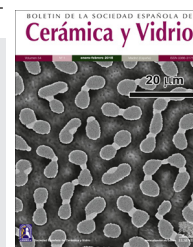




BOLETIN DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
Cerámica y Vidrio

www.elsevier.es/bsecv



Cálculo de desplazamientos en placas de vidrio laminado sometidas a carga estática mediante el concepto de módulo de elasticidad efectivo



Ismael García García, Manuel López Aenlle*, Pelayo Fernández Fernández, María Antonia García Prieto

Departamento de Construcción e Ingeniería de Fabricación, Universidad de Oviedo, Gijón, España

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historia del artículo:

Recibido el 9 de enero de 2015

Aceptado el 27 de febrero de 2015

Palabras clave:

Laminados

Deformación

Propiedades mecánicas

Viscoelasticidad

Placas

R E S U M E N

En los últimos años, el uso de vidrio laminado como elemento estructural se ha incrementado considerablemente en construcciones arquitectónicas, sobre todo en fachadas, cubiertas, escaleras o ventanas de seguridad. El cálculo de estos elementos tipo sándwich no es sencillo debido a la combinación de las propiedades mecánicas del vidrio (elástico-lineales) con las del polímero interior (viscoelástico-lineales). Recientemente, algunos autores han propuesto el concepto de espesor efectivo para el cálculo simplificado de elementos de vidrio laminado bajo carga estática, utilizando un modelo monolítico con una rigidez equivalente igual a la del elemento laminado. Debido a la variación de propiedades del laminado con la temperatura, introducidas por el polímero viscoelástico, para cada cambio de temperatura se tiene un espesor efectivo diferente, lo que conlleva un mayor número de evaluaciones para cada una de las situaciones de trabajo del elemento laminado. En este trabajo se propone el concepto de módulo de elasticidad efectivo como una alternativa más eficiente para el cálculo con modelos de elementos finitos. La metodología propuesta se valida mediante ensayos experimentales realizados en placas de vidrio laminado sometidas a una carga uniformemente distribuida.

© 2015 Sociedad Española de Cerámica y Vidrio. Publicado por Elsevier España, S.L.U.

Este es un artículo Open Acces distribuido bajo los términos de la licencia CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Displacements determination in laminated glass plates under static loadings using the effective Young's modulus concept

A B S T R A C T

In recent years, the use of laminated glass as a structural element has increased considerably, mainly in facades, roofs, stairs or security windows. Laminated glass elements are sandwich structures which presents a complex behaviour due to the combination of the mechanical properties of glass layers (linear-elastic) with the properties of the polymeric interlayer (linear-viscoelastic). Recently several authors have proposed the concept of effective thickness in order to simplify the laminated-glass static

Keywords:

Laminates

Deformation

Mechanical properties

Viscoelasticity

Plates

* Autor para correspondencia.

Correo electrónico: aenlle@uniovi.es (M. López-Aenlle).

calculations, using a monolithic model with an equivalent flexural stiffness equal to that of the laminated element. Due to the variations of the laminated glass properties with temperature, introduced by the viscoelastic polymeric interlayer, for each different temperature, a different effective thickness must be determined. This particularity implies a large number of assessments for each of the possible working situations. In this work, the Young's modulus concept is proposed as an efficient alternative to be used in finite elements models. The proposed methodology is validated by experimental tests on laminated glass plates under uniformly distributed load.

© 2015 Sociedad Española de Cerámica y Vidrio. Published by Elsevier España, S.L.U.

This is an open access article under the CC BY-NC-ND license

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Introducción

El vidrio laminado es un material compuesto formado por la unión de dos o más capas de vidrio y una o más capas intermedias de un material polimérico [1-5]. El vidrio laminado combina las propiedades del vidrio con las ventajas de un material polimérico, es decir, el comportamiento del laminado es el de una estructura compuesta [6,7]. Generalmente, las capas poliméricas utilizadas presentan un comportamiento viscoelástico [8-11], esto es, las propiedades mecánicas son dependientes de la temperatura y del tiempo. El butiral de polivinilo (PVB) es el material más común para las capas intermedias y se comercializa en espesores de 0,38 mm o valores múltiples del mismo (0,76 mm, 1,12 mm, 1,52, etc.) [12].

La configuración más simple que se presenta en el vidrio laminado consiste en tres capas: dos de vidrio y una intermedia polimérica (fig. 1).

Los primeros trabajos sobre elementos de vidrio laminado fueron realizados por Hooper [13], que desarrolló un modelo para vigas a flexión en cuatro puntos y realizó ensayos en vigas simplemente apoyadas. Behr et al. [14] realizaron ensayos en vigas de vidrio monolítico y vidrio laminado y Edel [15] llevó a cabo los primeros estudios sobre el efecto de la temperatura en vigas de vidrio laminado. Los primeros modelos para vidrios laminados multicapa (varias capas de vidrio y varias capas intermedias de polímero) fueron propuestos por Noville et al. [16].

