario la resta de los ángulos α y β . Ejemplos de estas configuraciones sobre la representación 3D del manipulador son mostrados en las siguientes imágenes, en las que se muestra como para una misma posición y orientación del efector final existen al menos dos soluciones válidas que implican el uso de una u otra configuración:

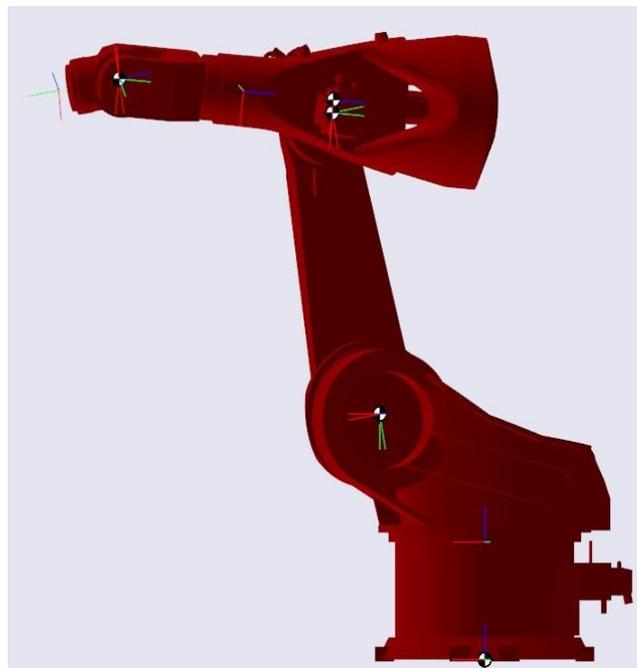


Figura 19. Configuración codo arriba

Para el cálculo del giro de la tercera articulación el proceso es similar al de la segunda.

34. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

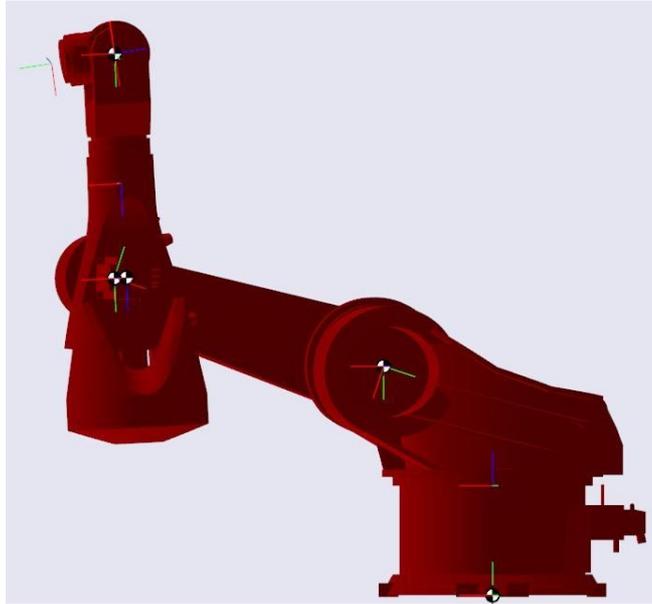


Figura 20. Configuración codo abajo

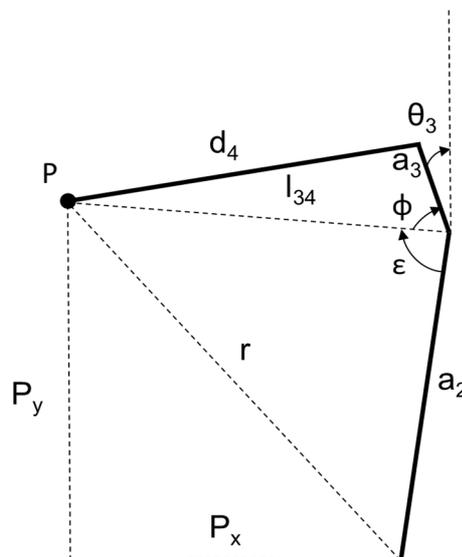


Figura 21

Inicialmente se calcula la hipotenusa r , que une la segunda articulación con el efector final, al igual que en el caso anterior:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \quad (2.30)$$

Los ángulos a calcular ahora son distintos. Uno de ellos es el ángulo formado por el tercer eslabón y el segmento que une la tercera articulación con el efector final:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{a_3^2 + l_{34}^2 + l_3^2}{2 \cdot a_3 \cdot l_{34}}\right) \quad (2.31)$$

El otro es el ángulo que forma esa misma distancia al efector final, pero en este caso con el segundo eslabón. Una vez más se utiliza para despejar la ley de los cosenos:

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_{34}^2 - r^2}{2 \cdot l_2 \cdot l_{34}}\right) \quad (2.32)$$

Finalmente, para calcular la posición angular se deben utilizar dichos ángulos en función de la configuración que presente el manipulador. Para la configuración *codo abajo* la expresión es:

$$\theta_3 = \pi - \varphi + \varepsilon \quad (2.33)$$

En el caso de la configuración *codo arriba*:

$$\theta_3 = -\pi - \varphi - \varepsilon \quad (2.34)$$

Para las siguientes articulaciones, las de la muñeca, el proceso es diferente. En función de la posición de la muñeca se pueden identificar dos nuevas configuraciones, que se llamarán *muñeca arriba* y *muñeca abajo*. Se suman por tanto a las dos anteriores, lo que da lugar a que para una misma posición y orientación del efector final se puedan dar cuatro posiciones articulares diferentes.

Ambas configuraciones de la muñeca se definen observando la orientación del sistema de coordenadas del efector final con respecto al sistema de referencia de la cuarta articulación. Para analizar las configuraciones se utiliza un parámetro de orientación Ω que hace referencia a la orientación del vector unitario Y_6 (o X_6) con respecto al vector unitario Y_4 y que se define como:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_6 \cdot Y_4 = 0 \text{ y } X_6 \cdot Y_4 = 0 \\ Y_6 \cdot Y_4 & \text{si } Y_6 \cdot Y_3 \neq 0 \\ X_6 \cdot Y_4 & \text{si } Y_6 \cdot Y_3 = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Mediante este parámetro se establecerá el giro de la cuarta articulación, lo que posteriormente influirá para los giros de la quinta y la sexta articulación se orienten de manera que se alcance la posición y orientación dadas. Dado que la cuarta y la sexta articulación rotan en torno a un plano común, y sus límites mecánicos son muy elevados ($\pm 350^\circ$ en ambos casos) se pueden dar las dos configuraciones de la

36. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

muñeca, en las que la cuarta y la sexta articulación tengan ángulos complementarios y la quinta articulación tenga un ángulo opuesto.

En el caso de la cuarta articulación, el primer paso consiste en hallar la dirección del eje de giro de la quinta articulación:

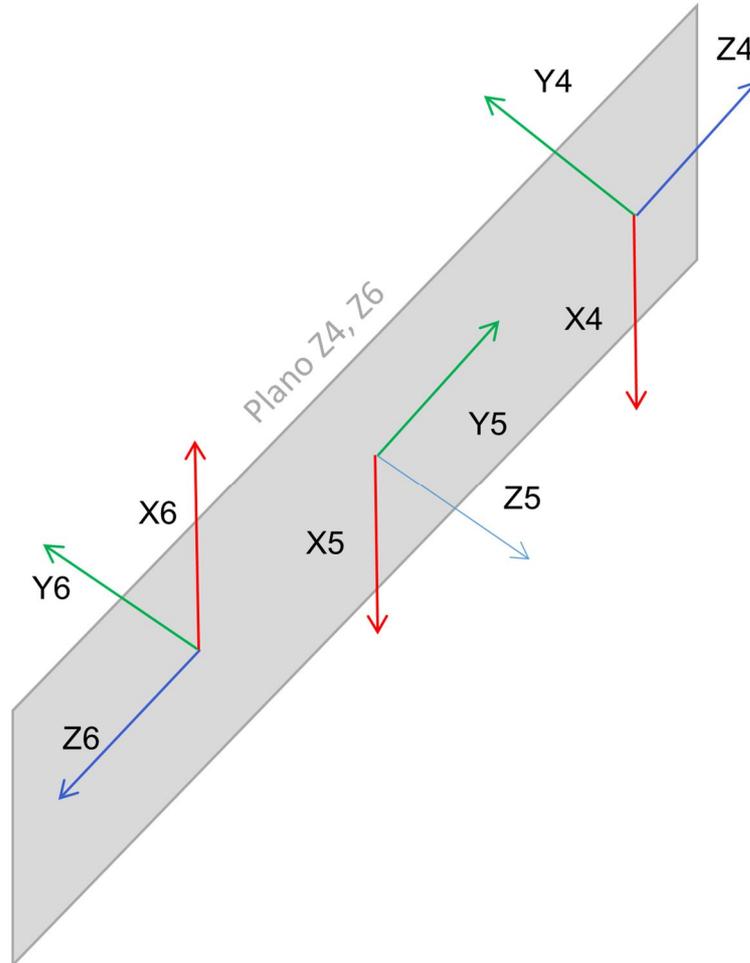


Figura 22

$$\vec{z}_5 = \vec{z}_6 \times \vec{z}_4 \quad (2.36)$$

A partir del plano formado por las direcciones de giro de la cuarta y la sexta articulación, se puede hallar esa dirección, ya que el plano es siempre perpendicular a ella, dado que los giros de la muñeca respecto de las articulaciones cuarta y sexta no lo modifican. El procedimiento de cálculo consistirá en hallar el producto vectorial de ambos vectores. Una vez conocida la dirección del eje de giro de la quinta articulación, se procede a la proyección de los ejes z_5 y x_5 sobre el sistema de referencia de la cuarta articulación:

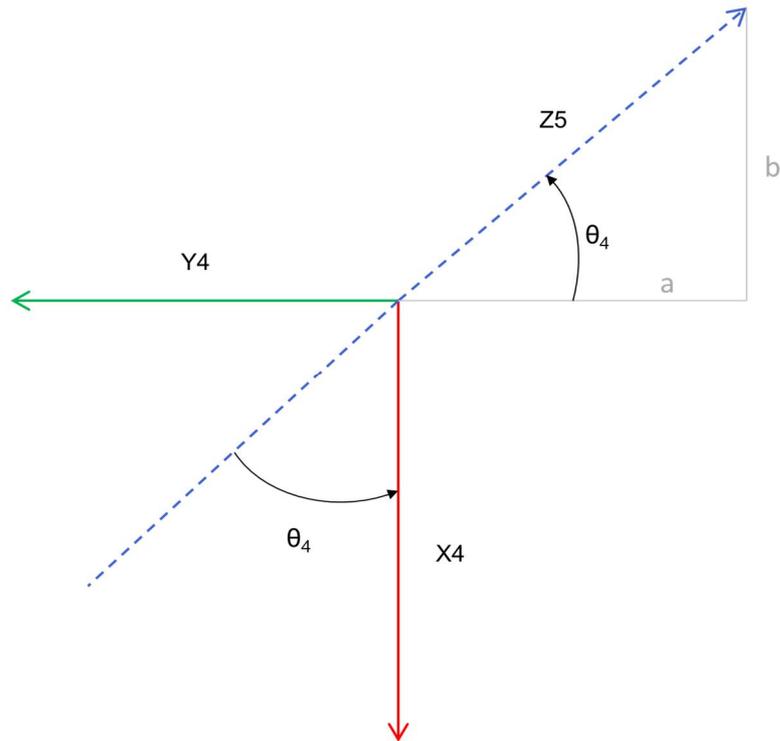


Figura 23

$$a = -\vec{z}_5 \cdot \vec{x}_4 \quad (2.37)$$

$$b = \vec{z}_5 \cdot \vec{y}_4 \quad (2.38)$$

Para el cálculo del ángulo, es necesario tener en cuenta la configuración de la muñeca. Se creará un nuevo parámetro M , que establezca el signo del giro, de manera que se puedan dar dos configuraciones en las que la cuarta articulación presente giros opuestos:

Configuración	Muñeca	Ω	M
Muñeca abajo	1	≥ 0	1
Muñeca abajo	1	< 0	-1
Muñeca arriba	-1	≥ 0	-1
Muñeca arriba	-1	< 0	1

Tabla 3

Este nuevo parámetro se utilizará en la función arcotangente, estableciendo en función de la orientación final el ángulo que tiene que girar la cuarta articulación para obtener la configuración deseada:

38. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$\theta_4 = \arctan2(-M \cdot a, M \cdot b) \quad (2.39)$$

El método de resolución de las ecuaciones posteriores se basa de nuevo en el cálculo de productos vectoriales cuyos resultados sirven para obtener el ángulo de giro a través de la trigonometría.

Una vez calculado θ_4 , tenemos totalmente definido el sistema de coordenadas de la quinta articulación, de modo que el ángulo θ_5 puede calcularse a partir de los ángulos formados entre los vectores directores de esta articulación y el efector final, todos conocidos. Para ello procedemos de nuevo a la proyección de ambos sistemas de coordenadas sobre un mismo plano, en este caso, el plano x_5y_5 :

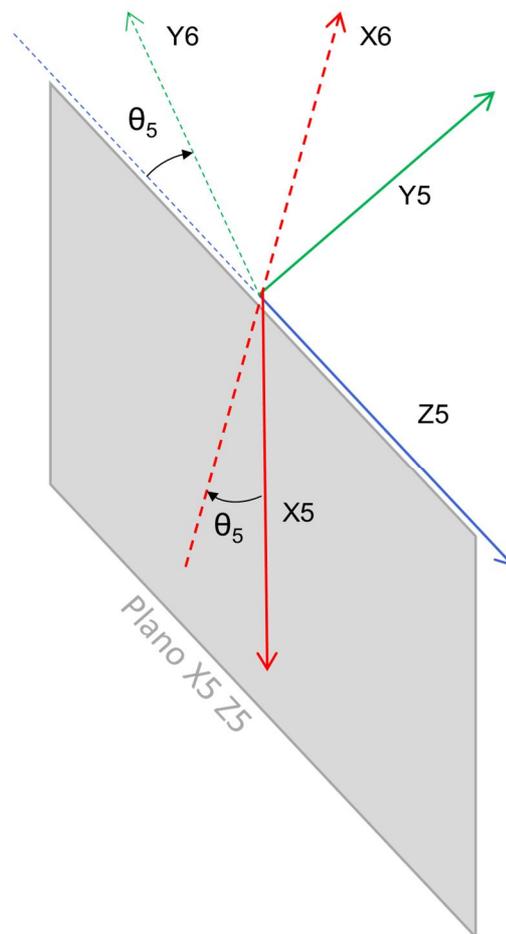


Figura 24

El procedimiento de obtención del ángulo θ_5 es análogo al de la articulación anterior:

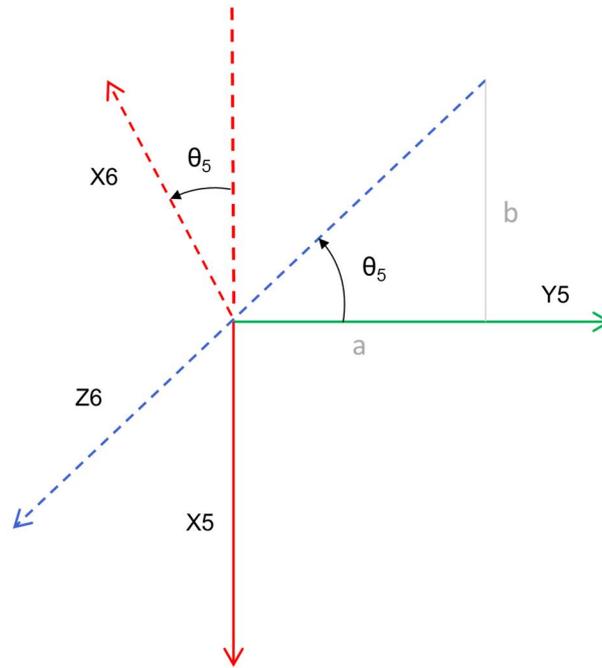


Figura 25

$$a = \vec{y}_5 \cdot -\vec{z}_6 \quad (2.40)$$

$$b = \vec{x}_5 \cdot \vec{z}_6 \quad (2.41)$$

$$\theta_5 = \arctan2(b, a) \quad (2.42)$$

Finalmente, proyectamos de nuevo los sistemas de coordenadas de la quinta y sexta articulación en el mismo plano, esta vez proyectando en la dirección de giro de la sexta articulación z_6 en el plano x_5z_5 . Una vez más, se sigue el mismo procedimiento para la obtención del giro de la articulación:

40. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

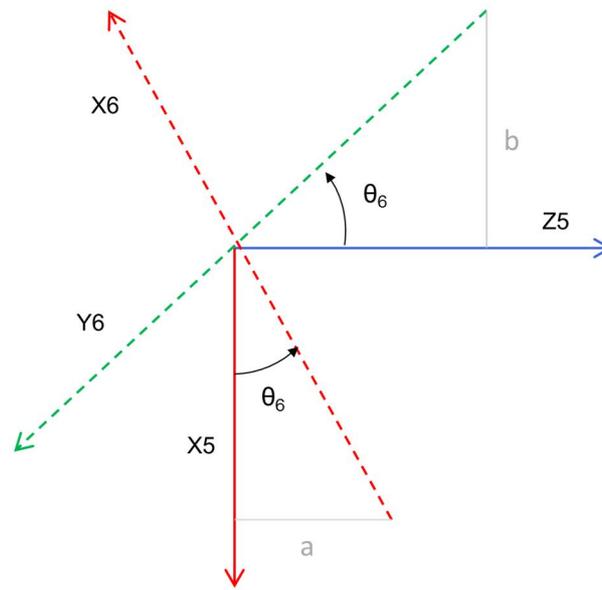


Figura 26

$$a = \vec{x}_6 \cdot \vec{z}_5 \quad (2.43)$$

$$b = -\vec{y}_6 \cdot \vec{z}_5 \quad (2.44)$$

$$\theta_6 = \arctan2(-a, b) \quad (2.45)$$

2.5. Cinemática de la Velocidad: el Jacobiano

Mediante los modelos de la cinemática directa e inversa, se consigue el control estático del posicionamiento, situando el efector final en una localización determinada. Sin embargo, la posición y orientación del efector final no es el único elemento a considerar, sino que también lo serán las velocidades con las que este se moverá hasta alcanzar esta localización. Esta tarea requiere la coordinación de la velocidad instantánea del efector final (lineal y angular) y la de las articulaciones (angular). En este apartado se procede a la obtención de las relaciones de velocidad, es decir, la relación existente entre las velocidades lineal y angular del efector final y las articulaciones.

Matemáticamente, las relaciones de velocidad entre ambos espacios son determinadas mediante el Jacobiano de la función de la cinemática directa. El Jacobiano de esta función va a ser una matriz, la cual es uno de los elementos más importantes en el análisis y control del movimiento en robótica, ya que juega un papel muy importante en muchos aspectos: se utiliza para el cálculo y ejecución de

trayectorias, para la determinación de configuraciones singulares, la derivación de las ecuaciones de la dinámica o para la transformación de fuerzas y el cálculo de los pares de las articulaciones. A partir de las ecuaciones de la cinemática directa, la transformación de velocidad entre ambos espacios se calcula mediante la utilización del Jacobiano.

Se define la velocidad del efector final como un vector del que forman parte tanto la velocidad lineal del mismo, como la velocidad angular:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Siendo \dot{y} el vector de velocidad en el espacio cartesiano del efector final, v su velocidad lineal y ω su velocidad angular.

Las expresiones que se muestran a continuación permiten realizar la transformación entre el espacio cartesiano y el articular de la velocidad lineal y angular del efector final para un instante de tiempo determinado. Para una velocidad angular de giro de las articulaciones se obtiene:

$$v_n^0 = J_v \dot{\theta} \quad (2.47)$$

$$\omega_n^0 = J_\omega \dot{\theta} \quad (2.48)$$

Donde J_v y J_ω son matrices de dimensiones $3 \times n$ y v_n^0 y ω_n^0 representan la velocidad lineal y angular del efector final respectivamente, expresadas respecto al sistema de referencia de la base. Estas expresiones resultan en la siguiente igualdad, que las comprende a ambas:

$$\dot{y} = J(\theta) \dot{\theta} \quad (2.49)$$

\dot{y} se denomina también la *velocidad del cuerpo rígido*, J es la matriz jacobiana (dependiente de las posiciones articulares) y $\dot{\theta}$ es el vector de velocidades articulares. Para que la expresión sea correcta, el Jacobiano debe estar compuesto de la siguiente manera:

42. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Derivando la expresión (2.49), se obtiene la expresión equivalente para la transformación entre el espacio cartesiano y el espacio articular de la aceleración del manipulador:

$$\ddot{y} = J(\theta) \cdot \ddot{\theta} + \left(\frac{d}{dt} \cdot J(\theta) \right) \dot{\theta} \quad (2.51)$$

Para el cálculo de la matriz jacobiana del manipulador de seis grados de libertad tratado en el proyecto, cuyas articulaciones son todas rotativas. Esta matriz permite definir la transformación de las velocidades y las aceleraciones entre el espacio cartesiano y articular.

2.5.1. Cálculo del Jacobiano

La submatriz J_ω es la parte del Jacobiano que se utiliza para la transformación de la velocidad y la aceleración angular entre los espacios articular y cartesiano. Partiendo de la expresión general de la velocidad angular de un eslabón genérico:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R \cdot {}^i\omega_i + \dot{\theta}_i \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (2.52)$$

Donde ${}^{i+1}\omega_{i+1}$ es la velocidad angular del eslabón $i+1$ respecto del mismo sistema de coordenadas; ${}^{i+1}_i R$ la matriz de rotación del eslabón anterior, ${}^i\omega_i$ su velocidad angular y $\dot{\theta}_i$ la velocidad de la articulación sobre la que se sustenta; por último ${}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$ el vector de orientación de la dirección Z de la articulación que gira el eslabón del que se quiere conocer la velocidad angular.

Si se considera toda la cadena cinemática se obtiene:

$$\omega_n^0 = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{k} + \dot{\theta}_2 \cdot {}^0_1 R \vec{k} + \dots + \dot{\theta}_n \cdot {}^0_{n-1} R \vec{k} = \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i \cdot z_{i-1}^0 \quad (2.53)$$

En la ecuación (2.52), en la que se tomó la velocidad angular de cada una de las articulaciones y se multiplicó por la matriz de rotación correspondiente para

referenciarla al sistema de coordenadas de la base, de modo que el resultado final obtenido fue la suma de todas ellas, se demostró que la velocidad del efector final estará determinada por la de todas las articulaciones que conforman el manipulador.

Una vez obtenida la relación (2.53), se iguala a la parte de la expresión de la cinemática de velocidad (2.48) relativa a la velocidad angular, obteniendo J_ω :

$$J_\omega = [z_0^0, z_1^0, \dots, z_{n-1}^0] \quad (2.54)$$

Por otro lado, la submatriz J_v es la parte del Jacobiano que se utiliza para realizar la transformación de la velocidad y la aceleración lineal entre los espacios articular y cartesiano. La velocidad lineal del efector final se corresponde con la derivada del vector posición:

$${}^0\dot{p}_N = {}^0v_N \quad (2.55)$$

Este vector se corresponde con la cuarta columna de la matriz de transformación homogénea 0T , y es función de todos los ángulos de las articulaciones. Por ello, siguiendo la regla de la cadena para su derivación se obtiene:

$${}^0v_N = \sum_{i=1}^n \frac{\partial {}^0v_N}{\partial \dot{\theta}_i} \dot{\theta}_i \quad (2.56)$$

Si se igualan las expresiones (2.47) y la expresión general de la cinemática de velocidad (2.53), se obtiene que la parte del Jacobiano J_v es:

$$J_v = \frac{\partial {}^0v_N}{\partial \dot{\theta}_i} \quad (2.57)$$

Para el cálculo de cada columna de J_v se considera que el resto de articulaciones están fijas, de modo que la distancia ${}^{i-1}P_n$ respecto al sistema de coordenadas $\{i-1\}$ es constante, como si perteneciesen al mismo cuerpo rígido.

Partiendo de la expresión general de la velocidad lineal de un eslabón genérico:

$${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1} \quad (2.58)$$

44. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Tomando la base como sistema de referencia se obtiene:

$${}^0v_N = {}^0\omega_{i-1} \times {}^{i-1}P_N \quad (2.59)$$

Sustituyendo la expresión ${}^0\omega_{i-1}$ y realizando el cálculo de ${}^{i-1}P_N$ como la resta de los vectores de posición de la articulación y el efector final también referenciados a la base, se obtiene la expresión para el cálculo de J_v :

$$J_{vi} = {}^0\hat{Z}_{i-1} \times ({}^0P_N - {}^0P_{i-1}) \quad (2.60)$$

Ahora ya es posible definir el Jacobiano a partir de las submatrices calculadas:

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1}^0 \times (P_n^0 - P_{i-1}^0) \\ z_{i-1}^0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

En el caso del manipulador tratado, que tiene seis grados de libertad, la expresión que define el Jacobiano es:

$$J = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (P_6^0 - P_0^0) & z_1^0 \times (P_6^0 - P_1^0) & \cdots & z_5^0 \times (P_6^0 - P_5^0) \\ z_0^0 & z_1^0 & \cdots & z_5^0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

2.5.2. Singularidades

Las singularidades son configuraciones articulares en las que el manipulador pierde uno o varios grados de libertad. Estas posiciones se pueden conocer a través del Jacobiano. Aquellas configuraciones en las que el Jacobiano pierde el rango completo, es decir, que su determinante es cero, deben ser evitadas en las trayectorias ya que se trata de singularidades.

En una singularidad, el movimiento en al menos una dirección no es posible, independientemente del valor de velocidad de las articulaciones que se considere. Además, cerca de una posición singular, se pueden producir valores excesivamente elevados en la velocidad de alguna articulación.

Muchas singularidades ocurren en los límites del espacio de trabajo del manipulador, por ejemplo, cuando el brazo se encuentra totalmente extendido. Otras se producen por indefiniciones surgidas en los modelos matemáticos.

Además de en los límites del espacio de trabajo, donde el manipulador pierde grados de libertad al encontrarse totalmente extendido, se han identificado dos configuraciones más que se corresponden con singularidades.

Cuando los eslabones cuarto y sexto se encuentran totalmente alineados ($\theta_5=0$), el método utilizado para calcular los giros de dichas articulaciones falla, al no poder utilizar el criterio de la configuración muñeca arriba o muñeca abajo. En ese caso no es posible calcular el giro de las articulaciones, obteniendo una indefinición.

La segunda singularidad se encuentra cuando la posición del efector final (menos su offset) se encuentra situado justamente sobre el sistema de referencia de la primera articulación, haciendo que su posición en el espacio cartesiano en la dirección X e Y sea cero. En ese caso el giro de la primera articulación no puede ser calculado puesto que se obtiene nuevamente una indefinición.

3. Estudio Dinámico

Hasta ahora se ha estudiado el movimiento del manipulador si tener en cuenta las fuerzas que lo causan, es decir, las consideraciones tenidas en cuenta eran cinemáticas: se estudiaron las relaciones de posiciones y velocidades estáticas. En este apartado se abordarán dichas fuerzas, cuyo estudio se conoce como dinámica. Su conocimiento será necesario para tener en cuenta los factores dinámicos reales del manipulador que darán lugar a un control que tiene en cuenta que el funcionamiento del manipulador no es ideal. En esta sección se procede por tanto al desarrollo de las ecuaciones de movimiento del manipulador, en las que se presenta la relación entre el movimiento y las fuerzas y los pares.

El primer paso para el estudio dinámico del manipulador es definir y estudiar las características dinámicas del manipulador. Estas características son los centros de gravedad y tensores de inercia. Estos parámetros deben ser conocidos para resolver y plantear las ecuaciones de la dinámica. Al igual que ocurre con el estudio cinemático, existen dos puntos de vista a la hora de estudiar este problema. Uno de ellos consiste en que dada una trayectoria, velocidad y aceleración del efector final, se calculen los pares que es necesario aplicar en las articulaciones para alcanzar esos valores. Esta formulación se denomina dinámica inversa y será la que se utilice para el desarrollo del control del manipulador. El otro planteamiento consiste en conocer el comportamiento dinámico del manipulador cuando se le aplican una serie de pares en sus articulaciones. A partir de ellas se calculará cuál será el movimiento resultante que estos producen. Este punto de vista se utilizará en la simulación del manipulador, conocido como planteamiento de la dinámica directa.

3.1. Distribución de la Masa del Manipulador

La primera de las características dinámicas a estudiar es la distribución de la masa en el manipulador. La mayor parte de ésta la conforman los eslabones, por lo que será el objeto de estudio principal de este apartado.

3.1.1. Centros de Masas

El centro de masas de un cuerpo es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de todas las fuerzas externas al cuerpo. Permite trabajar con el punto obtenido de manera que la geometría del cuerpo no influya en los cálculos, al haberla tenido ya en cuenta, simplificando el proceso. El sistema formado por toda la masa concentrada en el centro de masas es por lo tanto un sistema equivalente al original. Cuando se trabaja con cuerpos situados en la tierra, los términos Centro de Masas y Centro de Gravedad son equivalentes, debido a que el cuerpo está sometido a un campo gravitatorio constante.

