Doc. nº 016/1990

LA POBLACION COMO VARIABLE ENDOGENA.

MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ

LA POBLACION COMO VARIABLE ENDOGENA

EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONOMICO:

MODELO DE SOLOW.

Mª Montserrat Díaz Fernández

Area de Métodos Cuantitativos para la Economía

Facultad de CC. EE. y Empresariales

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Oviedo, Abril de 1989

INDICE

Página

LA POBLACION COMO VARIABLE ENDOGENA EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONOMICO: MODELO DE SOLOW.

0. INTRODUCCION

Desde un punto de vista teórico, un supuesto habitual de ios modelos de crecimiento económico, ya sean de inspiración neoclásica ó keynesiana, es el considerar la oferta de mano de obra, variable fuerza de trabajo, como una variable exógena al modelo.

Sin embargo, este supuesto no siempre es cierto en el mundo real, y además aunque en algunos casos la población activa crezca a una tasa casi constante, no puede considerarse como suficientemente explicativa de la evolución del empleo en un proceso de crecimiento económico. Por ello, trataremos de acercarnos algo más a la realidad, en el sentido de considerar la población como una variable endógena de los modelos de crecimiento, es decir, una variable que se determina dentro del sistema. Para ello utilizaremos el modelo neoclásico con un sector e introduciremos diversas hipótesis en relación al comportamiento poblacional.

Desde un punto de vista matemático el problema consiste en estudiar, únicamente, el comportamiento de la solución particular de la ecuación diferencial,

$$k' = s\,f(k) - g(k)\,k$$

dadas las condiciones iniciales, donde,

k = relación capital/trabajo

f(k) = función de producción

s= propensión marginal al ahorro

g(k) = tasa de crecimiento relativa de la fuerza de trabajo

Como problema estrictamente matemático su estudio no presenta un interés especial. Pero sin embargo, para justificar las simplificaciones económicas hechas al obtener dicha ecuación, es preciso considerar aspectos como:

(i) Las condiciones de producción.

(ii) La determinación de la tasa de crecimiento de la población y participación de la fuerza de trabajo.

(iii) El ajuste del ahorro y la inversión determinados en forma independiente.

Así pues, aunque resulte relativamente sencillo el formular de manera mecánica el llamado modelo de crecimiento de un sector, es preciso no olvidar los problemas económicos reales que se plantean en relación con cada función que aparece en el mismo.

1. MODELO DE SOLOW

La mayoría de los modelos de crecimiento que predominan en la teoría macroeconómica actual son adiciones y generalizaciones de los trabajos realizados por Solow(1) y Swan(2) en el año 1956. Aunque los artículos de Harrod y Domar habían reavivado el interés por los problemas del crecimiento y de la acumulación a largo plazo, el llamado enfoque "neoclásico" del análisis del crecimiento económico ha atraído un interés profesional de tal forma que se puede afirmar que representa el método **dominante** de la economia del crecimiento. Teniendo por origen una crítica a los trabajos de Harrod y Domar, los artículos realizados por Solow y Swan han preparado el terreno para toda una época de modelos de crecimiento.

Nuestro trabajo se basará, fundamentalmente, en el modelo desarrollado por R. Solow, considerado como la respuesta del pensamiento ortodoxo a los modelos de Harrod y Domar, debido, entre otras, a las razones que se señalan seguidamente.

El artículo de Solow apareció con anterioridad y ofrecía, además, un alcance más amplio y general que el de Swan que utilizaba supuestos más restrictivos. Sin embargo, se puede afirmar que los dos modelos son aproximadamente paralelos.

Uno de los atractivos básicos del enfoque neoclásico del crecimiento es que puede ser planteado de forma simple y clara por medio de un sistema de ecuaciones y, además, permite la obtención, sin mayores dificultades, de una serie de conclusiones que parecen inequívocas. El modelo se adapta fácilmente a diferentes supuestos. Obviamente, los modelos económicos avanzados no son tan sencillos como aquí se sugiere, aunque existe una especie de ley de Gresham por la cual las teorías simples reciben más atención que las difíciles.

Solow ha construido un modelo del que surge una ecuación diferencial que puede ser resuelta por distintas técnicas, su principal utilidad reside, precisamente, en la adaptabilidad a los estudios empíricos.

El modelo construido por Solow ha tenido un impacto decisivo dentro del Análisis Económico. Al principio el modelo se utilizó, únicamente, como un instrumento de análisis del proceso de crecimiento y, posteriormente, se generalizó en diversas direcciones. El modelo ha sido el lazo de unión de las conexiones de los llamados modelos numéricos en el análisis general de equilibrios. No obstante, el modelo de crecimiento de Solow constituye, ante todo, un cuadro en el que puede ser organizada la Teoría macroeconómica moderna.

La teoría de Solow fue expuesta, como se ha señalado más arriba, en parte, en el artículo publicado en el año 1956 y en un trabajo publicado en 1960 sobre inversiones y proyectos técnicos, en los que están contenidos los fundamentos de lo que más tarde devino en el crecimiento económico. A partir de su análisis, se pudo evaluar la función de producción y establecer la relación matemática entre ésta, por un lado, y los factores de producción, por otro.

La ecuación fundamental del modelo,

$$k' = s\,f(k) - g\,k \tag{1}$$

es una ecuación diferencial que determina la trayectoria que debe seguir la relación capital/trabajo, k, y permite conocer todas las variables del sistema, esto es, salarios, renta, ahorro y consumo simultáneamente a partir de los valores conocidos del stock de capital, K y del volumen de la fuerza de trabajo, L.

El segundo miembro de la ecuación (1) expresa el superávit por trabajador disponible, una vez que ha sido equipada toda la nueva mano de obra al nivel existente; por lo tanto, dicha ecuación nos dice que todo el ahorro generado en el sistema tiene que ser absorbido de alguna forma, la relación capital/trabajo, k, debe crecer a una tasa proporcional al superávit por trabajador disponible después de hacer la dotación para equipar la nueva mano de obra.