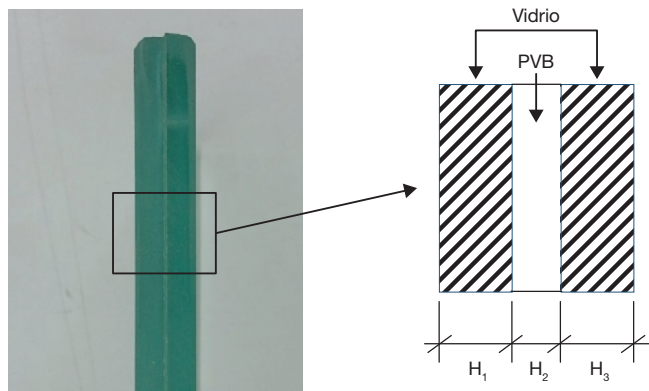


Figura 1 – Elemento básico de vidrio laminado.

El auge experimentado en los últimos años en la utilización del vidrio laminado, ha favorecido el estudio del comportamiento mecánico de este tipo de elementos. Así se han propuesto varios modelos para el cálculo de desplazamientos y tensiones en elementos de vidrio laminado ante cargas estáticas [17-21]. En el caso de placas, Foraboschi [22,23] realizó estudios donde se presentan modelos matemáticos para calcular placas de vidrio laminado y Galuppi et al. [4,5] propusieron expresiones para el cálculo de desplazamientos en elementos de vidrio laminado con diferentes condiciones de contorno, utilizando el concepto de espesor efectivo. Este concepto ha sido recientemente extendido al comportamiento dinámico por López-Aenlle et al. [24,25].

En los modelos analíticos y numéricos, el comportamiento del vidrio se suele modelizar como elástico lineal, mientras la capa polimérica se modeliza con un comportamiento viscoelástico-lineal. Los elementos de vidrio laminado son sencillos de modelizar con programas de elementos finitos mediante modelos 3D pero, debido al pequeño espesor de la capa polimérica respecto al resto de dimensiones del laminado se requiere utilizar una discretización muy fina que implica una malla con un número muy elevado de elementos. Recientemente, algunas publicaciones han propuesto el concepto de espesor efectivo para el cálculo de elementos de vidrio laminado, utilizando un modelo monolítico con un espesor equivalente tal que presente los mismos desplazamientos, tensiones, etc., que el modelo de vidrio laminado [1-5]. El espesor efectivo puede ser usado tanto con ecuaciones analíticas como en modelos de elementos finitos.

Como alternativa al espesor efectivo, en este trabajo se propone el concepto de módulo de elasticidad efectivo para el cálculo simplificado de elementos de vidrio laminado utilizando modelos monolíticos. En este trabajo, se deduce el concepto de módulo de elasticidad efectivo en placas laminadas a partir del modelo propuesto por Galuppi y Royer Carfagni [4]. La metodología propuesta se valida en una placa sometida a carga constante y los resultados experimentales se comparan con las predicciones analíticas.

Modelos analíticos para el cálculo simplificado de elementos de vidrio laminado

Aunque los elementos laminados suelen tener materiales iguales en las capas de vidrio, es decir, $E_1 = E_3$ (fig. 1), existen vidrios laminados denominados como híbridos, donde ambas

capas de vidrio presentan distintas propiedades $E_1 \neq E_3$. La formulación que se presenta en los siguientes epígrafes se desarrolla de manera general para una placa híbrida, manteniendo así la generalidad de la misma. En el caso de tratarse de una placa de materiales iguales, las ecuaciones son de aplicación directa introduciendo la relación: $E_1 = E_3$. Además, se incluyen las variables tiempo 't' y temperatura 'T' para tener en cuenta las variaciones en las propiedades mecánicas que experimenta el vidrio laminado debidas a la capa polimérica.

Aunque el concepto de espesor efectivo fue introducido por Benninson et al. [1], los recientes trabajos de Galuppi y Royer Carfagni [3-5] amplían y presentan la utilización de este concepto a un mayor número de cargas, geometrías y condiciones de contorno. Por esta razón, la metodología propuesta en este artículo para el cálculo con el módulo de elasticidad efectivo en placas se basa en los estudios y modelos de cálculo propuestos por Galuppi y Royer Carfagni [4,5].