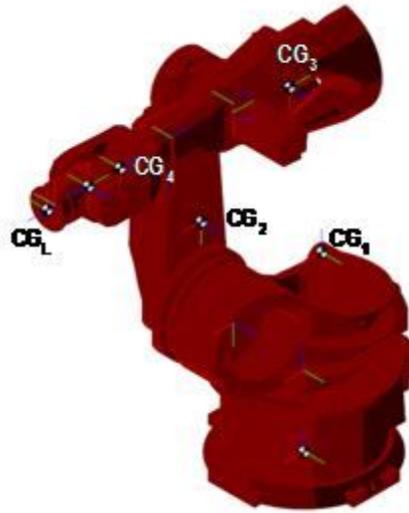


Figura 27. Situación de los centros de masas

Como se comentó al inicio de esta sección, el principal objeto de estudio serán los eslabones. Por ello se comienza por la localización de los centros de masas de cada uno de ellos. Es importante conocer su posición relativa respecto de la articulación a la que van unida y sobre la que su masa ejerce un efecto dinámico directo. Es decir, se debe conocer su posición respecto de la articulación sobre la que rotan, y no la posterior, a la que también están unidos. A partir de esa posición relativa respecto del sistema de referencia de cada una de las articulaciones correspondientes, se podrá conocer su posición para cualquier ubicación en la que se encuentre el manipulador, y por tanto, se conocerá su efecto sobre la dinámica del mismo. Para el cálculo de las posiciones de los centros de masas respecto de los sistemas de referencia se utilizan los datos ofrecidos por el fabricante.

Dado que se utilizan matrices de transformación homogéneas que contienen el giro de cada uno de los sistemas de referencia, la posición de los centros de masas se puede considerar fija respecto de ellos, por lo que conociendo los datos de posición de cada uno de ellos es suficiente para poder realizar los cálculos de los términos dinámicos en los que este parámetro tiene influencia.

3.2. Pseudo-Matriz de Inercia

Para determinar el tensor de inercia de cada eslabón se ha utilizado el archivo de calibración del propio robot existente en la instalación. Se han extraído también los valores teóricos desde el modelo CAD del mismo (suponiendo una densidad de material de 200 Kg/m³).

La masa de los eslabones se va a ver sometida a fuerzas de inercia durante el movimiento del manipulador, produciendo esfuerzos en las articulaciones del mismo que deben considerarse en los cálculos dinámicos.

48. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

En los sistemas con un solo grado de libertad, a menudo hablamos de la masa de un cuerpo rígido. En el caso del movimiento de rotación alrededor de un solo eje, la noción del momento de inercia es conocida. Para un cuerpo rígido que es libre para moverse en tres dimensiones, hay infinitos ejes de rotación posibles. En el caso de rotación alrededor de un eje arbitrario, necesitamos una forma completa de la caracterización de la distribución de la masa del cuerpo rígido. En este caso, se introduce el tensor de inercia, que, para nuestros propósitos, puede ser considerado como una generalización del momento escalar de inercia de un objeto. El tensor de momentos de inercia es una matriz simétrica de dimensiones 4x4, que se caracteriza por tener la distribución de la masa del cuerpo rígido. Esta matriz es constante y se calcula sólo una vez para cada eslabón. Esta depende de su geometría y su distribución de masa. La expresión general de esta matriz para un eslabón i es:

$$I_i = \int_{\text{eslabón } i} {}^i r \cdot {}^i r^T \cdot dm \quad (3.1)$$

Donde:

$$r = [x \ y \ z \ 1] \quad (3.2)$$

son las coordenadas del centro de masa y dm es la masa infinitesimal del eslabón i localizada en dicho punto. Expandiendo la expresión anterior se obtiene la expresión general de la pseudomatriz de inercia de un eslabón i :

$$I = \begin{bmatrix} \int x^2 \cdot dm & \int yx \cdot dm & \int zx \cdot dm & \int x \cdot dm \\ \int yx \cdot dm & \int y^2 \cdot dm & \int yz \cdot dm & \int y \cdot dm \\ \int zx \cdot dm & \int yz \cdot dm & \int z^2 \cdot dm & \int z \cdot dm \\ \int x \cdot dm & \int y \cdot dm & \int z \cdot dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Para poder expresar la pseudomatriz de inercia con los datos propios del manipulador que se está tratando, se debe ajustar la matriz de la expresión (3.3) a los datos de los que se dispone, proporcionados por el fabricante. Entre ellos están los elementos I_{xx} , I_{yy} y I_{zz} , que se conocen como los *momentos principales de inercia*:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \quad (3.4)$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm \quad (3.5)$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad (3.6)$$

Los *productos de inercia* también son un dato conocido:

$$I_{xy} = \int xy \cdot dm \quad (3.7)$$

$$I_{xz} = \int xz \cdot dm \quad (3.8)$$

$$I_{yz} = \int yz \cdot dm \quad (3.9)$$

Por último, están los momentos de primer orden:

$$m\bar{x} = \int x \cdot dm \quad (3.10)$$

$$m\bar{y} = \int y \cdot dm \quad (3.11)$$

$$m\bar{z} = \int z \cdot dm \quad (3.12)$$

Utilizando estos datos en la matriz (3.3), de manera que ésta siga estando formada por los mismos elementos, se obtiene:

$$I = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m\bar{x} \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m\bar{y} \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m\bar{z} \\ m\bar{x} & m\bar{y} & m\bar{z} & m \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.3. Dinámica Inversa

Existen dos métodos para realizar los modelos matemáticos de la dinámica inversa de un sistema mecánico: la formulación de *Newton-Euler* y la formulación de Euler-

50. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Lagrange. Ambos métodos proporcionan las mismas ecuaciones de movimiento pero desde dos puntos de vista diferentes. La formulación de *Newton-Euler* es un método iterativo que se basa en el balance de fuerzas del sistema. Con este planteamiento se trata cada eslabón de forma independiente, de modo que para cada uno de ellos y de forma sucesiva se definen las ecuaciones de su movimiento lineal y angular. Como cada eslabón está unido a sus contiguos, en estas ecuaciones aparecen fuerzas de los pares de las articulaciones, así como la influencia del movimiento de unos eslabones sobre otros. La formulación de *Euler-Lagrange* se basa sin embargo en el balance de las energías. Ese balance será la diferencia entre energía cinética y potencial, aunque también es posible tener en cuenta las pérdidas por fricción seca y viscosa en las articulaciones. Además de esta diferencia fundamental de planteamiento, ambos métodos se diferencian en que, aunque las ecuaciones de movimiento resultantes sean las mismas, mediante la formulación de *Euler-Lagrange* se puede tener en cuenta las flexiones del mecanismo, al contrario que con la formulación de *Newton-Euler*, por lo que el resultado será más cercano al sistema real que se quiere modelar. Esto es debido a que las articulaciones, aunque sean de una rigidez bastante elevada, se pueden considerar flexibles, por lo que la energía potencial incluirá términos que contienen la energía almacenada en los elementos elásticos. En el balance de fuerzas sin embargo no se pueden incluir estos términos. Por ese motivo la formulación utilizada ha sido la de *Euler-Lagrange*, tanto en el desarrollo teórico como en el de la simulación.

Históricamente, ambas se han ido utilizando de la misma forma, ya que son equivalentes prácticamente en todos los sentidos (computación, resultados, etc.). La formulación de *Newton-Euler* facilita el cálculo de las fuerzas generalizadas que es necesario aplicar para conseguir una determinada evolución en el tiempo, mientras que la formulación de *Euler-Lagrange* describe la evolución de las fuerzas generalizadas sin calcular la relación de la misma con la trayectoria, utilizándose habitualmente en el cálculo numérico.

3.3.1. Formulación Euler-Lagrange

La formulación de *Euler-Lagrange* es un método sistemático para la obtención del modelo dinámico de un manipulador de n grados de libertad, en el que se establece la relación entre las posiciones de las articulaciones, velocidades, aceleraciones y los pares aplicados al manipulador. Los pares que aparecen en el sistema son momentos no conservativos, generados por los actuadores, las fuerzas de fricción en las articulaciones y los pares inducidos en las articulaciones. El aspecto de las posibles fuerzas existentes si se produjese una resistencia al movimiento de la herramienta que se tradujese en fuerzas que se oponen al movimiento, no será tenido en cuenta en este apartado. Ese aspecto será incluido en el apartado Control de fuerza, en el que se propone un lazo de control que contemplaría ese supuesto de funcionamiento con fuerzas resistentes en la herramienta, pero sin modificar la formulación de la dinámica inversa.

En los siguientes subapartados se presenta el desarrollo de las ecuaciones del modelo dinámico del manipulador. En ellas se utilizan las matrices de transformación

homogéneas T obtenidas en el modelo cinemático presentado en el apartado *Matrices de Transformación Homogéneas*. En primer lugar, se calcula la velocidad de un eslabón genérico y después su tensor de inercia. Estos valores se utilizan para el cálculo de la energía cinética. A continuación, se calcula la energía potencial. Una vez obtenidos ambos valores, se formula el *Lagrangiano* y se obtienen las ecuaciones que nos proporcionan el modelo dinámico.

3.3.1.1. Velocidad de un punto del manipulador

Para el cálculo de la energía cinética de un manipulador de n grados de libertad, es necesario calcular la velocidad de cada una de las articulaciones. En esta sección se muestra el desarrollo del cálculo de la velocidad en un punto del mismo.

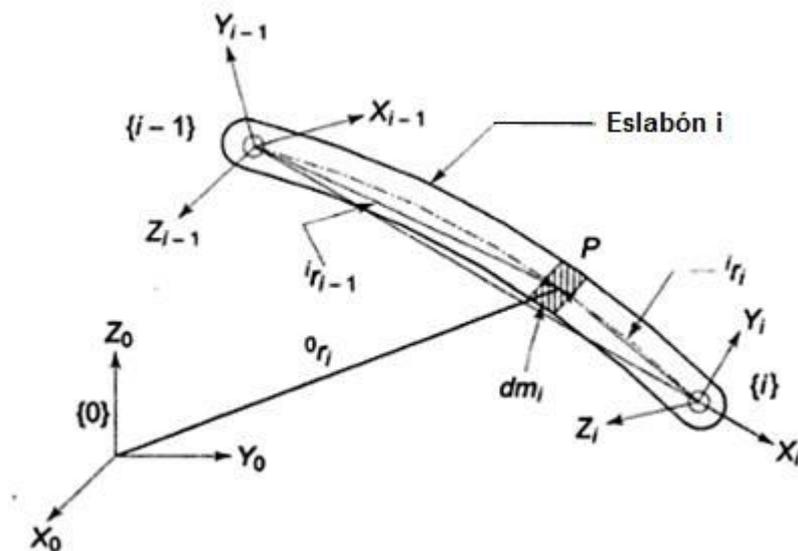


Figura 28

En la figura anterior se muestra un eslabón respecto de dos sistemas de referencia, de las articulaciones sobre las que rota ($\{i-1\}$ e $\{i\}$), además del sistema de referencia $\{0\}$. El punto designado por la letra P será el punto sobre el que se calculará la velocidad. La posición del punto P respecto al eslabón i , es expresada mediante el vector r .

La velocidad de dicho punto respecto al sistema de coordenadas de la base $\{0\}$ se corresponde con la expresión:

$${}^0v_i \equiv v_i = {}^0\dot{r}_i = \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0T_i}{\partial \theta_j} \cdot \dot{\theta}_j \right] \cdot {}^i r_i \quad (3.14)$$

donde se debe tener en cuenta el hecho de que la derivada de la posición respecto al propio sistema de coordenadas es nulo, como se expresa en la siguiente igualdad:

52. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$${}^i \dot{r}_i = 0 \quad (3.15)$$

La velocidad, valor a calcular, es la derivada de la posición. Debido a que las matrices de transformación T contienen elementos trigonométricos, su derivada parcial respecto a los ángulos implica operaciones complejas y con un alto costo computacional. Por ello, y debido a que el mismo resultado se puede obtener mediante la utilización de operaciones matriciales, más eficientes computacionalmente que las derivadas parciales, se utilizarán estas últimas. Matemáticamente estos pasos pueden implementarse mediante la utilización de una matriz de dimensiones 4x4, denominada Q_j , definida para articulaciones de revolución. Esta equivalencia con la derivada se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial {}^{j-1}T_j}{\partial \theta_j} = Q_j \cdot {}^{j-1}T_j \quad (3.16)$$

Es importante tener en mente el hecho de que la derivada parcial de una matriz de transformación homogénea de una matriz ${}^{i-1}T_i$ respecto a θ_j representa el efecto del movimiento de la articulación j sobre el eslabón i . La velocidad de un eslabón v_i expresada en la ecuación (3.14), se simplifica utilizando la matriz Q_j , y queda como:

$$v_i = \frac{dr}{dt} = \sum_{j=1}^i {}^{j-1}T_j \cdot Q_j \cdot {}^{j-1}T_i \cdot \dot{\theta}_j \cdot {}^i r_i \quad (3.17)$$

3.3.1.2. Energía Cinética

La derivada de la energía cinética de una masa infinitesimal dm_i perteneciente a un eslabón i , situada en ${}^0 r_i$ y que se mueve con una velocidad ${}^0 v_i \equiv v_i$ respecto al sistema de coordenadas de la base $\{0\}$ es:

$$dK_i = \frac{1}{2} dm_i (v_i)^2 \quad (3.18)$$

Esta expresión también puede escribirse utilizando las matrices de transformación homogéneas de cada uno de los eslabones, utilizando la función matemática traza:

$$dK_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i ({}^0T_{j-1} \cdot \mathcal{Q}_j \cdot {}^{j-1}T_i)^i r_i \cdot {}^i r_i^T \cdot dm_i \cdot ({}^0T_{k-1} \cdot \mathcal{Q}_k \cdot {}^{k-1}T_i)^T \dot{\theta}_j \cdot \dot{\theta}_k \right] \quad (3.19)$$

La energía cinética del eslabón completo es por lo tanto la integral de esta expresión:

$$K_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i ({}^0T_{j-1} \cdot \mathcal{Q}_j \cdot {}^{j-1}T_i) \int {}^i r_i \cdot {}^i r_i^T \cdot dm_i \cdot ({}^0T_{k-1} \cdot \mathcal{Q}_k \cdot {}^{k-1}T_i)^T \dot{\theta}_j \cdot \dot{\theta}_k \right] \quad (3.20)$$

El término $\int {}^i r_i \cdot {}^i r_i^T \cdot dm_i$ corresponde con la pseudomatriz de inercia, de modo que;

$$K_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i ({}^0T_{j-1} \cdot \mathcal{Q}_j \cdot {}^{j-1}T_i) I_i \cdot ({}^0T_{k-1} \cdot \mathcal{Q}_k \cdot {}^{k-1}T_i)^T \right] \dot{\theta}_j \cdot \dot{\theta}_k \quad (3.21)$$

Expresada para un mecanismo de n grados de libertad, la energía cinética total sería:

$$K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr} [({}^0T_{j-1} \cdot \mathcal{Q}_j \cdot {}^{j-1}T_i) I_i \cdot ({}^0T_{k-1} \cdot \mathcal{Q}_k \cdot {}^{k-1}T_i)^T] \dot{\theta}_j \cdot \dot{\theta}_k \quad (3.22)$$

La energía cinética es por lo tanto una función escalar que depende de la posición y velocidad de las articulaciones.

3.3.1.3. Energía Potencial

La energía potencial P_i de un eslabón i en un campo gravitatorio g es:

$$P_i = -m_i \cdot \vec{g} \cdot ({}^0\vec{r}_i) = -m_i \cdot \vec{g} \cdot {}^0T_i \cdot {}^i\vec{r}_i \quad (3.23)$$

donde los vectores ${}^0\vec{r}_i$ y ${}^i\vec{r}_i$ representan la posición del centro de masa del eslabón i respecto a los sistemas de coordenadas $\{0\}$ e $\{i\}$ respectivamente y la aceleración debida a la gravedad, definida por el vector:

$$g = [g_x \quad g_y \quad g_z \quad 0]^T \quad (3.24)$$

54. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Se trata de un vector 4x1 respecto al sistema de coordenadas de la base {0}. El signo negativo de la energía potencial indica que el trabajo se realiza sobre el sistema para mover el eslabón i en contra de la fuerza de la gravedad. La energía potencial total del manipulador es la suma de la energía potencial de todos sus eslabones, de forma que:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = - \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{g} \cdot {}^0T_i \cdot {}^i\vec{r}_i \quad (3.25)$$

Como ${}^0\vec{r}_i$ depende de la posición de las articulaciones θ_i , la energía potencial de un manipulador se describe por una función escalar que depende de estas variables.

3.3.1.4. Ecuaciones del Movimiento del Manipulador

Una vez obtenidas las expresiones de la energía cinética y potencial de los eslabones del manipulador se puede obtener la expresión del *Lagrangiano* a través de la siguiente ecuación:

$$L = K - P \quad (3.26)$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i Tr[({}^0T_{j-1} \cdot \mathcal{Q}_j \cdot {}^{j-1}T_i) I_i \cdot ({}^0T_{k-1} \cdot \mathcal{Q}_k \cdot {}^{k-1}T_i)^T] \dot{\theta}_j \cdot \dot{\theta}_k + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{g} \cdot {}^0T_i \cdot {}^i\vec{r}_i \quad (3.27)$$

De acuerdo con la formulación de *Euler-Lagrange*, los pares que se deben generar en las articulaciones, siguen la siguiente expresión:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \quad (3.28)$$

El par de cada articulación viene dado por la ecuación anterior, que extendida, utilizando la igualdad de la ecuación (3.28) se define de la siguiente manera:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}(\theta) \cdot \ddot{\theta}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \cdot \dot{\theta}_j \cdot \dot{\theta}_k + G_i \quad (3.29)$$

Donde:

- los coeficientes de M_{ij} están relacionados con la aceleración de cada articulación y representan la inercia que carga el actuador. Se conoce como la matriz de inercias y se define:

$$M_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^n Tr[d_{pj} \cdot I_p \cdot d_{pi}^T] \quad (3.30)$$

- Los coeficientes h_{ijk} representan el par de reacción inducido por la velocidad en la articulación i . Los índices j y k están relacionados con las velocidades de las articulaciones respectivas, cuya interacción dinámica provoca par de reacción en la articulación i . Se conoce como la fuerza de *Coriolis* que actúa en la articulación i debido a la velocidad de las articulaciones j y k :

$$h_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^n Tr \left[\frac{\partial(d_{pk})}{\partial\theta_p} \cdot I_p \cdot d_{pi}^T \right] \quad (3.31)$$

- Los términos en los que aparece la gravedad g , representan el momento generado por la gravedad en cada articulación. Los coeficientes de la matriz G_i representan las fuerzas de la gravedad que actúan sobre el eslabón i debido a la masa de los eslabones desde i hasta n , es decir, cada eslabón del manipulador se ve sometido a los momentos generados por el peso propio y el de los eslabones posteriores.

$$G_i = - \sum_{p=i}^n m_p \cdot \vec{g} \cdot d_{pi} \cdot {}^p \vec{r}_p \quad (3.32)$$

- Los términos d_{ij} determinan la velocidad de cambio de los puntos ${}^i r_i$ del eslabón i , es decir, la variación de la posición y orientación del sistema de coordenadas $\{i\}$ respecto al sistema de coordenadas de la base $\{0\}$ debido a la variación de la posición de la articulación θ_j :

$$d_{ij} = \begin{cases} {}^0 T_{j-1} \cdot Q_j \cdot {}^{j-1} T_i & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases} \quad (3.33)$$

56. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$\frac{\partial(d_{ij})}{\partial\theta_k} = \begin{cases} {}^0T_{j-1} \cdot Q_j \cdot {}^{j-1}T_{k-1} \cdot Q_k \cdot {}^{k-1}T_i & i \geq k \geq j \\ {}^0T_{k-1} \cdot Q_k \cdot {}^{k-1}T_{j-1} \cdot Q_j \cdot {}^{j-1}T_i & i \geq j \geq k \\ 0 & i < j, i < k \end{cases} \quad (3.34)$$

La ecuación del modelo dinámico lineal proporcionará un conjunto de n ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden para cada uno de los eslabones del manipulador. Estas ecuaciones son denominadas ecuaciones del movimiento o ecuaciones dinámicas del movimiento del manipulador.

Además de los eslabones, el contrapeso tiene efecto en la inercia del manipulador, e introducirá una variación dinámica en la tercera articulación. Esta consideración ya se ha tenido en cuenta en el cálculo del centro de gravedad de dicha articulación.

Para simplificar la ecuación (3.46) se define un vector que aúne los pares de todos los eslabones y que simplifique la expresión, expresándola de la siguiente manera:

$$\tau = M(\theta) \cdot \ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) \quad (3.35)$$

En la que M será la matriz completa de inercias, a la que habrá que multiplicar las aceleraciones de las articulaciones establecidas en un vector; H será la matriz con los términos de *Coriolis* y centrífugos; y G es la matriz de la gravedad.

3.3.1.5. Introducción de los efectos de fricción

Durante el desarrollo de las ecuaciones de la dinámica del manipulador no se han tenido en cuenta todos los efectos que están actuando sobre el manipulador. La introducción de todos ellos es imposible, ya que, además de no poder conocer todos los datos necesarios, la utilización de un modelo demasiado complejo no resultaría realizable, aportando además poca diferencia con respecto a los factores ya tenidos en cuenta, que son los de mayor influencia en la dinámica: Hasta ahora se han considerado las fuerzas que surgen debido a la mecánica de sólido rígido. Sin embargo, para tener un modelo dinámico más completo del manipulador, se introducirá un nuevo factor que tiene una influencia apreciable. Ese factor es la fricción. En todas las articulaciones del manipulador se disponen de unidades de reducción, donde la fricción puede ser considerablemente alta.

Existen diferentes modelos para el modelado de la fricción. En primer lugar se tiene la Fricción Viscosa, en la que el par que se opone al movimiento debido a la fricción es proporcional a la velocidad de giro de la articulación:

$$\tau_{fricción} = \nu \cdot \dot{\theta} \quad (3.36)$$

siendo ν es la constante de fricción viscosa del material.

En segundo lugar, se tiene la *Fricción de Coulomb*, en la que se considera el signo de la velocidad de giro de la articulación.

$$\tau_{fricción} = c \cdot \text{sgn}(\dot{\theta}) \quad (3.37)$$

Donde c es la constante de *Coulomb* del material.

El modelo final a utilizar incluye ambos efectos de fricción, de tal forma que:

$$\tau_{fricción} = \nu \cdot \dot{\theta} + c \cdot \text{sgn}(\dot{\theta}) \quad (3.38)$$

La fricción depende también de la posición de las articulaciones, debido sobre todo a que las etapas de reducción no son perfectamente redondas, por lo que su excentricidad provoca que la fricción varíe. Por lo tanto la función que determine la fricción será dependiente de las posiciones y de las velocidades angulares.

Una vez determinado el modelo de fricción, este se añade como un término más en la ecuación de la dinámica inversa:

$$\tau = M(\theta) \cdot \ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (3.39)$$

3.3.1.6. Dinámica de los actuadores

Para tener un modelo dinámico completo del sistema real debería añadirse a las ecuaciones del propio manipulador la influencia de los actuadores sobre la dinámica. Al tratarse de motores de corriente continua, factores como la inductancia o la constante de par influyen en la dinámica al no comportarse el motor de manera ideal. Sin embargo, los factores dinámicos de los motores serán compensados por los Drivers (apartado 4.3.3), por lo que en el lazo de control no será necesario tenerlos en cuenta. Aun así es interesante plantear la expresión dinámica con la influencia de estos parámetros para conocer realmente lo que está sucediendo en el lazo de control del servomotor y tener constancia de todos los parámetros que se tienen en cuenta a la hora de realizar el control de un manipulador completo, incluyendo sus actuadores, que en este caso son motores. Se supone una inductancia del inducido despreciable.

58. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Las dinámicas de los motores que mueven las articulaciones vienen dadas por las ecuaciones desacopladas para cada uno de ellos:

$$J_M \cdot \ddot{\theta}_M + B \cdot \dot{\theta}_M + F_M + R_\tau = K_M \cdot v \quad (3.40)$$

Donde J_M es la inercia del motor, B la constante de amortiguación del rotor, F_M la fricción del motor, R_τ la resistencia de armadura, K_M la constante de par y v la tensión del motor. $\ddot{\theta}_M$ y $\dot{\theta}_M$ son la aceleración y la velocidad del rotor, respectivamente.

La relación de transmisión del acoplamiento del motor i a la articulación del brazo asociada es r_i , que se define de manera que:

$$\theta_i = r_i \cdot \theta_{Mi} \quad (3.41)$$

Utilizando la igualdad anterior en la fórmula (3.56):

$$(J_M + R^2 \cdot M) \cdot \ddot{\theta} + (B + R^2 \cdot H_M) \cdot \dot{\theta} + (R \cdot F_M + R^2 \cdot F) + R^2 \cdot G = R \cdot K_M \cdot v \quad (3.42)$$

Esta fórmula equivaldría a una nueva expresión dinámica, tal que:

$$\tau = M'(\theta) \cdot \ddot{\theta} + H'(\theta, \dot{\theta}) + F'(\theta, \dot{\theta}) + G'(\theta) \quad (3.43)$$

3.4. Dinámica Directa

Como se vio en el cálculo de la dinámica inversa, cuando se utiliza la formulación de *Euler-Lagrange* se obtienen unas matrices que describen dinámicamente al mecanismo. Por lo tanto, una vez que se han obtenido dichas matrices, el cálculo dinámico directo también puede ser llevado a cabo, simplemente variando el dato del que se dispone, es decir, en lugar de introducir las aceleraciones y obtener el par, se utilizarían los datos de par necesario y se obtendrían las aceleraciones generadas por estos pares.

El planteamiento de la dinámica directa de un manipulador permite conocer la posición, velocidad y aceleración de los elementos que lo constituyen ante un par externo aplicado en sus articulaciones mediante los actuadores del sistema. Este modelo se utilizará para la simulación dinámica del movimiento de los manipuladores.

Para la simulación *del* manipulador se necesita un modelo que represente el comportamiento del manipulador ante la recepción de los pares generados por el control. Por una parte, se establecerá una equivalencia a través de la dinámica inversa

ya realizada, y por otro se creará un modelo en *Simulink* (6.1-Simulación dinámica) que represente al manipulador y simule su dinámica directa.

Para el planteamiento de una equivalencia matemática se parte de las ecuaciones dinámicas del movimiento, desarrolladas para la dinámica inversa. A partir de ellas, el cálculo de la simulación requiere únicamente la resolución de la misma para la aceleración:

$$\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta)[\tau - H(\theta, \dot{\theta}) - G(\theta) - F(\theta, \dot{\theta})] \quad (3.44)$$

Dadas las condiciones iniciales del movimiento del manipulador, se pueden aplicar técnicas de integración numérica para integrar la aceleración y calcular futuras posiciones y velocidades del mismo (parámetros que serán realimentados en los lazos de control). Para ello existen numerosos métodos matemáticos diferentes. El método elegido es el trapezoidal y es realizado a través del bloque de integración disponible en *Simulink*.

4. Control

El problema de control de robots manipuladores es el problema de determinar las entradas conjuntas necesarias para hacer que el efector final ejecute un movimiento ordenado. Las entradas conjuntas pueden ser fuerzas conjuntas o pares, siendo estos parámetros entradas a los actuadores, por ejemplo, entradas de tensión a los motores, en función del modelo utilizado para el diseño del controlador. El movimiento ordenado se suele especificar como una secuencia de posiciones y orientaciones del efector final, o como una trayectoria continua. Hay muchas técnicas de control y metodologías que se pueden aplicar para el control de los manipuladores. El método de control particular elegido, así como la manera en que se aplica puede tener un impacto significativo en el rendimiento del manipulador y por consiguiente en el rango de sus posibles aplicaciones. Por ejemplo, el seguimiento de trayectorias continuas requiere una arquitectura de control diferente que un control punto a punto, que posiciona al manipulador en el punto objetivo sin tener en cuenta la trayectoria seguida hasta alcanzarlo. Además, el diseño mecánico del propio manipulador influirá en el tipo de sistema de control necesario. Esto crea la necesidad de una compensación entre hardware y software, es decir, entre la estructura mecánica del sistema y la arquitectura y la programación del controlador.

La mayoría de los manipuladores son accionados por actuadores que suministran una fuerza o un par motor para provocar el movimiento de los eslabones. En este caso, se necesita un algoritmo para calcular pares de torsión que hará que se produzca el movimiento deseado. El problema de la dinámica es fundamental para el diseño de tales algoritmos, pero no constituye en sí misma una solución. Una preocupación primordial de un sistema de control de posición es compensar automáticamente los errores en el conocimiento de los parámetros de un sistema y suprimir las perturbaciones que tienden a inestabilizar el sistema. Para lograr esto, los sensores de posición y velocidad son muestreados por el algoritmo de control, que calcula los comandos de par para los actuadores. En los robots industriales, es importante tener en cuenta su dinámica no lineal cuando se sintetizan los algoritmos de control.

4.1. Generador de trayectorias

Para realizar el posterior control dinámico del sistema, primero es necesario generar la trayectoria que se debe seguir para alcanzar la posición y orientación del efector final deseada a partir de la posición y orientación en el instante de tiempo actual. Dicha trayectoria debe generarse teniendo en cuenta una serie de limitaciones y características con el fin de evitar choques, disminuir el tiempo total de los movimientos, etc.

Existen dos posibles soluciones para realizar la generación de las trayectorias de las articulaciones. Cada una de ellas tiene sus ventajas y sus inconvenientes, así que se exponen ambas a continuación y se elegirá la más adecuada en función de las prioridades del proyecto.