¿Qué implica esto sobre el desarrollo a lo largo del tiempo de la relación capital /trabajo? La respuesta a esta pregunta dependerá, únicamente, de la naturaleza de la función,

$$\Phi(k) = s\,f(k) - g\,k \tag{2}$$

y el valor inicial, k_0, de la relación capital/ trabajo.

El contenido del modelo se resume en **un proceso de convergencia continua de la relación capital/trabjo, desde cualquier valor inicial positivo a un únioco nivel de equilibrio**. Y, por lo tanto, la economía evoluciona hacia una **trayectoria de crecimiento balanceado** de equilibrio a lo largo de la cual el stock de capital, la fuerza de trabajo y la producción crecen al mismo ritmo. Además, la tasa según la cual el economía se expansiona a lo largo de la trayectoria de crecimiento balanceado coincide con la tasa de crecimiento de la mano de obra y es independiente de los hábitos en relación con el ahorro.

2. MODIFICACIONES EN LA ESPECIFICACION DEL CRECIMIENTO DE LA MANO DE OBRA

Dado el funcionamiento del modelo de Solow, cualquier dificultad que se plantee deberá provenir del fallo en el cumplimiento de alguno de los supuestos en que se fundamenta. Nuestro **objetivo** consiste en alterar el supuesto relativo al crecimiento de la variable fuerza de trabajo y estudiar el funcionamiento del modelo que nos ocupa.

La fuerza de trabajo puede determinarse de forma **endógena** porque la población ó la tasa de crecimiento **g** lo sea. De acuerdo con esta línea de pensamiento, cuando la relación capital/trabajo, k, y por lo tanto el salario w(k), es baja, la población puede que sea incapaz de mantenerse a sí misma, y la tasa de crecimiento del trabajo sería negativa. Con tasas de salarios más altas, el crecimiento de la población y de la fuerza de trabajo sería positivo hasta que la tasa de salario alcance un nivel tal, que las tasas de crecimiento de la población caen de nuevo. Tal situación podría representarse con una tasa de crecimiento g(k) y por un diagrama como el de la figura 1 de interés en el análisis de la acumulación del capital en países en vías de desarrollo ó economías **duales**.

La consecuencia de este razonamiento es el poder introducir la posibilidad de múltiples puntos de equilibrio y, por lo tanto, de equilibrios inestables. La figura 1 muestra la naturaleza de una posible **trampa de bajo nivel** en la que para pequeñas alteraciones en la relación capital/trabajo, k, los efectos de la población se oponen a cualquier incremento en las relaciones capital/trabajo y fuerzan la vuelta al equilibrio estable. Sin embargo, un cambio de importancia que produjese un incremento en la relación capital/trabajo más allá del punto de equilibrio inestable de alto nivel colocaría la economía en una trayectoria de capital e ingreso per cápita permanentemente crecientes, justificando así a los que proponen un **gran empuje**.

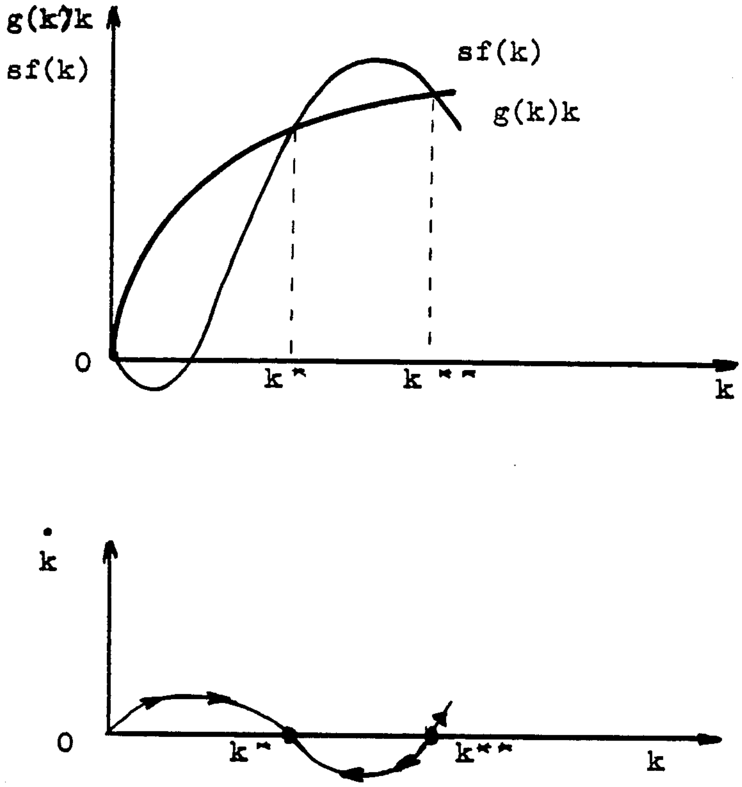

FIGURA 1

2.1 CRECIMIENTO DE LA MANO DE OBRA FUNCION DEL NIVEL DE SALARIOS

La dependencia entre la variable fuerza de trabajo y consideraciones económicas se puede originar por diversos motivos. Por ejemplo, la población de una determinada región puede crecer a una tasa constante, g, y sin embargo, la tasa de participación de la fuerza de trabajo en un momento determinado podría depender del salario vigente en ese instante. En tal caso, la población evolucionaría según la función,

$$P(t) = P_o\, e^{gt}$$

y la fuerza de trabajo,

$$L(t) = p(w)\, P(t) = p\,[\, w(k)\,]\, P_o\, e^{gt}$$

donde , w representa el salario y p(w) la tasa de participación de la fuerza de trabajo. Así pues,

$$L' = \frac{dL}{dt} = p' w' k' P_o e^{gt} + g p P_o e^{gt}$$

ó bien,

$$\frac{L'}{L} = \frac{p' w' k'}{p} + g$$

Definiendo la **elasticidad de la tasa de participación con respecto a los salarios** como,

$$\eta_p = \frac{p' w}{p} > 0$$

ya que puede esperarse que p' sea positiva sin que ello suponga una hipótesis restrictiva; y la **elasticidad de los salarios con respecto a la relación capital / trabajo** como,

$$\eta_w = \frac{w' k}{w} > 0$$

puesto que $w' > 0$,

$$\frac{L'}{L} = \eta_p \eta_w \frac{k'}{k} + g$$

Y por lo tanto, la **ecuación fundamental** del modelo de Solow quedaría,

$$k' = s f(k) - [\eta_p \eta_w \frac{k'}{k} + g] k = s f(k) - \eta_p \eta_w k' - g k$$