En el caso de placas de vidrio laminado la deformación viene dada por:

$$w(x,y,t,T) = -\frac{g(x,y)}{D(t,T)_s} \quad (1)$$

donde $g(x,y)$ es la forma que adopta la deformada de una placa monolítica de sección constante y sometida a las mismas condiciones de carga y apoyo que la placa laminada en estudio. La función $g(x,y)$ se aproxima en este caso por el primer término del desarrollo en serie de la deformada correspondiente a una placa monolítica [4,5]. La rigidez a flexión $D(t,T)_s$ viene definida por:

$$D(t,T)_s = \frac{1}{\frac{\eta_{SP}(t,T)}{D_{TOT}} + \frac{1-\eta_{SP}(t,T)}{D_1+D_3}} \quad (2)$$

donde:

$$D_{TOT} = D_1 + D_3 + \frac{12 D_1 D_3}{D_1 H_1^2 + D_3 H_3^2} H_0^2 \quad (3)$$

$$D_i = \frac{E H_i^3}{12(1-\nu_i^2)}, i=1,3 \quad (4)$$

y

$$\eta_{SP}(t,T) = \frac{1}{1 + \frac{H_2(D_1+D_3)}{G_2(t,T) D_{TOT}} \frac{12 D_1 D_3}{D_1 H_1^2 + D_3 H_3^2} \psi_p} \quad (5)$$

En la expresión (5), $G_2(t,T)$ es el módulo de relajación a cortante de la capa polimérica y el subíndice «SP» indica placa sometida a carga estática. El coeficiente ψ_p depende de la geo-

metría de la placa y de sus condiciones de apoyo. Los valores más habituales de dicho coeficiente ψ_p se encuentran tabulados en [5].

La ecuación (2) se puede expresar también como:

$$D(t,T)_s = \frac{1}{1 + \frac{\eta_{SP}(t,T)}{(D_1+D_3)(1+Y_p)} \frac{1-\eta_{SP}(t,T)}{D_1+D_3}} \quad (6)$$

donde:

$$Y_p = \frac{\frac{E_1 H_1 E_3 H_3}{(1-\nu_1^2)(1-\nu_3^2)} H_0^2}{(D_1+D_3) \left(\frac{E_1 H_1}{(1-\nu_1^2)} + \frac{E_3 H_3}{(1-\nu_3^2)} \right)} \quad (7)$$

Si $E_1 = E_3$ y $\nu_1 = \nu_3$, se concluye que en la expresión del coeficiente Y_p coincide con el coeficiente Y_B obtenido para vigas [21].

Espesor efectivo

El espesor efectivo para calcular desplazamientos se puede definir como el espesor de un elemento de vidrio monolítico con la misma longitud y anchura que el laminado y que produce el mismo desplazamiento que el del elemento laminado bajo la misma carga y condiciones de contorno [1,2]. Como el comportamiento de los elementos de vidrio laminado es dependiente de la temperatura y del tiempo, el espesor efectivo también depende del tiempo y de la temperatura.

La rigidez $D(t,T)_s$ en placas de vidrio laminado, dada por la ecuación (6), se puede considerar como una rigidez a flexión efectiva, es decir, la deformada de una placa monolítica con rigidez $D(t,T)_s$ será igual que la de una placa de vidrio laminado. A partir de esta rigidez efectiva se puede definir:

- Un espesor efectivo, $H_{eff}(t,T)_s$, considerando un módulo de elasticidad constante.
- Un módulo de elasticidad efectivo, $E_{eff}(t,T)$, considerando una placa de espesor constante.

Espesor efectivo y módulo de elasticidad efectivo

En el caso de placas, se necesitan tres parámetros para definir la rigidez de la placa (espesor, módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson). El espesor efectivo H_{ieff} , con módulo de elasticidad E_i y coeficiente de Poisson ν_i , se obtiene a partir de:

$$\frac{E_i H_{ieff}^3(t,T)}{12(1-\nu_i^2)} = D(t,T)_s \quad (8)$$

donde la rigidez $D(t,T)_s$ viene dada por la expresión (6).

En el caso de utilizar un modelo con espesor constante, todavía se desconocen los valores correspondientes al módulo de elasticidad y al coeficiente de Poisson. Con el objetivo de

obtener valores razonables para el módulo de elasticidad efectivo E_{effs} , se pueden tomar valores para el coeficiente de Poisson iguales a los del vidrio. Es decir:

$$\frac{E_i H_{ieffs}^3(t, T) H^3}{12(1 - \nu_{eff}^2(t, T))} = D(t, T)_s \quad (9)$$

donde:

$$\nu_{eff}(t, T) = \nu_1 \quad (10)$$

o bien:

$$\nu_{eff}(t, T) = \nu_3 \quad (11)$$

Las expresiones del espesor efectivo propuestas por Galuppi y Carfagni [4], así como las obtenidas en este trabajo para el módulo de elasticidad efectivo se presentan en la tabla 1.

Tanto las ecuaciones del módulo de elasticidad efectivo como las del espesor efectivo indicadas en la tabla 1, se han deducido a partir de la rigidez $D(t, T)_s$ dada por la ecuación (2). Por lo tanto, cuando se calcula del desplazamiento de una placa mediante ecuaciones analíticas, ambos métodos proporcionarán el mismo resultado. Sin embargo, cuando se utiliza un modelo numérico monolítico para el cálculo, el concepto de módulo de elasticidad efectivo es mucho más sencillo de implementar, ya que se utiliza un modelo monolítico de espesor constante mientras que las propiedades del material se definen dependientes del tiempo y de la temperatura. La utilización del concepto de espesor efectivo

sería mucho más difícil de implementar, se definirían propiedades constantes del material, pero sería necesario modificar el espesor de la placa para cada instante de tiempo.

