

EL PÉNDULO DE WILBERFORCE

R. Caballero-Flores

Dpto. de Física, Universidad de Oviedo.

Objetivos:

- Estudiar las oscilaciones acopladas longitudinal y torsional del péndulo.
- Reproducir experimentalmente el fenómeno de resonancia y los modos normales de vibración.
- Obtener el grado de acoplamiento entre ambas oscilaciones acopladas.
- Determinar el coeficiente de rozamiento.

Material:

- Péndulo de Wilberforce.
- Sensores de movimiento (longitudinal y torsional).
- Balanza, caja de pesas, pie de rey e hilo fino (de masa despreciable).
- Interfaces gráficas para estudiar geométrica y analíticamente el movimiento del péndulo.

Descripción del péndulo: El péndulo de Wilberforce consta de un muelle helicoidal (1) de constante elástica longitudinal k y masa m_m , de cuyo extremo cuelga una pesa (2) que, además de desplazarse verticalmente (grado de libertad z), puede girar en torno al eje del muelle (grado de libertad θ) con una constante elástica de torsión δ . La pesa está constituida por un cuerpo cilíndrico de masa m_c atravesado por una varilla de masa m_v , sobre la que se pueden enroscar dos deslizadores de masa m_d . La pesa consta, además, de una rueda (atornillada al cuerpo cilíndrico) de masa m_r con un número determinado de rayos (2) (Fig. 1).

El movimiento vibratorio del péndulo es un movimiento compuesto por dos oscilaciones acopladas: la longitudinal del muelle z , y la torsional

de la pesa que cuelga θ , caracterizado, en general, porque existe una transferencia de energía entre ambas oscilaciones.

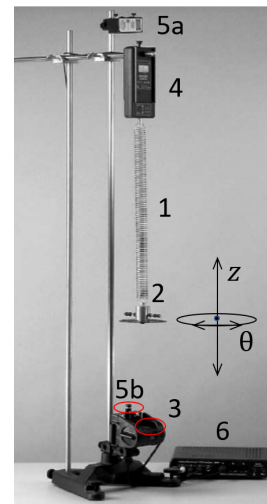


Fig. 1: Dispositivo experimental y grados de libertad z y θ del movimiento del péndulo.

FUNDAMENTO TEÓRICO

La energía total del sistema, E , viene dada por la suma de las energías cinética y potencial de cada grado de libertad, más la energía potencial de interacción, E_A :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}\delta\theta^2 + E_A, \quad (1)$$

donde m e I son, respectivamente, la masa total y el momento de inercia total del sistema con respecto al eje z de simetría vertical.

Se tiene, por un lado, que:

$$m = fm_m + m_c + m_v + m_r + 2m_d, \quad (2)$$

donde se ha tenido en cuenta que al tratarse de un muelle real y, por tanto, de masa no despreciable, al hacer oscilar la pesa suspendida de su extremo debemos considerar una fracción f de su masa m_m , cuyo valor teórico es $f = 1/3$; y, por otro, que:

$$I = I_m + I_c + I_v + I_r + I_d = I_0 + 2m_d d^2, \quad (3)$$

donde I_0 es una constante que agrupa los momentos de inercia del muelle I_m , del cuerpo cilíndrico I_c , de la varilla I_v , y de la rueda I_r (excluido el de los deslizadores I_d). El momento de inercia del sistema $I(d)$ puede, por tanto, variar al desplazar ambos deslizadores (considerados como masas puntuales) a lo largo de la varilla y situarlos a una distancia d respecto al eje vertical.

Asumimos que la energía potencial de interacción, que da cuenta de la energía transferida entre ambos grados de libertad, viene dada por $E_A = \frac{1}{2}\epsilon z\theta$, donde ϵ , *a priori* desconocida, es la constante de acoplamiento.

Se observa, una vez reagrupados los términos

de la Ec. (1), que la energía E se puede expresar como la suma de las energías asociadas a cada uno de los dos grados de libertad, el longitudinal de frecuencia natural $\omega_z^2 = k/m$ y energía $E_z(z)$, y el torsional de frecuencia natural $\omega_\theta^2 = \delta/I$ y energía $E_\theta(\theta)$, más la energía de interacción $E_A(\epsilon, z, \theta)$. Cuando, en ausencia de rozamiento, el valor de la constante de acoplamiento ϵ es no es nulo, la energía total E es constante (Fig. 2).

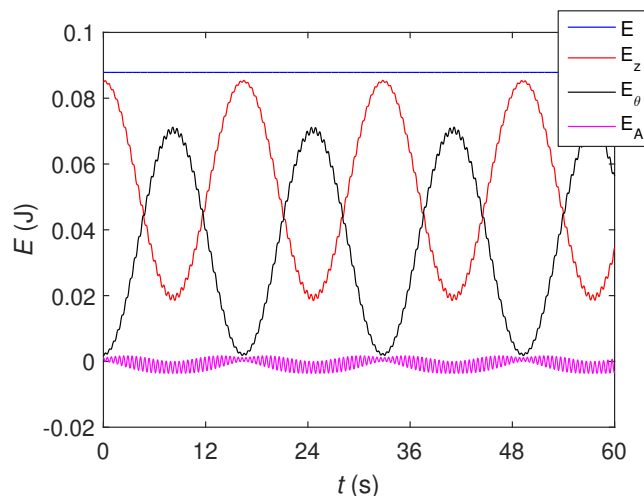


Fig. 2: Energía total del péndulo E , traslacional $E_z(z)$, torsional $E_\theta(\theta)$, y potencial $E_A(\epsilon, z, \theta)$.