ó bien,

$$k' = \frac{s\,f(k) - g\,k}{1 + \eta_p\,\eta_w}$$

El sistema alcanzará el equilibrio cuando la tasa de variación de la relación capital/trabajo tome el valor k'=0, es decir, cuando el ahorro por trabajador tome un valor exactamente igual al necesario para mantener ocupada a la fuerza de trabajo creciente.

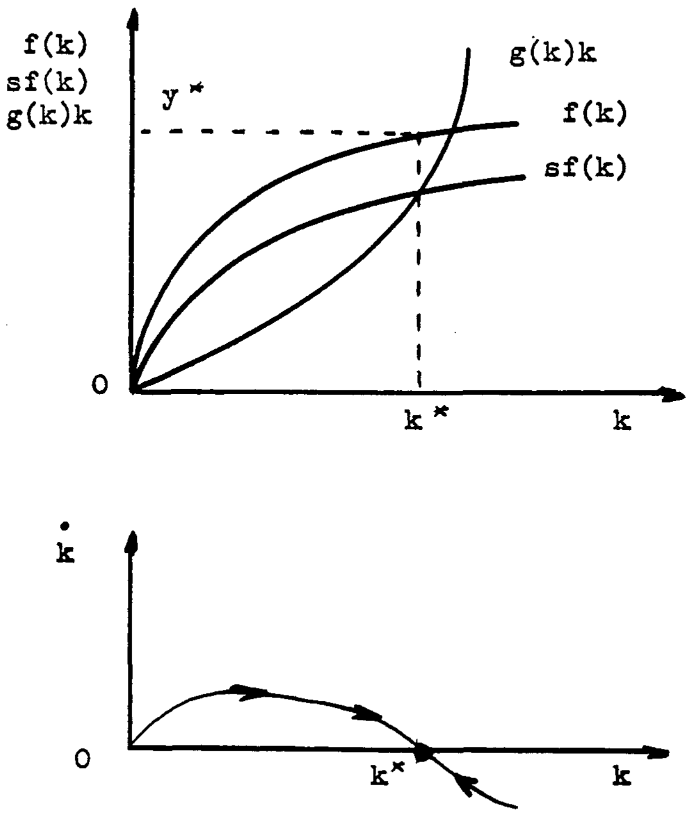

FIGURA 2

Dado el funcionamiento del modelo de Solow, cuando la relación capital/trabajo, k, toma el valor k^*, constante, $k'=0$ y todas las variables del sistema, esto es, stock de capital, fuerza de trabajo, renta e inversión crecen al mismo ritmo, igual a la tasa de variación de la fuerza de trabajo.

En el modelo modificado al introducir la hipótesis de que el crecimiento de la mano de obra es función del nivel de salarios el equilibrio se alcanzará cuando la relación capital/trabajo tome el valor k^*, constante . En este caso,

$$k'=0$$

y,

$$s\,f(k^*) = g\,(k^*)\,k^*$$

ó,

$$s\,f(k^*) = \Phi\,(k^*)$$

es decir, el nivel de ahorro por trabajador toma un valor exactamente igual al necesario para mantener ocupada la fuerza de trabajo creciente, la tasa de variación de la relación capital/trabajo, k', es igual a cero, y la relación capital/trabajo permanece constante al nivel k^*.

Si $k=K/L$ es constante, e igual a k^*, la fuerza de trabajo crece a una tasa,

$$\frac{L'}{L} = \eta_p\,\eta_w\,\frac{k'}{k} + g$$

como, la tasa de variación de la relación capital/trabajo es igual a la tasa de crecimiento de stock de capital menos la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo,

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}$$

entonces,

$$\frac{L'}{L} = \frac{g}{1 - \eta_p \eta_w} \qquad (1)$$

siempre que $\eta_p \eta_w \neq 1$

El stock de capital crecerá a la misma tasa, es decir, el hecho de que la relación capital/trabajo, k, sea constante implica que

$$\frac{K'}{K} = \frac{g}{1 - \eta_p \eta_w}$$

De forma similar, si la relación capital/trabajo, k*, es constante la producción por trabajador, y= Y/L, será constante e igual a y* (figura 2). En este caso cuando la fuerza de trabajo crece a una tasa según (1), Y, la renta del sistema crecerá a la misma tasa, es decir, si y*, es constante,

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{g}{1 - \eta_p \eta_w}$$

Asimismo, el ritmo de variación de la inversión del sistema coincidirá con el resto de las variables del modelo. Efectivamente,

$$I = sY$$

y,

$$\frac{I'}{I} \frac{I}{Y} = s \frac{Y'}{Y}$$

por tanto,

$$\frac{I'}{I} = \frac{Y'}{Y} = \frac{g}{1 - \eta_p \eta_w}$$

Por otra parte, el análisis del diagrama de fase pone de manifiesto que cualquiera que sea la relación inicial capital/trabajo, k, siempre que sea positiva, el sistema convergerá hacia una relación capital/trabajo única, k*.