Aplicación práctica

En este apartado se indica cómo calcular deformadas en placas de vidrio laminado utilizando un modelo monolítico y los conceptos de módulo de elasticidad y espesor efectivo indicados en el apartado «Espesor efectivo». Se va a considerar que los espesores de las capas de vidrio tienen el mismo módulo de elasticidad: $E_1 = E_3$. En este caso, la deformada de la placa laminada $w_L(x, y, t, T)$ se puede expresar como:

$$w_L(x, y, t, T) = w_{MON}(x, y) \frac{D_{TOT}}{D(t, T)_s} \quad (12)$$

donde $D(t, T)_s$ viene dado por la ecuación [6] y $w_{MON}(x, y)$ es la deformada de un modelo monolítico con rigidez:

$$D_{TOT} = (D_1 + D_3)(1 + Y_p) \quad (13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (6) en la ecuación (13) se obtiene:

$$w_L(x, y, t, T) = w_{MON}(x, y)(1 + Y_p(1 - \eta_{SP}(t, T))) \quad (14)$$

O alternativamente:

$$w_L(x, y, t, T) = w_{MON}(x, y)(1 + Y_p \cdot \beta_{SP}(t, T)) \quad (15)$$

donde $\beta_{SP}(t, T) = (1 - \eta_{SP}(t, T))$. Para los casos particulares en los que $\eta_{SP}(t, T) = 1$, es decir, el comportamiento es asimilable al de una placa monolítica, la ecuación se simplifica a $w_L(x, y) = w_{MON}$ y para el $\eta_{SP}(t, T) = 0$, donde el comportamiento es asimilable a dos placas superpuestas, $w_L(x, y) = w_{MON}(1 + Y_p)$.

De la expresión (14) se deduce que para calcular la deformada de una placa laminada sólo se necesita la deformada de una placa monolítica con la misma carga y condiciones de contorno y el coeficiente $\eta_{SP}(t, T)$.

Validación experimental

Con el objeto de validar experimentalmente las ecuaciones del espesor [3,4] y del módulo de elasticidad efectivos, se realizaron ensayos experimentales en una placa de vidrio laminada apoyada en cuatro puntos y sometida a carga distribuida.

Tabla 1 – Espesor efectivo y módulo de elasticidad efectivo

Modelo	Ecuación
Espesor efectivo (4)	$H_{1eff}(t, T) = \sqrt[3]{\frac{12(1 - \nu_1^2)(D_1 + D_3)(1 + Y_p)}{E_1(1 + Y_p(1 - \eta_{SP}(t, T)))}}$ $H_{3eff}(t, T) = \sqrt[3]{\frac{12(1 - \nu_3^2)(D_1 + D_3)(1 + Y_p)}{E_3(1 + Y_p(1 - \eta_{SP}(t, T)))}}$
Módulo de elasticidad efectivo	$E_{eff}(t, T) = \frac{12(1 - \nu_{eff}^2)(D_1 + D_3)(1 + Y_p)}{H^3(1 + Y_p(1 - \eta_{SP}(t, T)))}$
Espesor efectivo	$H_{1eff}(t, T) = \sqrt[3]{\frac{(H_1^3 + H_3^3)(1 + Y_p)}{1 + Y_p(1 - \eta_{SP}(t, T))}}$ $H_{3eff}(t, T) = \sqrt[3]{\frac{(H_1^3 + H_3^3)(1 + Y_p)}{1 + Y_p(1 - \eta_{SP}(t, T))}}$
Módulo de elasticidad efectivo	$E_{eff}(t, T) = \frac{E_1(H_1^3 - H_3^3)(1 + Y_p)}{H^3(1 + Y_p(1 - \eta_{SP}(t, T)))}$

Tabla 2 – Propiedades mecánicas del vidrio y del PVB

Glass				PVB			
E (Young's Modulus)	ν (Poisson's ratio)	ρ (Density)	E_0 (Instantaneous tensile modulus)	K (Bulk Modulus)	ν (Poisson's ratio)	ρ (Density)	C_1, C_2 (WLF: Tref=20°)
[GPa]		[kg/m ³]	[GPa]	[GPa]		[kg/m ³]	
70	0,21	2.500	1,19	2	0,3908	1.030	12,60 74,46

Caracterización de los materiales

Para las capas de vidrio se consideró un módulo de elasticidad $E_1 = E_3 = 70$ GPa y un coeficiente de Poisson $\nu_1 = \nu_3 = 0.21$ [21].

Por otro lado, para el PVB se utilizaron los datos del material obtenidos en estudios previos [21]. Las propiedades tanto del vidrio como del PVB utilizados se recogen en la tabla 2. Asimismo, en la tabla 3 se presentan los coeficientes de la serie de Prony del módulo de relajación del PVB que permiten reconstruir la curva maestra del material [21].