Con todo ello, y en términos de energía, si se desplaza la pesa de su posición de equilibrio (desplazamiento vertical y giro), y se deja en libertad, el péndulo comenzará un movimiento vibratorio de tal forma que la energía de cada grado de libertad no queda confinada en él sino que parte de ella, como consecuencia de la energía potencial de interacción E_A , puede transferirse al otro. A este fenómeno se le denomina fenómeno de pulsación o batimiento.

La energía transferida entre los dos grados de libertad será máxima cuando las frecuencias naturales coincidan $\omega_z = \omega_\theta = \omega_r$, es la denominada situación de resonancia. Asimismo, es posible conseguir que la energía transferida sea nula si

inicialmente se desplaza y se gira la pesa unos determinados valores. En esta última situación, se dice que el sistema oscila en uno de sus modos normales¹ de vibración, en el que la amplitud de las dos oscilaciones permanece constante.

El objetivo de esta práctica de laboratorio consiste en: *i*) reproducir experimentalmente los fenómenos de batimiento, resonancia y modos normales de vibración del péndulo de Wilberforce, *ii*) obtener el valor de la constante de acoplamiento ϵ y determinar el grado de acoplamiento entre las dos oscilaciones del péndulo, y *iii*) determinar la constante de amortiguamiento. Con la ayuda de dos interfaces gráficas estudiaremos geométrica y analíticamente el movimiento del péndulo.

Ecuaciones de movimiento: Las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} z + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{m} \theta = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\delta}{I} \theta + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{I} z = 0, \quad (5)$$

cuyas soluciones, considerando las siguientes condiciones iniciales: posiciones $z(0) = z_0$, $\theta(0) = \theta_0$;

y velocidades $\dot{z}(0) = 0$ y $\dot{\theta}(0) = 0$, resultan:

$$\theta(t) = B \cos(\omega_1 t) + D \cos(\omega_2 t), \quad (6)$$

$$z(t) = B' \cos(\omega_1 t) + D' \cos(\omega_2 t), \quad (7)$$

donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias propias del movimiento vibratorio:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_z^2 + \omega_\theta^2 + \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + \frac{\epsilon^2}{mI}} \right], \quad (8)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_z^2 + \omega_\theta^2 - \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + \frac{\epsilon^2}{mI}} \right], \quad (9)$$

y B , D , B' y D' son constantes que dependen de las condiciones iniciales z_0 y θ_0 , con:

$$D + B = \theta_0, \quad (10)$$

$$D' + B' = z_0, \quad (11)$$

y también de las frecuencias propias ω_1 y ω_2 .

Teniendo en cuenta relaciones trigonométricas sencillas², las ecuaciones de movimiento (6) y (7) pueden reescribirse de una forma más completa, como sigue (con $\omega_+ = (\omega_1 + \omega_2)/2$ y $\omega_- = (\omega_1 - \omega_2)/2$):

$$\theta(t) = (\theta_0 - 2B) \text{sen}(\omega_- t) \text{sen}(\omega_+ t) + \theta_0 \cos(\omega_- t) \cos(\omega_+ t) = \theta_1(t) + \theta_2(t), \quad (12)$$

$$z(t) = (z_0 - 2B') \text{sen}(\omega_- t) \text{sen}(\omega_+ t) + z_0 \cos(\omega_- t) \cos(\omega_+ t) = z_1(t) + z_2(t). \quad (13)$$

La figura 3 muestra las funciones periódicas $\theta(t)$ y $z(t)$ (curva azul), donde puede observarse el fenómeno batimiento o amplitud modulada (envolvente de las oscilaciones, curva roja).

La amplitud modulada de $\theta(t)$ dado por la

Ec. (12) (o, de forma equivalente, de $z(t)$ dado por la Ec. (13)), puede entenderse como la suma de dos movimientos también modulados, $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, ambos de frecuencia angular ω_+ y amplitudes moduladas, respectivamen-

¹ Decimos ‘normal’ en el sentido de que cada grado de libertad se comporta como lo haría *normalmente* un oscilador desacoplado.

² $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$; $-\cos \alpha + \cos \beta = 2 \text{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \text{sen} \frac{\alpha + \beta}{2}$.

te, $(\theta_0 - 2B) \text{sen}(\omega_- t)$ y $\theta_0 \text{cos}(\omega_- t)$, desfasados $\pi/2$ o un cuarto de sus periodos moduladores $T_- = 2\pi/\omega_-$. Las curvas envolventes de las oscilaciones $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ (y las de $z_1(t)$ y $z_2(t)$) se han representado en el panel superior (inferior) de la figura 3 (curvas negra discontinua y negra continua, respectivamente).