En definitiva, hemos comprobado en primer lugar la existencia de una **senda de crecimiento equilibrado**; y en segundo lugar que los resultados obtenidos al introducir la hipótesis de que la variable fuerza de trabajo depende del nivel de salarios de la economía, son los mismos que en el modelo original. La única diferencia es que en la figura 2 la función que recoge la variación de la fuerza de trabajo deja de ser la recta gk y pasa a ser la función g(k)k.

2.2 CRECIMIENTO DE LA MANO DE OBRA FUNCION DE LA RENTA

Con el objetivo de intentar convertir el modelo que nos ocupa en algo más realista en relación al comportamiento de la variable fuerza de trabajo, analizaremos ahora qué ocurre cuando el crecimiento de la fuerza de trabajo se explica en función de la renta per cápita de la economía, esto es, cuando

$g = g(y)$

Para ello comenzaremos construyendo una función de población que explique la evolución de ésta en función de la renta y distinguiremos dos situaciones: **el modelo neoclásico de crecimiento son progreso técnico y con progreso técnico desincorporado neutral en el sentido de Harrod**

2.2.1 Relación lineal entre el crecimiento de la población y la renta

Empezaremos definiendo qué entendemos por **crecimiento de la población** en una economía cerrada sin posibilidad de movimientos migratorios, esto es, nos estamos refiriendo a una región en sentido amplio ó bien una región en la que el saldo migratorio sea nulo. La variación experimentada por la población (ΔP) en un período de tiempo la consideraremos debida, exclusivamente, a los nacimientos y a las defunciones producidas en dicho período, es decir,

$$\Delta P = \text{NACIMIENTOS} - \text{DEFUNCIONES}$$

ó,

$$\frac{\Delta P}{P} = TBN - TBM$$

donde,

$$TBN = \frac{\text{NACIMIENTOS}}{P} \quad \text{y} \quad TBM = \frac{\text{DEFUNCIONES}}{P}$$

Supondremos que la tasa de natalidad y la renta per cápita están relacionadas positivamente y que esta relación es lineal hasta cierto límite impuesto por consideraciones fisiológicas ó de algún otro tipo (figura 3). Considerando los hijos como **bienes**, esto quiere decir que al aumentar la renta per cápita se produce un **efecto renta** positivo en los consumidores, se consume más cantidad del bien, por lo tanto estaríamos ante un **bien normal**.

En la zona de renta per cápita que suponemos asequible, la función tiene dos porciones distintas. La primera para niveles de renta bajos, es creciente. Si representamos por B **la propensión a procrear**,

$$\frac{B}{P} \equiv \frac{C}{P} - TMI \; \frac{C}{P}$$

donde, TMI es la **tasa de mortalidad infantil**, es decir, el coeficiente de mortalidad infantil por cada concepción; C el número de concepciones; y P la población, la función puede escribirse así,

$$TBN = B\left[\frac{Y}{L}\right]$$

La propensión a procrear B puede tomar valores positivos ó negativos. Para niveles bajos de renta B >0, pues a medida que la renta se eleva la gente puede mantener más hijos. Sin embargo, para niveles de renta altos B <0. Efectivamente, al aumentar la renta per cápita el consumidor experimenta un efecto renta positivo puesto que puede "consumir" más cantidad del bien; sin embargo, al crecer la renta aumenta asimismo el coste de oportunidad de consumir únicamente ese bien, el consumidor tiene acceso a otros bienes y por tanto, se produce un **efecto sustitución** negativo. El bien deja de ser **normal** y se convierte en **inferior** para niveles de renta altos.

En nuestro análisis supondremos que la propensión a procrear es positiva. Por otra parte, hemos de tener en cuenta que existe un límite superior biológico a la tasa de natalidad, pudiendo darse, incluso un límite superior más bajo, impuesto por la costumbre ó nivel de conocimientos sanitarios.

En la figura aparece señalado con la letra M. Una vez alcanzado este valor, la línea que representa la **tasa bruta de natalidad** se convierte en una línea horizontal,

$$TBN = M$$

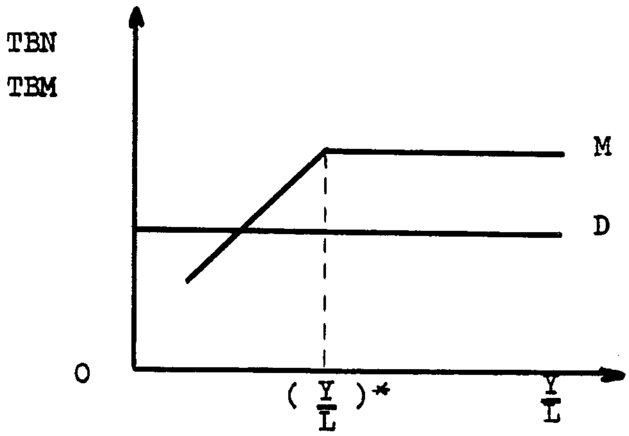

FIGURA 3

En cuanto a la **tasa bruta de mortalidad**, supondremos que el número de fallecimientos es proporcional al tamaño de la población, y, por lo tanto, de la población activa, con lo que TBM es constante,

TBM = D

Uniendo las ecuaciones anteriores obtenemos una expresión que relaciona el **crecimiento de la población y de la fuerza de trabajo con la renta per cápita** de una comunidad y con la tasa de mortalidad constante (figura 3), válidad en la zona en que aún no se ha alcanzado el límite superior de reproducción,

$$\frac{\Delta L}{L} = B\left[\frac{Y}{L}\right] - D$$

en la zona en que ese límite ha sido alcanzado, la relación es,

$$\frac{\Delta L}{L} = M - D$$

en la que parece razonable admitir que $M > D$.

Si hacemos que el intervalo objeto de nuestro análisis tienda a cero, ΔL, pasará a ser L', por lo que la tasa relativa de crecimiento de la mano de obra será:

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \frac{L'}{L} = L^*$$

de donde,

$$L^* = B\left[\frac{Y}{L}\right] - D \qquad (1)$$

ó,

$$L^* = M - D \qquad (2)$$

La función total de crecimiento de la mano de obra, L^*, será la unión de las dos semirrectas correspondientes a las ecuaciones (1) y (2). En realidad, la línea así obtenida es una aproximación lineal por segmentos de la "verdadera" curva.