Ensayos experimentales

Para validar la ecuación (15), que permite predecir desplazamientos en placas, se realizaron ensayos en una placa de dimensiones $a = 1.4$ m, $b_2 = 1$ m y espesores de $H_1 = 8$ mm, $H_2 = 0.76$ mm y $H_3 = 8$ mm (fig. 2). La placa se apoyó en las cuatro esquinas sobre 4 bolas de madera de 5 cm de diámetro y se sometió a una carga uniformemente repartida en su superficie (fig. 3).

Esta carga se aplicó colocando 52 ladrillos perforados de dimensiones $11 \times 10.2 \times 24$ cm colocados de canto y con la soga del ladrillo paralela a la dirección menor de la placa, de tal forma que aportan una carga de $q = 914.2$ N/m². Para lograr una mejor uniformidad de la carga, entre los ladrillos y la capa de vidrio se colocó una placa de poliestireno expandido de 2 cm de espesor y masa despreciable. Los ensayos se realizaron a una temperatura $T = 21.5^\circ\text{C}$.

Los desplazamientos se midieron en el centro de la placa y en el punto medio de uno de los bordes de menor longitud (fig. 2). Los desplazamientos se registraron con dos sensores láser de la marca Acuity modelo AccuRange AR700-12, conectados a un sistema de adquisición de datos NI CompactDAQ con módulo de entrada analógica NI9239.

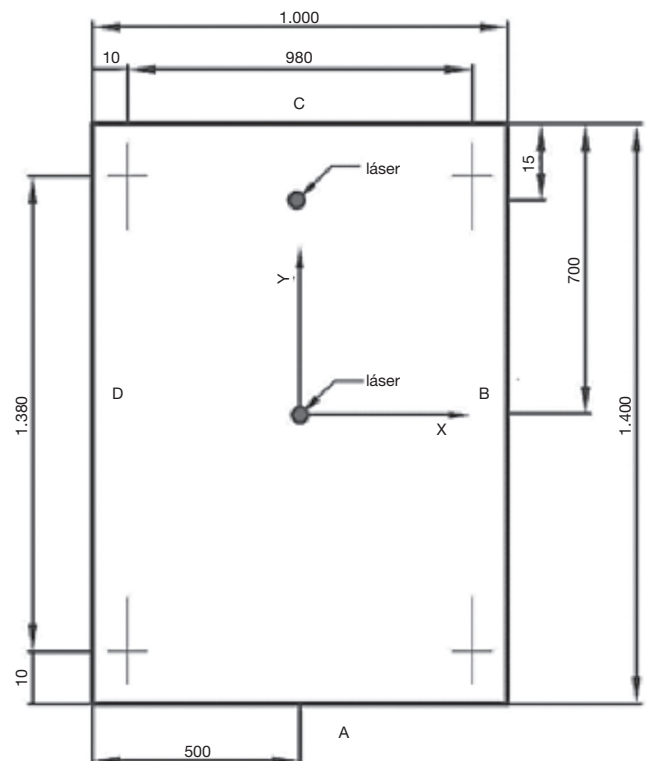
Teniendo en cuenta las dimensiones de los apoyos, la distancia libre entre apoyos se reduce a $a = 1.38$ m en las caras más largas y $b = 0.98$ m en las otras dos. En la figura 2 se puede ver un esquema con la posición de ensayo y los puntos medidos.

Modelo numérico

Los desplazamientos en los puntos indicados en la figura 2 se predijeron con la ecuación (15). Para ello se necesita conocer

Tabla 3 – Coeficientes de la serie de Prony para el PVB

τ_i [s]	e_i
2.36600000000000E-07	2.342151953E-01
2.26430000000000E-06	2.137793134E-01
2.16668000000000E-05	1.745500419E-01
2.07327300000000E-04	1.195345045E-01
1.98389580000000E-03	1.362133454E-01
1.89837195000000E-02	6.840656310E-02
1.81653498300000E-01	4.143944180E-02
1.73822593210000E+00	7.251952800E-03
1.66329270788000E+01	2.825459600E-03
1.59158978189400E+02	2.712854000E-04
1.52297789909670E+03	4.293523000E-04
1.45732380763177E+04	9.804730000E-05
1.39449999999999E+05	5.274937000E-04

**Figura 2 – Esquema del ensayo. Cotas en milímetros.**

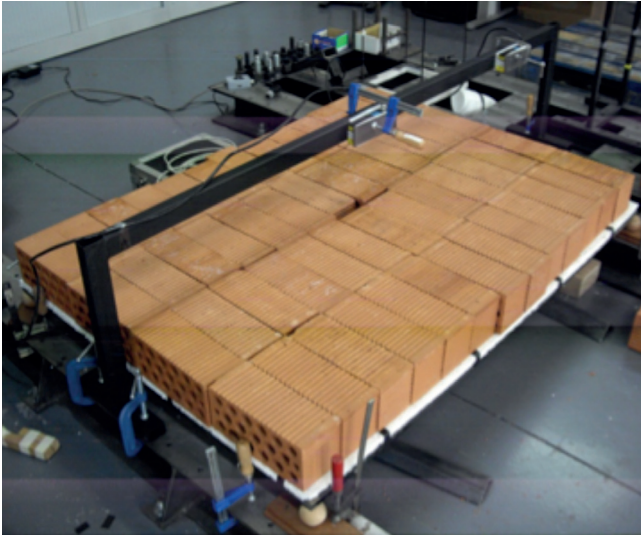


Figura 3 – Esquema del ensayo.

la deformada de un modelo monolítico, que se puede obtener de la literatura para los casos más comunes, o también mediante un modelo numérico.