Comparando las dos representaciones de $\theta(t)$ y $z(t)$ (Fig. 3), se observa que sus respectivas amplitudes moduladas están desfasadas un cuarto de T_- , lo que provoca que haya una transferencia de energía entre los dos osciladores.

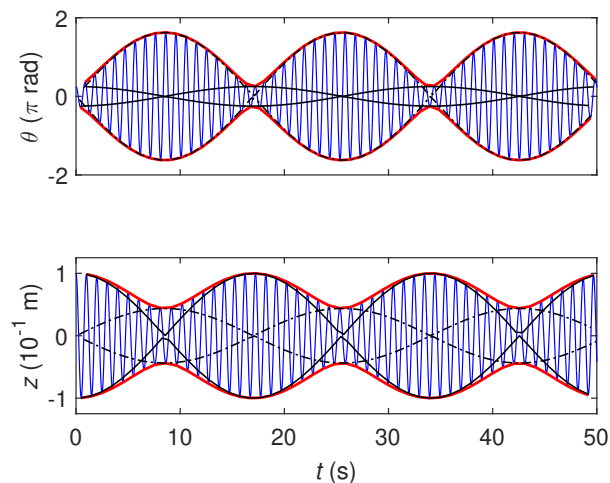


Fig. 3: Posición de la pesa $\theta(t)$ y $z(t)$ con condiciones iniciales $z_0 = 0,1$ m y $\theta_0 = \pi/4$ rad.

Durante un cuarto del periodo T_- la amplitud modulada de uno de ellos disminuye y la del otro aumenta, dando lugar a una transferencia de energía del primero al segundo.

Durante el siguiente cuarto del periodo T_- , la situación se invierte y la energía se transfiere del segundo al primero. El proceso se repite de forma periódica con un periodo $T_p = T_-/2$, por lo que la frecuencia de transferencia de energía entre los dos osciladores, conocida como frecuencia de pulsación o batimiento, será $w_p = \omega_1 - \omega_2$.

Modos normales de vibración: El primer modo normal de vibración, denominado MN1, se obtiene cuando $D = D' = 0$. Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, la relación entre la posición inicial $z_{01} = B'$ y el ángulo inicial $\theta_0 = B$, resulta:

$$z_{01} = \frac{2I}{\epsilon} (\omega_1^2 - \omega_\theta^2) \theta_0. \quad (14)$$

Las ecuaciones de movimiento (6) y (7), o las (12) y (13) teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas mencionadas anteriormente, se transforman en:

$$\theta(t)_{MN1} = \theta_0 \text{cos}(\omega_1 t), \quad (15)$$

$$z(t)_{MN1} = z_{01} \text{cos}(\omega_1 t), \quad (16)$$

que no presenta el fenómeno de amplitud modulada (Fig. 4, paneles izquierdos), por lo que no hay transferencia de energía de un grado de libertad al otro. En esta situación, los dos osciladores vibran con igual frecuencia ω_1 (mayor que las frecuencias naturales ω_z y ω_θ), en fase ya que $\text{sgn}(z_{01}) = \text{sgn}(\theta_0)$, y lo hacen, en términos de energía, como lo harían normalmente dos osciladores desacoplados.

El segundo modo normal de vibración, denominado MN2, se obtiene cuando $B = B' = 0$. Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, la relación entre la posición inicial $z_{02} = D'$ y el ángulo inicial $\theta_0 = D$, resulta:

$$z_{02} = \frac{2I}{\epsilon} (\omega_2^2 - \omega_\theta^2) \theta_0. \quad (17)$$

Las ecuaciones de movimiento (6) y (7), o las (12) y (13), de forma análoga a como se ha pro-

cedido con el MN1, se transforman en:

$$\theta(t)_{MN2} = \theta_0 \cos(\omega_2 t), \quad (18)$$

$$z(t)_{MN2} = z_{02} \cos(\omega_2 t), \quad (19)$$

que tampoco presenta el fenómeno de amplitud modulada (Fig. 4, paneles derechos), ni hay transferencia de energía. En esta situación, los dos osciladores vibran con igual frecuencia ω_2 (menor que las frecuencias naturales), en oposición de fase ya que $\text{sgn}(z_{02}) \neq \text{sgn}(\theta_0)$, y lo hacen, en términos de energía, como lo harían normalmente dos osciladores desacoplados.

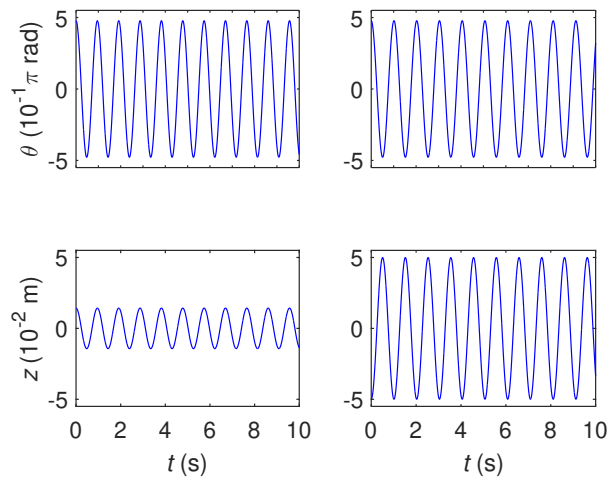


Fig. 4: MN1 (izquierda) y MN2 (derecha), y condiciones iniciales z_{01} y z_{02} con $\theta_0 = 1,5$ rad.