Una posible solución es la de generar la trayectoria en el espacio cartesiano, y posteriormente obtener los puntos de las variables articulares con las que trabajará el control dinámico. Utilizando este método se generará una trayectoria libre de colisiones más fácilmente, obteniendo en todo momento la posición y orientación deseada de cada articulación. Como desventaja este método tiene un alto coste computacional que lo ralentiza, al tener que utilizarse la cinemática inversa para la transformación de cada uno de los puntos del espacio cartesiano en valores de las variables articulares. Por lo tanto es un método lento en comparación con la generación de la trayectoria directamente en las variables articulares. La generación de trayectorias en el espacio cartesiano presenta además el problema de que existen múltiples soluciones al utilizar la cinemática inversa, por lo que podría no tratarse de una trayectoria adecuada, al utilizar configuraciones de las articulaciones que implican movimientos que no son óptimos en cuanto a tiempo o a eficiencia energética. Otra de las desventajas al utilizar el espacio cartesiano como referencia para la generación de la trayectoria es que no se pueden tener en cuenta las singularidades del manipulador, por lo que alguna de las velocidades articulares podría aumentar excesivamente, causando un problema. Tampoco se tiene en cuenta el espacio de trabajo, por lo que algunos puntos pueden ser inalcanzables para el manipulador.

La otra posible solución consiste en generar la trayectoria directamente en las variables articulares. Teniendo los puntos de inicio y la referencia final del efector, se trasladan dichos puntos del espacio cartesiano a las variables articulares, y posteriormente se generan los puntos de la trayectoria directamente en las variables que utilizará el control dinámico. Generar la trayectoria directamente con las variables a utilizar posteriormente evita el uso reiterado de las conversiones que se producían con el método anterior. Además, se tienen en cuenta los condicionantes directos que presenta el manipulador a la hora de colocarse en una determinada posición o los puntos que puede llegar a alcanzar, por ejemplo. Sin embargo, es difícil evitar las colisiones, además de que no se puede distinguir la posición de la orientación, al tratarse de un único dato, y no de una matriz como en el caso de las variables en el espacio cartesiano.

Teniendo en cuenta las ventajas y desventajas presentadas, se opta por utilizar un generador de trayectorias que trabaje directamente en el espacio de las articulaciones, teniendo en cuenta que se debe prestar especial atención que las trayectorias estén libres de colisiones. Este método será realizado para la simulación, de manera que se puedan crear trayectorias con las que probar los lazos de control que se propondrán en este apartado. Sin embargo, teniendo en cuenta la finalidad del proyecto, la implementación necesitará la realización de trayectorias en el espacio cartesiano. Se propone utilizar el manipulador para tareas de mecanizado, por lo que la trayectoria seguida por la herramienta debe poder ser totalmente definida y controlada. Esta parte no será realizada en este trabajo, aunque forme parte del proyecto *Mill2Matic*.

Además de la referencia a utilizar para definir las trayectorias a seguir por el manipulador, se debe elegir el tipo de trayectoria deseado. Para nuestro manipulador la trayectoria que se generará será de tipo coordinada o isócrona. Esto quiere decir que la articulación que más tiempo necesite para alcanzar la posición final condicionará a las demás, de manera que todas ellas empiecen y terminen su

62. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

movimiento en el mismo instante de tiempo. De esta manera, se evitan esperas innecesarias, permitiendo a las articulaciones más rápidas utilizar unas especificaciones menos exigentes para los motores que las mueven.

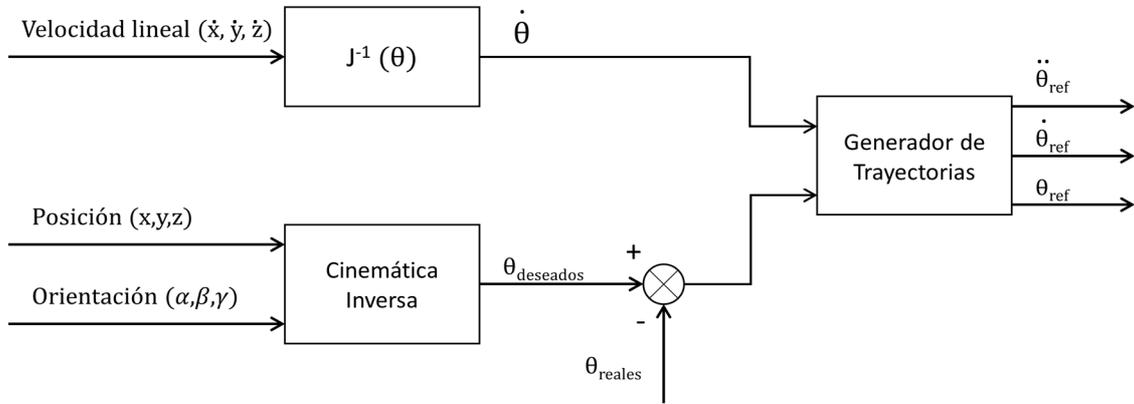


Figura 29. Modelo utilizado en la simulación de las trayectorias

Los datos de posición y velocidad deseados en la herramienta o efector final, donde se tendrán en cuenta las dimensiones de la herramienta utilizada (o en caso de que no se utilice ninguna, se utilizarán las coordenadas de la brida final del manipulador), hacen referencia a las coordenadas respecto del sistema la referencia del sistema. Están por lo tanto expresadas en el espacio cartesiano.

Otro dato de entrada, además de la posición y orientación de la herramienta deseadas, va a ser la velocidad lineal deseada en ese mismo punto final del manipulador. Las velocidades se expresarán también en el espacio cartesiano, de manera que estén referidas a la base del manipulador.

Para la obtención de los valores articulares correspondientes, se crearán las trayectorias a partir de los datos cartesianos. Mediante el uso de la inversa del Jacobiano (J^{-1}), se transformará la velocidad del efector final a coordenadas articulares de cada una de las articulaciones del manipulador. Además, a través de la cinemática inversa se obtendrán los valores de posiciones y velocidades angulares a partir de la posición y orientación del efector final. Las velocidades articulares obtenidas serán las necesarias para alcanzar la velocidad lineal deseada. Por lo tanto, durante las aceleraciones y deceleraciones de las articulaciones no se alcanzará ese valor. Cuando todas las articulaciones alcancen el valor de velocidad obtenido del Jacobiano será cuando se alcance la velocidad lineal introducida. Este dato será tenido en cuenta por el generador de trayectorias a la hora de establecer la coordinación isócrona.

Trabajando en el espacio cartesiano, es necesario tener en cuenta la limitación de que la trayectoria definida puede contener puntos que estén fuera del espacio alcanzable de trabajo. Para tratar este problema existen dos posibles soluciones. Una de ellas es para el movimiento del manipulador cuando se intenta alcanzar uno de esos puntos, indicando que la trayectoria deseada no puede ser realizada. Otra de ellas es realizar un cálculo previo al inicio del movimiento de los puntos de la trayectoria para poder indicar inicialmente de la trayectoria será realizable. Dependiendo de la capacidad de cálculo, o por ejemplo de los problemas que puedan resultar de finalizar un

movimiento en un punto intermedio de la trayectoria se debe elegir una de las dos formas anteriores de afrontar el problema.

4.1.1. Modelado matemático

Para realizar pruebas en *Matlab* se realizará primero una simulación de generación de trayectorias en el espacio articular. Las trayectorias de cada articulación estarán limitadas en velocidad y aceleración y se sincronizarán de manera que inicien y finalicen los movimientos en los mismos instantes de tiempo. Mediante esta simulación se podrá comprobar el funcionamiento del lazo de control, aunque finalmente no sea el modelo de trayectorias a utilizar. Las trayectorias en el espacio cartesiano serán generadas posteriormente en el hardware de control.

A partir de los datos de entrada, que representan las posiciones y orientaciones a alcanzar, a través de la cinemática inversa se calculan los valores de los ángulos que deben formar las articulaciones. El conjunto de valores articulares se conoce como puntos de vía, y definen los puntos a través de los cuales una articulación deberá pasar conforme a los parámetros de entrada introducidos. Como dato de entrada se puede introducir también los tiempos que se quiere que tarde el manipulador en llegar a las posiciones y orientaciones dadas. Esos tiempos pueden no ser realizables, ya que se dispone de una serie de datos que limitan la aceleración y la velocidad máxima de cada articulación. Además, las coordenadas cartesianas que se introducen como parámetros deben corresponderse con puntos que se encuentren dentro del espacio de trabajo para que la posición sea alcanzable por el manipulador.

Una vez que los datos de entrada han sido introducidos, se calculará una función definida a trozos, formada por funciones lineales para la trayectoria. Las funciones lineales unen los puntos correspondientes a los datos de entrada consecutivos de la trayectoria.

Las ecuaciones que definen los tramos de aceleración, velocidad constante y deceleración del perfil trapezoidal de velocidad angular se describen por las ecuaciones que se presentan a continuación. En el caso del tramo de aceleración, la ecuación que calcula la duración del periodo es:

$$t_a = \frac{\omega_m}{\alpha_m} \quad (4.1)$$

Siendo ω_m la velocidad angular máxima a alcanzar en el tramo de velocidad constante y α_m la aceleración máxima característica de esta fase. Dado que se quiere que el perfil de velocidad sea trapezoidal, este tiempo calculado coincidirá también con el tiempo de deceleración de cada una de las articulaciones:

64. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$t_d = t_a \quad (4.2)$$

Con estos dos datos, y a partir del incremento de posición angular que se le pide a la articulación, se puede calcular el tiempo que la articulación se mantiene a máxima velocidad:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \cdot t_a \cdot \omega_m + t_v \cdot \omega_m + \frac{1}{2} \cdot t_d \cdot \omega_m \quad (4.3)$$

Donde t_v define la duración de esa fase. Despejando, y teniendo en cuenta la igualdad de la ecuación (4.2) se obtiene que su valor es:

$$t_v = \frac{\Delta\theta}{\omega_m} - t_a \quad (4.4)$$

Con los valores que definen la duración de cada una de las fases del perfil y con los valores de velocidad y aceleración angular ya se pueden definir completamente los valores de posición, velocidad y aceleración de cada articulación para la realización de una trayectoria hasta un punto dado. En la fase de aceleración, las ecuaciones utilizadas son, para la posición, velocidad y aceleración respectivamente:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha_m \cdot t^2 \quad (4.5)$$

$$\omega = \alpha_m \cdot t \quad (4.6)$$

$$\alpha = \alpha_m \quad (4.7)$$

Tras la fase de aceleración, se produce la fase de velocidad constante, definida:

$$\theta = \omega_m \cdot t \quad (4.8)$$

$$\omega = \omega_m \quad (4.9)$$

$$\alpha = 0 \quad (4.10)$$

Por último está la fase de deceleración, en la que las ecuaciones son:

$$\theta = \omega_m \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_m \cdot t^2 \quad (4.11)$$

$$\omega = \omega_m - \alpha_m \cdot t_d \quad (4.12)$$

$$\alpha = -\alpha_m \quad (4.13)$$

Todos los cálculos anteriores no tienen en cuenta para la generación de la trayectoria que ésta sea coordinada. Tampoco tienen en cuenta el dato de velocidad que deben alcanzar. Para integrar estas dos condiciones, una vez calculadas las trayectorias con las fórmulas desarrolladas en este apartado, se debe establecer el tiempo para alcanzar el siguiente punto de cada una de las articulaciones como el máximo obtenido de todas ellas, de manera que la articulación que necesite más tiempo para alcanzar la posición deseada será la que condicione al resto. Además hay que tener en cuenta las limitaciones de cada una de las articulaciones impuestas por los motores y los aspectos cinemáticos del propio manipulador. Para ajustar el nuevo tiempo se incrementarán los tiempos de aceleración y deceleración, de manera que coincidan con los tiempos de la trayectoria más lenta. La consecuencia de este ajuste es el descenso de la aceleración utilizada, aunque se intente alcanzar la misma velocidad para poder cumplir con la velocidad lineal y rotacional en la herramienta con una trayectoria isócrona.

Para la simulación en *MATLAB* se eligió la generación de trayectorias en el espacio articular por los motivos mencionados al inicio del apartado. Sin embargo, el uso final del manipulador propuesto en el proyecto consistirá en realizar tareas de mecanizado que actualmente realizan máquinas especializadas. Para esas tareas, además de la velocidad del efector final, también se necesita que la trayectoria siga líneas rectas o circulares en el espacio, por lo que la trayectoria finalmente debería ser generada en el espacio cartesiano para poder conseguirlo. Esta tarea puede ser realizada en el *hardware* de control por medio de instrucciones específicas que aseguran la trayectoria coordinada de todas las articulaciones además de respetar los límites de los motores, intentando alcanzar la velocidad de referencia introducida para un

66. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

sistema de referencia determinado, que como se acaba de mencionar, se realizará para el efector final con respecto al sistema de coordenadas del manipulador (espacio cartesiano). La capacidad de cómputo del *hardware* de control permitirá que la conversión de las trayectorias al espacio articular, en caso de que fuese necesaria, se haga en un tiempo que permita la obtención de datos en el periodo de muestreo del lazo de control.

4.2. Sensores

Para el control del manipulador es necesario disponer de señales que contengan información del mismo para poder realizar la realimentación del lazo de control. Los lazos de control propuestos son lazos cerrados en los que se necesita conocer el estado del sistema a controlar en cada instante de tiempo en el que se ejecuta el control (frecuencia de muestreo). Las ventajas del uso de la realimentación en los lazos de control son las siguientes:

- Estabilidad: la realimentación permite controlar sistemas inestables.
- Robustez: el conocimiento de los valores reales permite que la señal de control sea adecuada incluso en situaciones que presenten alguna anomalía o perturbación.
- Corrección: permite controlar sistemas incluso cuando estos tienen errores de modelado.

El sistema a controlar precisa, debido a las ventajas enumeradas, un sistema de control en lazo cerrado en el que se trabaje con parámetros medidos directamente sobre el propio manipulador que servirán de realimentación.

Las variables más comunes que se utilizan en los manipuladores robóticos son las posiciones, velocidades y aceleraciones angulares. La información de estas medidas, utilizada en los modelos matemáticos del manipulador (cinemáticas y dinámicas) permiten conocer el comportamiento del manipulador y su posicionamiento articular y cartesiano sin necesidad de utilizar sensoria adicional para la medida de otros parámetros. Aun así, el uso de sistemas de medición de interferometría láser o de sistemas de visión, por ejemplo, podrían ser también utilizados para realizar otros tipos de control o mejorar los propuestos. Dado que el manipulador Kuka KR500-2 del que se dispone incorpora como sensores resolvers analógicos, los lazos de control propuestos se adaptan a la disposición de medidas de posición y velocidad angular. El uso del dispositivo Láser-Tracker como sensor adicional que aporta información de la posición y orientación del efector final da lugar también a la propuesta de otros tipos de lazo de control.

4.2.1. Sensores electromagnéticos rotativos

Los sensores rotativos se usan para medir la posición y la velocidad angular en ejes. Se trata de sensores analógicos. Están formados por un elemento giratorio, que se conoce como el rotor, que se trata de un eje que gira solidario al eje del cual se quieren conocer las medidas; y por otro elemento, el estator, que es estático y se sitúa coaxialmente al rotor.

Este tipo de sensores constan de las mismas partes que los motores o generadores eléctricos. Sin embargo, dado que su objetivo es medir, y no la conversión de energía, presentan respecto de los generadores una carga muy pequeña con el fin de alterar lo mínimo posible al dispositivo al que van acoplados. Esta es la causa por la cual su tamaño es menor y por la que las señales eléctricas que ofrecen son de escasa potencia, además de ser el motivo diferenciador de los dispositivos a los que se acoplan.

4.2.2. Resolvers

Los resolvers son sensores electromagnéticos rotativos que miden posiciones y velocidades angulares. Entre sus ventajas principales se encuentran su gran robustez y precisión en las medidas, así como una gran fiabilidad y capacidad de trabajo en ambientes extremos. Su uso está muy extendido en robótica frente a otros tipos de sensores debido a las ventajas antes mencionadas, necesarias sobre todo en manipuladores de uso en entornos industriales en los que hay mucho ruido electromagnético y que requieren una precisión elevada para la realización de las tareas. Además presentan otra serie de características que los hacen adecuados para un gran número de aplicaciones de diferentes sectores, como en aeronáutica o en tecnología aeroespacial, donde no existe ninguna alternativa dadas las condiciones de funcionamiento y el desempeño requerido.

Definidos por los elementos que los componen, los *resolvers* son transformadores variables rotativos en los que tanto el rotor como el estator disponen de dos devanados, respectivamente, y que están dispuestos perpendicularmente. El procedimiento que permite conocer la posición angular consiste en excitar con una señal senoidal uno de los devanados del estator, mientras que el otro permanece sin alimentación. Debido a la disposición perpendicular de los devanados, y de la disposición del estator respecto del rotor (también perpendicular) se induce en uno de los devanados del rotor una tensión senoidal máxima en la posición de referencia o inicial, siendo nula en el otro devanado. Esta situación de referencia se produce cuando existe la dirección de alineación. Cuando se produce un giro, es decir, cuando el rotor se desplaza un ángulo θ , la tensión en los devanados del rotor varía según las siguientes expresiones:

$$e_{R_1} = e_{E_1} \cos\theta \quad (4.14)$$

68. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$e_{R_2} = e_{E_1} \text{sen}\theta \quad (4.15)$$

Siendo e_E la tensión en el estator, y e_R la tensión en el rotor. Las expresiones indican que el coeficiente de acoplamiento entre el rotor y el estator varía según sea la posición angular del eje.

A partir de las amplitudes de tensión de estas dos señales se puede deducir el giro que las produce. Es necesario conocer la frecuencia de la señales senoidal que alimenta al resolver para poder interpretar correctamente las señales, ya que si no podría dar lugar a error la forma de la onda que se produce.

Además de para poder conocer la posición angular, los *resolvers* también son utilizados para medir la velocidad angular de los ejes. Cuando el eje del rotor gira con una velocidad angular mucho menor de la frecuencia de la señal de excitación del devanado primario la señal de salida estará modulada en amplitud con una frecuencia angular igual a la velocidad angular de giro. Esta característica permite a los *resolvers* poder medir la velocidad angular de giro de los ejes a los que se acoplan. En la siguiente figura se representa un ejemplo de los valores que se pueden obtener de un resolver:

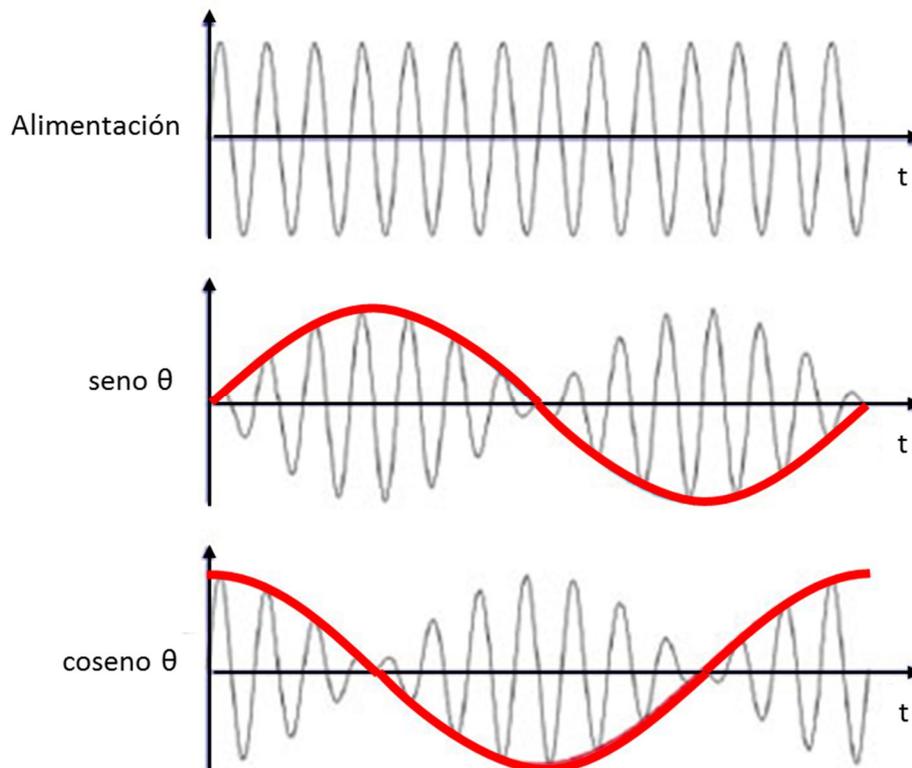


Figura 30. Ejemplo de señales generadas por un resolver analógico

Sobre la señal de alimentación, a medida que se produce el giro se van variando las señales del seno y del coseno del ángulo girado. La señal roja representa la forma de

onda que contiene la información de la señal medida. A partir del desfase de las dos señales se puede obtener finalmente las medidas de posición y velocidad angular.

4.2.3. Encóder Incremental

La diferencia fundamental entre los *encoders* y los *resolvers* se encuentra en que el primero es un sistema digital y el segundo un sistema analógico. Para comunicar la información obtenida de los *resolvers*, los Drivers convierten la información en señales digitales correspondientes a las mismas medidas pero correspondientes a las de los dispositivos conocidos como *encoders* incrementales, por lo que se expone su funcionamiento ya que también se trata de una señal con la que se va a trabajar.

Los *encoders* son codificadores ópticos que están compuestos por un disco que gira de manera solidaria al eje sobre el que se realiza la medida. Ese disco está dividido por varios sectores que presentan alguna característica óptica diferenciadora entre espacios consecutivos. Generalmente los sectores están formados por ranuras que permiten diferenciar el espacio en el que está el material del disco y en el que no. Para la detección óptica se suele utilizar un emisor de luz y un fotodetector a ambos lados del disco. De esta manera, a través de los pulsos generados por la detección de las ranuras se puede conocer la posición angular por medio del giro calculado. En el caso de los *encoders* incrementales, el método de cálculo consiste en contabilizar el número de pulsos generados a partir de una ranura que se toma como referencia. La resolución está determinada por el número de ranuras del disco. Cuanto mayor sea el número de ranuras, menor será el giro que se puede llegar a detectar. Al igual que los *resolvers*, los *encoders* también pueden medir la velocidad angular, a partir de la frecuencia de la señal recibida en el fotodetector. Además de la posición y la velocidad angular, se puede detectar el sentido de giro con este tipo de dispositivos. Para ello, la solución más habitual que suelen implementar consiste en situar dos fotodetectores contiguos, de manera que dependiendo del orden de activación de ambos se puede conocer el sentido del giro. A continuación se muestra una gráfica de ejemplo de las señales digitales que proporciona un *encoder*.

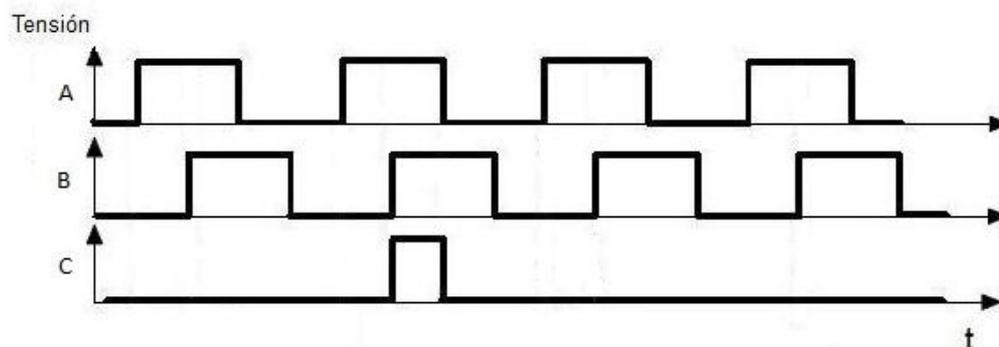


Figura 31. Ejemplo de pulsos generados por un encóder incremental

Las señales A y B representan los pulsos que deben ser contados para determinar la posición y la velocidad. El desfase entre ambas señales indicaría el sentido de giro. La

señal C representa el pulso que se genera en la ranura de referencia. Con el fin de tener una posición de referencia, el codificador tiene en su disco una segunda pista que tiene una sola graduación. Esta disposición produce en la salida de este tercer canal un pulso con cada rotación completa (360°).

4.3. Actuadores

La señal que se calcula en el lazo de control por dinámica inversa es un vector que contiene los pares a realizar en cada articulación para seguir la trayectoria especificada. Esa señal es enviada al manipulador, del que posteriormente se obtienen las medidas de los sensores. Los actuadores que deberán efectuar el movimiento son servomotores, que permiten el posicionamiento preciso de su rotor. Existen por lo tanto tantos motores como articulaciones, ya que cada uno de ellos generará el movimiento de la articulación a la que están asociados. Será por lo tanto necesario traducir la señal enviada desde el lazo de control a valores propios de los motores que generen ese par de fuerzas calculado. Esa función la cumplen los Drivers, que conocen el comportamiento de los motores y les indican la cantidad de corriente que deben suministrar para generar el par necesario en cada periodo.

La actuación de los motores para seguir las trayectorias deseadas por el usuario está limitada por la velocidad y aceleración máximas de los propios motores. Cada uno de ellos actuará, gracias a los Drivers que los controlan, y a la trayectoria generada que tendrá en cuenta también sus limitaciones, conforme a un perfil trapezoidal de velocidad. En ese perfil de velocidad se alcanzará (siempre que sea posible) la velocidad necesaria para conseguir la velocidad lineal introducida como referencia para la herramienta. Hasta llegar a esa velocidad angular se produce una rampa de aceleración que puede ser ajustada. Tras el periodo de velocidad constante se produce una rampa de deceleración, de la misma duración que la de aceleración. Todos los perfiles son ajustados de manera que se cumpla un movimiento coordinado de las juntas, es decir, que todas comienzan y finalizan el movimiento a la vez. Este ajuste se realiza siempre teniendo en cuenta la junta que más tiempo va a requerir para alcanzar la posición final. Existen dos opciones para realizarla: una de ellas es mantener la aceleración utilizada variando la velocidad máxima que se alcanza, no consiguiendo así alcanzar nunca la velocidad de referencia en la herramienta del manipulador; la otra opción es variar las rampas de aceleración y deceleración, tanto su pendiente como su duración, de manera que se ajusten para recorrer el mismo espacio sin cambiar la velocidad máxima que se alcanza. Estos ajustes no son siempre ideales, pues para ciertos movimientos de juntas es imposible alcanzar la velocidad necesaria. Por lo tanto el dato deseado de velocidad de la herramienta que introduciría el usuario no puede alcanzarse para todos los movimientos, aunque éste sea menor que la velocidad máxima que puede alcanzar. Esto se debe a que el movimiento es demasiado pequeño para alcanzar la velocidad máxima con el límite de aceleración del motor. También puede ser debido a que tras el ajuste para conseguir la coordinación de las juntas el tiempo de movimiento sea demasiado grande para conseguir la velocidad deseada en alguna de ellas.

Un parámetro a tener en cuenta para evitar tirones en los movimientos y la sobrecarga de los motores es el *jerk*. Se trata de una magnitud física que se define como la tercera derivada del movimiento. Se trata por tanto de una magnitud que influye directamente sobre la aceleración, definiéndola en el tiempo de manera que no se produzcan cambios en ella de manera instantánea. Mediante esta magnitud se define correctamente el funcionamiento de los motores, ya que utilizando únicamente la posición, la velocidad y la aceleración se supondrían aceleraciones instantáneas que el motor nunca sería capaz de proporcionar, exigiéndole una acción que provocaría sobrecorrientes. Las magnitudes físicas del movimiento son expresadas de la siguiente forma teniendo en cuenta dicha magnitud:

$$a = a_0 + j \cdot \Delta t \quad (4.16)$$

$$v = v_0 + a \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot j \cdot \Delta t^2 \quad (4.17)$$

$$x = x_0 + v \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{6} \cdot j \cdot \Delta t^3 \quad (4.18)$$

A partir de la trayectoria en el espacio cartesiano, para cada articulación se define un perfil trapezoidal que se corresponda con las capacidades del motor actuador hasta alcanzar la posición final.

4.3.1. Servomotores

Un servomotor es un dispositivo similar a un motor de corriente continua que tiene la capacidad de ubicarse en cualquier posición dentro de su rango de operación, y mantenerse estable en dicha posición. Está formado por un motor eléctrico que puede ser controlado tanto en velocidad como en posición, y un sensor que mida dichos parámetros y los realimente para poder controlarlos.

En el caso del control de ejes, como es el caso de los manipuladores robóticos, intervienen tanto el servomotor (con *encoder* o *resolver* acoplado) como su elemento específico de control para realizar la tarea de actuación sobre el sistema. El elemento de control puede ser autónomo (*Driver*) o una tarjeta especial de un *PLC*.

Los servomotores poseen estructura compacta, en la que incorporan, dentro de la misma, el sensor de medida (en este caso un *resolver*) el cual suministra las información del estado del actuador al controlador, es decir, el *Driver* del servomotor. Los servomotores incorporan un freno mecánico como elemento de seguridad, que bloquea el eje en caso de que se produzca una falta de tensión debido a algún fallo, para así evitar la caída de los eslabones posteriores a la articulación en la que se encuentre.

4.3.1.1. Motores *Brushless*

Los servomotores que utiliza el manipulador *KUKA KR500-2* son los compuestos por motores de corriente alterna sin escobillas de tipo *brushless*. Actualmente son los más utilizados en la industria. Están formados por un *estator* segmentado en el que el espacio relleno de cobre es casi el doble que en el caso de los motores tradicionales. Esta característica permite desarrollar una mayor potencia con un menor volumen. El rotor incorpora imanes permanentes contruidos con los elementos neodimio, hierro y boro, que proporcionan mayor densidad de flujo lo que resulta en un mejor rendimiento y en una obtención de mayor par a pesar del menor tamaño. El tiempo de posicionamiento del servomotor se reduce gracias a la reducción de la inercia del rotor lo que permite alcanzar altas velocidades en tiempos reducidos. Las principales ventajas de los motores *brushless* frente a otro tipo de motores como parte actuadora de los servomotores vienen dadas por las posibilidades que ofrece de controlar su velocidad y posicionamiento, entre las que se encuentran unas respuestas muy rápidas a las señales de arranque, paro y variaciones sobre la marcha. Consiguen gran exactitud en el posicionamiento, tienen pocas pérdidas y tienen fiabilidad de funcionamiento.