En este caso se realizó un modelo de elementos finitos con el programa LISA, utilizando elementos cuadráticos con integración reducida de tipo «shell-quad8». La malla se indica en la figura 4. Las dimensiones de la placa equivalente monolítica se toman $L = 1.38$ m, $b = 0.98$ m y $H = 16.38$ mm. A este modelo monolítico se le aplicó una carga $q = 914.2$ N/m² uniformemente repartida obteniéndose unos desplazamientos en el punto central de $w = 1.9$ mm y un desplazamiento en el borde $w = 0.74$ mm. La deformada de la placa completa se puede ver en la figura 4.

Resultados

Los desplazamientos en los puntos mencionados anteriormente de la placa laminada se determinaron con la ecuación

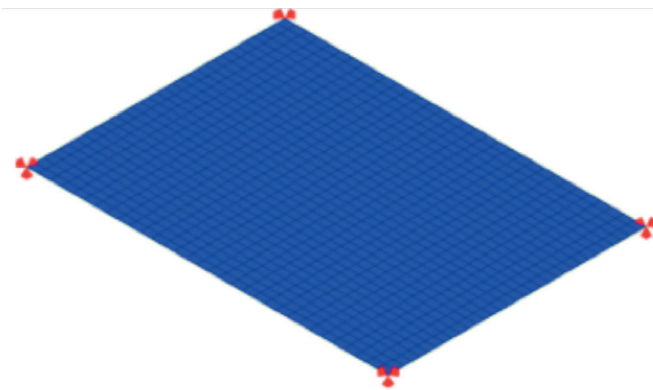


Figura 4 – Malla de la placa monolítica con elementos tipo shell Quad 8 (izquierda) y deformada de la placa (derecha).

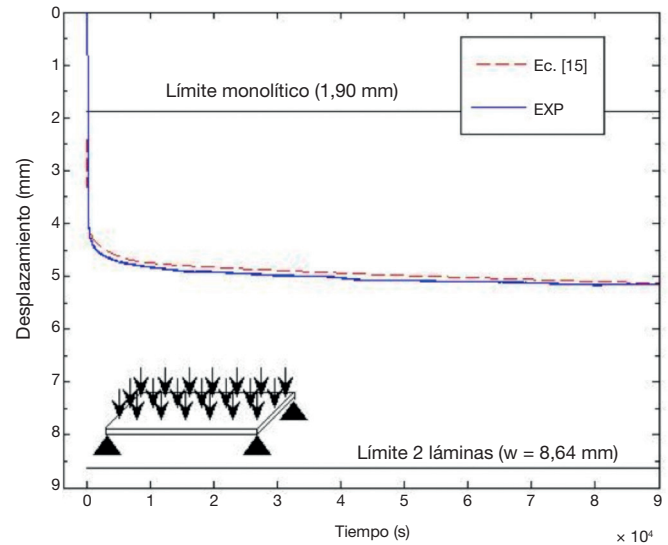


Figura 5 – Desplazamiento del punto central.

(15) y las predicciones numéricas junto con los resultados experimentales se muestran en las figuras 5 y 6.

En la figura 5 se muestra el desplazamiento en el centro de la placa, en la que se puede observar que la ecuación (15) predice el desplazamiento con un error menor al 1%.

En cuanto al desplazamiento en el borde (fig. 6) el error medio es aproximadamente del 10%. Al inicio del ensayo se produce en este punto un desplazamiento mayor del esperado (se observa que en el tramo $0 < t < 2 \cdot 10^4$ s el desplazamiento experimental se reduce con carga constante) y que puede ser debido a efectos dinámicos en el proceso de carga.

La duración del proceso de carga fue aproximadamente de 100 segundos. Los ladrillos utilizados para aplicar la carga empezaron a colocarse por el borde A (fig. 2) y los últimos en colocarse fueron los del borde C (fig. 2), es decir, el borde en el que estaba colocado uno de los sensores láser de desplazamiento.