Obsérvese que las ecuaciones de movimiento (6) y (7) se pueden expresar como combinación lineal de los modos normales de vibración, y que mientras no se conozca la constante de acoplamiento ϵ , no podremos obtener las condiciones iniciales, a partir de las ecuaciones (14) o (17), y reproducir experimentalmente uno cualquiera de los dos modos normales.

Resonancia: Nótese que al ser I función de d (Ec. (3)), también lo será $\omega_\theta(d) = \delta/I$, y que, por tanto, las frecuencias naturales serán iguales

($\omega_z = \omega_\theta = \omega_r$) para una determinada posición d_r de los deslizadores:

$$d_r = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{k} - I_0\right) / (2m_d)}. \quad (20)$$

Cuando esto ocurre se dice que el sistema está en resonancia. En esta situación, las expresiones (8) y (9) para obtener las frecuencias propias se simplifican sobremanera:

$$\omega_{1r}^2 = \omega_r^2 + \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4mI_r}}, \quad (21)$$

$$\omega_{2r}^2 = \omega_r^2 - \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4mI_r}}, \quad (22)$$

donde I_r es el momento de inercia en resonancia. Esta simplificación se traduce en expresiones más sencillas de las constantes B_r , D_r , B'_r y D'_r (que no dependen de ω_1 y ω_2), y de los coeficientes de las ecuaciones de movimiento (12) y (13): $\theta_0 - 2B_r = -\sqrt{m/I_r}z_0$, y $z_0 - 2B'_r = -\sqrt{I_r/m}\theta_0$, que se transforman en:

$$\begin{aligned} \theta(t)_r &= -\sqrt{\frac{m}{I_r}}z_0 \text{sen}(\omega_-t) \text{sen}(\omega_+t) \\ &\quad + \theta_0 \cos(\omega_-t) \cos(\omega_+t) \\ &= \theta_1^{(r)}(t) + \theta_2^{(r)}(t), \\ z(t)_r &= -\sqrt{\frac{I_r}{m}}\theta_0 \text{sen}(\omega_-t) \text{sen}(\omega_+t) \\ &\quad + z_0 \cos(\omega_-t) \cos(\omega_+t) \\ &= z_1^{(r)}(t) + z_2^{(r)}(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Obsérvese que en la situación en la que uno de los dos valores de las condiciones iniciales sea nulo ($\theta_0 = 0$ o $z_0 = 0$), las ecuaciones de movimiento (23) se simplifican significativamente. Se tiene, además, que la energía transferida alcanza también su valor máximo en resonancia.

La figura 5 muestra la situación de resonancia

cuando $\theta_0 = 0$ y cuando $z_0 = 0$, donde se puede observar claramente la transferencia periódica de energía entre los dos modos de vibración. La varilla, inicialmente en su posición de equilibrio $\theta_0 = 0$ (paneles izquierdos), comienza a rotar y alcanza su giro máximo $|\theta_{max}| = |2B| = \sqrt{\frac{m}{I_r}} z_0$, cuando la pesa no se desplaza. Por otro lado, la pesa, que inicialmente está en su posición de equilibrio $z_0 = 0$ (paneles derechos), comienza a desplazarse hasta alcanzar su desplazamiento máximo $|z_{max}| = |2B'| = \sqrt{\frac{I_r}{m}} \theta_0$, cuando la varilla no gira. El tiempo transcurrido entre dos ceros consecutivos es el periodo de pulsación T_p .

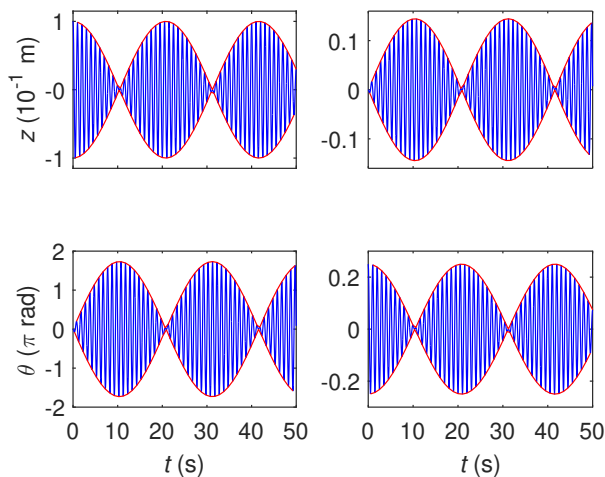


Fig. 5: Resonancia: condiciones iniciales $z_0 = 0,1$ m y $\theta_0 = 0$ (izqda.), y $z_0 = 0$ y $\theta_0 = \pi/4$ rad (drcha.).