La velocidad a la que la corriente de armadura puede cambiar está limitada por la inductancia del motor y por la capacidad límite de su fuente de tensión. La frecuencia natural del sistema en lazo cerrado debe ser mucho menor que la frecuencia de corte que establecen la inductancia y la fuente de tensión de los motores.

4.3.1.2. Etapas reductoras

El uso de etapas reductoras, acopladas tras los motores, responden a la necesidad de generar un par muy elevado en las articulaciones y que no puede ser proporcionado por los propios motores. Las etapas reductoras están formadas por trenes de engranajes planetarios cicloidales, cuyas prestaciones se adaptan a las necesidades del manipulador. Permiten realizar operaciones de precisión, con inercia reducida, gran rigidez y gran capacidad de sobrecarga. La dinámica de los motores es lineal y controlada, y el efecto de la reducción de engranajes es en gran parte para desacoplar el sistema mediante la reducción del acoplamiento de la inercia entre las articulaciones. Sin embargo, la presencia de los engranajes introduce fricción y *backlash*, entre otros parámetros que provocan un comportamiento no ideal de la transmisión.

Los lazos de control utilizarán siempre unidades referidas a las articulaciones del manipulador y no a los actuadores. Por lo tanto, será necesario tener en cuenta que las señales de par que se comanden serán las necesarias para mover la articulación, y en ningún caso se corresponderán con el par que debe generar el motor. Además, las señales realimentadas de medidas en el actuador y no en la estructura mecánica del manipulador, por lo que además de ser medidas indirectas para el control del mecanismo, deben ser igualmente transformadas para poder trabajar con valores articulares.

La potencia se mantiene tras el tren de engranajes, por lo que:

$$P_1 = P_2 \quad (4.19)$$

Siendo P_1 la potencia de entrada y P_2 la potencia de salida. La potencia se define como:

$$P = \tau \cdot \omega \quad (4.20)$$

Para conseguir aumentar el par, y teniendo en cuenta que la potencia es constante, se debe disminuir la velocidad angular en la salida. La relación en el tren de engranajes entre la velocidad de entrada y la de salida es:

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \quad (4.21)$$

La relación de transmisión del tren de engranajes, y el valor a tener en cuenta a la hora de transformar los valores en el lazo de control es entonces:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (4.22)$$

4.3.2. Drivers

Un *Driver* equivale a un variador de velocidad diseñado específicamente para el control de los servomotores. Utiliza un conversor para la tensión de entrada y un inversor para la tensión de salida, que es la que aplicará al motor. Esta señal es definida por el circuito de control (microprocesador) correspondiente. Mediante el *Driver* se trabaja en lazo cerrado (realimentación), lo que permite detectar los posibles errores en la actuación del motor y dar la oportuna orden de corrección del mismo.

Los Drivers de los motores recibirán las señales analógicas de los *resolvers* de los motores que controlan respectivamente. Mediante conversores analógicos/digitales se obtienen señales que se interpretan como las posiciones y velocidades angulares de los motores. De esta manera, los Drivers realizan su propio lazo de control en el que se busca obtener la posición más exacta posible en función de la referencia de par que se le exige a cada motor. Así se disminuye el error de posicionamiento de los

74. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

actuadores y este error mecánico no pasa a formar parte del error lazo de control del manipulador, mejorando la respuesta.

El lazo de control puede ser de cuatro clases: posición, velocidad, par y corriente. En el caso de nuestro manipulador, su lazo de control enviará una señal que se corresponderá con el par que se debe generar en cada articulación para conseguir el movimiento deseado del efector final. Por lo tanto, a partir de esa referencia se hará el lazo de control propio del servomotor. Los *Drivers* actuales están dotados de una serie de características orientadas a facilitar la labor del programador del mismo y aumentar el rendimiento. Algunas de las más significativas son:

- Reducción del tiempo de cálculo de la CPU – posicionados más rápidos
- Autoajuste Online – se ajusta automáticamente a los movimientos de la máquina.
- Utilización de filtros de supresión de resonancia para contrarrestar el ruido de resonancia mecánica de alta frecuencia
- Control de velocidad realimentado
- Filtro de supresión de resonancia del eje
- Selección del modo de control de velocidad proporcional/integral
- Detección automática del tipo de motor
- Posibilidad de manejo manual de los servomotores
- Búsqueda de origen
- Límite de par (para evitar sobrepasar)
- Procesamiento regenerativo (absorción de la energía regenerada al desacelerar)
- Limitador de desplazamiento por software. No son necesarios los limitadores mecánicos

Los Drivers tienen la capacidad de transformar las señales de los de resolvers a su equivalente correspondiente a los encoders incrementales. Se aprovechará para realimentar los sensores a los Drivers, y posteriormente los pulsos digitales obtenidos de los encoders son enviados al hardware de control. Este proceso permite evitar el tratamiento de las señales de los resolvers, más complicado que en el caso de las señales digitales equivalentes.

Para la programación el fabricante del *Driver* suministra un software mediante el cual se pueden programar todos los parámetros de usuario necesarios para un total control del servomotor.

4.4. Modelado del sistema de control

Un manipulador es un sistema multivariable, desde el punto de vista del control, en el que las entradas están formadas por vectores de posición de las articulaciones, de sus velocidades y de sus aceleraciones. La dimensión de los vectores se corresponde con el número de grados de libertad del manipulador, que en el caso del *KUKA KR500-2* es de 6. Respecto a las salidas se dispondrá de los vectores de posición y de velocidad con los datos obtenidos a través de los sensores que miden las condiciones

del manipulador. Se trata por tanto de un sistema *MIMO* (*Multiple-Input Multiple-Output*). Se van a proponer dos esquemas de control adecuados para este tipo de sistemas mecánicos. El primero de ellos, el control por par calculado, será el primero a implementar, con el fin de simular su comportamiento antes de implementar un sistema de control más complejo. Posteriormente, se presenta el control por dinámica inversa, que es un tipo de control más complejo pero más correcto para el control del sistema real. Para el control por par calculado se propone un controlador *PD*, el más utilizado para controles que tienen en cuenta la dinámica del sistema, y para el control por dinámica inversa un controlador de tipo *PID*, que mejora el comportamiento del controlador lineal pero aumenta la complejidad del sistema. La implementación final de uno u otro se hará en función de los resultados y necesidades requeridas. El desarrollo de un controlador de tipo *PD* para el control por dinámica inversa se haría de manera análoga al desarrollo hecho para el control por par calculado. Lo mismo ocurriría para un regulador de tipo *PID* para el control por par calculado.

4.4.1. Linealización

El modelo dinámico del manipulador constituye una descripción matemática del comportamiento del mismo. Se tratará siempre de una aproximación, pues el conocimiento absoluto del sistema no puede llegar a conocerse nunca. Además, la inclusión de excesivos aspectos daría lugar a un modelo demasiado complejo que requeriría demasiado tiempo de cómputo y que no sería viable para la utilización en un lazo de control. La precisión de la aproximación depende de la cantidad de aspectos tenidos en cuenta. Por lo tanto se deben tener en cuenta únicamente los factores suficientes que describan el sistema de manera que aporte una solución válida.

El modelo dinámico del manipulador será no lineal según los parámetros tenidos en cuenta (método de *Euler-Lagrange*). Para su utilización en el lazo de control sería más cómoda la disponibilidad de un modelo lineal, por lo que puede optarse por linealizar el modelo. Podría hacerse una linealización local que se utilizase para hacer aproximaciones de las ecuaciones no lineales en el entorno de un punto de funcionamiento. El modelo lineal describe correctamente al no lineal (real) cuando el sistema evoluciona cerca del punto de trabajo. A medida que se aleja de dicho punto, la aproximación se hace más inexacta, hasta el punto de resultar no válida. Por ello, deberían elegirse varios puntos de trabajo que permitiesen linealizar el modelo para todas las condiciones de trabajo del manipulador.

En lugar de realizar aproximaciones que permitan obtener modelos lineales con los que trabajar en el lazo de control, existen dos alternativas que permiten utilizar el modelo no lineal del manipulador. De esta manera se simplifica el proceso y se trabaja con el modelo real realizado. Se trata del control por par calculado y el control por dinámica inversa.

El problema del control del manipulador como un sistema no lineal es que los polos se mueven alrededor en el plano real-imaginario como una función de la posición. Por lo tanto, no podríamos seleccionar ganancias fijas que mantuviesen los polos en una ubicación conveniente (por ejemplo, con amortiguamiento crítico). Se puede

76. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

considerar una ley de control más complicada, en la que las ganancias sean variables en el tiempo, variando en función de la posición del manipulador, de manera tal que el sistema se mantenga siempre críticamente amortiguado. Esto podría hacerse mediante el cálculo del efecto no lineal del manipulador para que fuese cancelado exactamente por un término no lineal en la ley de control de manera que la rigidez general se quedaría constante en todo momento. Tal esquema de control se podría llamar una ley de control de linealización, ya que utilizaría un término no-lineal para cancelar la no linealidad en el sistema controlado, de forma que el conjunto del sistema cerrado sea lineal.

4.4.2. Control por par calculado

El control se realizará utilizando el modelo de la dinámica inversa, por lo que deberá ser lo más exacto posible para que el control sea preciso y se ajuste al manipulador real. El objetivo de este método de control es el seguimiento de una trayectoria dada, que será el dato de entrada del bloque de control. Éste método, llamado *control por par calculado*, tiene una serie de ventajas que lo hacen adecuado para el control de sistemas mecánicos como los de los manipuladores:

- Al tener en cuenta los aspectos dinámicos del sistema, se genera directamente una señal de control que compensa dichos aspectos.
- Se calcula el par que exige un movimiento particular, así que es posible proteger al sistema de grandes pares que podrían surgir si no se tuviesen en cuenta los aspectos dinámicos.
- Las perturbaciones que puedan aparecer son reducidas, ya que es un método *feed-forward* (de compensación), por lo que es capaz de anticiparse.
- El controlador utiliza el modelo del sistema en el bucle de compensación con el fin para desacoplar la dinámica del sistema.
- Además de la utilización del modelo dinámico, este tipo de control incorpora el uso de un controlador *PD* o *PID*.

La representación en un diagrama de bloques del sistema de control se muestra en la figura:

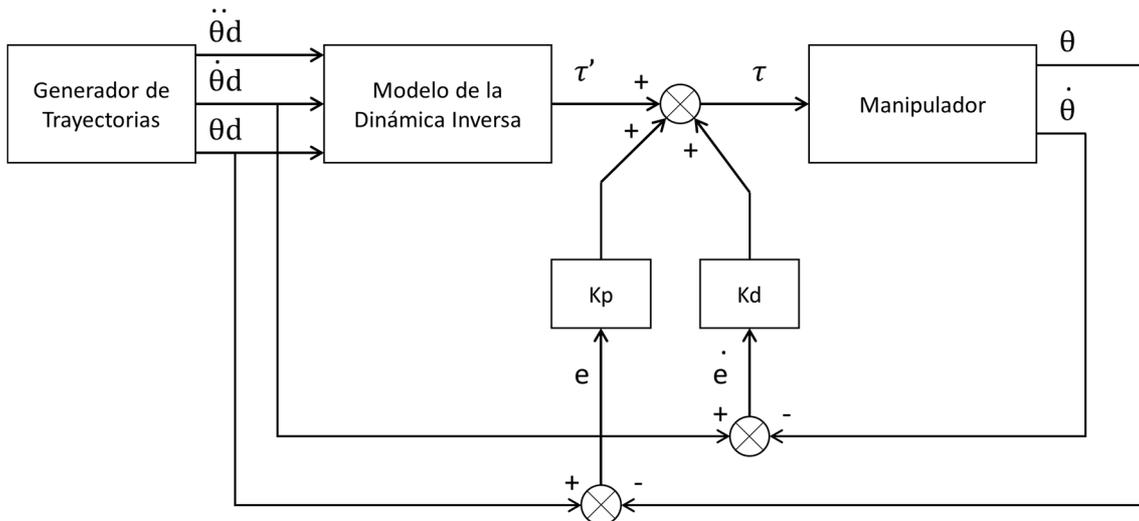


Figura 32. Control por par calculado con regulador PD

Dado que sólo se necesitan conocer los valores de la trayectoria deseada, muchos de estos términos pueden calcularse previamente a la ejecución del lazo de control y almacenarse *offline*. Esto supone una ventaja respecto al método de control por dinámica inversa, que utiliza para el modelo dinámico las variables reales del sistema, se requiere ocupar un mayor espacio de memoria, a cambio de tener un lazo de control mucho más rápido, al disponer de valores calculados previamente, facilitando el cálculo *online*. Se establece por tanto una ley de control que no necesita cálculos complejos, por lo que se puede establecer una frecuencia mayor para el lazo de control respecto del uso de los cálculos del modelo dinámico en tiempo real. El lazo de control interno (*el servo*) simplemente tendrá que multiplicar los errores de las ganancias, con los pares basados en el modelo añadidos con una menor frecuencia. La principal característica del *control por par calculado* es el desacoplamiento entre el modelo del manipulador y la parte *servo*. El modelo del robot es no lineal, sin embargo la partición permite que el *servo* sea un controlador lineal, simplificando el lazo de control. De esta manera, el modelo dinámico no lineal cancela los efectos que tienen lugar en el manipulador.

Para el diseño del control, se supone la respuesta natural de nuestro sistema mecánico como un sistema en el que el par de cada una de las articulaciones depende de los parámetros de posición, velocidad y aceleración angular medidos en las articulaciones, a través de las matrices y vectores que definen la dinámica del manipulador:

$$\tau = M(\theta) \cdot \ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (4.23)$$

siendo M la matriz de inercias del manipulador; H el vector de términos centrífugos y de *Coriolis*; G el vector de términos de la gravedad; y F el modelo de fricción del manipulador. La expresión del par, como vimos en el estudio de la dinámica inversa, hace referencia al valor que es necesario generar en las articulaciones para generar el

78. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

movimiento deseado. En el caso de los lazos de control se debe tener en cuenta que ese par será generado por un actuador, el cual tiene acoplada una etapa de reducción. Por lo tanto, el parámetro de par que se le indique deberá tener en cuenta dicha reducción, por lo que el parámetro de par obtenido finalmente deberá ser reducido con el factor de reducción de cada uno de los actuadores.

El método de par calculado, como se comentó anteriormente, hace uso de un cálculo *offline*, en el que la dinámica se evalúa sobre los valores deseados obtenidos del generador de trayectorias. Se supone por tanto que el par dependiente del manipulador es el mismo que el dependiente de los parámetros de la trayectoria:

$$\tau = M(\theta_d) \cdot \ddot{\theta}_d + H(\theta_d, \dot{\theta}_d) + G(\theta_d) + F(\theta_d, \dot{\theta}_d) \quad (4.24)$$

Siendo $\theta_d, \dot{\theta}_d$ y $\ddot{\theta}_d$ la posición y velocidad angular deseadas.

Dado que se trabajará con el modelo dinámico del manipulador, el cual no es un modelo exacto de la realidad, se trabajará con los siguientes términos:

$$\tau'_r = \hat{M}(\theta_d) \cdot \ddot{\theta} + \hat{H}(\theta_d, \dot{\theta}_d) + \hat{G}(\theta_d) + \hat{F}(\theta_d, \dot{\theta}_d) \quad (4.25)$$

siendo $\hat{M}, \hat{H}, \hat{G}$ y \hat{F} las estimaciones de los valores reales de dichos parámetros.

Según el modelo que se muestra en la *figura 39*, la señal de control que se generará a partir de la suma de las salidas del controlador lineal y del controlador no lineal será:

$$\tau' = \hat{M}(\theta_d) \cdot \ddot{\theta}_d + \hat{H}(\theta_d, \dot{\theta}_d) + \hat{G}(\theta_d) + \hat{F}(\theta_d, \dot{\theta}_d) + K_d \cdot \dot{e} + K_p \cdot e \quad (4.26)$$

Siendo la definición del error:

$$e = \theta_d - \theta \quad (4.27)$$

El error se considera como un elemento que no afecta a las diferencias de la dinámica calculada, sino que es un elemento independiente que compensará también el error en ese mismo cálculo, a través del propio error de seguimiento de la trayectoria. El control por dinámica inversa hace uso de cálculos dinámicos más exactos, por lo que el regulador hará frente únicamente a los errores de seguimiento de la trayectoria.

4.4.2.1. Controlador PD

La ley de control para esta parte, que constituye el controlador lineal del sistema, es diseñada teniendo en cuenta que los sensores del manipulador obtienen información de posición y velocidad angular. De modo que mediante esos datos se puede hacer un control de posición a través del seguimiento de trayectorias, que es el objetivo de utilización final del manipulador. Con la estrategia de control propuesta, se busca tener un error de seguimiento a una trayectoria deseada muy pequeño, pese a la presencia de incertidumbres paramétricas, y sin generar grandes esfuerzos de control.

El controlador *PD* y el término *feedforward* que incluye las aceleraciones de la trayectoria de referencia utilizados en el controlador lineal están basados en una ley de control estabilizante (Spong; Anderson, 1992).

Los controladores de tipo *PD* son los más comunes en este tipo de lazos de control. La parte proporcional consiste en el producto entre la señal de error y la constante proporcional y su finalidad es lograr que el error en régimen permanente se aproxime a cero; la parte derivativa trata de mantener el error en un valor mínimo corrigiéndolo proporcionalmente con la misma velocidad con la que se produce, evitando así que el error se incremente. Las matrices que se utilizarán a partir de ahora para diseñar los controladores serán matrices diagonales, en las que cada uno de sus términos controlará cada una de las articulaciones por separado. Los lazos de control propuestos darán lugar a sistemas en lazo cerrado desacoplados, lo que hace posible el control independiente de cada articulación aunque se utilice una única expresión, debido al uso de vectores y matrices.

Igualando las ecuaciones (4.25) y (4.26) se obtiene la siguiente fórmula:

$$\widehat{M}(\theta d) \cdot \ddot{\theta} = \widehat{M}(\theta d) \cdot \ddot{\theta} d + Kd \cdot \dot{e} + Kp \cdot e \quad (4.28)$$

Utilizando la definición del error de la ecuación (4.27):

$$\widehat{M}(\theta d) \cdot \ddot{e} + Kd \cdot \dot{e} + Kp \cdot e = 0 \quad (4.29)$$

Considerando que no existe ninguna perturbación en el sistema. En caso de que existiese, la fórmula sería la siguiente:

$$\widehat{M}(\theta d) \cdot \ddot{e} + Kd \cdot \dot{e} + Kp \cdot e = \tau_p \quad (4.30)$$

80. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Con una perturbación constante, el error de velocidad y el de aceleración son nulos. Sin embargo, el error de posición será, en régimen estacionario:

$$Kp \cdot e = \tau_p \quad (4.31)$$

$$e = \frac{\tau_p}{Kp} \quad (4.32)$$

Dadas la posición, velocidad y aceleración angular obtenidas del generador de trayectorias, el control tratará de cancelar todas las no linealidades y aplicar el par necesario para superar la inercia del actuador. Este sería el resultado de la suma de los dos controladores, el lineal (parte *servo*) y el no lineal (modelo del sistema).

4.4.2.2. Espacio de estados (PD)

La dinámica del error en lazo cerrado se representa, a través de la ecuación (4.29), despejando \ddot{e} para conocer la relación con las variables del sistema:

$$\ddot{e} = -M^{-1}(\theta d) \cdot Kd \cdot \dot{e} - M^{-1}(\theta d) \cdot Kp \cdot e \quad (4.33)$$

Se utilizará para establecer la situación de los polos del sistema el diseño en el espacio de estados. La representación en el espacio de estados del mismo permite conocer y controlar su dinámica y sus respuestas. Las variables del sistema, cuyo número está determinado por su orden, serán las variables de estado del sistema. Estas variables serán a su vez funciones de la variable independiente de tiempo. Se utilizará como representación el plano complejo que se conoce como plano s . Se usa para visualizar la ubicación de las raíces y de los ceros de la función de transferencia de un sistema *LTI* (*Linear Time-Invariant*). La visualización gráfica de las raíces (es decir de aquellos valores que anulan la ecuación característica, es decir, el denominador) y de los ceros (aquellos valores que anulan el numerador de la función de transferencia) permite inferir el comportamiento del sistema. La función de transferencia se expresa normalmente como un cociente de polinomios de la variable s de la transformada de *Laplace*, y de ahí el nombre de plano s .

Su selección debe realizarse de manera que sean capaces de conocer la dinámica del sistema a lo largo del tiempo. Es decir, deben ser el conjunto más pequeño de variables que permitan predecir la evolución del sistema conociendo las entradas. La ecuación diferencial que mide la variación del vector de estado con respecto al tiempo es una ecuación diferencial lineal respecto al tiempo, que representa el comportamiento dinámico del sistema. Mediante la utilización de una matriz de ganancias K se halla la relación entre las variables del sistema y las variables de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Para conseguir la equivalencia de la ecuación (4.33), y teniendo en cuenta la ecuación (4.34), se utilizan los siguientes términos para la matriz K :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \cdot Kp & -M^{-1} \cdot Kd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Donde I es la identidad. Para el cálculo de la ecuación característica del sistema, que nos servirá para establecer la condición de estabilidad del mismo, se parte de la matriz K . Un escalar s es un valor propio de K si y sólo si existe un vector propio $v \neq 0$ tal que:

$$K \cdot v = s \cdot v \quad (4.36)$$

$$(sI - K) \cdot v = 0 \quad (4.37)$$

Dado que v es distinto de cero, la matriz $s \cdot I - K$ será singular, lo que a su vez resulta en que su determinante será 0. Así, las raíces de la función:

$$\det(s \cdot I - K) \quad (4.38)$$

son los valores propios de K . Igualando a cero (polos del sistema) y resolviendo el determinante, se define la ecuación característica:

$$\det(s \cdot I - K) = 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \cdot Kp & -M^{-1} \cdot Kd \end{vmatrix} = 0 \quad (4.40)$$

$$\begin{vmatrix} s & -I \\ M^{-1} \cdot Kp & s + M^{-1} \cdot Kd \end{vmatrix} = 0 \quad (4.41)$$

82. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$s^2 + M^{-1}(\theta d) \cdot Kd \cdot s + M^{-1}(\theta d) \cdot Kp = 0 \quad (4.42)$$

Al tratarse de la ecuación característica del sistema, se realizará el criterio de estabilidad de *Routh* para determinar las restricciones a la hora de escoger los valores de las ganancias del regulador. La primera restricción viene dada por la presencia de coeficientes negativos o nulos con la presencia de al menos un coeficiente positivo. Dado que el coeficiente de s^3 es constante y positivo, ninguno de los otros coeficientes podrá ser negativo o nulo. El siguiente paso es construir la tabla con los coeficientes de la función para su análisis:

s^2	1	$M^{-1} \cdot Kp$
s^1	$M^{-1} \cdot Kd$	0
s^0	$\frac{M^{-2} \cdot Kd \cdot Kp}{M^{-1} \cdot Kd}$	0

Tabla 4

El criterio de *Routh* establece que la cantidad de raíces positivas o con parte real positiva es igual a la cantidad de cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. Es decir, que si existe algún cambio de signo en los coeficientes existirá alguna raíz que haga inestable al sistema. Teniendo en cuenta esta condición, se establecen las siguientes restricciones:

$$M^{-1} \cdot Kd > 0 \quad (4.43)$$

$$M^{-1} \cdot Kp > 0 \quad (4.44)$$

M^{-1} debe tener el mismo signo para cada valor correspondiente de Kd y Kp en el producto de matrices (para cada articulación), para que el valor resultante sea positivo y el sistema sea estable, no produciéndose ningún cambio de signo en la tabla y cumpliendo así la condición de estabilidad.

Claramente, a medida que la configuración del manipulador cambia, los cambios de ganancia efectiva de circuito cerrado también varían, y los polos pasan a moverse en el plano real-imaginario. Este es un problema que hace que esta ley de control no sea viable para su uso en un manipulador real, ya que para poder asegurarse del correcto funcionamiento deberían variarse las ganancias en función de las inercias, por lo que haría falta disponer de los valores para todas las posiciones y cargas posibles. Sin embargo, la ley de control es útil como punto de partida para el diseño de otros

controladores, ya que a pesar de del movimiento de los polos, se puede encontrar una buena gama de ganancias constantes de tal manera que los polos estén garantizados para permanecer en lugares razonablemente favorables.

4.4.2.3. Elección de las ganancias

Además de los límites establecidos en el anterior subapartado, se deben tener en cuenta otras consideraciones además de la estabilidad del sistema a la hora de establecer las ganancias de las acciones proporcional y derivativa, en este caso.

Un sistema de segundo orden, como el obtenido con la ley de control por par calculado, representa los siguientes parámetros:

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n + \omega_n^2 \quad (4.45)$$

Siendo ξ la constante de amortiguamiento y ω_n la frecuencia natural del sistema.

Para el control de manipuladores, el valor elegido para la constante de amortiguamiento debe cumplir la siguiente restricción:

$$\xi \leq 1 \quad (4.46)$$

Eligiendo el valor límite, $\xi = 1$, se tendrá un sistema críticamente amortiguado. Un sistema críticamente amortiguado es en realidad un caso concreto de sistema subamortiguado. Se asegura con él la respuesta más rápida posible sin que se produzcan sobreoscilaciones. Es importante mencionar que los manipuladores robóticos no pueden tener ningún tipo de sobreoscilación, pues haría alcanzar puntos en el espacio que no se encuentran en la trayectoria definida para el movimiento que se esté realizando, Además podría producir situaciones de peligro al sobrepasar los puntos definidos de paso. Por lo tanto se debe establecer un valor de ξ menor o igual a uno, siendo el caso ideal el amortiguamiento crítico.

La frecuencia natural gobierna la velocidad de respuesta en cada componente del error. Debe ser grande para respuestas rápidas y se selecciona en función de los objetivos de desempeño. Así, las trayectorias deseadas deben tenerse en cuenta en la selección de este parámetro, además de otros factores que influirán en la respuesta del sistema. Se presentan ahora los factores adicionales en esta elección.

Hay algunos límites superiores en la elección de la frecuencia natural del sistema. Aunque los eslabones de los manipuladores son rígidos, todos presentan cierta flexibilidad. Suponiendo una frecuencia de resonancia para un eslabón igual a:

84. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{J}} \quad (4.47)$$

Donde k_r es la rigidez del eslabón y J su inercia. La frecuencia de resonancia es la frecuencia con la que un sistema presenta la vibración máxima posible. Por lo tanto, se debe evitar excitar dicha frecuencia para evitar vibraciones que perjudicasen la precisión del manipulador, así como para evitar la inestabilidad del sistema a cause de dichas vibraciones. Para no excitar el modo de resonancia de los eslabones, se debe seleccionar una frecuencia natural tal que:

$$\omega_n < \frac{\omega_r}{2} \quad (4.48)$$

La inercia de los eslabones cambia con la configuración del manipulador, de modo que su valor máximo debería ser utilizado en la computación del límite de elección de la frecuencia natural.

Otro límite superior está marcado por consideraciones sobre la saturación del actuador. Si las ganancias del controlador son demasiado grandes, el par τ generado por la ley de control puede llegar a sus límites máximos, entrando en saturación.

Como se nombró al inicio de este subapartado, las trayectorias de referencia también deben ser tenidas en cuenta la hora de elegir el parámetro de la frecuencia natural a través de las ganancias del controlador. El contenido de frecuencia de la entrada deseada o referencia pone un límite inferior absoluto en la velocidad de respuesta necesaria para no producir grandes errores en el seguimiento de la trayectoria. Normalmente, el ancho de banda de las trayectorias no limita este parámetro, ya que el ancho de banda de las trayectorias no debe ser elevado, pues se busca que los movimientos sean lo más suaves que sea posible.