2.2.2 Modelo neoclásico de crecimiento económico

En el supuesto de que la tasa de crecimiento relativa de la mano de obra sea función de la renta per cápita de la comunidad, esto es, si $g= g(y)$ ó lo que es lo mismo $g= \Phi(k)$, la fuerza de trabajo evolucionaría según la función,

$$L(t) = L_0\, e^{\Phi(k)t}$$

Así pues,

$$L' = L_0\, e^{\Phi(k)t}\, [\, \Phi(k) + \Phi'(k)\, k\,]$$

ó bien,

$$\frac{L'}{L} = \Phi(k) + \Phi'(k)\, k'$$

Y por lo tanto, la **ecuación fundamental** del modelo de Solow se transformará en la expresión,

$$k' = s\, f(k) - [\, \Phi(k) + \Phi'(k)\, k'\,]\, k$$

El equilibrio del sistema se alcanzará cuando la tasa de variación de la relación capital/trabajo, k', sea nula, es decir, cuando la relación capital/trabajo tome el valor constante k^* (figura 4). Por tanto,

$$s\, f(k^*) = \Phi(k^*)\, k^* \qquad (1)$$

Por consiguiente, el equilibrio del sistema se alcanzará cuando el ahorro por trabajador sea exactamente igual a la ampliación de capital del sistema para dotar de capital a los nuevos trabajadores. Como la relación capital/trabajo toma el valor constante, k^*, esto quiere decir que tanto el stock de capital, K, como la fuerza de trabajo, L, crecen al mismo ritmo.

Efectivamente, la tasa de variación de la relación capital/trabajo,

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}$$

cuando k= k*, la tasa de variación de la relación capital/trabajo, k, es nula y por lo tanto,

$$\frac{K'}{K} = \frac{L'}{L}$$

el stock de capital del sistema crece al mismo ritmo que la fuerza de trabajo.

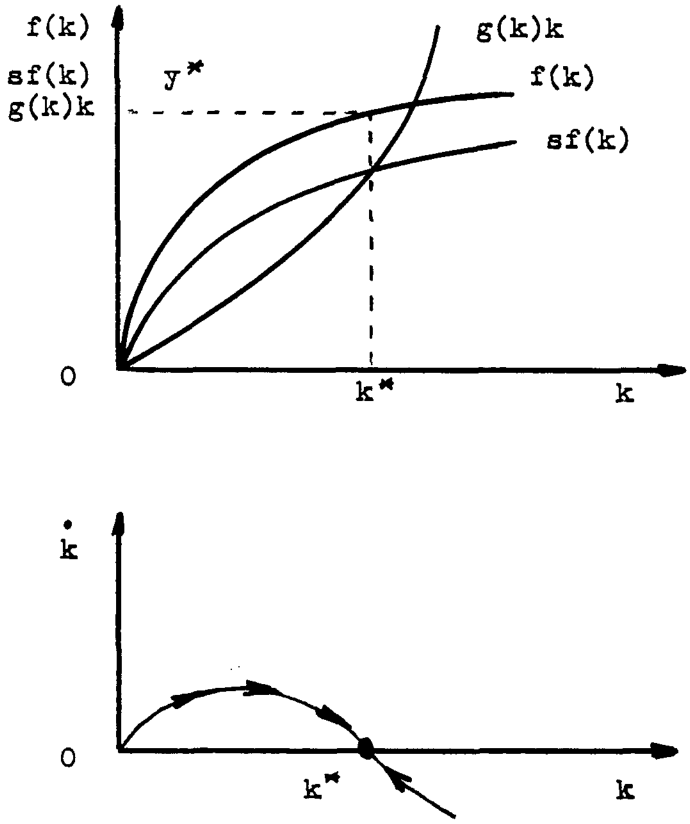

FIGURA 4

Cuando la relación capital/trabajo, k^*, es constante la producción por trabajador de la economía, y, será asimismo constante e igual a y^* (figura 4). Si y es constante, cuando la fuerza de trabajo crece a una tasa relativa $L'/L = \Psi(k)$, la producción del sistema crecerá al mismo ritmo, esto es,

$$\frac{Y'}{Y} = \Psi(k)$$

Por último, la inversión del sistema, I= sY, también evolucionará a la misma tasa de crecimiento que la renta de la economía. Efectivamente,

$$\frac{I'}{I}\ \frac{I}{Y} = s\ \frac{Y'}{Y}$$

es decir,

$$\frac{I'}{I} = \frac{Y'}{Y}$$

por tanto, la tasa de variación de la inversión será igual a $\Psi(k)$.

El diagrama de fase de la figura 4 pone de manifiesto que cualquiera que sea la relación inicial capital/trabajo, k, siempre que sea positiva, el sistema convergerá hacia una relación capital/trabajo única k^*. Por otra parte, el diagrama demuestra que el equilibrio es estable en el intervalo $k > 0$, es decir, la relación capital/trabajo se aproxima asintóticamente a k^*.

En definitiva, los resultados coinciden con los del modelo de Solow original. Esto es, al suponer que el crecimiento de la mano de obra de la economía depende de la renta per cápita de la misma hemos comprobado que existe una **senda de crecimiento equilibrado** en la que todas las variables del modelo crecen al mismo ritmo, igual a la tasa de crecimiento de la mano de obra.