En la situación de resonancia, el primer modo normal de vibración (MN1r) se obtiene cuando $D_r = D'_r = 0$. Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, la relación entre la posición inicial $z_{01}^{(r)} = B'_r$ y el ángulo inicial $\theta_0 = B_r$, resulta:

$$z_{01}^{(r)} = \sqrt{\frac{I_r}{m}} \theta_0. \quad (24)$$

El MN2r de vibración se obtiene cuando $B_r = B'_r = 0$. Teniendo en cuenta las ecuacio-

nes anteriores, la relación entre la posición inicial $z_{02}^{(r)} = D'_r$ y el ángulo inicial $\theta_0 = D_r$, resulta:

$$z_{02}^{(r)} = -\sqrt{\frac{I_r}{m}} \theta_0. \quad (25)$$

Las ecuaciones de movimiento del MN1r (MNr2) se obtienen sustituyendo z_{01} por $z_{01}^{(r)}$ (z_{02} por $z_{02}^{(r)}$) en las ecuaciones (15) y (16) ((18) y (19)).

Nótese que no es necesario conocer la constante de acoplamiento ϵ para obtener las condiciones iniciales, a partir de las ecuaciones (24) o (25), y reproducir experimentalmente uno cualquiera de los dos modos normales de vibración.

MÉTODO OPERATORIO

El equipo experimental utilizado en esta práctica (Fig. 1) consta, como hemos mencionado anteriormente, de un muelle helicoidal (1) de cuyo extremo cuelga una pesa (2) que, además de desplazarse verticalmente, puede girar en torno al eje del muelle.

El sensor de movimiento (3) emite pulsos de sonido y detecta la reflexión en la pesa, de modo que registrará la posición $z(t)$ de la oscilación vertical del péndulo (Fig. 6).

Por otro lado, el sensor de rotación emite un láser³ (5a) que será interceptado por los rayos de la rueda (2) en su movimiento angular o, cuando la atraviese entre dos rayos, detectado por el sensor (5b), de modo que registrará la velocidad angular $\dot{\theta}(t)$ de la oscilación. En realidad registrará el módulo $|\dot{\theta}(t)|$, dado que el detector no puede distinguir el sentido de giro de esta oscilación (Fig. 6).

Una vez ajustados los sensores de forma que

³ No mire directamente al láser ni lo mantenga encendido si no está midiendo.

detecten los movimientos longitudinal y torsional de la pesa, ambos sensores se conectan a un ordenador a través de una interfaz⁴ (6), y con un software apropiado⁵ estudiaremos el movimiento del péndulo⁶. En esta práctica no usaremos el sensor de fuerza (4) de la figura 1.

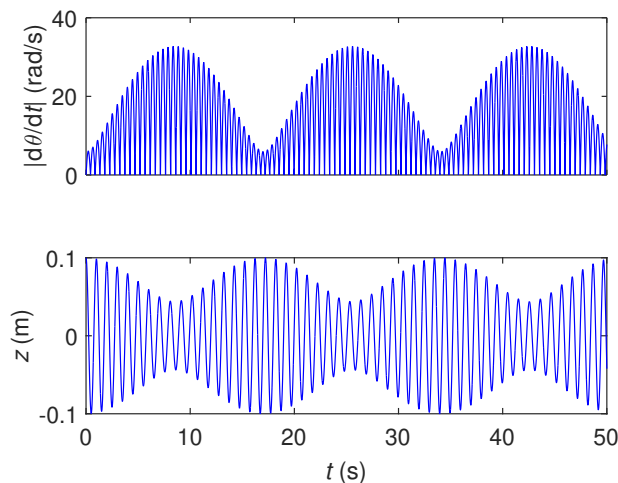


Fig. 6: Registro de los sensores de posición: torsional $|\dot{\theta}(t)|$, y longitudinal $z(t)$.

1-. Mida las masas del muelle m_m , del cuerpo cilíndrico m_c , de la varilla m_v , de los diferentes pares de deslizadores m_d , y de la rueda m_r . Asimismo, usando el pie de rey, mida las magnitudes geométricas correspondientes.

Fenómeno de batimiento

2-. Partiendo de la posición de equilibrio, desplace la pesa verticalmente, gírela un cierto ángulo, y déjela en libertad. Observe que el movimiento comienza generalmente con una oscilación vertical simple que se va amortiguando a la vez que la oscilación torsional (o su velocidad) se hace mayor. Posteriormente, se observa que

la amplitud de la oscilación vertical aumenta de nuevo cuando la oscilación torsional comienza a debilitarse, y así, de manera sucesiva, el movimiento del péndulo se repetirá hasta pararse debido al rozamiento con el aire.

Determinación de k y f

3-. Utilizando sólo el muelle longitudinal (sin la pesa (2), para evitar la rotación), mida el periodo T_i de la oscilación una vez haya colocado diferentes masas m_{pi} del juego de pesas. Para ello, tire de ellas suavemente hacia abajo, soltándola después manteniendo la verticalidad.