4.4.3. Control por dinámica inversa

El control por dinámica inversa sigue el mismo principio que el control por par calculado, con la diferencia de que en este tipo de control la parte no lineal (modelo dinámico) se utiliza en un lazo interno que depende de las variables reales del manipulador, y no de las que describen la trayectoria a seguir. De esta manera se tiene un control que representa mejor la realidad, pero con un mayor coste computacional al tener que calcular todos los términos dinámicos durante la ejecución del lazo de control. El esquema de este tipo de control para un sistema mecánico como es el manipulador se muestra en la siguiente imagen:

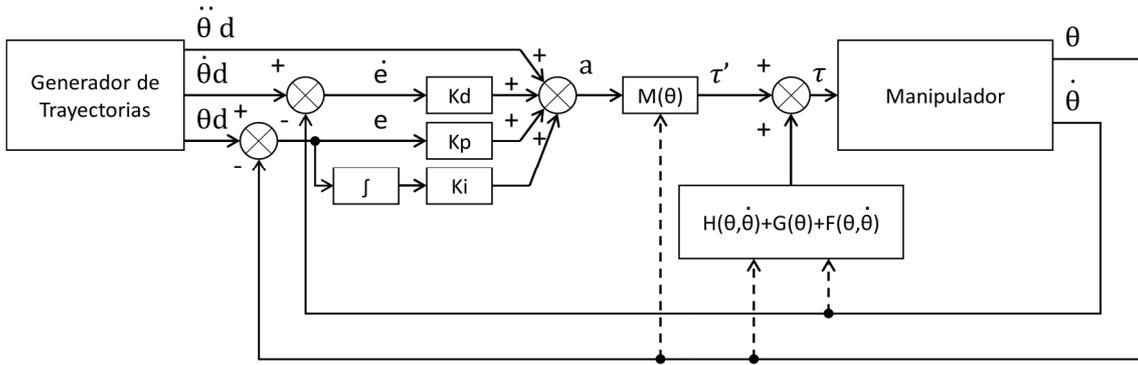


Figura 33. Control por dinámica inversa con controlador PID

La parte basada en el modelo del manipulador de la ley de control hará uso del supuesto conocimiento de los parámetros dinámicos del sistema. Esta parte de la ley de control estará configurada de tal manera que se reducirá el sistema de modo que equivalga a la matriz de inercias, como se realizará en la ecuación (4.51). Esto permite que el diseño de la parte *servo* (controlador lineal) sea muy simple. La segunda parte de la ley de control hará uso de la retroalimentación para modificar el comportamiento del sistema. La parte basada en el modelo de control aparece en una ley de control de la forma:

$$\tau = \alpha \cdot \tau' + \beta \quad (4.49)$$

A partir de las matrices y vectores que definen la dinámica del manipulador representadas en la ecuación (4.24), y de la ecuación (4.49), se obtiene la siguiente igualdad:

$$\widehat{M}(\theta) \cdot \ddot{\theta} + \widehat{H}(\theta, \dot{\theta}) + \widehat{G}(\theta) + \widehat{F}(\theta, \dot{\theta}) = \alpha \cdot \tau' + \beta \quad (4.50)$$

Ahora se establecen los valores de los términos:

$$\alpha = \widehat{M}(\theta) \quad (4.51)$$

$$\beta = \widehat{H}(\theta, \dot{\theta}') + \widehat{G}(\theta) + \widehat{F}(\theta, \dot{\theta}') \quad (4.52)$$

Por lo tanto, y dado que la matriz de inercias es invertible, ya que es una matriz triangular con todos sus elementos diagonales no nulos, se obtiene que:

86. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$\ddot{\theta} = \tau' \quad (4.53)$$

El término τ' es entonces una aceleración articular, que al ser multiplicada por la matriz de inercias dará lugar a una parte del par que debe generar el manipulador para alcanzar los puntos de la trayectoria especificados en el tiempo. Esto concuerda con la ecuación que relaciona el par con la inercia cuando la distancia al sistema de referencia es constante:

$$\tau = I \cdot \alpha \quad (4.54)$$

Donde I sería la matriz de inercias y α la aceleración angular. La aceleración de control representa una nueva entrada al sistema, que será la señal que genere el controlador lineal que representará la parte *servo* del control. La ecuación (4.53) se conoce como sistema de doble integrador, ya que representa n integradores desacoplados dobles. El sistema es por tanto lineal y desacoplado. Esto significa que cada entrada $\ddot{\theta}_k$ puede ser diseñada para controlar un sistema lineal escalar.

4.4.3.1. Controlador lineal *PID*

Los controladores de tipo *PID* no son muy utilizados en este tipo de control, dado que al tener en cuenta los aspectos dinámicos del sistema mecánico, el error en régimen permanente no va a suponer un problema importante. Además, se mantienen las posiciones sin necesidad de una actuación activa del controlador lineal, lo que sería necesario de no tener en cuenta el modelo dinámico. Aun así, la utilización del término integral mejora el comportamiento del control, a cambio de incrementar el orden del sistema, haciéndolo más complejo y aumentando las posibilidades de inestabilidad. En caso de que fuese necesaria su implementación, se hace el desarrollo del mismo a continuación.

Respecto de un controlador de tipo *PD*, la acción integral disminuye y elimina el error en régimen permanente.

Asumiendo que el generador de trayectorias proporcionará los valores deseados de posición, velocidad y aceleración angular de cada articulación en un tiempo definido t , se elige para el servocontrol la siguiente fórmula de seguimiento de trayectoria:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta} d + K_d \cdot \dot{e} + K_p \cdot e + K_i \cdot \int e dt \quad (4.55)$$

Siendo $\ddot{\theta} d$ la aceleración angular deseada; K_p , K_d y K_i las matrices de constantes que contienen los términos del controlador proporcional, derivativo e integral respectivamente; y E el error definido por la siguiente ecuación:

$$e = \theta d - \theta \quad (4.56)$$

La utilización del término integral, además de los proporcionales y derivativos, puede introducir complicaciones, ya que se debe tener cuidado para mantener la estabilidad del sistema. El controlador más utilizado en el control por par calculado es de tipo *PD*. Sin embargo, a pesar de que conociendo los parámetros del manipulador se consigue un control efectivo, la presencia de perturbaciones constantes hace que el error que presenta en estado estacionario sea distinto de cero, lo cual se soluciona añadiendo la acción integral. Por el contrario, el uso del *PID* hace que el sistema se convierta en uno de tercer orden, como se verá a continuación, incrementando la complejidad del mismo.

La ecuación que describe el error cometido al elegir este controlador de tipo *PID* para la parte servo es, utilizando las ecuaciones (4.55) y (4.56):

$$\ddot{e} + K_d \cdot \dot{e} + K_p \cdot e + K_i \cdot \int e dt = 0 \quad (4.57)$$

Considerando que no existe ninguna perturbación en el sistema. En caso de que existiese, la fórmula sería la siguiente:

$$\ddot{e} + K_d \cdot \dot{e} + K_p \cdot e + K_i \cdot \int e dt = \tau_p \quad (4.58)$$

Con una perturbación constante, la parte integral elimina el error en régimen estacionario, como demuestran las ecuaciones:

$$\ddot{e} + K_d \cdot \dot{e} + K_p \cdot e + K_i \cdot e = \tau'_p \quad (4.59)$$

$$K_i \cdot e = 0 \quad (4.60)$$

$$e = 0 \quad (4.61)$$

88. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Como se puede observar en la ecuación (4.59), el sistema que se obtiene es un sistema de tercer orden.

Dadas la posición y velocidad actual del manipulador (datos obtenidos a través de los sensores), junto con los datos de la trayectoria, el control tratará de cancelar todas las no linealidades (β) y aplicar exactamente el par necesario para superar la inercia del actuador. Este sería el resultado de la suma de los dos controladores, el lineal (parte *servo*) y el no lineal (modelo del sistema).

4.4.3.2. Espacio de estados (*PID*)

Dado que el sistema a controlar utiliza múltiples entradas y salidas, la representación en el espacio de estados del mismo permite conocer y controlar su dinámica y sus respuestas. Las variables del sistema, cuyo número está determinado por su orden, serán las variables de estado del sistema. Estas variables serán a su vez funciones de la variable independiente de tiempo. Su selección debe realizarse de manera que sean capaces de conocer la dinámica del sistema a lo largo del tiempo. Es decir, deben ser el conjunto más pequeño de variables que permitan predecir la evolución del sistema conociendo las entradas. La ecuación diferencial que mide la variación del vector de estado con respecto al tiempo es una ecuación diferencial lineal respecto al tiempo, que representa el comportamiento dinámico del sistema.

Se introduce una nueva variable para representar el error del término integral:

$$\dot{\varepsilon} = e \quad (4.62)$$

Mediante la utilización de una matriz de ganancias K se halla la relación entre las variables del sistema y las variables de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

A través de la ecuación (4.57), se despeja \ddot{e} para conocer la relación con las variables del sistema:

$$\ddot{e} = -Kd \cdot \dot{e} - Kp \cdot e - Ki \cdot \varepsilon \quad (4.64)$$

Para conseguir la equivalencia de la ecuación (4.63), y teniendo en cuenta la ecuación (4.64), se utilizan los siguientes términos para la matriz K :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -Ki & -Kp & -Kd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Donde I es la identidad. Para el cálculo de la ecuación característica del sistema, que nos servirá para establecer la condición de estabilidad del mismo, se parte de la matriz K . Un escalar s es un valor propio de K si y sólo si existe un vector propio $v \neq 0$ tal que:

$$K \cdot v = s \cdot v \quad (4.66)$$

$$(sI - K) \cdot v = 0 \quad (4.67)$$

Dado que v es distinto de cero, la matriz $s \cdot I - K$ será singular, lo que a su vez resulta en que su determinante será cero. Así, las raíces de la función:

$$\det(s \cdot I - K) \quad (4.68)$$

son los valores propios de K . Igualando a cero (polos del sistema) y resolviendo el determinante, se define la ecuación característica:

$$\det(s \cdot I - K) = 0 \quad (4.69)$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -Ki & -Kp & -Kd \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (4.70)$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & -I & 0 \\ 0 & s & -I \\ Ki & Kp & s + Kd \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (4.71)$$

$$s^3 + Kd \cdot s^2 + Kp \cdot s + Ki = 0 \quad (4.72)$$

Al tratarse de la ecuación característica del sistema, se realizará el criterio de estabilidad de *Routh* para determinar las restricciones a la hora de escoger los valores de las ganancias del regulador. La primera restricción viene dada por la presencia de coeficientes negativos o nulos con la presencia de al menos un coeficiente positivo.

90. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Dado que el coeficiente de s^3 es constante y positivo, ninguno de los otros coeficientes podrá ser negativo o nulo. El siguiente paso es construir la tabla con los coeficientes de la función para su análisis:

s^3	1	K_p
s^2	K_d	K_i
s^1	$\frac{K_d \cdot K_p - K_i}{K_d}$	0
s^0	$\frac{K_d \cdot K_p \cdot K_i - K_i^2}{\frac{K_d \cdot K_p + K_i}{K_d}}$	0

Tabla 5

Los valores de las constantes K_p , K_d y K_i deben ser positivos. Teniendo en cuenta esta condición, se establecen también las siguientes restricciones:

$$\frac{K_d \cdot K_p - K_i}{K_d} > 0 \quad (4.73)$$

$$K_d \cdot K_p > K_i \quad (4.74)$$

Para la última fila de la tabla la expresión se reduce a:

$$\frac{K_d \cdot K_p \cdot K_i - K_i^2}{\frac{K_d \cdot K_p + K_i}{K_d}} > 0 \quad (4.75)$$

$$K_d \cdot K_p \cdot K_i > K_i^2 \quad (4.76)$$

Para que las filas uno y dos de la tabla cumplan el criterio se establece que sus valores deben ser negativos. De las filas tres y cuatro resultan las ecuaciones (4.74) y (4.76), que son equivalentes. Por lo tanto a la hora de establecer los valores K_p , K_d y K_i se deben tener en cuenta junto con la restricción de que sean valores positivos.

En el caso del controlador *PID*, como se vio en este mismo apartado, se trata de un sistema de tercer orden. Al tratarse de un sistema de orden superior, se estaría tratando con un modelo complejo. El objetivo es entonces aproximar el sistema a uno de segundo orden, de manera que se conozca el comportamiento y su análisis sea más sencillo. A través del lugar de las raíces, que es el lugar geométrico de los polos y los ceros de una función de transferencia, se pueden ubicar los polos de la ecuación característica de manera que sea posible aproximar el sistema por uno de orden

inferior. Ya que se dispone de la ecuación característica del sistema, que equivale al denominador de la función de transferencia del sistema, los valores que hacen cero a dicha ecuación serán los polos del sistema. Para realizar la aproximación hay que tener en cuenta que la influencia de los polos de la cadena cerrada varía. La reducción del orden del sistema simplifica tanto la fase de análisis como de diseño. El objetivo es que el sistema quede definido por la siguiente expresión, que define a un sistema de segundo orden:

$$d(s) = s^2 + 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot s + w_n^2 \quad (4.77)$$

Siendo w_n la frecuencia natural del sistema y ξ la constante de amortiguamiento. La ecuación (4.72), que representa el sistema de tercer orden, mediante la reducción a un sistema de segundo orden pasaría a ser equivalente a la ecuación (4.77).

El primer paso es establecer el polo dominante del sistema. Éste será el más cercano al eje imaginario del lugar de las raíces, y se expresa con la notación σ_{dom} . Una vez definido cual es el polo dominante, para poder establecer que un polo tendrá una respuesta transitoria despreciable, deberá encontrar a una distancia del eje imaginario tal que:

$$\sigma > 6 \cdot \sigma_{dom} \quad (4.78)$$

Siendo σ la distancia del polo al eje imaginario. Por lo tanto, para pasar de un sistema de tercer orden a uno de segundo se debe colocar uno de los polos a una distancia al menos seis veces mayor del eje imaginario respecto de la distancia al mismo eje del polo dominante.

4.4.4. Control Digital

Los planteamientos realizados hasta ahora se han hecho sobre la base del tiempo continuo. Sin embargo, la implementación del lazo en un hardware de control va a suponer que las señales de entrada tengan un periodo de muestreo, por lo que se pasaría a trabajar en tiempo discreto. Además, los cálculos a realizar en el lazo de control requerirán un tiempo de cómputo, y deberán completarse en un tiempo menor al tiempo de muestreo para que cada nueva señal recibida sea tenida en cuenta. Actualmente, los sistemas de control robóticos trabajan con un periodo que oscila entre los diez y los veinte milisegundos. Dado que los planteamientos han sido realizados sobre tiempo continuo, para pasar a tener en cuenta el funcionamiento en tiempo discreto existen dos opciones. La primera y más obvia es discretizar el planteamiento realizado. Una segunda opción es conservar el planteamiento actual y probar a través de la simulación periodos de muestreo que aseguren buenos resultados con el planteamiento de tiempo continuo. Además existen reglas y teoremas que permiten elegir un periodo de muestreo que haga que el resultado del

92. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

control sea el correcto. Esta segunda opción sería una aproximación que evitaría la discretización del lazo. Sin embargo, la primera opción permite tener en cuenta el efecto del periodo de muestreo en el lazo de control de manera exacta. Por el contrario, para discretizar dinámicas no lineales, como es la del manipulador, no existe un método exacto, sino que se trataría también de una aproximación. El resultado sería además un conjunto de ecuaciones muy complejas, incluso para manipuladores más simples que el nuestro.

Según el lazo de control diseñado, se dispone de dos controladores separados. Uno de ellos es el controlador lineal, que utiliza los errores de posición y velocidad en las articulaciones del manipulador y genera una señal de control a través de un regulador *PD* o *PID*. El otro es un controlador no lineal en el que están contenidas las ecuaciones dinámicas del manipulador. Teniendo en cuenta lo expuesto en el párrafo anterior, se puede optar por discretizar el controlador lineal, ya que no supone ningún obstáculo; y para el controlador no lineal se buscarían periodos de muestreo adecuados para su utilización con las ecuaciones de tiempo continuo, que serían comprobadas en la simulación. Generalmente se asume que los cálculos se podrán realizar suficientemente rápido para que la aproximación de tiempo continuo de la parte no lineal sea válida.

Para determinar la frecuencia mínima a la que debe funcionar el lazo de control existen una serie de condiciones. Cumpliéndolas se asegura que la discretización de las señales no afectará al modelo continuo propuesto. Las condiciones a tener en cuenta son las siguientes:

- Señales de entrada: los puntos de las trayectorias, así como las señales de los sensores, establecen una frecuencia mínima en el lazo de control. El ancho de banda del lazo de control debe ser al menos el doble del ancho de banda de las señales de entrada.
- Atenuación de las perturbaciones: el periodo de muestreo del lazo de control debe ser menor que la correlación de tiempo de la perturbación, sino ésta no será suprimida.
- Resonancias estructurales: la frecuencia de muestreo del lazo de control debe ser al menos dos veces mayor que la frecuencia natural de resonancia.

4.4.4.1. Ecuaciones en diferencias

Para trabajar en tiempo discreto el controlador debe ser definido mediante una ecuación en diferencias que lo describa. Para el controlador *PID* en el control por dinámica inversa, se utilizará el método de *Tustin* (o transformación bilineal) para obtener a partir de la función de transferencia del filtro lineal e invariante en el tiempo, que se encuentra definida en el dominio continuo del tiempo (*LTI*), una función de transferencia perteneciente a un filtro lineal e invariante en el tiempo que se encuentre definido en el dominio discreto del tiempo. La transformación bilineal es una aproximación de primer orden de la función logarítmica natural que consiste en realizar una asignación exacta del plano *Z* al plano *S*. El interés del uso del plano *Z* se debe a

que es el plano análogo al plano S que define la transformada de Laplace para resolver ecuaciones en diferencias finitas.

En controlador lineal tendrá tres entradas y una única salida, que será la señal de control enviada al controlador no lineal, que hará que el sistema global se simplifique en el sistema lineal definido por el controlador que se está tratando. Cada una de las señales de entrada, que son la referencia de aceleración, el error de velocidad y el error de posición, influyen en la misma señal de control al ser ésta única, por lo que la salida tendrá una función de transferencia que será la suma de cada una de las funciones de transferencia definidas por la relación entre la señal de control y cada una de las entradas. Estando definida la señal de control como:

$$a = \ddot{\theta}_d + K_d \cdot \dot{e} + K_p \cdot e + K_i \cdot \int e dt \quad (4.79)$$

La señal de control tiene una función de transferencia con respecto a la referencia de aceleración articular:

$$a_1 = \ddot{\theta}_d \quad (4.80)$$

$$\frac{a_1}{\ddot{\theta}_d} = 1 \quad (4.81)$$

El subíndice de la señal de control hace referencia a la relación de cada una de las entradas, para finalmente componer la señal de control a partir de la suma de cada una de ellas. En el caso del error de velocidad articular:

$$a_2 = \dot{e} \cdot K_d \quad (4.82)$$

$$\frac{a_2}{\dot{e}} = K_d \quad (4.83)$$

Por último, el error de posiciones articulares:

$$a_3 = K_p \cdot e + K_i \cdot \int e dt \quad (4.84)$$

94. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

En esta última relación se aplicará la transformada de *Laplace*, para transformar la ecuación diferencial lineal (4.84) en una ecuación algebraica. A las relaciones de señales definidas en las ecuaciones (4.81) y (4.83) también habría que aplicar esta transformada, pero dado el caso de que se trata de relaciones constantes, el resultado sería el mismo tras aplicar la transformada, por lo que no es necesario aplicarla. La expresión que relaciona la señal de control con el error de posición será entonces, tras aplicar la transformada de *Laplace*:

$$a_3 = e \cdot \left(Kp + \frac{Ki}{s} \right) = e \cdot \left(\frac{Kp \cdot s + Ki}{s} \right) \quad (4.85)$$

Para el control digital, es necesario ahora hacer un nuevo cambio que permita obtener una expresión que refleje el funcionamiento del sistema en tiempo discreto. En un sistema de control en tiempo discreto, una ecuación en diferencias lineales caracteriza la dinámica del sistema. Para determinar la respuesta a una entrada dada, se debe resolver dicha ecuación en diferencias. La notación utilizada en este caso es la de la transformada en Z. La transformada en Z para sistemas discretos desempeña un papel análogo a la transformada de *Laplace* para sistemas continuos. Va a permitir representar la relación entre la entrada o entradas con la salida o salidas en las que influyen mediante un cociente de polinomios. Esto facilitará el cálculo de las operaciones. Así, la transformada en Z será una serie de potencias de Z^{-1} cuyos coeficientes serán los valores de las muestras de las señales de entrada. La manera en que se considerará la transformada Z de las entradas consiste en usar Z^{-1} para enumerar el lugar de cada una de las muestras. Así, Z^0 hará referencia a la muestra actual, Z^{-1} a la muestra tomada en el periodo de tiempo de muestreo anterior, y así sucesivamente. Es decir, multiplicar por Z equivale a adelantar un intervalo de muestreo, mientras que dividir entre Z es equivalente a retrasar un intervalo de muestreo.

La transformada en Z representará la discretización del controlador, y para realizarla se utilizará el método de *Tustin*. Para aplicarlo, se considerará el periodo de muestreo que tendrán las señales en el hardware de control. Esto permitirá obtener la ecuación en diferencias que describa la relación de la señal de control con el error de posición, para posteriormente expresar la señal de control en función de las tres entradas que la conformarán. La ecuación final programará constituyendo el propio controlador lineal con acción proporcional, derivativa e integral. El método de Tustin utiliza la siguiente equivalencia para realizar la transformación desde la transformada de *Laplace* a la transformada en Z:

$$s \cong \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (4.86)$$

Aplicando la relación anterior a la ecuación (4.85) y operando se obtiene:

$$\frac{a_3}{e} = \frac{Kp \cdot \frac{2 \cdot z - 2}{T \cdot z + T} + Ki}{\frac{2 \cdot z - 2}{T \cdot z + T}} = \frac{Kp \cdot (2 \cdot z - 2) + Ki \cdot (T \cdot z + T)}{2 \cdot z - 2} \quad (4.87)$$

$$\frac{a_3}{e} = \frac{2 \cdot Kp \cdot z - 2 \cdot Kp + T \cdot Ki \cdot z + T \cdot Ki}{2 \cdot z - 2} \quad (4.88)$$

$$a_3 \cdot (z - 1) = e \cdot \left(Kp \cdot z - Kp + \frac{T}{2} \cdot Ki \cdot z + \frac{T}{2} \cdot Ki \right) \quad (4.89)$$

$$a_3 \cdot (z - 1) = e \cdot \left(Kp \cdot z - Kp + \frac{T}{2} \cdot Ki \cdot z + \frac{T}{2} \cdot Ki \right) \quad (4.90)$$

$$a_3 \cdot (1 - z^{-1}) = e \cdot \left(Kp - Kp \cdot z^{-1} + \frac{T}{2} \cdot Ki + \frac{T}{2} \cdot Ki \cdot z^{-1} \right) \quad (4.91)$$

$$a_{3k} - a_{3k-1} = Kp \cdot e_k - Kp \cdot e_{k-1} + \frac{T}{2} \cdot Ki \cdot e_k + \frac{T}{2} \cdot Ki \cdot e_{k-1} \quad (4.92)$$

$$a_{3k} = a_{3k-1} + \left(Kp + \frac{T}{2} \cdot Ki \right) \cdot e_k + \left(\frac{T}{2} \cdot Ki - Kp \right) \cdot e_{k-1} \quad (4.93)$$

Finalmente, se llega a la siguiente expresión que será la ecuación en diferencias que constituirá el controlador *PID* del sistema, en la que deberán sustituirse los valores que se elijan para las ganancias del mismo:

$$a = \ddot{\theta}_k + Kd \cdot \dot{e}_k + a_{3k-1} + \left(Kp + \frac{T}{2} \cdot Ki \right) \cdot e_k + \left(\frac{T}{2} \cdot Ki - Kp \right) \cdot e_{k-1} \quad (4.94)$$

El regulador de tipo *PD* representa relaciones directas de cada una de sus entradas con señal de salida, es decir, la señal de control. Por lo tanto, la ecuación en diferencias que describe a ese controlador es:

$$a = \ddot{\theta}_k + Kd \cdot \dot{e}_k + Kp \cdot e_k \quad (4.95)$$

4.4.5. Control en el Espacio Cartesiano

Los lazos de control propuestos hasta ahora trabajaban en el espacio de las articulaciones, de manera que los puntos interpolados de las trayectorias eran continuamente transformados a valores articulares por medio de la cinemática inversa. Se propondrá ahora un planteamiento similar al control por dinámica inversa pero que trabaja con puntos del espacio cartesiano. El conocimiento de este tipo de control permitirá la implementación del sistema de medida *Láser-Tracker*, que proporciona la posición y orientación de la punta de la herramienta del manipulador o del efector final (según si se utiliza herramienta o no) respecto del sistema de referencia ubicado en la base del robot. La medida obtenida puede ser directamente comparada con los puntos generados de la trayectoria corrigiendo la posición en el espacio, y no en función de medidas indirectas que conducen a dicha posición, como son las posiciones de las articulaciones. Para el planteamiento de este lazo de control por dinámica inversa en el espacio cartesiano existen dos opciones. Una opción sería la utilización de una dinámica realizada en el espacio cartesiano, es decir, diferente a la realizada en este proyecto, que estuviera referida al espacio cartesiano. La otra opción consiste en adaptar el lazo de control para utilizar el mismo modelo dinámico pero trabajando en el espacio cartesiano. Ambas son presentadas a continuación.

4.4.5.1. Control con dinámica en el espacio articular

La posición y orientación del efector final estarán definidas por el siguiente conjunto de variables:

$$y(t) = [X, Y, Z, A, B, C] \quad (4.96)$$

De las que X, Y y Z definen la posición en el espacio y A, B y C la orientación. A través de estos datos, que serán los que proporcione el sistema de medida *Láser-Tracker*, se podrá hacer el control. El error que lo permita estará definido por los errores de posición y de orientación:

$$e_y = \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

Siendo e_p el error de posición y e_o el error de orientación. A su vez, cada uno de ellos se define de la siguiente manera. El error de posición será:

$$e_p = p_d - p \quad (4.98)$$

Donde p_d es la posición deseada, definida por la trayectoria generada, y p la posición real medida. El error de orientación será:

$$e_o = \frac{1}{2} \cdot (n \times n_d + o \times o_d + a \times a_d) \quad (4.99)$$

Siendo n_d , o_d y a_d los vectores de orientación obtenidos a partir de las medidas del sensor; y n , o y a los vectores de orientación definidos para cada punto de la trayectoria. Ya que se puede utilizar un controlador de tipo PID como en el caso de los lazos de control ya propuestos, se definirá también la integral de este error de posición:

$$\varepsilon_y = \int e_y dt \quad (4.100)$$

Además de los errores de posición y orientación (y su integral) es necesario definir el error de velocidad, que a su vez estará también compuesto por dos tipos de errores. La función de velocidad en el espacio se define por el siguiente vector:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

v es el vector de velocidad lineal y ω es el vector de velocidad angular. A partir de estos valores se calculará el error comparando este vector con el vector de velocidades establecidas para la trayectoria:

$$\dot{y}_d = \begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Con estas dos definiciones ya es posible establecer el nuevo error:

$$\dot{e}_y = \dot{y}_d - \dot{y} \quad (4.103)$$

Por último, es necesario definir el error de aceleración, que aunque no se utilizará en el lazo de control, es necesario para poder realizar la ley de control. La aceleración en el espacio cartesiano estará definida por el siguiente vector:

98. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

a es el vector de aceleración lineal y α es el vector de aceleración angular. Las aceleraciones establecidas para una trayectoria dada se establecen en el siguiente vector:

$$\ddot{y}_d = \begin{bmatrix} a_d \\ \alpha_d \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Por lo tanto el error de aceleración quedará definido de la siguiente manera:

$$\ddot{e}_y = \ddot{y}_d - \ddot{y} \quad (4.106)$$

La relación entre la velocidad lineal y angular en el espacio cartesiano y los valores de la velocidad angular de cada una de las articulaciones está definida por el jacobiano:

$$\dot{y} = J \cdot \dot{\theta} \quad (4.107)$$

Al igual que con las velocidades, el jacobiano también relaciona las aceleraciones articulares y cartesianas:

$$\ddot{y} = J \cdot \ddot{\theta} + \dot{J} \cdot \dot{\theta} \quad (4.108)$$

La dinámica del manipulador definida por el método de *Euler-Lagrange* que está representada por la ecuación (3.43) pasa a tener la siguiente expresión para dar lugar al control a través de variables en el espacio cartesiano, a través de la igualdad definida en la ecuación (la anterior a esta (y segunda)):

$$\tau = M \cdot J^{-1} \cdot (\ddot{y} - \dot{J} \cdot \dot{\theta}) + H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) + \tau_d \quad (4.109)$$

Despejando el vector de aceleración en el espacio cartesiano se obtiene:

$$\ddot{y} = \dot{J} \cdot \dot{\theta} - J \cdot M^{-1} \cdot (H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) + \tau_d - \tau) \quad (4.110)$$

Utilizando la ecuación (4.103) sobre la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$\ddot{e}_y = \ddot{y}_d - \dot{J} \cdot \dot{\theta} + J \cdot M^{-1} \cdot (H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) + \tau_d - \tau) \quad (4.111)$$

A partir de esta nueva definición del error de aceleración se procederá a separar la parte correspondiente a las perturbaciones, ya que esta no formará parte de la ley de control:

$$u = \ddot{y}_d - \dot{J} \cdot \dot{\theta} + J \cdot M^{-1} \cdot (H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) - \tau) \quad (4.112)$$

$$w = J \cdot M^{-1} \cdot \tau_d \quad (4.113)$$

Se obtiene por tanto una expresión que define el comportamiento ideal del sistema, u , y otra que representa la respuesta ante perturbaciones, w . A partir de la ecuación (4.112) se despeja el par para obtener finalmente la expresión que permite controlar al manipulador:

$$\tau = M \cdot J^{-1} \cdot (\ddot{y}_d - \dot{J} \cdot \dot{\theta} - u) + H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (4.114)$$

Ahora es necesario definir la señal de control u . Para ello se puede recurrir a uno de los controladores utilizados en los subapartados 4.4.2.1 y 4.4.3.1. En este caso se va a utilizar el de tipo *PID*, por las ventajas que presenta frente al de tipo *PD*. Por la tanto la señal de control u se define de la siguiente forma:

$$u = -K_d \cdot \dot{e}_y - K_p \cdot e_y - K_i \cdot \varepsilon_y \quad (4.115)$$

Utilizando esta expresión en la ecuación (4.114) se llega a la siguiente definición, que es la que establecerá la configuración del lazo de control:

100. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$\tau = M \cdot J^{-1} \cdot (\dot{y}_d - \dot{j} \cdot \dot{\theta} + K_d \cdot \dot{e}_y + K_p \cdot e_y + K_i \cdot \varepsilon_y) + H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (4.116)$$

A partir del Jacobiano ya calculado en el apartado 2.5 de este trabajo, se puede obtener su inversa a través de dos métodos diferentes.