En lo que respecta al efecto de la temperatura en los desplazamientos de la placa, esta influye en la velocidad de

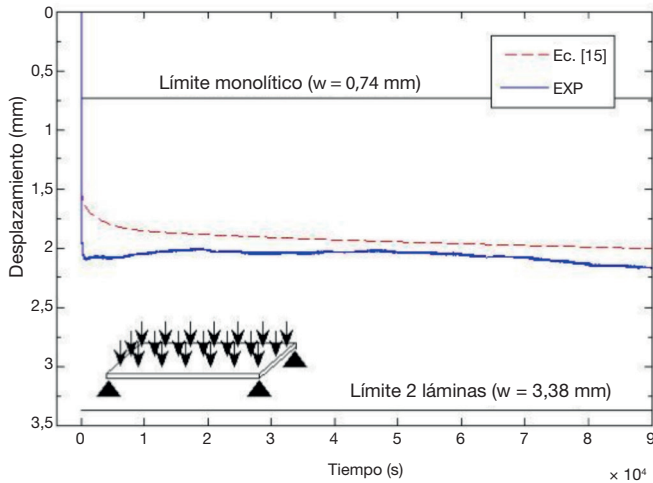


Figura 6 – Desplazamiento punto lateral.

deformación, es decir, en el tiempo necesario para alcanzar un determinado valor de desplazamiento. A medida que aumenta la temperatura, aumenta la velocidad de deformación. En la figura 7 se han representado los desplazamientos predichos en el centro de la placa para el ensayo de la figura 3, para temperaturas desde 10 °C hasta 40 °C, en la que se puede observar que la temperatura no afecta al desplazamiento máximo alcanzado, es decir, el valor máximo es independiente de la temperatura. Sin embargo, a medida que disminuye la temperatura se necesita más tiempo para alcanzar ese valor máximo.

Conclusiones

En los últimos años, se han propuesto diversos modelos para el cálculo de desplazamientos en elementos de vidrio laminado bajo carga estática. Sin embargo, en el predimensionamiento y en el cálculo práctico de estos elementos, resulta útil utilizar modelos simplificados. Benisson et al. [1,2] y Galuppi y Royer Carfagni [3-5] han propuesto el cálculo simplificado de estos elementos utilizando el concepto de espesor efectivo, que consiste en utilizar un modelo monolítico con un espesor efectivo que proporciona la misma rigidez (rigidez equivalente o efectiva) que la del elemento de vidrio laminado, de tal forma que los desplazamientos de ambos elementos sean iguales.

En componentes de vidrio laminado, el espesor de las capas de vidrio frente al espesor de la capa polimérica es mucho más pequeño que las otras dimensiones del elemento. Por esta razón, las mallas de elementos finitos utilizadas para el cálculo de estos elementos suelen ser muy densas (muchos elementos 3D). Por otro lado, las propiedades mecánicas de los materiales viscoelásticos y, por tanto, también los desplazamientos y las tensiones dependen del tiempo. Estos dos factores hacen que el cálculo estático de estos elementos sea de un gran coste computacional.

Como variable adicional, el carácter viscoelástico de la capa polimérica influye en el comportamiento del laminado siendo, por tanto, la rigidez efectiva dependiente del tiempo y de la temperatura. Si en el modelo monolítico equivalente se considera constante el módulo de elasticidad, se obtiene un espesor efectivo H_{eff} que depende del tiempo y de la temperatura. Aunque tanto el método de módulo de elasticidad efectivo como el de espesor efectivo proporcionan los mismos resultados, si se pretende realizar los cálculos con un modelo de elementos finitos, resulta más sencillo utilizar un modelo monolítico de espesor constante donde se implemente el módulo de elasticidad efectivo E_{eff} dependiente de dichas variables.

En este trabajo se han deducido las ecuaciones para el módulo efectivo, H_{eff} en placas de vidrio laminado a partir del modelo de Galuppi y Royer Carfagni. Dichas ecuaciones se pueden utilizar como una alternativa al concepto de espesor efectivo, tanto en elementos laminados con de capas de vidrio de igual espesor como híbridas (distinto espesor).

Con el objeto de validar los conceptos de espesor y módulo de elasticidad efectivos, se realizaron ensayos estáticos en una placa de vidrio laminado sometida a carga uniformemente distribuida. Durante los ensayos se registraron los desplazamientos de varios puntos con sensores láser. Los resultados obtenidos indican que la metodología práctica propuesta predice los desplazamientos en placas de vidrio laminado con un error menor del 10%, lo cual se pueden considerar razonable en cálculos prácticos de Ingeniería.

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación económica recibida del Ministerio de Economía y Competitividad a través del proyecto de investigación BIA2011-28380-C02-01 y del Instituto Universitario de Tecnología Industrial de Asturias (IUTA) a través del proyecto SV-14-GIJÓN-1.12.