4-. Deje que realice algunas oscilaciones (unas 5, por ejemplo), y determine el periodo T_z a partir del tiempo necesario para realizar las oscilaciones, o a partir del registro z vs. t , eligiendo un ajuste senusoidal del programa.

5-. Teniendo en cuenta la relación ya estudiada⁷ $T_z^2 = 4\pi^2(m_p + fm_m)/k$, construya una gráfica $T_z^2 - m_p$ (no olvide añadir la masa del portapesas). Los puntos deben ajustarse a un comportamiento lineal de manera que, a partir de la correspondiente recta de regresión $y = ax + b$, puede obtener los valores de $k = 4\pi^2/a$, y de $f = b/(am_m)$.

Determinación de m e I_0

6-. Determine la masa m del sistema a partir de la Ec. (2), y, consultando las expresiones teóricas en cualquier libro de Física General, el momento de inercia I_0 a partir de la Ec. (3).

⁴ ® PASCO CI-7500 Science Workshop 750 Interface, o similar.

⁵ DataStudio, PASCO Capstone, o similar.

⁶ Los detalles específicos de la conexión de los sensores a la interfaz, y de la comunicación de ésta con el ordenador, dependerán de los modelos de la interfaz y del software utilizados.

⁷ Consulte la práctica *Medida de la constante elástica de un muelle longitudinal*.

Determinación de δ

7-. Anude el hilo al tornillo que sujeta la rueda al cuerpo cilíndrico y cuelgue de nuevo la pesa del muelle. Una vez alcanzada la posición de equilibrio, sujete el hilo a la mesa con cinta adhesiva de forma que anule la traslación del péndulo.

8-. Mida el periodo T_i de la oscilación una vez haya colocado los deslizadores en diferentes posiciones a una distancia d_i del eje del péndulo. Para ello, gire suavemente la pesa, soltándola después manteniendo la horizontalidad (observe en el registro $z(t)$ que la traslación del péndulo queda anulada).

Para medir la distancia d_i mida el paso de rosca de la varilla, y vaya enroscando los deslizadores de fuera adentro.

9-. Deje que realice algunas oscilaciones (unas 5, por ejemplo), y determine el periodo T_θ a partir del tiempo necesario para realizar las oscilaciones, o a partir del registro $|\dot{\theta}(t)|$ vs. t , eligiendo un ajuste senusoidal del programa.

10-. Teniendo en cuenta la relación ya estudiada⁸ $T_\theta^2 = 4\pi^2(2m_d d^2 + I_0)/\delta$, construya una gráfica $T_\theta^2 - d^2$. Los puntos deben ajustarse a un comportamiento lineal de manera que, a partir de la correspondiente recta de regresión $y = ax + b$, puede obtener los valores de $\delta = 8\pi^2 m_d/a$, y de $I_0 = 2b m_d/a$ (compare este valor con el valor de I_0 calculado anteriormente).

Resonancia. Determinación de ω_p

Para medir la frecuencia de transferencia de energía entre los dos osciladores, dada por la frecuencia de pulsación $w_p = 2\pi/T_p = \omega_1 - \omega_2$, mediremos el periodo T_p en la situación de resonancia dada en la figura 5.

11-. Teniendo en cuenta que la situación de resonancia se alcanza para la posición de los deslizadores dada por la Ec. (20), coloque ambos deslizadores en esta posición y haga oscilar el péndulo con las condiciones iniciales $z_0 = 0,1$ m y $\theta_0 = 0$.

Es posible que no reproduzca experimentalmente la figura 5 (izquierda) en el primer intento. Inténtelo de nuevo colocando los deslizadores en torno a dicha posición de resonancia d_r , desplazando los deslizadores muy ligeramente.

12-. Una vez haya reproducido experimentalmente el fenómeno de resonancia, mida el tiempo transcurrido entre dos ceros consecutivos T_p , bien en la curva z vs. t , bien en la curva $|\dot{\theta}(t)|$ vs. t , y a partir de este valor determine la frecuencia de pulsación ω_p .

Modos normales. Medida de ω_1 y ω_2

Para medir las frecuencias propias o las frecuencias de los modos normales ω_1 y ω_2 , partiremos de la situación de resonancia con los deslizadores en la posición del apartado anterior. Sabiendo que, en este caso, no es necesario conocer la constante de acoplamiento ϵ , reproduciremos experimentalmente uno cualquiera de los dos modos normales de vibración.

13-. Para reproducir experimentalmente el MN1r haga oscilar el péndulo con las condiciones iniciales $z_{01}^{(r)}$, dada en la Ec. (24), y $\theta_0 = \pi/4$. Deje que realice algunas oscilaciones (unas 5, por ejemplo), y determine la frecuencia ω_1 a partir de la medida del periodo T_1 , como se ha indicado anteriormente.

14-. Análogamente, para reproducir experimentalmente el MN2r haga oscilar el péndulo con

⁸ Consulte la práctica *Medida de la constante elástica de un muelle torsional y momentos de inercia*.

las condiciones iniciales $z_{02}^{(r)}$, dada en la Ec. (25), y $\theta_0 = \pi/4$. Obtenga la frecuencia del segundo modo normal ω_2 .