El primero de ellos consistiría en calcular los términos simbólicos del Jacobiano para el manipulador. A partir de ellos se invertiría la matriz y se tendría una expresión que permitiría calcular la inversa del Jacobiano para cualquier posición sustituyendo los valores articulares. Sin embargo, pese a que una vez que se tiene la expresión simbólica no es necesario volver a calcular la matriz, la complejidad de la misma para un manipulador de seis grados de libertad hace que la sustitución de los términos por los valores determinados para cada instante de tiempo sea un proceso lento desde el punto de vista computacional.

El otro método consiste en realizar primero la evaluación numérica del Jacobiano, para posteriormente realizar la inversión. Con este método, es necesario el recómputo de las matrices tanto del Jacobiano como de su inversa para cada instante de tiempo. Aún así, computacionalmente es un proceso más sencillo que el anterior en el caso del manipulador tratado, por lo que es el método elegido que se incorporaría en la ejecución de este lazo de control.

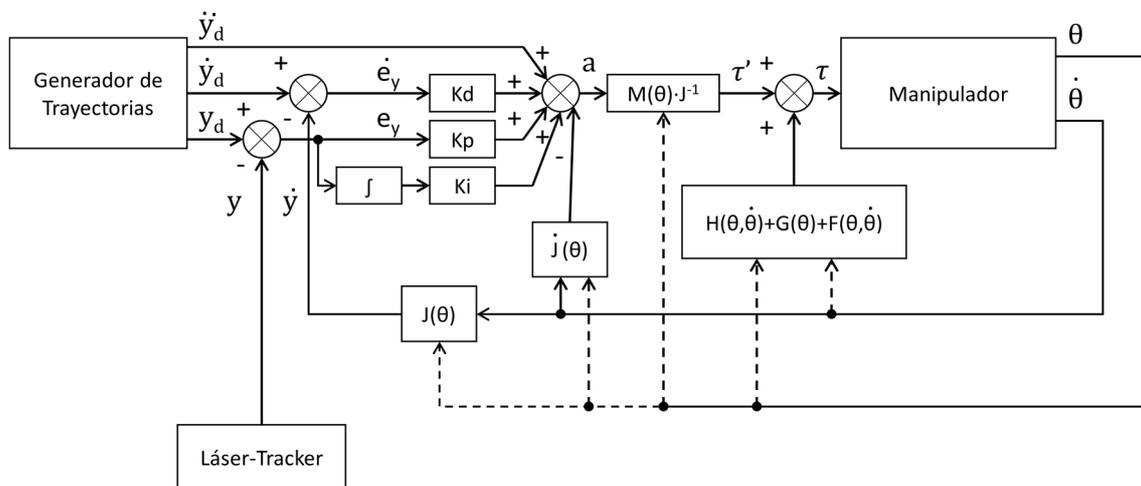


Figura 34. Control por dinámica inversa con referencias en el espacio cartesiano, dinámica articular y controlador PID

Sin embargo, esta ley de control presenta el inconveniente de que para el cálculo de la derivada del Jacobiano (\dot{J}) se necesitaría tener su expresión simbólica. Para obtenerla debería derivarse la matriz jacobiana respecto del tiempo, estando esta expresada también según sus términos simbólicos. Para manipuladores de menos grados de libertad este proceso puede ser llevado a cabo, pero en el caso de manipuladores de seis grados de libertad los modelos son demasiado complejos para llevar a cabo su

cálculo, y posteriormente utilizar la expresión obtenida para sustituir los valores dados en cada instante de tiempo.

4.4.5.2. El jacobiano en el dominio de fuerzas

Para poder comenzar el estudio de un sistema de control que incorpore la dinámica en el espacio cartesiano es necesario definir primero como relacionarlo con los parámetros con los que ya se estaba trabajando.

Cuando sobre un mecanismo actúan fuerzas, el trabajo se produce si el mecanismo se mueve a través de un desplazamiento. El trabajo se define como el producto de una fuerza aplicada sobre un cuerpo y del desplazamiento del cuerpo en la dirección de esta fuerza. El trabajo se mide en unidades de energía, por lo que debe ser la misma medida en cualquier conjunto de coordenadas generalizadas. En concreto, se puede equiparar el trabajo realizado en términos cartesianos con el trabajo realizado en términos del espacio articular. En el caso multidimensional, el trabajo es el producto escalar de un vector de fuerza o par y un vector de desplazamiento. Por lo tanto, tenemos:

$$F \cdot \delta X = \tau \cdot \delta \theta \quad (4.117)$$

Siendo F el vector de fuerzas cartesiano que actúa sobre el efector final, δX el desplazamiento infinitesimal del efector final en coordenadas cartesianas, τ el vector de pares de las articulaciones y $\delta \theta$ el vector de desplazamiento infinitesimal de las articulaciones.

La relación entre los espacios articular y cartesiano se produce a través del jacobiano:

$$\delta X = J \cdot \delta \theta \quad (4.118)$$

Utilizando esta igualdad sobre la fórmula (4.117) se obtiene la siguiente expresión:

$$F \cdot J \cdot \delta \theta = \tau \cdot \delta \theta \quad (4.119)$$

Esta última expresión es equivalente además a la utilización de los vectores de fuerza y par traspuestos a ambos lados de la igualdad:

$$F^T \cdot J \cdot \delta \theta = \tau^T \cdot \delta \theta \quad (4.120)$$

102. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

Simplificando, la ecuación anterior pasa a ser:

$$F^T \cdot J = \tau^T \quad (4.121)$$

El valor de par puede ser ahora expresado en función de la fuerza y el jacobiano:

$$\tau = J^T \cdot F \quad (4.122)$$

La matriz traspuesta del jacobiano mapea la fuerzas que actúan sobre el efector final en el espacio cartesiano a los pares de cada una de las articulaciones. Añadiendo esta ecuación en la expresión de la dinámica inversa hasta ahora propuesta, se obtiene un modelo matemático que además tiene en cuenta las fuerzas que actúan sobre el efector final:

$$\tau = M(\theta) \cdot \ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta}) + F(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + J^T \cdot F \quad (4.123)$$

4.4.5.3. Control con dinámica en el espacio cartesiano

La ley de control que se propone ahora implica realizar cambios al modelo dinámico ya realizado del manipulador. Sin embargo, no requiere el uso de la derivada del jacobiano, por lo que en este caso la ley de control puede ser llevada a cabo para el manipulador objetivo.

Hasta ahora, la ecuación de la dinámica del manipulador ha sido formulada en términos de la posición y velocidad del espacio articular, ya que de esta forma se ha podido aprovechar la naturaleza de la cadena cinemática del manipulador y realizar un desarrollo más sencillo.

Para reformular esta expresión, de modo que se obtenga el modelo dinámico del manipulador en el espacio cartesiano, se utiliza la relación establecida por el Jacobiano en el dominio de las fuerzas. La expresión con los términos dinámicos expresaría entonces la magnitud de la fuerza, en lugar del par:

$$F = M_x(\theta) \cdot \ddot{y} + H_x(\theta, \dot{\theta}) + G_x(\theta) + F_x(\theta, \dot{\theta}) \quad (4.124)$$

$$F = [F_x \quad F_y \quad F_z \quad n_x \quad n_y \quad n_z] \quad (4.125)$$

Donde F es un vector cuyas componentes son las fuerzas y pares actuando sobre el efector final del manipulador e \ddot{y} es un vector que representa la posición y orientación

del mismo representado en el espacio cartesiano (respecto a la base). Para que la ecuación (4.124) sea correcta, las matrices que la componen deben definirse:

$$M_x(\theta) = J^{-T}(\theta) \cdot M(\theta) \cdot J^{-1}(\theta) \quad (4.126)$$

$$H_x(\theta, \dot{\theta}) = J^{-T}(\theta) \cdot (H(\theta, \dot{\theta}) - M(\theta) \cdot J^{-1}(\theta) \dot{\theta}) \quad (4.127)$$

$$G_x(\theta) = J^{-T}(\theta) G(\theta) \quad (4.128)$$

$$F_x(\theta) = J^{-T}(\theta) F(\theta) \quad (4.129)$$

Al igual que se hizo en el caso del espacio articular, se pueden usar las ecuaciones dinámicas cartesianas en un controlador de desacoplamiento y linealización. Debido a que con la expresión (4.124) se calcula un vector de fuerza que debe aplicarse al efector final, se tendrá que utilizar la transpuesta del Jacobiano con el fin de implementar el control, es decir, después de que la fuerza es calculada se calcularán los pares que son necesarios aplicar para conseguir el efecto sobre el manipulador tal que se aplicase esa fuerza:

$$\tau = J^T \cdot F \quad (4.130)$$

La ley de control quedaría definida por la siguiente expresión:

$$\tau = J^T \cdot M_x(\theta) \cdot (\ddot{y}_d + K_d \cdot \dot{e}_y + K_p \cdot e_y + K_i \cdot \varepsilon_y) + H_x(\theta, \dot{\theta}) + G_x(\theta) + F_x(\theta, \dot{\theta}) \quad (4.131)$$

El lazo de control se muestra en la siguiente figura:

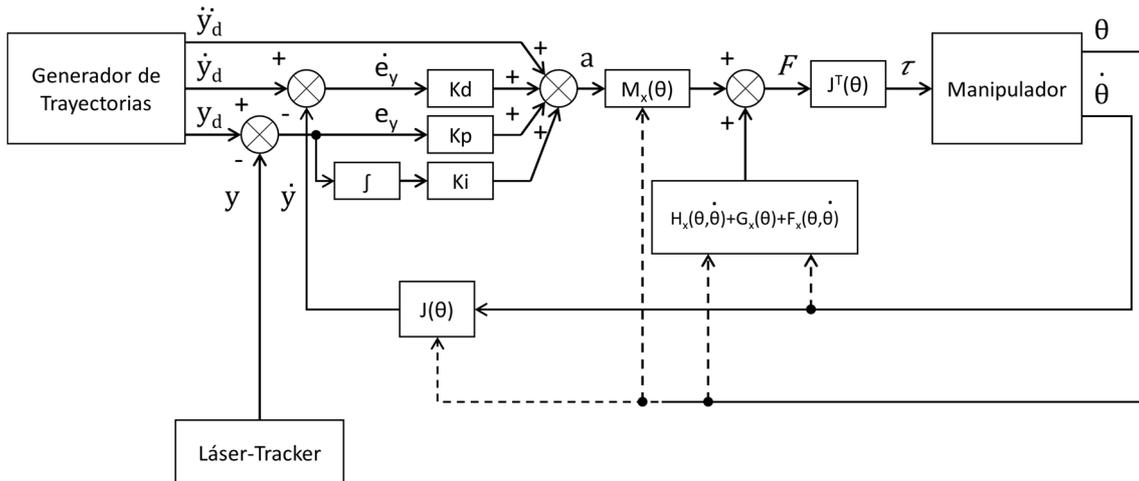


Figura 35. Control por dinámica inversa con referencias en el espacio cartesiano, dinámica cartesiana y controlador PID

4.4.6. Control de fuerza

Para las tareas realizadas habitualmente por los manipuladores robóticos el control de posición que se ha visto hasta ahora proporciona un resultado satisfactorio, ya que el seguimiento de una trayectoria hace que la tarea se realice correctamente, por ejemplo, en el caso de desplazamiento de cargas. Generalmente no se produce contacto con elementos del entorno que dificulten el movimiento o sobre los que haya que realizar ciertas presiones, por ejemplo. Cuando una tarea conlleva alguna de estas características, el control de posición puede no ser suficiente, al estar interviniendo factores que lo alterarían. Esos factores, que se pueden traducir en fuerzas que actúan sobre el sistema, pueden ser también controlados.

Como ejemplo, se puede utilizar el caso de una tarea que consista en grabar una placa de acero. Se necesitaría para ello no solo las posiciones en el espacio que describen las letras o la forma a realizar, sino también la fuerza que se debe aplicar en esos puntos para conseguir la profundidad deseada. Si no se conocen exactamente todos los puntos de la placa (caso común, ya que las piezas tienen imperfecciones), mediante únicamente el control de posición se podría apenas rozar la superficie o atravesarla. Si además de definir las posiciones en el plano definido por la pieza a grabar se incluye una referencia de fuerza a aplicar (normal al plano), no se producirá el problema anterior. Aunque se podría conseguir una alta precisión en el manipulador únicamente con el control de posición, lo que haría que no fuese necesario el control de la fuerza, los elementos del entorno son normalmente desconocidos, así que este tipo de control se hace necesario para tareas que impliquen contacto de la herramienta o del efector final. Este ejemplo pone de manifiesto la necesidad de incorporar el control de fuerza a los sistemas de control hasta ahora propuestos, es decir, se propondrá un lazo de control híbrido que incorpore tanto el control de posición como el de fuerza.

Cuando se consideran las fuerzas de contacto del efector final, se debe hacer un modelo del elemento sobre el que se está actuando. Para introducir el desarrollo de la ley de control de la fuerza se hará un modelo de interacción simple entre el efector final y el elemento de contacto.

El control de fuerza consiste en indicar una referencia de ese parámetro con el fin de que el manipulador alcance la posición constante correspondiente, que se nombrará x_d . Otra posición que es necesario definir es la posición constante x_e , que será la posición en la que se encuentre el cuerpo sobre el que actuará el manipulador. La fuerza actuante se define entonces como:

$$f_e = k_e \cdot (x - x_e) \quad (4.132)$$

Donde k_e es una constante que denota la rigidez del cuerpo de contacto, y x es la posición para cada instante de tiempo. Se supone un modelo de interacción de un sistema de segundo grado con un solo grado de libertad x . La ecuación física que describe ese sistema es entonces:

$$f = m \cdot \ddot{x} + k_e \cdot (x - x_e) \quad (4.133)$$

En el que m es la masa del sistema a controlar. Esta misma expresión, escrita en términos de la variable a controlar es:

$$f = m \cdot k_e^{-1} \cdot \ddot{f}_e + f_e \quad (4.134)$$

Usando el concepto de particionar el controlador, al igual que se hizo en las demás leyes de control, y utilizando en controlador de tipo *PD*, se obtiene la siguiente expresión para la fuerza:

$$f = m \cdot k_e^{-1} \cdot (\ddot{f}_d + Kd \cdot \dot{e}_f + Kp \cdot e_f) + f_d \quad (4.135)$$

Siendo f_d la fuerza deseada para cada punto de la trayectoria y e_f el error de seguimiento de trayectoria, definido por:

$$e_f = f_d - f_e \quad (4.136)$$

106. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

A esta ley de control ideal, se le pueden aplicar algunos cambios de manera que se adapte mejor a las condiciones reales de funcionamiento. Normalmente, las trayectorias especificadas en el dominio de la fuerza son constantes, ya que las tareas que implican contacto suelen mantenerlo con la misma fuerza para toda la trayectoria. Así que normalmente los términos \dot{f}_d y \ddot{f}_d son nulos. Además, la obtención del término \dot{f}_e debería obtenerse por derivación con la ley propuesta, lo que conlleva introducir en la señal mucho ruido, al estar este presente generalmente en las medidas de fuerza. Como alternativa, teniendo en cuenta que la medida de la velocidad es habitual en los manipuladores, se puede obtener ese valor mediante:

$$\dot{f}_e = k_e \cdot \dot{x} \quad (4.137)$$

Con estas dos consideraciones, se propone una nueva ley de control que se expresa:

$$f = m \cdot (Kp \cdot k_e^{-1} \cdot e_f - Kd \cdot \dot{x}) + f_d \quad (4.138)$$

La propuesta de esta ley de control se basa en un modelo sencillo de segundo orden. Otros modelos más complejos pueden ser utilizados, obteniendo una representación más adecuada del comportamiento real del manipulador. En cualquier caso, el objetivo es obtener el parámetro de la fuerza a través de los datos conocidos.

La señal de control que es necesario obtener a través del controlador es:

$$a' = Kp \cdot k_e^{-1} \cdot e_f - Kd \cdot \dot{x} \quad (4.139)$$

4.4.6.1. Control Híbrido Posición-Fuerza

El controlador híbrido Posición-Fuerza permite utilizar el seguimiento de trayectorias en el espacio y el control de fuerza simultáneamente. Su principio de funcionamiento consistirá en dividir el espacio de trabajo en dos subespacios a través de una formulación que lo permita. La formulación del espacio de trabajo deberá por lo tanto determinar qué direcciones deberán utilizarse para la fuerza o para la posición controlada.

Se utilizarán dos ejemplos de casos extremos en los que se muestra la división del espacio de trabajo necesaria. En el primer caso, el manipulador se mueve a través del espacio de manera libre, es decir, sin ningún tipo de contacto. En este caso, las limitaciones naturales son todas limitaciones de fuerza, ya que no hay ninguna fuerza de reacción, por lo que todas las fuerzas se ven limitadas a cero. Con un manipulador que tiene seis grados de libertad, éste sería libre para variar su posición en cada uno

de ellos, pero no sería capaz de ejercer fuerzas en ninguna dirección. En el segundo caso, la situación del manipulador se plantea con su efector final pegado a una pared. En este caso, el manipulador está sujeto a seis limitaciones posición natural, ya que no es libre para ser reposicionado. Sin embargo, el manipulador es libre de ejercer fuerzas y pares en la pared con sus seis grados de libertad. En la práctica, se suele tener en cuenta el control de la fuerza en el contexto de las tareas parcialmente restringidas, en las que algunos grados de libertad del sistema estarán bajo control de posición y otros estarán sujetos al control de fuerza. Por lo tanto, nos interesa considerar los esquemas de control híbridos. El controlador híbrido de posición y de fuerza debe resolver tres problemas:

- Control de posición del manipulador a lo largo de las direcciones en las que existe una restricción natural de fuerza.
- Forzar el control del manipulador a lo largo de las direcciones en las que existe una restricción natural de posición.
- Diseñar un esquema para la implantación de la mezcla arbitraria de estos modos de control.

Antes de plantear el caso de un manipulador de seis grados de libertad, se va a considerar un caso más simple como explicación del modo de funcionamiento. Se supondrá un manipulador con tres grados de libertad con articulaciones prismáticas que actúa en las direcciones Z, Y, X los cuales son modificados por cada una de las tres articulaciones. La primera variará la dirección Z, la segunda la dirección Y, y por último la tercera estará relacionada con la dirección X. El efector final estará en contacto con una superficie orientado de tal manera que la normal estará en la dirección Y. Por lo tanto, se requiere un control de fuerza en esa dirección, pero el control de posición se realizará en las direcciones X y Z. Entonces se podría tomar como referencia una trayectoria de posición en las direcciones X y Z, mientras que de forma independiente la referencia de una trayectoria de fuerza se daría en la dirección Y.

Si quisiésemos ser capaces de cambiar la naturaleza de la superficie de contacto tal que su normal también puede ser la dirección X o Z, se puede generalizar el sistema de control del manipulador de la siguiente manera: se construiría la estructura del controlador de manera que pudiésemos especificar una trayectoria de posición completa en los tres grados de libertad, así como una trayectoria de fuerza en los mismos tres grados de libertad. Por supuesto, no podemos controlar al mismo tiempo las seis referencias, por lo que se van a establecer configuraciones para indicar qué componentes de la trayectoria serán seguidos en cada momento dado.

Se diseñarán controladores de posición y de fuerza de forma independiente. Específicamente, el controlador de posición lineal será diseñado para las variables del espacio de trabajo que representan el movimiento tangente a la superficie. Por otra parte, el controlador de fuerza lineal se puede diseñar para las variables del espacio de trabajo que representan la fuerza normal a la superficie.

A través de la relación establecida por el Jacobiano entre el par y la fuerza, el control de fuerza puede ser utilizado conjuntamente con el control en el espacio cartesiano

108. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

(con dinámica cartesiana) de forma sencilla, dado que ambas leyes de control expresan un valor de fuerza que posteriormente se transforma en par para enviar las referencias a los actuadores. El problema reside entonces en asignar qué direcciones y orientaciones se corresponderán con cada uno de los controladores.

Para ello se utilizarán matrices en las que se especifique para cada una de las posiciones y articulaciones si será controlada en posición o en fuerza. Al estar trabajando en el espacio cartesiano, esta selección es posible, y tras la transformación de los valores de fuerza en pares se obtiene el par de cada una de las articulaciones. La utilización por tanto de otras leyes de control que trabajen en el espacio articular para el control de posición no es posible con este planteamiento.

Dichas matrices se nombran como S y S' . La matriz S , que se utilizará para elegir los grados de libertad en los que se controle la posición, será una matriz diagonal cuyos valores serán unos y ceros. Cuando se trate de un uno, es esa posición u orientación se producirá el control por posición. En el caso de que sea un cero, se ignorará el dato, ya que se corresponderá con el control de fuerza. Se deduce entonces que la matriz S' es complementaria de la anterior. Se define por lo tanto como:

$$S' = I - S \quad (4.140)$$

Siendo I la matriz identidad. S' es entonces también una matriz diagonal que filtra los grados de libertad sobre los que debe proporcionar su ley de control. El lazo de control se representa a continuación:

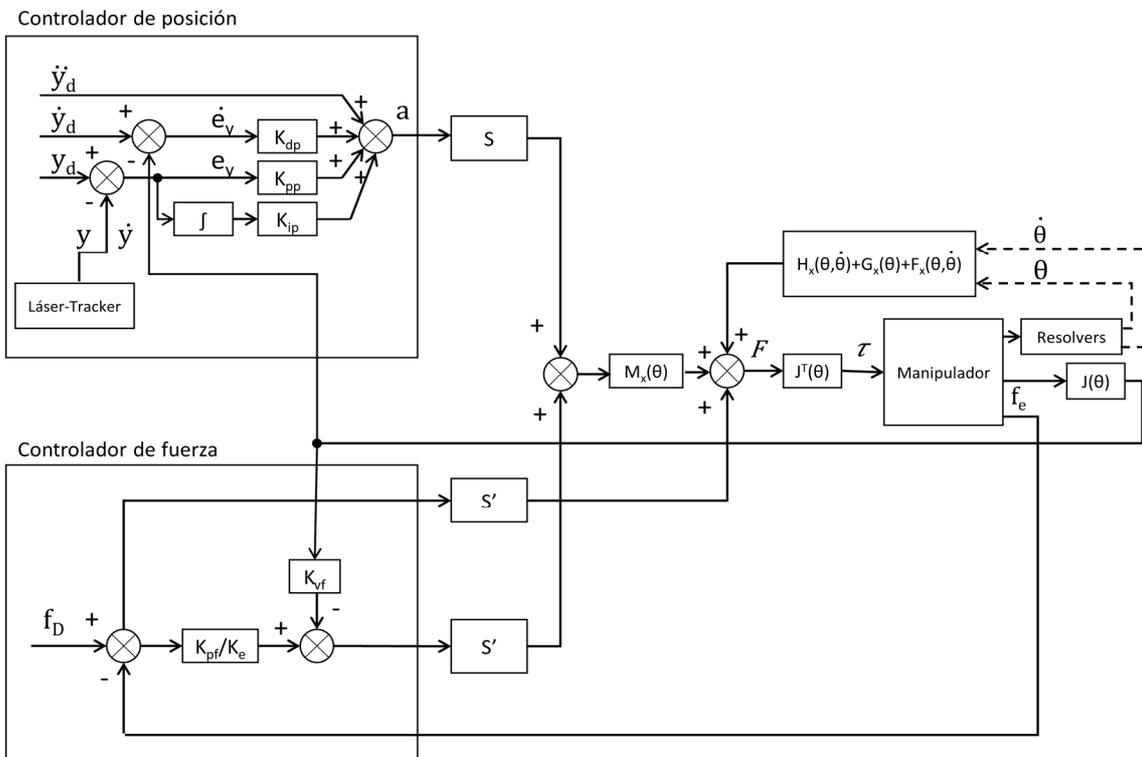


Figura 36. Controlador híbrido Posición-Fuerza

A las matrices de ganancias de los controladores se han añadido los subíndices correspondientes al tipo de control. En el caso del controlador de posición, las acciones derivativa, proporcional e integral son K_{dp} , K_{pp} y K_{ip} respectivamente. Para el controlador de fuerza, se ha propuesto en el subapartado anterior una ley de control con un controlador de tipo PD , así que las acciones proporcional y derivativa son K_{pf} y K_{vdf} respectivamente.

La señal de control de cada uno de los tipos de control es multiplicada por las matrices S y S' para la selección de los grados de libertad, y posteriormente sumadas para tener una señal que contenga la señal necesaria para el control de todos los grados de libertad, a la que se llamará a'' :

$$a'' = S \cdot a + S' \cdot a' \quad (4.141)$$

A partir de esta última señal, el proceso es el mismo que en el caso del control en el espacio cartesiano con la dinámica específica de dicho espacio.

5. Cálculos numéricos

5.1. Regulador *PID* en tiempo continuo

Se realiza a continuación un ejemplo en el que se calcularán unas ganancias del controlador *PID* que permitan aproximar la respuesta del sistema a uno de segundo orden, pudiendo establecer la frecuencia natural y la constante de amortiguamiento deseadas. El proceso se realizará de forma inversa, es decir, estableciendo el comportamiento que se quiere obtener del sistema, se calcularán las ganancias del regulador *PID* que permitan tener un sistema equivalente.

Primero se establecen:

$$\omega_n = 2 \quad (5.1)$$

$$\xi = 1 \quad (5.2)$$

Estos valores dan lugar a unas ganancias y a una ecuación característica tal que:

$$Kp = \omega_n^2 = 4 \quad (5.3)$$

$$Kd = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 4 \quad (5.4)$$

$$d(s) = s^2 + 4 \cdot s + 4 \quad (5.5)$$

En el caso de un sistema críticamente amortiguado, en el lugar de las raíces se produce la presencia de un polo doble, como se puede observar:

$$s^2 + 4 \cdot s + 4 = 0 \quad (5.6)$$

$$s_1 = -2, \quad s_2 = -2 \quad (5.7)$$

$$d(s) = (s + 2) \cdot (s + 2) \quad (5.8)$$

Para conseguir la equivalencia, se establecerá que el polo doble constituya el polo dominante, de manera que el polo adicional del sistema de tercer orden debe cumplir:

$$\sigma > 6 \cdot 2 \quad (5.9)$$

Se elige por tanto un valor que cumpla este criterio:

$$\sigma = 20 \quad (5.10)$$

Este polo da lugar entonces a la siguiente ecuación característica:

$$d'(s) = (s + 2) \cdot (s + 2) \cdot (s + 20) \quad (5.11)$$

$$d'(s) = s^3 + 24 \cdot s^2 + 84 \cdot s + 80 \quad (5.12)$$

Las ganancias del controlador *PID* son por tanto:

$$Kd = 24 \quad (5.13)$$

$$Kp = 84 \quad (5.14)$$

$$Ki = 80 \quad (5.15)$$

Se debe comprobar que estas ganancias cumplen los criterios establecidos anteriormente para que el sistema sea estable. Los valores son positivos, así que solo resta comprobar la relación (4.74):

$$24 \cdot 84 > 80 \quad (5.16)$$

Se tiene finalmente un sistema de tercer orden, cuyo comportamiento se puede aproximar a una de segundo orden conocido y que cumple el criterio de estabilidad.

5.2. Reguladores *PID* y *PD* en tiempo discreto

Se realiza a continuación un ejemplo de dos controladores *PID* y *PD*, que serán definidos por ecuaciones en diferencias para un periodo de muestreo establecido. Las ganancias coinciden con las elegidas en el ejemplo anterior. Se elige además un periodo de muestreo, cuyo valor será el objetivo a alcanzar en el montaje real del sistema:

$$T = 0.001s \quad (5.17)$$

En este caso se presentan las matrices de ganancias completas, que son las matrices que contienen las ganancias para cada una de las articulaciones o grados de libertad, según se trate de un control en el espacio articular o cartesiano respectivamente. Éstas deben ser diagonales, pero sus ganancias pueden variar, en el caso de que las características de un eslabón hagan que tenga una frecuencia de resonancia mayor, por ejemplo. Las matrices de ganancias para un regulador de tipo *PID* son:

$$K_d = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 84 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 84 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 84 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$K_i = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Aplicando los valores a la ecuación en diferencias del controlador de tipo *PID* se obtiene el siguiente resultado:

$$a_k = \ddot{q}_{dk} + 20 \cdot \dot{e}_k + a_{k-1} + 84.04 \cdot e_k - 83.96 \cdot e_{k-1} \quad (5.21)$$

En el caso del regulador *PD*, la expresión sería la siguiente, teniendo en cuenta la equivalencia establecida en el subapartado anterior entre el sistema de segundo orden y el de tercer orden:

$$a_k = \ddot{q}_{dk} + 4 \cdot \dot{e}_k + 4 \cdot e_k \quad (5.22)$$

6. Simulación

Se presenta en este apartado algunos ejemplos de las simulaciones realizadas para probar la corrección de las leyes de control estudiadas en el trabajo. En concreto, se presentan los resultados de los controles por par calculado y por dinámica inversa. El resto de leyes de control serán probadas sobre el hardware de control por la complejidad que presenta el desarrollo de modelos que simulen partes como la generación de trayectorias en el espacio cartesiano o la medición de la fuerza aplicada por el efector final, por ejemplo.