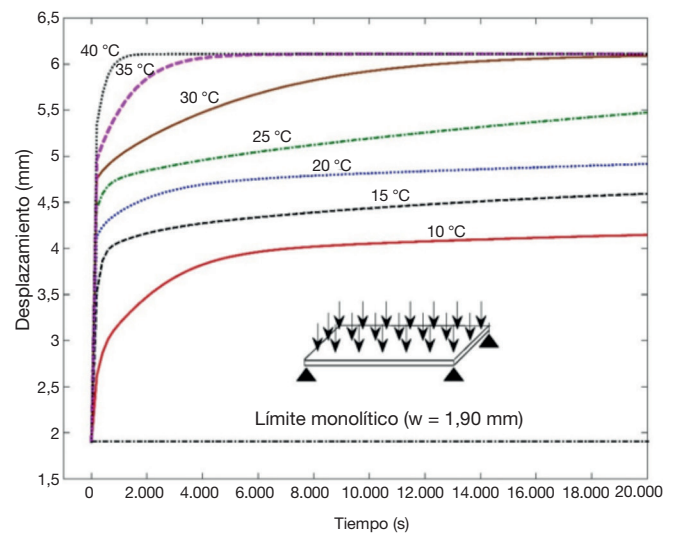


Figura 7 – Desplazamiento estimado en el punto central a diferentes temperaturas.

B I B L I O G R A F Í A

1. S. Bennison, Q. M.HX, P. Davies, High-performance laminated glass for structurally efficient glazing. Innovative light-weight structures and sustainable facades, Hong Kong, May 2008.
2. I. Calderone, P. Davies, J. Bendat, S. Bennison, Effective laminate thickness for the design of laminated glass. Glass Processing Days, Tampere, Finland, 2009.
3. L. Galuppi, G. Royer-Carfagni, Effective thickness of laminated glass beams: New expression via a variational approach. *Comp. Struct.* 38 (2012) 53-67.
4. L. Galuppi, G. Royer-Carfagni, The effective thickness of laminated glass plates, *J. Mech. Mater. Struct.* 7 (2012) 375-400.
5. L. Galuppi, G. Manara, G. Royer-Carfagni, Practical expressions for the design of laminated glass. *Compos. Part B-Eng.* 45 (2013) 1677-1688.
6. P. Foraboschi, Analytical solution of two layer beam taking into account nonlinear interlayer slip, *J. Eng. Mech-ASCE.* 135 (2009) 1129-1146.
7. P. Foraboschi, Analytical model for laminated-glass plate, *J. Sound. Vib.* 43 (2012) 2094-2106.
8. D. Jones, Reflections on damping technology at the end of the 20th century, *Journal of Sound and Vibration* 190 (1996) 449-462.
9. J. Ferry, *Viscoelastic properties of polymers.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980.
10. R.S. Lakes, *Viscoelastic solids,* ECRC Press. United States of America, 1999.
11. D. Mead, S. Markus, The forced vibration of three-layer damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions, *J. Sound. Vib.* 10 (1969) 163-175.
12. A. van Duser, A. Jagota, S. Beninson, Analysis of glass/polyvinyl butyral laminates subjected to uniform pressure, *J. Eng. Mech-ASCE.* 125 (1999): 435-442.
13. J. Hooper, On the bending of architectural laminated glass, *Int. J. Mech. Sci.* 15(1973) 309-323.
14. R. Behr, J. Minor, H. Norville, Structural behavior of architectural laminated glass. *J. Eng. Mech-ASCE.* 119 (1993) 202-222.
15. M. Edel, The effect of temperature on the bending of laminated glass units, Ph.D. thesis, Texas A&M University, Department of Civil Engineering, College Station, Texas, 1997.
16. H. Norville, K. King, J. Swoord, Behavior and strength of laminated glass, *J. Eng. Mech.* 124 (1998) 46-53.
17. M. Asik, S. Tezcan, A mathematical model for the behavior of laminated glass beams, *Comp. Struct.* 83 (2005) 1742-1753.
18. I. Ivanov, Analysis, modeling and optimization of laminated glasses as plane beam, *Int. J. Solids. Struct.* 43 (2006) 6887-6907
19. Y. Koutsawa, E. Daya, Static and free vibration analysis of laminated glass beam on viscoelastic supports, *Compos. Part B-Eng.* 44 (2007) 8735-8750.
20. P. Foraboschi, Behavior and failure strength of laminated glass beams. *J. Eng. Mechs-ASCE (ASCE)* 133 (2007) 1290-1301.
21. M. López-Aenlle, F. Pelayo The effective-thickness concept in laminated-glass elements under static loading, *Eng. Struct.* 56 (2013) 1092-1102.
22. P. Foraboschi, Three-layered sandwich plate: Exact mathematical model. *Compos. Part B-Eng.* 45 (2013) 1601-1612.
23. P. Foraboschi, Hybrid Laminated-Glass plate: Design and assessment, *Composite Structures* 106 (2013) 250-263.
24. M. López-Aenlle, F. Pelayo, Dynamic effective thickness in laminated-glass beams and plates, *Compos. Part B-Eng.* 67 (2014) 332-347.
25. M.L Aenlle, F. Pelayo, Frequency response of laminated glass elements: Analytical modeling and effective thickness, *Appl. Mech. Rev.* 65 (2014) 020802.