15- Con las medidas realizadas, compruebe que se cumple la relación $w_p = \omega_1 - \omega_2$.

Determinación de ϵ

En el péndulo de Wilberforce la energía potencial depende de la constante de acoplamiento $\epsilon = 2\omega_r\omega_p\sqrt{mI_r}$, que nos permite definir el grado de acoplamiento a partir de la relación $\xi = \epsilon^2 / (k\delta)$.

16- A partir de los datos experimentales obtenidos, determine los valores de ϵ y ξ .

Estudio analítico del péndulo

Una vez haya obtenido la constante de acoplamiento ϵ , ya puede realizar un estudio analítico del péndulo. Para ello, descárguese la interfaz gráfica GUI1. Es una interfaz gráfica de usuario realizada con Matlab (usted no necesita tener instalado Matlab en su ordenador), en la que podrá estudiar el movimiento del péndulo a partir de los valores: m , I_0 , m_d , d , δ , k , ϵ , y las condiciones iniales z_0 y θ_0 .

La interfaz ofrece las gráficas del movimiento del péndulo z vs. t , y θ vs. t , y el espacio de coordenadas z vs. θ .

Además, la interfaz ofrece los siguientes resultados: frecuencias naturales, ω_z y ω_θ ; frecuencias propias, ω_1 y ω_2 ; momento de inercia del sistema con respecto al eje z , I ; distancia de los deslizadores al eje z para obtener resonancia, d_r ; posición inicial del movimiento en z , con el valor dado de θ_0 , para reproducir experimentalmente el MN1, z_{01} , y el MN2, z_{02} ; valor máximo de la constante de acoplamiento dado que, por razones físicas, su

valor está acotado, $\epsilon_{max} = 2\sqrt{k\delta}$; parámetro adimensional que mide el grado de acoplamiento, ξ ; junto con otros resultados experimentales [1, 2].

Sorprendentemente, la geometría nos ofrece, con ayuda de la escuadra y el cartabón, el valor de la constante de acoplamiento: $\epsilon^2 = (H^2 - h^2)4mI\phi^2$, donde ϕ es el diámetro de la circunferencia de Wilberforce; y H y h , respectivamente, las alturas respecto a las hipotenusas de los triángulos natural (rojo) y propio (azul), inscritos en la circunferencia de Wilberforce.

17- Para una posición de los deslizadores $d \neq d_r$, simule el movimiento del péndulo y reproduzca experimentalmente.

18- Para esta posición de los deslizadores, intente reproducir experimentalmente uno cualquiera de los modos normales.

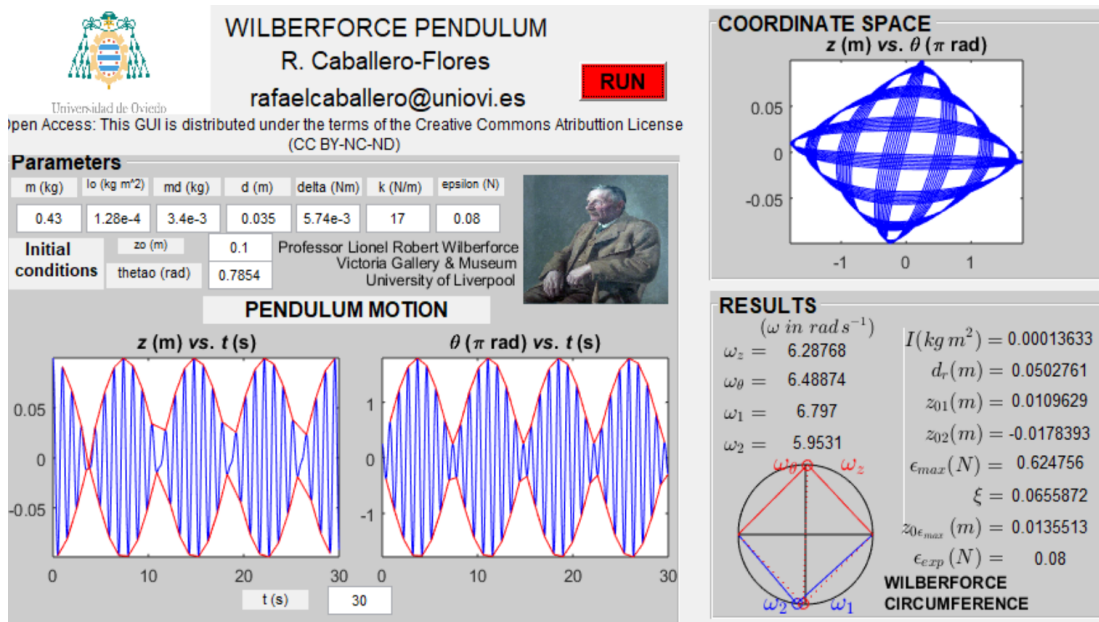
Puede generar los espacios de fase \dot{z} vs. z , y $\dot{\theta}$ vs. θ ; y el espacio de momentos \dot{z} vs. $\dot{\theta}$, también analíticamente. Para ello, descárguese la interfaz gráfica GUI2.