6.1. Simulación dinámica

Inicialmente, para simular el movimiento del manipulador se hará uso de la dinámica directa del mismo. Mediante esta simulación se podrá comprobar que el lazo de control está correctamente diseñado. En un principio no se tendrán en cuenta los accionadores encargados de generar el par requerido en cada articulación, por lo que el sistema será ideal. Posteriormente se introducirán dichos actuadores junto con sus lazos de control (servomotores con sus respectivos *Drivers*) para conseguir una simulación que se corresponda con el modelo real del manipulador.

Para simular la dinámica directa del manipulador se hará uso de las matrices y vectores obtenidos a través del método de Lagrange en la dinámica directa, representados en la ecuación (3.44). Simulando la dinámica directa del manipulador de esta manera se obtienen las aceleraciones angulares de las articulaciones. Para conseguir los datos de posiciones y velocidades angulares que serán las variables que se realimentan para el control se debe integrar la aceleración obtenida. El método elegido determinará la precisión y eficiencia de la simulación.

Mediante el uso de la *toolbox* de *MATLAB SimDriverline* se puede crear un modelo del manipulador que tenga en cuenta los aspectos dinámicos modelados, permitiendo obtener una respuesta que sea medida en el manipulador y posteriormente realimentada de las posiciones y velocidades angulares. Esto permitiría sustituir la simulación anterior que se limita a despejar la variable de salida del modelo dinámico. En este paso ya se tendría un modelo del que se obtienen respuestas que se acercarán más a la realidad cuanto más exacto sea el modelo dinámico del manipulador.

No se dispone de los suficientes datos para hacer un modelo que se ajuste a la dinámica realizada, por lo que para poder realizar este paso se deberían realizar pruebas prácticas que diesen como resultado el conocimiento de los parámetros necesarios para completar la simulación, como por ejemplo el efecto del *counter-balancing system* sobre la dinámica del robot, la acción de los frenos de los motores, etc.

El último paso consistiría en añadir al modelo diseñado en *SimDriverline* de otros elementos presentes en el manipulador real que influyen las variables a medir,

como pueden ser las dinámicas de los motores. Para este tipo de elementos, que serán elementos de potencia, se usará la *toolbox SimPowerSystems*.

6.2. Simulación de trayectorias

En este apartado se presentan ejemplos de trayectorias generadas para realizar simulaciones de movimientos que se podrían pedir al robot. Estos ejemplos, con los mismos valores, serán los utilizados para las leyes de control que se simularán en los siguientes apartados.

Los perfiles de velocidad para cada una de las articulaciones son perfiles trapezoidales, y se coordinan de manera isócrona. Los valores se ajustan a las limitaciones de los motores, de manera que no se establezcan nunca referencias que no puedan ser alcanzadas o que impliquen un trabajo que pueda llegar a dañar los actuadores. El ajuste se realiza de manera que los periodos de aceleración y deceleración de todas las articulaciones coincidan, consiguiendo que no se produzcan tirones en el movimiento del robot.

Los valores introducidos de giro deseado se corresponden a la posición final a alcanzar, y están especificados en grados. Los valores elegidos son:

$$th1 = 10^{\circ} \quad (6.1)$$

$$th2 = 15^{\circ} \quad (6.2)$$

$$th3 = 20^{\circ} \quad (6.3)$$

$$th4 = 5^{\circ} \quad (6.4)$$

$$th5 = -12^{\circ} \quad (6.5)$$

$$th6 = 31^{\circ} \quad (6.6)$$

116. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

El perfil de velocidad para cada una de las articulaciones es entonces, tratando de alcanzar la máxima velocidad posible que permita el movimiento coordinado:

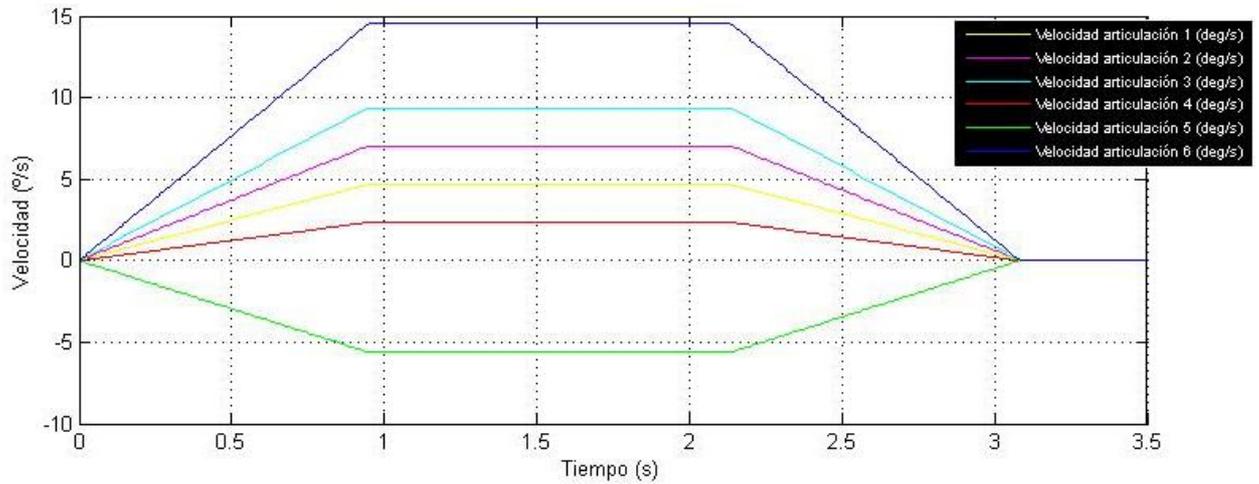


Figura 37. Perfiles trapezoidales de velocidad angular

Las posiciones comandadas a partir de estas velocidades serán, desde la posición inicial hasta las referencias introducidas a alcanzar:

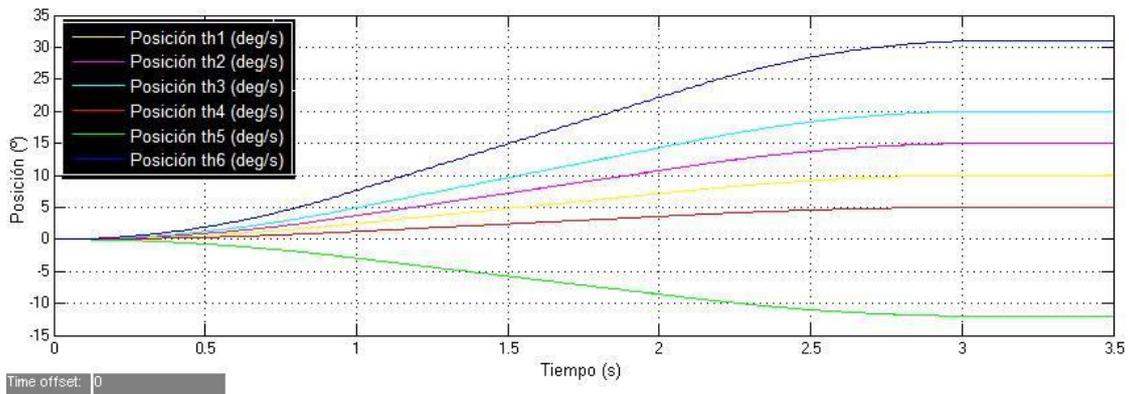


Figura 38. Posiciones angulares de las articulaciones

Por último se representan las aceleraciones de esta trayectoria concreta:

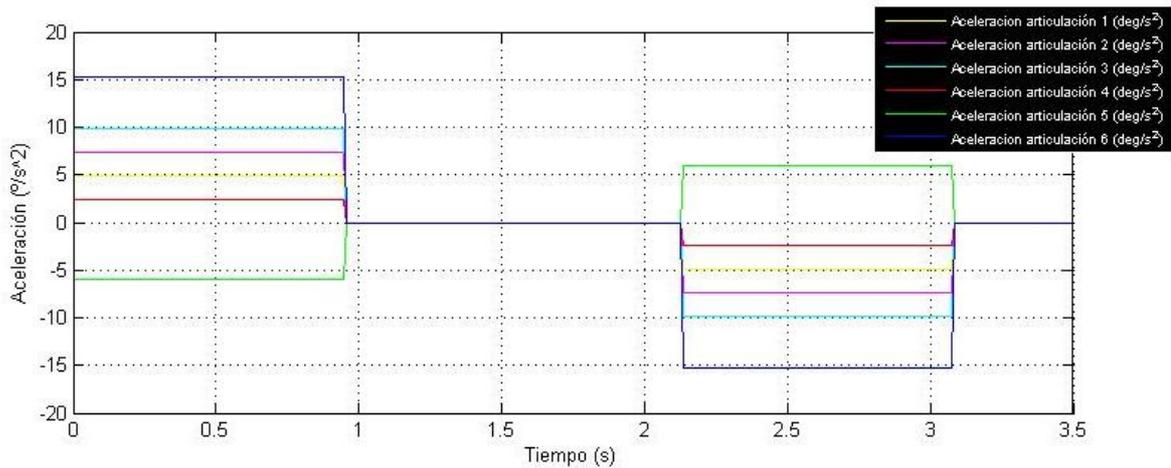


Figura 39. Aceleraciones angulares

En el caso de tener en cuenta el *jerk*, los escalones que se producen tendrían menos pendiente y se produciría un cambio más suave entre las fases con aceleración y la fase de velocidad constante. Este parámetro será tenido en cuenta en el hardware de control, que incorpora órdenes específicas para poder establecerlo.

6.3. Control por par calculado

La primera simulación realizada fue la correspondiente a la ley de control de par calculado. Se realiza suponiendo un tiempo continuo, con el fin de comprobar primero el correcto funcionamiento de la ley de control. Para ello se utiliza la ley de control propuesta en el apartado 4.4.2. El esquema desarrollado en *Simulink* del lazo de control es el siguiente:

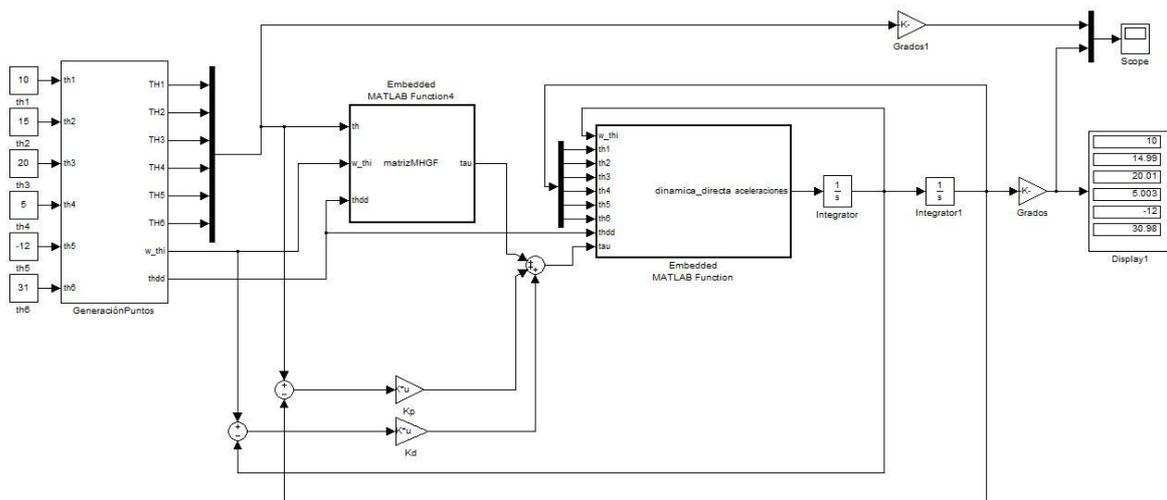


Figura 40. Representación en Simulink del control por par calculado

En él se distinguen todas las partes mostradas en la figura 32. El bloque generador de trayectorias recibe directamente datos de los giros deseados en el espacio articular. En posteriores simulaciones se introducirá la información en el espacio cartesiano y se

118. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

transformará al espacio articular, tal como sería el funcionamiento real del manipulador cuando la ley de control utilice información del espacio articular.

El siguiente bloque contiene las matrices dinámicas definidas para nuestro manipulador:

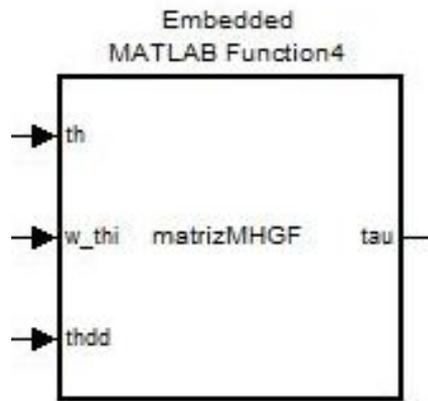


Figura 41. Bloque que resuelve la dinámica inversa

En él se introducen los datos de las trayectorias directamente, para calcular los valores de los pares que se deberían generar en cada una de las articulaciones. Posteriormente, se suman las señales de realimentación. Dichas señales proceden del cálculo previo de los errores y de su multiplicación por las matrices de ganancias proporcional y derivativa. Se muestran en la siguiente figura los valores de los pares de cada una de las articulaciones para la trayectoria simulada:

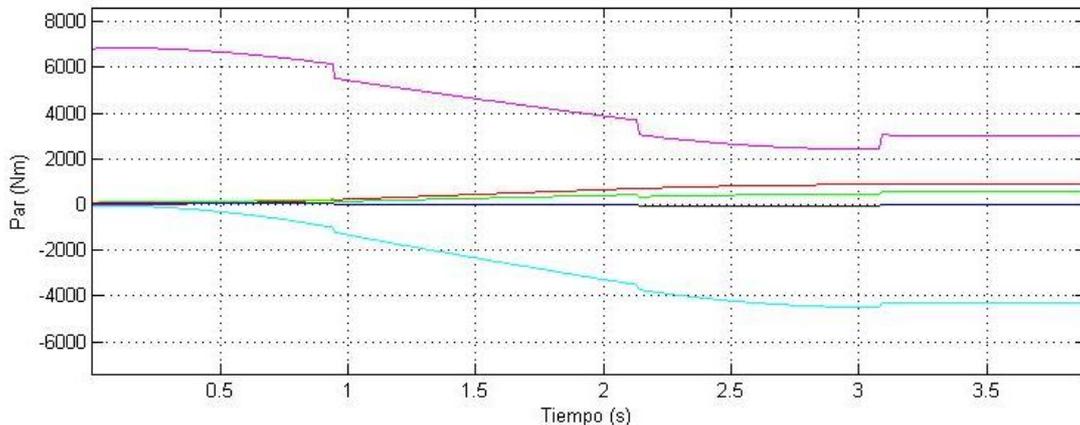


Figura 42. Pares de cada una de las articulaciones

Cada una de las articulaciones tiene unas características dinámicas diferentes, por lo que articulaciones como la segunda (representada en rosa) requieren una mayor cantidad de par para poder realizar los movimientos.

El siguiente bloque, el de la dinámica directa, recibe de la dinámica inversa el valor de la señal de control, que se considera el par:

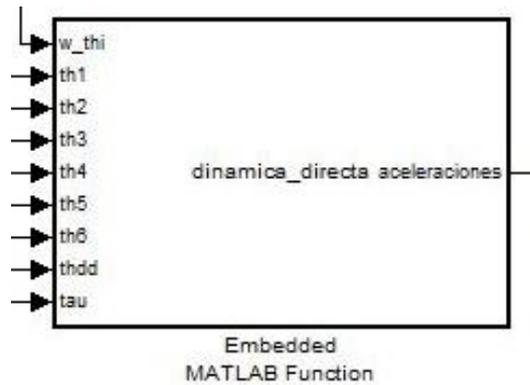


Figura 43. Bloque que resuelve la dinámica directa

Además, se realimentan los valores de las posiciones y velocidades angulares reales para a su vez poder calcularlas correctamente, y no en función de los valores de la trayectoria, que no tiene porque corresponder exactamente con los valores medidos. La siguiente figura representa el ejemplo de la señal producida para cada articulación durante la simulación:

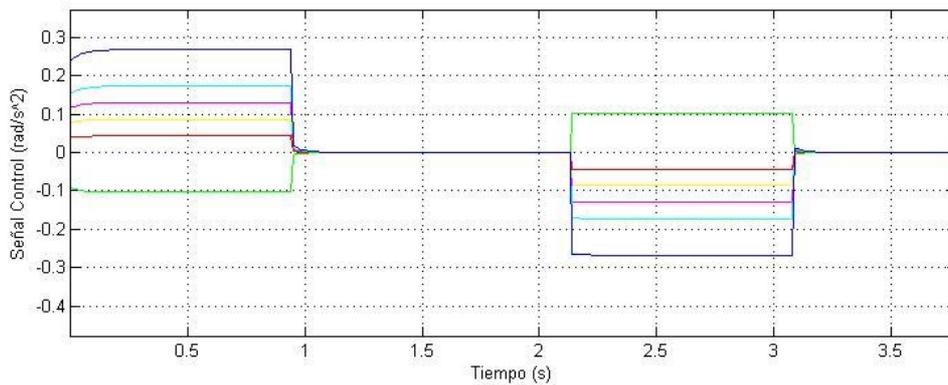


Figura 44. Señales de control

Los bloques de integración servirán para obtener las velocidades y las posiciones angulares a partir de la aceleración angular calculada.

Se supone que se parte de posición inicial, en la que todos los valores angulares son igual a cero.

El valor obtenido a la salida del sistema, comparado con la referencia de posición de la trayectoria se muestra a continuación:

120. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

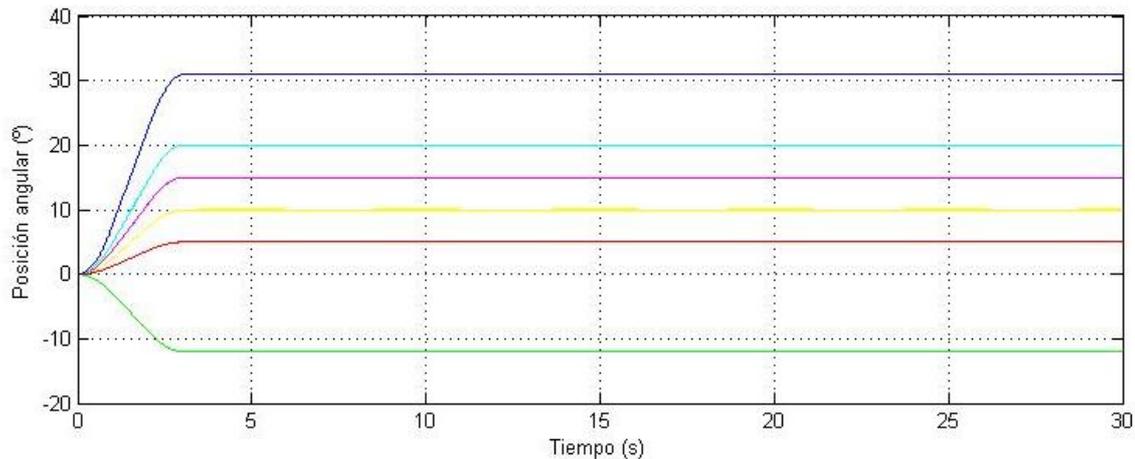


Figura 45. Trayectorias de todas las articulaciones

El seguimiento de trayectoria se cumple, por lo que el objetivo final de la ley de control es alcanzado. Examinando específicamente el comportamiento de la sexta articulación, se verá el resultado anterior más ampliado:

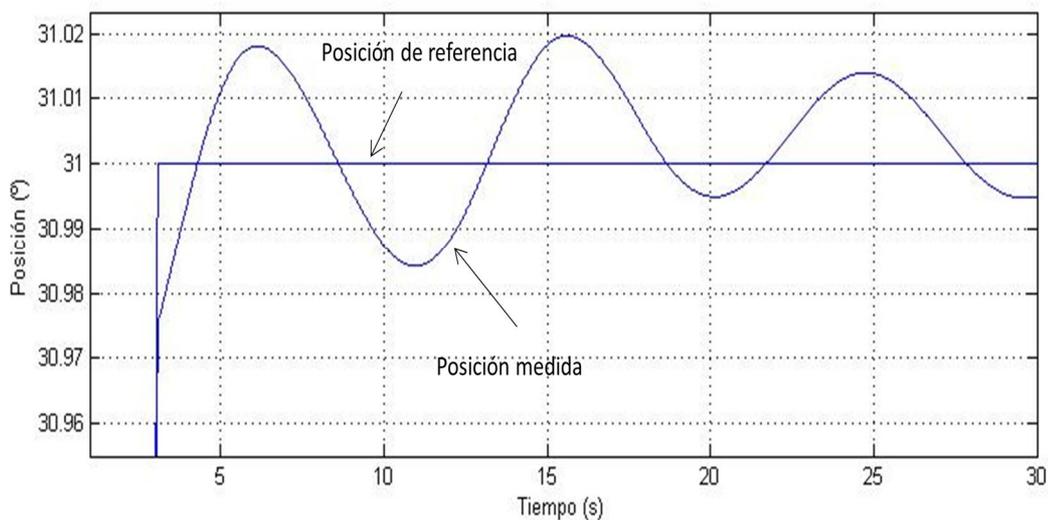


Figura 46. Seguimiento de la trayectoria de la sexta articulación

Para la ejecución que proporciona estos resultados se establecieron unos valores para las ganancias:

$$Kd = 20 \quad (6.7)$$

$$Kp = 100 \quad (6.8)$$

Se usa esta articulación para comprobar los resultados dado que es la que menor inercia presenta, por lo tanto este resultado es representativo del comportamiento que

se puede esperar de la ley de control, ya que el resto de articulaciones se verán menos afectadas por cualquier tipo de factor al presentar una mayor resistencia al cambio. Como se puede apreciar en la figura 51 el tiempo de establecimiento es muy elevado, con una sobreoscilación máxima de 0.02° . Este resultado evidencia el hecho de que los polos no están fijos, ya que con las ganancias elegidas el sistema debería comportarse como un sistema críticamente amortiguado. Sin embargo, el hecho de que la matriz de inercias varíe hace que el resultado no se ajuste correctamente a la referencia introducida. La matriz de inercias tiene valores muy elevados, al tratarse de un robot de grandes dimensiones, por lo que su inversa tiene valores muy pequeños. Esto hace que las ganancias a elegir deban ser muy grandes, ya que como se ve en este ejemplo la velocidad de respuesta es muy baja.

Se prueban a continuación unas ganancias mayores que proporcionen un resultado mejor, que se ajuste más rápidamente a la referencia a seguir. Las ganancias son ahora:

$$Kd = 200 \quad (6.9)$$

$$Kp = 10000 \quad (6.10)$$

El resultado del seguimiento de la sexta articulación es ahora:

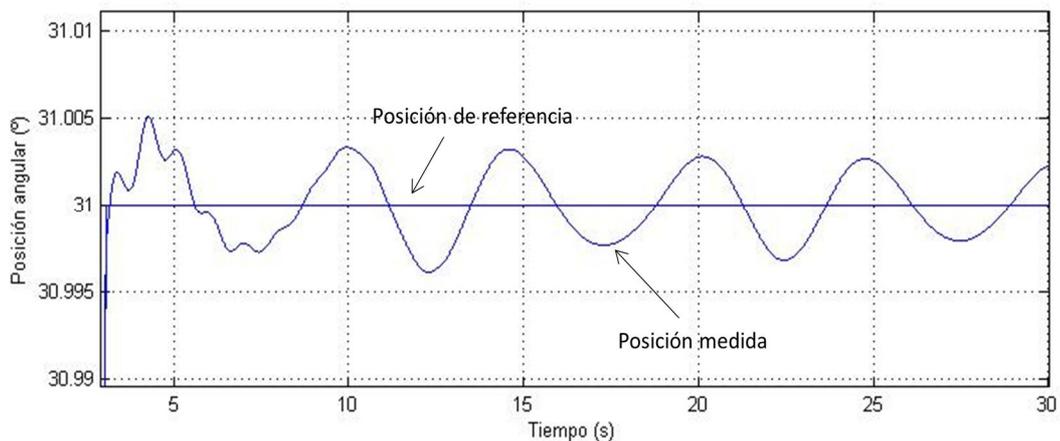


Figura 47. Seguimiento de trayectoria de la articulación 6

Como se aprecia en la figura anterior la sobreoscilación es menor, con un máximo de 0.005° . Sin embargo, el tiempo de establecimiento sigue siendo muy elevado, además de que la oscilación es variable. Sigue estando presente por lo tanto el problema de que los polos no están fijos, y los resultados no son por tanto los adecuados ya que no se puede controlar ese aspecto.

Se concluye entonces que la ley de control es correcta, y que los resultados obtenidos son correctos, pero los problemas inherentes de la ley de control hacen que no sea un sistema muy adecuado para su implementación final, por lo que se pasará ahora a presentar las pruebas realizadas con el control por dinámica inversa.

6.4. Control por dinámica inversa

La siguiente simulación se realiza con el control por dinámica inversa. En este caso, la representación en *Simulink* es:

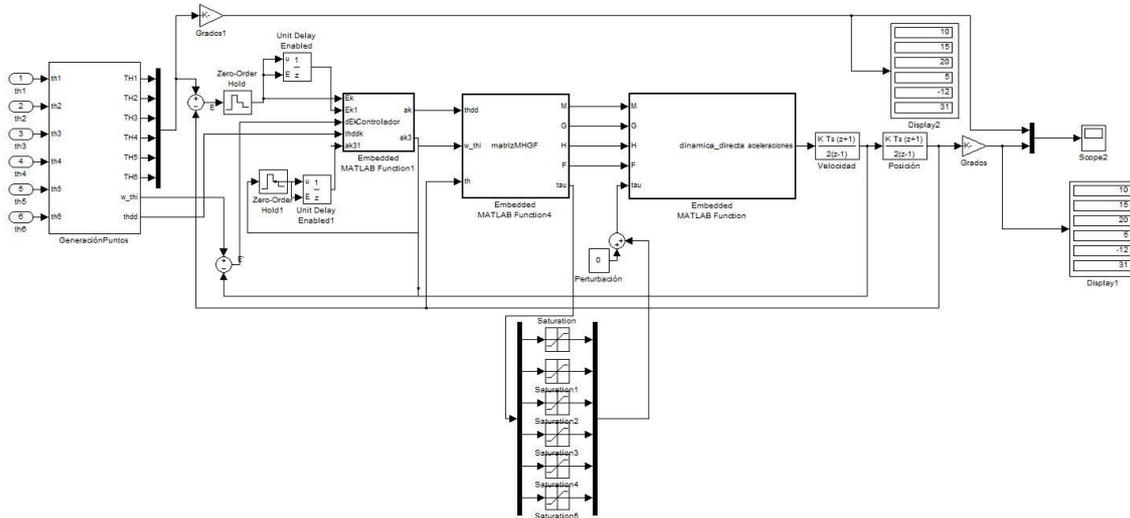


Figura 48. Representación en Simulink del control por dinámica inversa

Se utiliza, como añadido respecto de la simulación anterior, la cinemática inversa para obtener las posiciones articulares a partir de los datos de referencia de la posición y orientación del efector final en el espacio cartesiano, como se observa en la siguiente figura, que representa la estructura general del funcionamiento de esta ley de control junto con la generación de trayectorias:

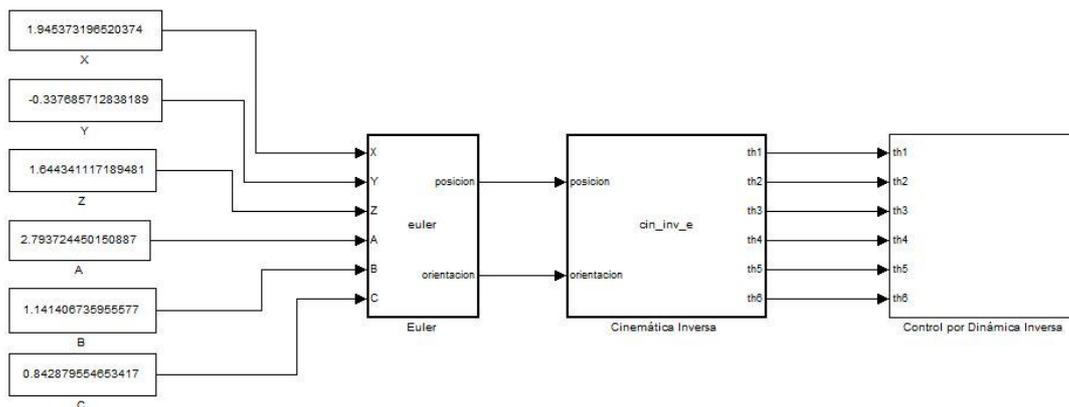


Figura 49. Representación general de los bloques de simulación del control por dinámica inversa

A partir de las referencias se utiliza la transformación de ángulos fijos para obtener los datos para poder trabajar con las transformadas homogéneas de la cinemática

inversa. A partir de ella se introduce en el bloque de control los valores de las posiciones articulares de la posición a alcanzar.

En esta simulación se utiliza el tiempo discreto, para acercarse más al funcionamiento a la ejecución real que tendrá el modelo final. Por ello se utilizan otros bloques adicionales que permiten realizar este tipo de simulación.

Tras el cálculo de los errores de posición y de velocidad se utilizan dos bloques correspondientes a bloqueadores de orden cero, con el objetivo de conseguir que entre cada dos ciclos de ejecución consecutivos se mantenga constante el último valor establecido. En ellos se establece el periodo de muestreo, que será de una milésima, al igual que en el ejemplo numérico realizado en el apartado 5.2.

