

# Espacio de vacíos en teorías con duales holográficos

ANTONIO MÁRQUEZ GARCÍA

Máster en Física Avanzada



Universidad de Oviedo

Supervisado por  
CARLOS HOYOS BADAJOZ



# Resumen

En este trabajo se va a emplear la correspondencia AdS/CFT para estudiar el comportamiento dinámico de un conjunto de D3-branas en distintas soluciones de supergravedad.

El enfoque que se tomará para ello parte de la descripción de los dos marcos teóricos relacionados por la dualidad de Maldacena [1]: el de la teoría gauge  $\mathcal{N} = 4$  SYM, prestando especial atención al espacio de moduli asociado a la misma; y el de la teoría de supergravedad en una geometría  $AdS_5 \times S^5$ . Tras la descripción de estos dos tipos de teoría y de la correspondencia que los relaciona, se analizará el comportamiento de  $N$  D3-branas colocadas en un espacio AdS. La correspondencia AdS/CFT permitirá en el análisis relacionar este comportamiento con el espacio de moduli de la teoría dual.

En el trabajo se pretenderá usar analizar de manera análoga el comportamiento de las branas en una solución de supergravedad distinta concreta: la solución GPPZ. Esta solución será descrita en detalle, así como su teoría gauge dual  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM. Se prestará especial atención a lo que ocurre en la singularidad descrita por este tipo de solución, y se tratará de interpretar mediante branas cuando sea posible.

Se incluye, por último, una discusión sobre los resultados obtenidos en los análisis, comparándolos con otras publicaciones en las que se realizan estudios similares.

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El espacio de moduli de la teoría gauge</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción a la ruptura espontánea de simetría. . . . .	3
2.1.1. Simetría discreta. . . . .	3
2.1.2. Simetría continua. . . . .	4
2.1.3. Degeneración de los estados de vacío. . . . .	5
2.2. La ruptura espontánea de simetría en una teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills. . .	6
2.2.1. Descripción de la teoría y sus simetrías. . . . .	6
2.2.2. El espacio de moduli clásico y la ruptura espontánea de simetría. . . .	8
<b>3. Branas y campos en supergravedad</b>	<b>10</b>
3.1. Introducción a la teoría de cuerdas. . . . .	10
3.1.1. Características de una teoría de cuerdas. . . . .	11
3.1.2. Teoría de cuerdas cerradas. . . . .	13
3.1.3. Teoría de cuerdas en espaciotiempos no triviales. . . . .	14
3.2. La teoría de supercuerdas. . . . .	15
3.2.1. Características de las supercuerdas abiertas o cerradas. . . . .	15
3.2.2. Supercuerdas abiertas. . . . .	16
3.2.3. Supercuerdas cerradas. . . . .	18
3.2.4. Distintos tipos de teoría de supercuerdas. . . . .	18
3.3. Teoría no perturbativa. . . . .	19

3.3.1.	Estados no perturbativos de $p$ -branas. . . . .	19
3.3.2.	Dualidad en la teoría de cuerdas. . . . .	21
3.4.	Las D-branas. . . . .	24
3.4.1.	El worldvolume de la D-brana. . . . .	25
3.4.2.	$Dp$ -branas en teorías de tipo IIB. . . . .	26
3.4.3.	Algunos usos de las D-branas en teorías de cuerdas. . . . .	27
<b>4.</b>	<b>La correspondencia AdS/CFT</b>	<b>29</b>
4.1.	La dualidad de Maldacena. . . . .	29
4.2.	Validez de la correspondencia. . . . .	34
4.2.1.	Técnicas de localización en la teoría de campos. . . . .	35
4.3.	Relación entre los operadores de la teoría gauge y los campos de la teoría de gravedad. . . . .	40
4.4.	La correspondencia en el espectro. . . . .	42
<b>5.</b>	<b>D3-branas en un espacio Anti-de Sitter</b>	<b>44</b>
5.1.	Comportamiento de las $N$ D3-branas. . . . .	45
5.2.	Separación de una brana de prueba. . . . .	47
5.3.	Consecuencias de la separación de la brana en el espacio de moduli. . . . .	51
<b>6.</b>	<b>La solución GPPZ</b>	<b>55</b>
6.1.	La teoría de campos $\mathcal{N} = 1$ SYM. . . . .	55
6.1.1.	El condensado de gluinos y el espacio de moduli discreto. . . . .	55
6.2.	La teoría de campos $\mathcal{N} = 1^*$ SYM. . . . .	57
6.2.1.	El espacio de moduli de la teoría. . . . .	58
6.3.	La solución de supergravedad. . . . .	59
6.3.1.	La solución GPPZ en 5 dimensiones. . . . .	59
6.3.2.	Descripción de los vacíos mediante 5-branas. . . . .	61
6.3.3.	La solución de supergravedad truncada a 4 campos escalares y las ecuaciones BPS. . . . .	63
6.3.4.	El uplift a 10 dimensiones de la solución GPPZ. . . . .	65
<b>7.</b>	<b>D3-branas en el uplift de la solución GPPZ</b>	<b>69</b>