19- Simule los espacios de fase y el espacio de momento de los fenómenos de resonancia y modos normales que ha reproducido experimentalmente.

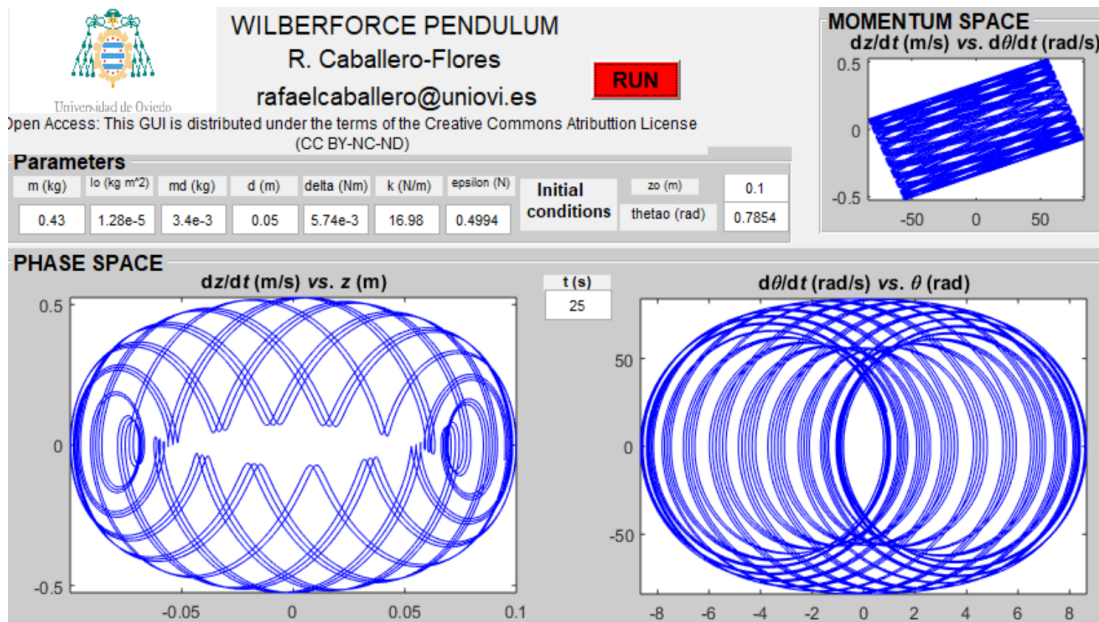
Determinación de la constante de amortiguamiento

El modelo de un oscilador armónico desacoplado sometido exclusivamente a la fuerza restauradora no es realista pues no tiene en cuenta la fuerza de rozamiento que ejerce el aire.

La experiencia nos muestra que el oscilador se va frenando progresivamente hasta detenerse en la posición de equilibrio, lo que nos indica que la fuerza de rozamiento se opone a su movimiento.



GUI1: Estudio analítico y geométrico del péndulo del Wilberforce. Puede acceder a la interfaz [aquí](#).



GUI2: Espacio de fase y de momentos del péndulo del Wilberforce. Puede acceder a la interfaz [aquí](#).

Llegados a este punto, debemos preguntarnos cómo actúa la fuerza de rozamiento que ejerce el aire sobre cada uno de los grados de libertad. ¿Existe un valor de la constante de amortiguamiento β_z para el grado de libertad longitudinal, y otro β_θ para el torsional? De ser así, ¿es posible que una vez hagamos oscilar el péndulo, éste

deje de rotar y siga desplazándose, o viceversa?

20-. Para responder a la pregunta anterior, ponga a oscilar el péndulo en la situación de resonancia y con las condiciones iniciales del MN1r. Observe los registros $|\dot{\theta}(t)_{MN1r}|$ vs. t , y $z(t)_{MN1r}$ vs. t , hasta que el péndulo se pare.

21-. A partir del registro del movimiento $z(t)$ del oscilador débilmente amortiguado:

$$z(t)_{MN1r} = z_{01}^{(r)} e^{-\beta t} \cos(\Omega_1 t), \quad (26)$$

que corresponde a un movimiento “armónico” de amplitud variable que decae exponencialmente $A(t) = z_{01}^{(r)} e^{-\beta t}$, y frecuencia angular:

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \beta^2}, \quad (27)$$

determine el valor de β mediante una representación semilogarítmica⁹.

Referencias

- [1] R. CABALLERO FLORES, V. M. DE LA PRIDA PIDAL, *Resolución analítica del péndulo de Wilberforce*. Revista Española de Física, 33–2 (2019).
- [2] R. CABALLERO FLORES, V. M. DE LA PRIDA PIDAL, *Resolución geométrica del péndulo de Wilberforce*. Revista Española de Física, 33–3 (2019).

⁹ Consulte la práctica *Determinación de la constante de amoriguamiento para distintas geometrías*.