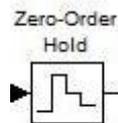


Figura 50. Bloque del bloqueador de orden cero

Después de los bloqueadores, se utilizan dos bloques de retraso de señal, de manera que a través de ellos se puedan obtener los valores del periodo de muestreo anterior al actual para su utilización en la ecuación en diferencias que representa el funcionamiento del controlador lineal. En la siguiente figura se muestra este tipo de bloque:

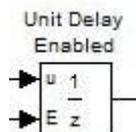


Figura 51. Bloque de retraso de señal

La función *Controlador* contiene la ecuación en diferencias del controlador. A ella entran, además de los errores de posición y velocidad, la aceleración correspondiente a la trayectoria definida, así como el valor del error de velocidad y la señal de control respecto del error de posición del periodo de muestreo anterior. Además, los valores de las ganancias del controlador también son definidos en él, de manera que a partir de la ecuación en diferencias genérica, se puedan sustituir los valores elegidos y obtener directamente la expresión asociada a ellos que generará la señal de control adecuada. Se establecen en él por tanto las ecuaciones en diferencias del controlador *PD* y *PID* para realizar diferentes pruebas:

124. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

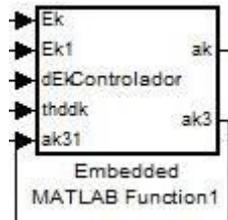


Figura 52. Bloque que implementa el controlador del sistema

El siguiente bloque contiene las matrices dinámicas, y su funcionamiento es el mismo que en el caso del control por par calculado, con la diferencia de que en este caso se utilizan los valores de la salida del manipulador, y no los correspondientes a la trayectoria, teniendo así los valores correctos para compensar la dinámica real del manipulador.

A la salida del par de este bloque se han añadido bloques de saturación al valor de cada una de las articulaciones, con el fin de evitar que se comanden valores superiores al valor máximo que se puede generar en cada una de ellas, determinado por la capacidad del motor y la etapa reductora asociada. Este valor es proporcionado por el fabricante.

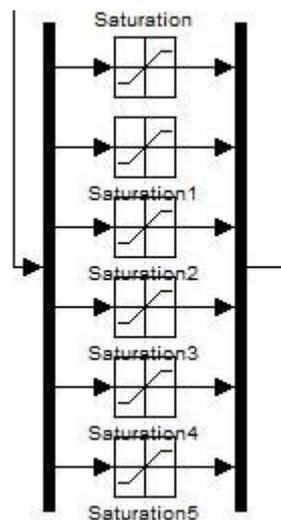


Figura 53. Bloques de saturación

El último bloque se corresponde con la dinámica directa. La diferencia respecto del bloque utilizado en el control por par calculado es que en este caso se utilizan los mismos cálculos que en la dinámica inversa, ya que ésta está realizada en función de los valores reales medidos.

La primera prueba se realiza con un controlador de tipo *PD*. Los resultados del control de posición son los siguientes, con los valores de las ganancias establecidas en el apartado 5.1 para el sistema equivalente de segundo orden:

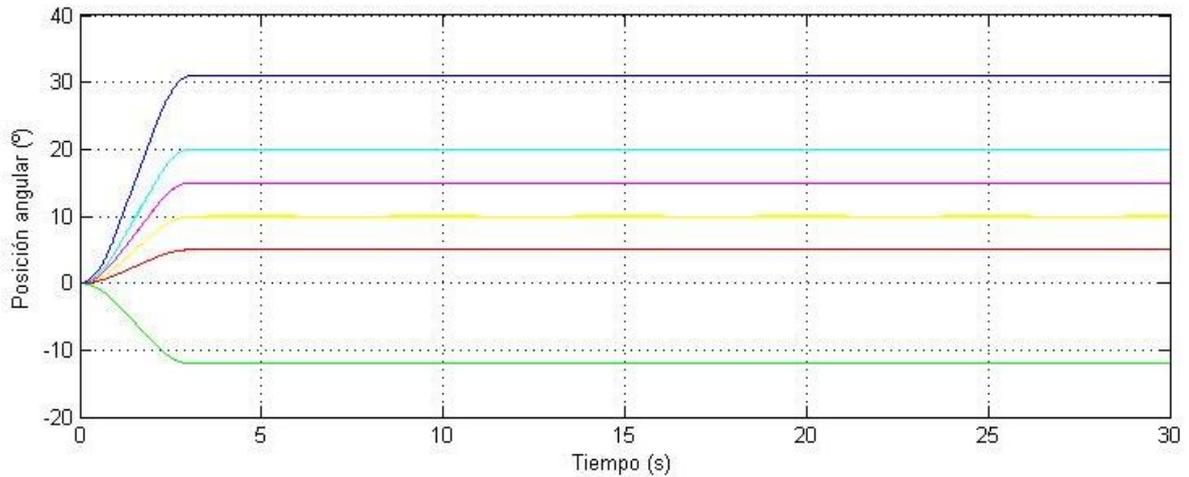


Figura 54. Seguimiento de las trayectorias de las articulaciones

Analizando ahora el resultado de seguimiento de la sexta articulación se observa que con una ganancia mucho menor se obtiene un mejor resultado que con el control por par calculado:

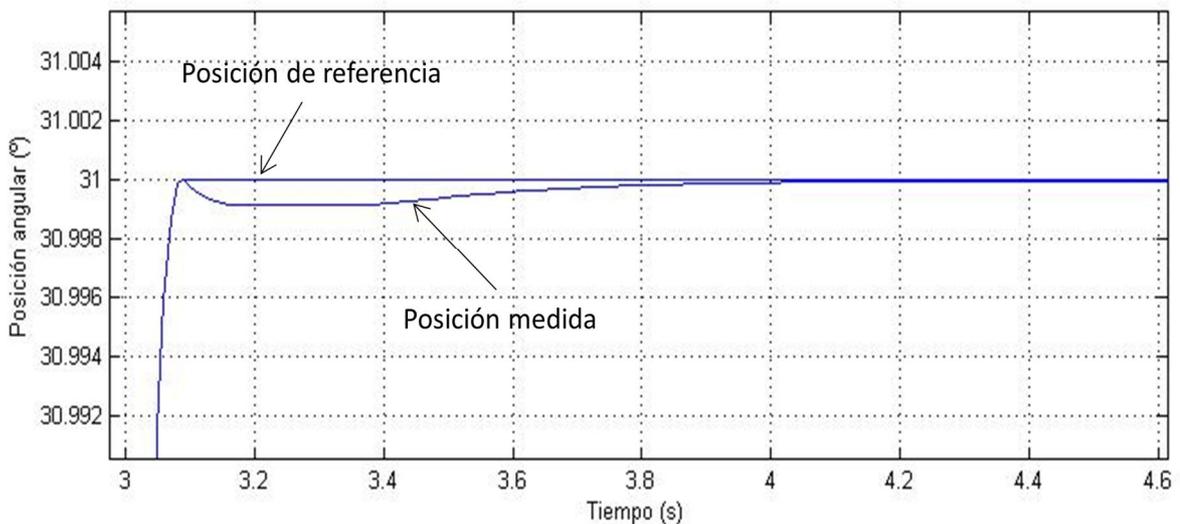


Figura 55. Seguimiento de trayectoria de la sexta articulación

En este caso solamente existe una pequeña sobreoscilación cuando se finaliza el movimiento, debido a que la aceleración cambia muy rápidamente a cero. Utilizando un *jerk* que suavizase ese cambio en el movimiento este efecto no tendría esta influencia en la respuesta de la articulación. Aún así, se observa que el error de posición es correctamente eliminado y el posicionamiento es correcto.

Utilizando el mismo controlador, se introduce ahora un valor constante al valor de par comandado a cada una de las articulaciones, de modo que simule una perturbación. Se utiliza un valor de 200 Nm como atenuación a cada una de las señales. El resultado de seguimiento es entonces para la misma articulación:

126. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

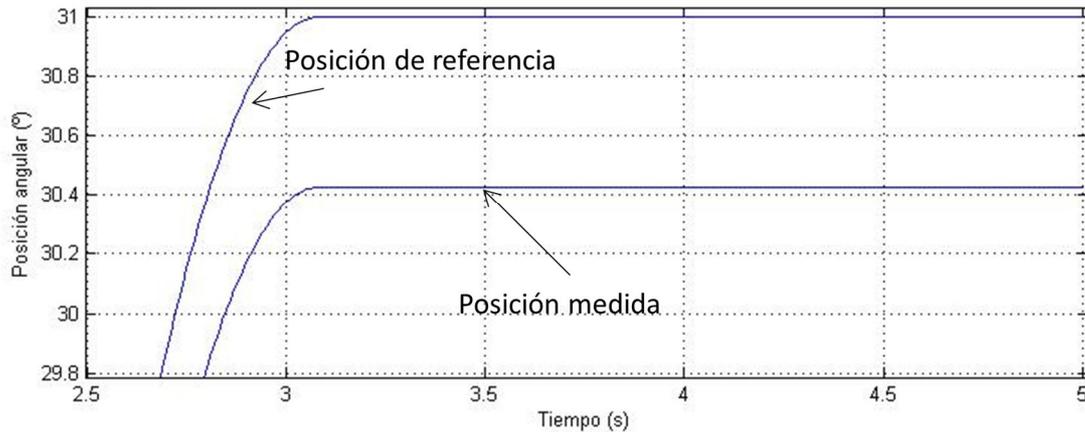


Figura 56. Respuesta con una perturbación constante en la sexta articulación

Se ve que el controlador PD no es capaz de eliminar el error que introduce esa perturbación, resultando en un error de posición absoluto de 0.587° , lo que supone una desviación importante del efector final.

En la misma simulación se analiza también el seguimiento de la tercera articulación, que tiene una inercia mucho mayor. La representación es:

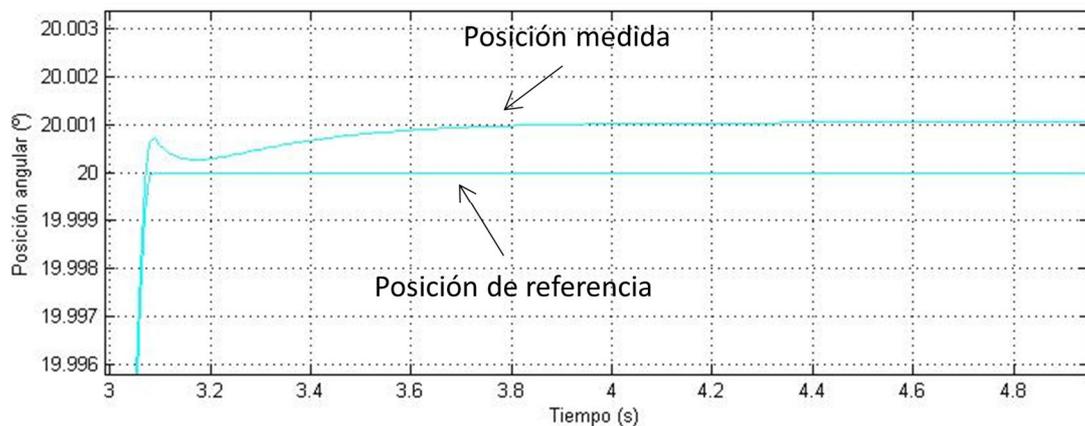


Figura 57. Respuesta con una perturbación constante en la tercera articulación

En este caso, la perturbación de 200Nm tiene un efecto mucho menor debido a que el par generado para ella es mayor, a causa de que sus términos dinámicos son más elevados. El error de posición absoluto en régimen estacionario es en este caso de 0.001° .

Dado que al no disponer de acción integral las perturbaciones no son atenuadas y se reflejan en un error constante en la posición en régimen permanente, se prueba a realizar un controlador de tipo *PID*. Se prueba primero el control sin ningún tipo de perturbación, mostrando el resultado de la sexta articulación. Se utilizan los valores de las ganancias equivalentes a las del controlador *PD* para un sistema de tercer orden:

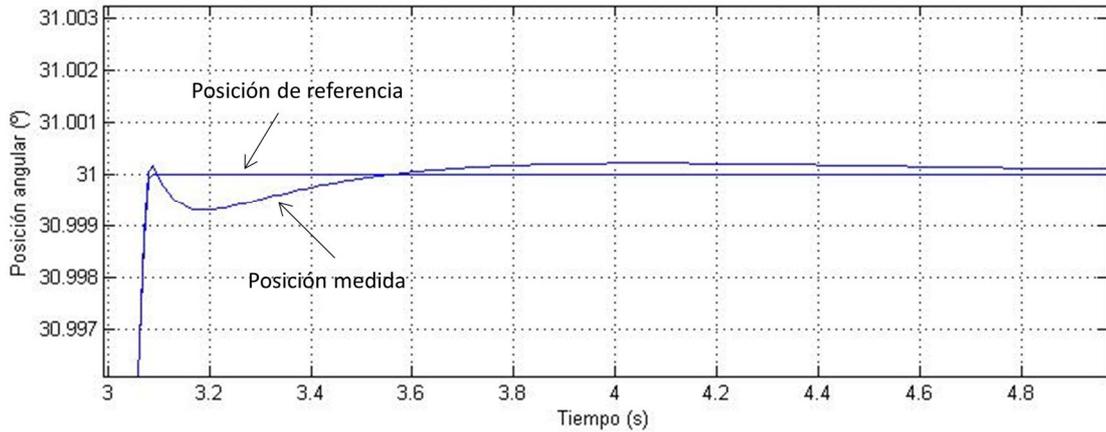


Figura 58. Seguimiento en la sexta articulación con un controlador de tipo PID

El resultado mejora respecto del controlador PD, afectando de menor manera la alta frecuencia que supone el cambio de aceleración y eliminando también el error de posición alcanzando finalmente la posición deseada.

Ahora se procede a introducir la misma perturbación que en el caso del controlador de tipo PD. El resultado nuevamente para la sexta articulación es:

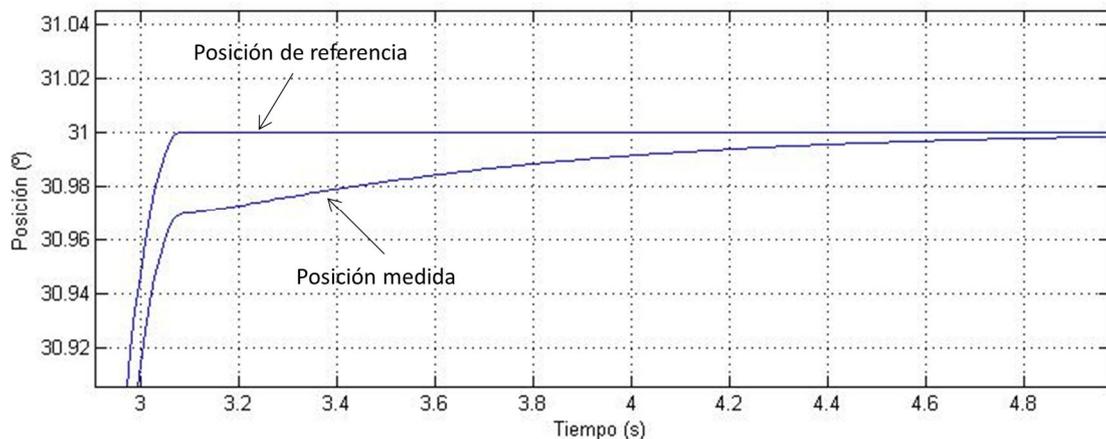


Figura 59. Resultado con una perturbación constante

A pesar de que el error es eliminado, la baja frecuencia natural del sistema hace que la respuesta sea lenta. Por lo tanto, se procede ahora a aumentar los valores de las ganancias del controlador. Los valores utilizados son ahora:

$$K_d = \begin{bmatrix} 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

128. Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad

$$K_p = \begin{bmatrix} 216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 216 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 216 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 216 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 216 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Se vuelve a analizar el resultado de la última articulación:

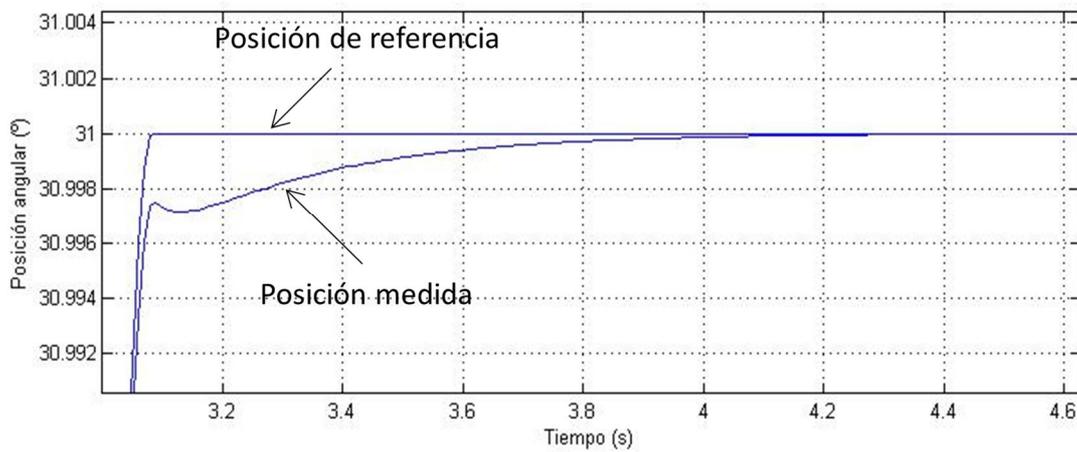


Figura 60

Comparando las dos figuras anteriores se observa que la velocidad de respuesta es mayor con unas ganancias mayores, que establecen una frecuencia natural del sistema más elevada.

7. Implementación

Durante la última fase del trabajo, tras la realización de diversas simulaciones sobre el software *Matlab/Simulink*, se procede a la implementación de los modelos obtenidos en el hardware de control. Dicho hardware será el encargado de realizar el control final del manipulador, y se utilizará previamente para realizar las pruebas de *Hardware-in-the-loop* utilizando la maqueta virtual desarrollada en *Simulink*.

Dicha maqueta representa el comportamiento del manipulador teniendo en cuenta los aspectos cinemáticos y dinámicos desarrollados en este trabajo. Se han desarrollado varios modelos que representan la cinemática directa, la cinemática inversa, la dinámica directa y la dinámica inversa. En la siguiente figura se muestra una captura del software en la que se representa el modelo de la dinámica directa:

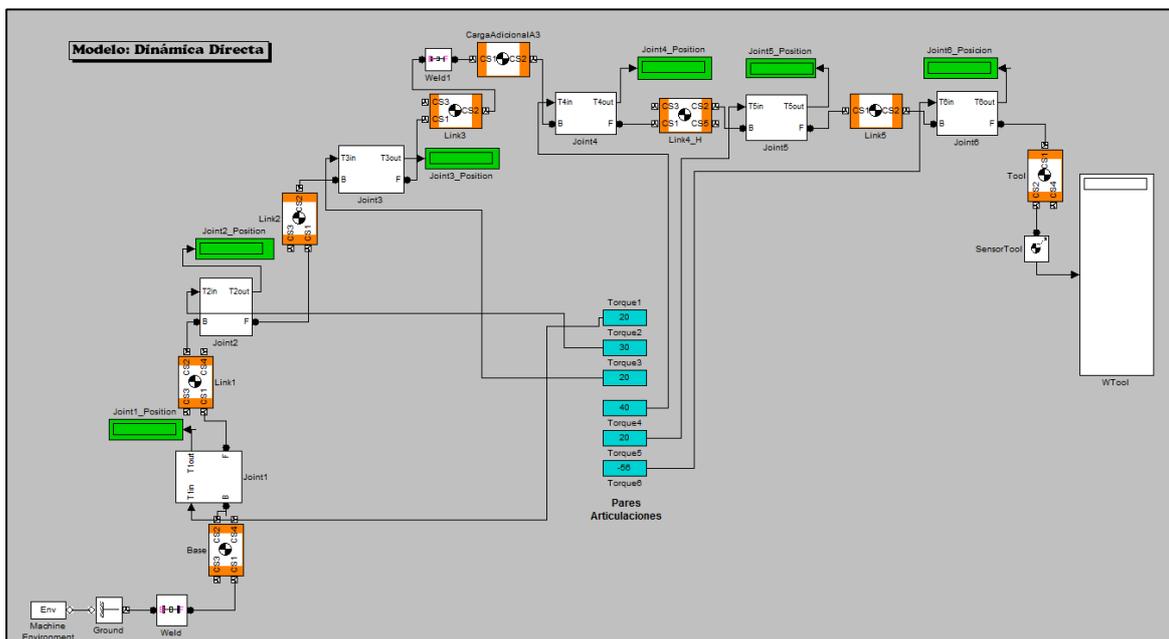


Figura 61. Modelo de la Dinámica Directa del manipulador

Este modelo en concreto será muy útil para realizar las pruebas de los lazos de control, ya que como se ha visto en este documento, en todos ellos el manipulador recibe los pares que se deben generar. A la salida del mismo se pretenden obtener las posiciones y velocidades articulares que se correspondan con las medidas realizadas por los *resolvers* en la realidad. Esta descripción se corresponde con la dinámica directa, por lo que a partir de ella se podrá obtener la realimentación y comprobar que la trayectoria descrita es la correcta.

El hardware de control que se utiliza se comunica por tanto con la maqueta del manipulador. Actualmente se están programando en dicho hardware los modelos matemáticos del manipulador. El proceso consiste en traducir el trabajo ya realizado en *Matlab* al lenguaje propio del hardware. Una vez finalizado este proceso se procederá a la simulación *Hardware-in-the-loop*.

8. Conclusiones y trabajos futuros

Los sistemas de control de los fabricantes de robótica industrial actuales, al ser cerrados, no permiten conocer las leyes de control que utilizan. Aún así, la falta de precisión que presentan hace que la implementación de las leyes de control propuestas puedan mejorar los resultados, utilizándose un hardware específico con la suficiente potencia para conseguir un periodo de ejecución bajo; y también mediante la posibilidad de utilizar otro tipo de sensórica. Además, la propuesta de un lazo de control abierto ofrece la posibilidad de modificar o ampliar sus elementos, lo que otorga flexibilidad para poder introducir cualquier tipo de mejora.

Con la disposición de los modelos matemáticos del manipulador es posible realizar múltiples leyes de control que conduzcan a un seguimiento de trayectoria adecuado. Los modelos propuestos utilizan la dinámica inversa para cancelar las no linealidades del sistema. Pero se podrían realizar también otros planteamientos que utilizaran esos modelos para realizar otro tipo de leyes que utilicen sensores de otro tipo de magnitudes, como por ejemplo la aceleración.

El estudio y conocimiento de los modelos cinemáticos y dinámicos es por tanto la base para el desarrollo de cualquier tipo de control. La corrección de los mismos, así como la inclusión de la mayor cantidad de parámetros posible que describan con la mayor exactitud el modelo real, es el punto de partida del desarrollo de cualquier control que pueda ofrecer buenos resultados de precisión.

El uso de otro tipo de planteamientos para el desarrollo de los modelos matemáticos que sustituyan a las matrices de transformación homogéneas utilizadas también puede ser planteado para conseguir un mejor tiempo de cómputo de los modelos y evitar la aparición de singularidades. El planteamiento por dobles cuaternios daría esas ventajas lo que conllevaría también una mejora de la precisión del posicionamiento del robot

El presente *Trabajo Fin de Máster* es el punto de partida para la ejecución de las tareas restantes para la finalización del proyecto *MILL2MATIC*:

- Programación de los modelos matemáticos en el *hardware* específico para control de movimiento de ejes interpolados.
- Realización de pruebas *Hardware-in-the-Loop* del control implementado mediante la conexión del hardware al modelo de *Matlab/Simulink*.
- Implementación en máquina y puesta en marcha.
- Planteamiento de otras leyes de control que permitan el uso de otro tipo de sensores de medida directa sobre la estructura mecánica del manipulador.

9. Presupuesto

En el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster ha sido necesario disponer del software y hardware necesarios. Entre el software utilizado destaca el sistema operativo *Windows Vista*, *Office 2010* y *Matlab 2008b*.

Para calcular el presupuesto se han dividido los costes en las siguientes partes:

- Coste de Hardware (C_H)
- Coste de Software (C_S)
- Material (C_M)
- Gastos de personal (C_P)

9.1. Hardware

En esta sección se recogen todos los gastos relacionados con el material informático utilizado. La estimación de los costes se realiza a partir de la siguiente expresión:

$$C_i = C_T \cdot \frac{T_u}{T_a} \cdot \frac{U}{100} \cdot k \quad (8.1)$$

Donde:

- C_i : coste computable al concepto.
- C_T : coste total de su adquisición.
- T_u : tiempo estimado de uso en años.
- T_a : tiempo estimado de amortización en años.
- U : amortización porcentual para el equipo.
- K : índice de inflación y reparaciones.

La duración total de este proyecto ha sido de 5 meses. En la siguiente tabla se recogen los costes globales debidos al hardware utilizado, junto con el software que venía incluido en el precio de compra.

Hardware	C_T (€)	T_u (años)	T_a (años)	U (%)	C_i (€)
Ordenador Portátil, Licencia Windows y Office 2010	2.500	7	2	5,95	520,83
Gastos totales de Hardware					520,83

Tabla 6

9.2. Software

En esta sección se determina el gasto debido a las licencias de los programas utilizados para el desarrollo del trabajo. De nuevo, la estimación de los costes se realiza mediante la expresión (8.1):

Software	$C_T(\text{€})$	Tu(años)	Ta(años)	U(%)	$C_i(\text{€})$
Licencia Matlab 2008b	2000,00	7	2	5,95	416,50
Licencia Simulink 2008b	1000,00	7	2	5,95	208,25
Toolbox Simscape para Matlab/Simulink	1000,00	7	2	5,95	208,25
Gastos totales de Software					833,00

Tabla 7

9.3. Costes de personal

En la realización del proyecto los gastos debidos a los recursos de personal se recogen en la tabla a continuación.

Tarea	$C_{\text{unitario}}(\text{€})$	t(h)	$C_i(\text{€})$
Desarrollo del TFM	11,74	792	9.299,66
Gastos Totales de Personal			9.299,66

Tabla 8

El coste por hora de ingeniería ha sido calculado en base a lo estipulado en el convenio nacional de empresas de ingeniería y oficinas de estudios técnicos.

9.4. Coste total del proyecto

Finalmente, se calcula el coste total del proyecto sumando los resultados obtenidos en las secciones previas:

Gasto	Coste (€)
Hardware	520,83
Software	833,00
Personal	9.299,66
Coste bruto del proyecto	10.653,49
Gastos generales (1,6%)	170,46
Beneficio industrial (0%)	0,00
Total	10.823,95
I.V.A (21 %)	2.273,03
COSTE TOTAL DEL PROYECTO	13.096,98

Tabla 9

134. *Desarrollo de sistema de control para un manipulador de seis grados de libertad*

10. Bibliografía

[1] Carl D. Crane, J. D. (1998). *Kinematic Analysis of robot manipulators*. Cambridge University Press.

[2] Craig, J. (2005). *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. Pearson Education.

[3] Dinesh Manocha, J. F. (1994). *Efficient Inverse Kinematics for General 6R Manipulators*. *IEEE Transactions on robotics and automation* .

[4] Dombre, Etienne; Khalil, Wisama (2001). *Robot Manipulators: Modeling, Performance Analysis and Control*

[5] Gene H. Golub, C. F. (1996). *Matrix Computations*.

[6] Gordillo, J. R. (2010). *Planeación de Trayectorias en Sistemas de Manipuladores Robóticos Múltiples*.

[7] Ioannis Z. Emiris, B. M. (1999). *Matrices in Elimination Theory*.

[8] John Faber Archila Díaz, M. S. (2008). *Study and modeling of KR 6 KUKA robot*. Río de Janeiro: Laboratorio de Robótica, Universidad Federal.

[9] L. Lewis, F. (2004). *Robot Manipulator Control. Theory and Practice*.

[10] Marghitu, D. B. (2005). *Kinematic Chains and Machine Components Design*. Elsevier Academic Press.

[11] Mark W. Spong, S. H. *Robot Modeling and Control*.

[12] Mark W. Spong; Anderson, R. J. (1992) *Asymptotic Stability for force reflecting teleoperators with time delay*

[13] Murray, R. M. (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. Berkeley: University of California.

[14] N. Jazar, Reza (2010). *Theory of Applied Robotics*

[15] Ollero Baturone, Aníbal (2001). *Robótica: manipuladores y robots móviles*

[16] Paul Van Dooren, P. D. (1983). *The Eigenstructure of an Arbitrary Polynomial Matrix: Computational Aspects*.

[17] Pérez García, Miguel Ángel (2002). *Instrumentación Electrónica*

[18] R. K. Mittal, I. (2003). *Robotics and Control*. McGraw-Hill.

[19] Rosillo Guerrero, Nuria. *Estudio e implementación de controladores dinámicos para robots industriales en tiempo real*

[20] Sahu, S. (2008). *Development of Alternative Methods for Robot Kinematics*. Orissa, India: Department of Mechanical Engineering National Institute of Technology Rourkela.

[21] Sandin, P. E. (2003). *Robot Mechanisms and Mechanical Devices*. McGraw-Hill.

[22] Saxena, T. (1997). *Efficient variable elimination using Resultants*. State University of New York at Albany: Department of Computer Science.

[23] Shuguang Qiao, Q. L.-J. (2007). *Inverse kinematic analysis of the general 6R serial manipulators based on double quaternions*. *Mechanism and Machine Theory*.

[24] Sturmfels, B. (2002). *Solving Systems of Polynomial Equations*. University of California, Berkeley: Department of Mathematics.

[25] Su, H.-J. (2004). *Computer-Aided Constrained Robot Design Using Mechanism Synthesis Theory*. University of California.

[26] W. Lindegaard, Karl-Peter (2003). *Acceleration feedback in Dynamic Positioning*