2.2.3 Modelo neoclásico de crecimiento económico con progreso técnico neutral en sentido de Harrod

Consideremos el modelo neoclásico de crecimiento económico con progreso técnico desincorporado neutral en el sentido de Harrod. En este caso, la diferencia en relación al modelo anterior reside en el hecho de que la función de producción agregada es de la forma,

$$Y = F\,[\,K, A(t)L\,]$$

que representa la incorporación de una tecnología neutral en el sentido de Harrod, por lo que hablaremos de la **fuerza de trabajo eficaz**, $A(t)L$. Si expresamos $\bar{y} = Y/A(t)L$, como la producción por trabajador en unidades de eficiencia; $\bar{k} = K/A(t)L$, como el capital por trabajador en unidades de eficiencia, y el progreso técnico neutral en el sentido de Harrod tiene lugar a una tasa proporcional constante $m(=A'/A)$, entonces la **ecuación fundamental** del crecimiento económico neoclásico con todas las magnitudes por trabajador medidas en unidades de eficiencia, será:

$$\bar{k}' = s\,f(\bar{k}) - (\,m+g\,)\,\bar{k}$$

donde g representa la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo. Al hacer la hipótesis de que el crecimiento de la mano de obra depende de la renta per cápita la **ecuación fundamental** del modelo se transformará,

$$\bar{k}' = s\,f(\bar{k}) - [\,m + g(y)\,]\,\bar{k} \qquad (1)$$

como la producción por trabajador real $y = A(t)\,f(\bar{k})$, entonces,

$$\bar{k}' = s\,f(\bar{k}) - \{\,m + g\,[\,A(t)\,f(\bar{k})\,]\,\}\,\bar{k}$$

ó bien,

$$\bar{k}' = s\,f(\bar{k}) - [\,m + \Phi(\,t, \bar{k})\,]\,\bar{k} \qquad (2)$$

Ahora bien, nos encontramos ante una ecuación diferencial en la relación capital/trabajo en unidades de eficiencia, $\bar{k}$, que depende de dos variables. Por lo tanto, para resolverla habremos de fijar previamente el valor de una de ellas.

Supongamos que el crecimiento de la fuerza de trabajo y la renta per cápita de la economía están relacionadas positivamente (figura 5-b) y que esta relación es lineal para valores inferiores a y_n, mientras que para niveles de renta superiores el crecimiento de la fuerza de trabajo se hace constante al nivel g_n.

Cuando la renta per cápita es igual a y_0 la tasa de crecimiento de la mano de obra es g_0 (figura 5-b) y el **crecimiento sostenido** se produce en el punto A donde la curva $sf(\bar{k})$ que representa el ahorro por trabajador **eficaz**, intersecta a la función $(m + \Phi_0)\bar{k}$. La economía tenderá uniformemente a un valor constante de la relación capital/trabajo en unidades de eficiencia, $\bar{k} = \bar{k}_0$ y a un valor constante de la producción en unidades de eficiencia $\bar{y} = \bar{y}_0$. Es decir, para $t = t_0$ la ecuación (2), únicamente, dependerá de la relación capital/trabajo en unidades de eficiencia,

$$sf(\bar{k}_0) = [\, m + \Phi(t_0, \bar{k}_0)\,]\,\bar{k}_0$$

Como la tasa de variación de la relación capital/trabajo en unidades de eficiencia,

$$\frac{\bar{k}'}{\bar{k}} = \frac{\bar{K}'}{\bar{k}} - \frac{\bar{L}'}{\bar{L}}$$

cuando la relación capital/trabajo en unidades de eficiencia toma el valor constante, $\bar{k}_0$, el stock de capital deberá crecer a la misma tasa que la fuerza de trabajo medida en unidades de eficiencia, A(t)L, es decir,

$$\frac{\bar{L}'}{\bar{L}} = \frac{A'(t)}{A(t)} + \frac{L'}{L} = m + \Phi(t_0, \bar{k}_0)$$

La tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo eficaz es igual a la suma de la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo más la tasa de crecimiento del progreso técnico neutral en el sentido de Harrod, m. En consecuencia, la tasa de crecimiento a largo plazo del stock de capital en unidades de eficiencia será,

$$\frac{\bar{K}'}{\bar{K}} = \Phi(t_0, \bar{k}_0) + m$$

Por la misma razón si $Y/A(t_0)L$ tiene que ser constante la tasa de crecimiento de la producción por trabajador se igualará con la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo medida en unidades de eficiencia, esto es, $\Phi(t_0,\bar{k}_0)$ + m. Mientras que la relación capital/trabajo real y la producción por trabajador real crecerán a una tasa proporcional constante igual a la tasa de progreso técnico que aumenta la eficiencia del trabajo. La producción y el stock de capital a largo plazo crecerán a una tasa $\Phi(t_0,\bar{k}_0)$ + m, mientras que la fuerza de trabajo real sólo crece a una tasa $\Phi(t_0,\bar{k}_0)$.

Como la tasa de crecimiento de la producción por trabajador viene dada por,

$$\frac{y'}{y} = \frac{Y'}{Y} - \frac{L'}{L} = [\,\Phi\,(t_0,\bar{k}_0) + m\,] - \Phi\,(t_0,\bar{k}_0)$$

y la del capital por trabajador,

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L} = [\,\Phi\,(t_0,\bar{k}_0) + m\,] - \Phi\,(t_0,\bar{k}_0)$$

la producción y el stock de capital por trabajador crecerán a una tasa m, igual a la tasa de variación del progreso técnico neutral en ei sentido de Harrod.

En definitiva, cuando la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es igual a g_0, el sistema alcanza una **senda de crecimiento equilibrado** para un valor constante de la relación capital/trabajo en unidades de eficiencia igual a $\bar{k}_0$ y las variables del sistema evolucionan de acuerdo a los resultados del modelo de crecimiento económico neoclásico unisectorial.

Si la renta per cápita pasa de y_0 a y_1, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es igual a g_1 y el crecimiento sostenido del sistema se producirla en el punto B de la figura 5-a, donde la curva $sf(\bar{k})$ intersecta a la función $(m+\Phi_1)\bar{k}$. La economía tenderá uniformemente a un valor constante de la producción en unidades de eficiencia, $\bar{k}=\bar{k}_1$ y a un valor constante de la producción en unidades de eficiencia $\bar{y}=\bar{y}_1$. Es decir, para $t=t_1$ la ecuación (2) únicamente dependerá de la relación capital/trabajo en unidades de eficiencia,

$$sf(\bar{k}_1) = [\ m + \Phi\,(t_1, \bar{k}_1)\ ]\,\bar{k}_1$$

y se obtendrán resultados análogos a los anteriores. Esto es, el sistema se situará en una senda de equilibrio más elevada en la que se producirán los mismos resultados que hemos visto para $t=t_0$.

La economía se irá situando sucesivamente en **sendas de equilibrio** más elevadas,

$$\bar{k}_0 < \bar{k}_1 < \bar{k}_2 < \ldots < \bar{k}_n$$

hasta alcanzar una relación capital/trabajo constante, $\bar{k}_n$. Efectivamente, para niveles de renta per cápita superiores a y_n, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo se hace constante e igual a g_n y el sistema alcanzará la situación de equilibrio sostenido en el punto D de la función, donde la curva $sf(\bar{k})$ intersecta a la función $(\ m+ \Phi_n)\bar{k}$.

El sistema evolucionará a un valor constante de la relación capital/trabajo en unidades de eficiencia, $\bar{k}=\bar{k}_n$ y a un valor constante de la producción en unidades de eficiencia $\bar{y}=\bar{y}_n$. A partir de este nivel de renta la economía se estabilizará en la **senda de crecimiento equilibrado** k_n en la que las variables evolucionarán de igual forma a las situaciones vistas.

En definitiva, la inclusión de la hipótesis de que el **crecimiento de la fuerza de trabajo dependen de la renta per cápita** en un modelo de crecimiento económico neoclásico con progreso técnico desincorporado y neutral en el sentido de Harrod supone el que el sistema evolucione hacia **sendas de crecimiento equilibrado** más elevadas, si la relación entre el crecimiento de la fuerza de trabajo y la renta per cápita es positiva; ó inferiores, si la relación es decreciente, estabilizándose cuando el crecimiento de la fuerza de trabajo se hace constante.

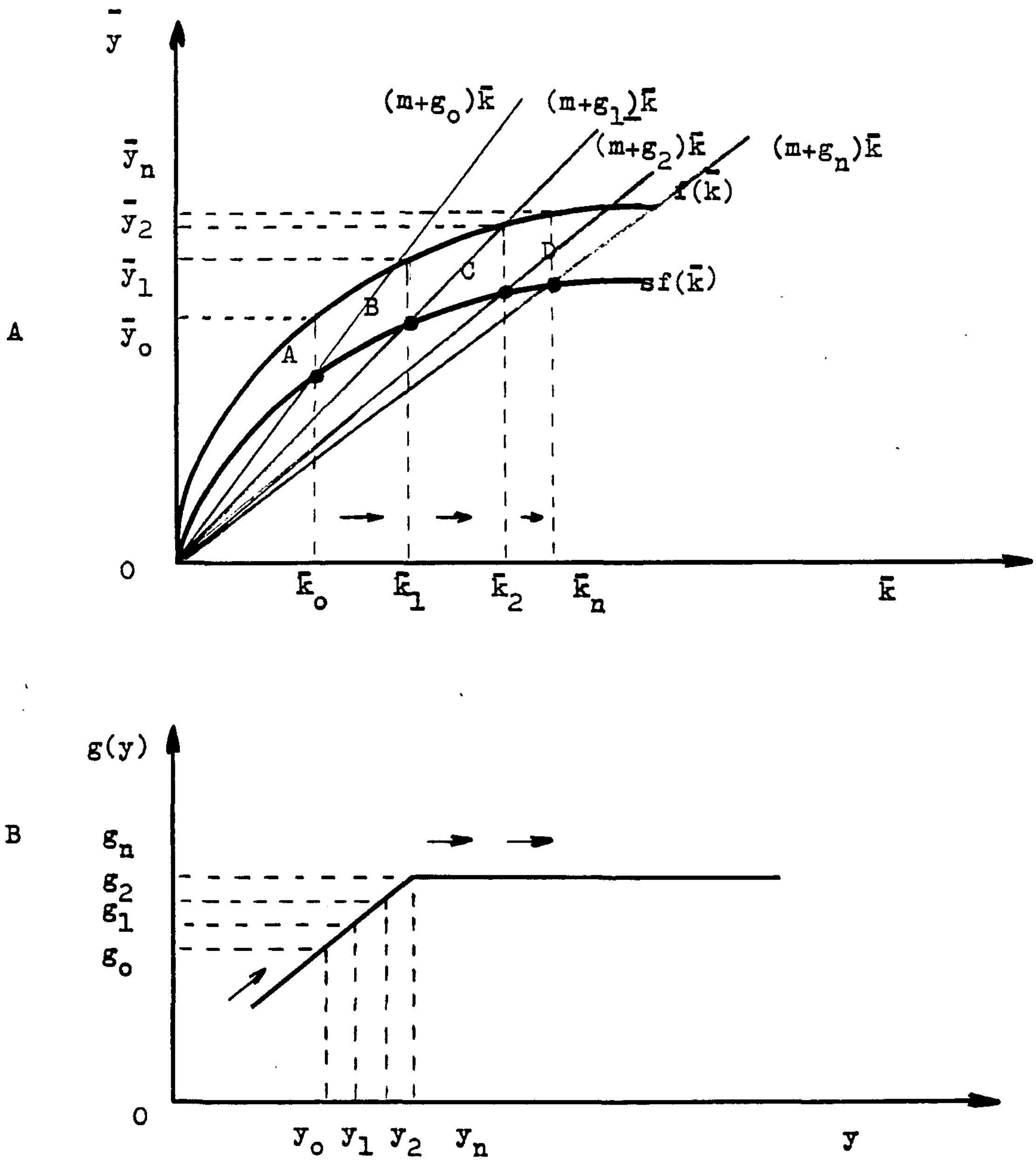

FIGURA 5

3. CONCLUSIONES

A lo largo de los supuestos analizados hemos estudiado, formalmente, la ecuación diferencial,

$$k' = \Phi(k) = s\,f(k) - g(k)\,k$$

teniendo presente la existencia de hipótesis económicas que determinan ó afectan la forma de las funciones de ahorro, producción y población, alguna de las cuales se ha mencionado expresamente. De tal manera que si existe un valor k^* tal que $\Phi(k^*) = 0$ existe un **crecimiento balanceado en equilibrio** para el sistema. Más aún, si se puede demostrar que para cierto $\varepsilon > 0$

$$\Phi(k) > 0 \qquad \text{para} \quad 0 < k < \varepsilon$$

y,

$$\lim_{k \to \infty} \Phi(k) < 0$$

entonces, se puede asegurar que el sistema se acerca a cierta **trayectoria de crecimiento balanceado en equilibrio** y que el sistema es estable globalmente.

La introducción de la hipótesis de un **crecimiento endógeno** de la fuerza de trabajo nos acerca el modelo de Solow a la realidad en el sentido de que permite tener en cuenta aspectos como las relaciones existentes entre los movimientos migratorios y las diferencias entre las rentas per cápita y los niveles de salario, así como las conexiones entre el crecimiento natural de la población y el bienestar material. Por otra parte, nos ha permitido comprobar que el funcionamiento del modelo está de acuerdo con los resultados del modelo original. En efecto, el sistema alcanza la **senda de crecimiento equilibrado** cuando la relación capital/trabajo, k, toma un valor constante, k^*, que hace que la tasa de variación de dicha variable sea igual a cero, y todas las variables del sistema crecen al mismo ritmo, igual a la tasa de variación de la fuerza de trabajo. La única diferencia aparece en el diagrama de fase en el que la función que recoge la variación de la fuerza de trabajo deja de ser la recta gk y pasa a ser la función $g(k)k$. Por lo tanto, el modelo ha ganado en realismo en el sentido de que se ha introducido una hipótesis más plausible y los resultados son análogos a los del modelo teórico original.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

(1) SOLOW, R. M.: "A Contribution to the Theory of Economic Growth". **Quartely Journal Of Economics**, LXX, pp. 65-94.

(2) SWAN, T. W.: "Economic Growth and Capital Accumulation", **Economic Record, XXXII**, 1956, pp. 334-361.

BIBLIOGRAFIA

1. **ANDERSON, J.**: "An Economic demographic model of the United States labor market", **Research in population economics**, nº 4, 1982.

2. **BAUMOL, W.**: **Dinámica económica**. Ed. Marcombo, Barcelona 1972.

3. **BENAVIE, A.**: **Técnicas matemáticas de Análisis económico.** Ed. Prentice-Hall Internacional, 1973.

4. **DIAZ FERNANDEZ, M.**: **La población como variable endógena en los modelos de crecimiento económico**. Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, Oviedo 1988.

5. **JONES, H.**: **Introducción a las teorías modernas del crecimiento económico.** Ed. Bosch, Barcelona 1975.

6. **KOSOBUD, R. F. and O'Neill, W. D.**: "A growth model with population endogenous". **American Economic Association**, 64, nº2, 1974.

7. **NEHER, P.**: **Crecimiento económico y desarrollo**. Ed. Aguilar, Madrid 1981.

Doc 001/1988

JUAN A. VAZQUEZ GARCIA.- Las intervenciones estatales en la minería del carbón.

Doc 002/1988

CARLOS MONASTERIO ESCUDERO.- Una valoración crítica del nuevo sistema de financiación autonómica.

Doc 003/1988

ANA ISABEL FERNANDEZ ALVAREZ; RAFAEL GARCIA RODRIGUEZ; JUAN VENTURA VICTORIA.- Análisis del crecimiento sostenible por los distintos sectores empresariales.

Doc 004/1988

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- Una propuesta para la integración multijurisdiccional.

Doc 005/1989

LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JOSE MANUEL DIEZ MODINO.- La modernización del sector agrario en la provincia de León.

Doc nº 006/1989

JOSE MANUEL PRADO LORENZO.- El principio de gestión continuada: Evolución e implicaciones.

Doc nº 007/1989

JAVIER SUAREZ PANDIELLO- El gasto público del Ayuntamiento de Oviedo (1982-88).

Doc 008/1989

FELIX LOBO ALEU.- El gasto público en productos industriales para la salud.

Doc 009/1989

FELIX LOBO ALEU.- La evolución de lsa patentes sobre medicamentos en los países desarrollados.

Doc 010/1990

RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES.- Investigación de las preferencias del consumidor mediante análisis de conjunto.

Doc 011/1990

ANTONIO APARICIO PEREZ.- Infracciones y sanciones en materia tributaria.

Doc 012/1990

MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; CONCEPCION GONZALEZ VEIGA.- Una aproximación metodológica al estudio de las matemáticas aplicadas a la economía.

Doc 013/1990

EQUIPO MECO.- Medidas de desigualdad: un estudio analítico

Doc 014/1990

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- Una estimación de las necesidades de gasto para los municipios de menor dimensión.

Doc 015/1990

ANTONIO MARTINEZ ARIAS.- Auditoria de la información financiera.

Doc 016/1990

MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ.- La población como variable endógena.

Doc 017/1990

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- La redistribución local en los países de nuestro entorno.

Doc 018/1990

RODOLFO GUTIERREZ PALACIOS; JOSE MARIA GARCIA BLANCO.- "Los aspectos invisibles" del declive económico: el caso de Asturias.

Doc 019/1990

RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES; JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.- La política de precios en los establecimientos detallistas.

Doc 020/1990

CANDIDO PAÑEDA FERNANDEZ.- La demarcación de la economía (Seguida de un apéndice sobre su relación con la Estructura Económica).