7.1. Acción de la brana de prueba. . . . .	69
7.2. La singularidad de la solución. . . . .	71
7.2.1. Singularidad en $ \lambda  < 1$ . . . . .	71
7.2.2. Singularidad en $ \lambda  = 1$ . . . . .	76
7.3. La forma del potencial. . . . .	78
7.3.1. Límite $t \rightarrow 0$ . . . . .	79
7.3.2. Valores $ \lambda  < 1$ . . . . .	79
7.3.3. Valor $ \lambda  = 1$ . . . . .	82
7.4. El espacio de moduli y la separación de la brana. . . . .	88
<b>8. Conclusiones</b>	<b>92</b>
<b>A. La cuantización de la cuerda bosónica</b>	<b>94</b>
A.1. Las restricciones de Virasoro. . . . .	94
A.2. El espectro de la cuerda en el espacio de Minkowski. . . . .	95

# Capítulo 1

## Introducción

*I used to think that information was destroyed in black holes. But the AdS/CFT correspondence led me to change my mind. This was my biggest blunder, or at least my biggest blunder in science.*

---

Stephen Hawking

En la actualidad, para poder describir de forma microscópica la naturaleza, es necesario emplear la *Teoría Cuántica de Campos*. Este tipo de teoría combina tres de los temas más populares en la física moderna: la teoría cuántica, el concepto de campo y el principio de la relatividad. El concepto de *átomo* empleado en los años 200-100 a.C. en la Antigua Grecia para describir los bloques de construcción más básicos del universo ha evolucionado hasta el concepto de *partículas y fuerzas fundamentales* que se describen en el *Modelo Estándar* desarrollado en el siglo XX. A estas partículas se les describe como excitaciones de algún campo, se les atribuye una forma puntual y se observa como interaccionan localmente con otras partículas.

Sin embargo, a pesar de que la Teoría Cuántica de Campos es capaz de describir la naturaleza en las escalas energéticas que somos capaces de observar, se piensa que aparecerán nuevos elementos al considerar distancias mucho menores, en la escala de Planck (o, equivalentemente, energías mucho mayores). Esto se debe a que los efectos gravitatorios cuánticos cobrarán una mayor importancia a esta escala. La gravedad no se ha podido cuantizar mediante los métodos perturbativos usuales; sin embargo, es posible incorporar gravedad cuántica en este tipo de teorías abandonando el concepto de partícula puntual, para considerar en su lugar que los objetos fundamentales de la teoría se encuentran extendidos a lo largo de una dimensión y se pueden denominar, por lo tanto, como *cuerdas*.

En 1974, 't Hooft propuso una serie de *teorías gauge* confinantes, cuyo color es descrito mediante el grupo de simetría  $U(N)$ , que se pueden reformular en el límite  $N \rightarrow \infty$  como teorías de cuerdas [2]. Más adelante, en 1998, Maldacena propuso una *dualidad* similar, pero que relacionaba teorías gauge *conformes* con  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías con teorías de cuerdas de

tipo IIB en espacios con geometría  $AdS_5 \times S^5$  [1] (dualidad que se conoce como *correspondencia AdS/CFT*). A partir de esta correspondencia, es posible obtener de nuevo una teoría gauge confinante mediante procesos como los descritos por Polchinski y Strassler en el año 2000 [3], que planteaban perturbaciones en la teoría conforme que nacen al añadir términos de masa que se mantienen invariantes bajo menos supersimetrías (o incluso bajo ninguna).

Mediante la dualidad de Maldacena se pueden asociar los cálculos de la teoría de cuerdas en su régimen perturbativo a otros cálculos en una teoría gauge no perturbativa, que en caso contrario serían difíciles de obtener. Esto permitirá caracterizar el *espacio de moduli* que se obtiene en distintas teorías gauge en su régimen de acoplamientos fuertes a partir de su relación con los estados de *Dp-branas* de la teoría de supergravedad dual. Además de esto, se piensa que el recíproco de la asociación anterior es cierto: se pueden relacionar teorías de cuerdas no perturbativas con un determinado fondo gravitacional, que a priori son difíciles de estudiar, con teorías gauge perturbativas.

En este trabajo se va a presentar, en primer lugar, las distintas teorías que se relacionan mediante la correspondencia AdS/CFT. En el capítulo 2 se describe el concepto de espacio de moduli y se introduce la teoría gauge  $\mathcal{N} = 4$  SYM, definiendo cada uno de los campos que la componen y observando sus principales características. Posteriormente se atenderá a la teoría de supergravedad en el capítulo 3, en el cual se introduce la teoría de supercuerdas. Habrá una descripción previa de la teoría que la precede, la teoría de cuerdas bosónicas; y también se presentarán los estados no perturbativos de la teoría de supercuerdas, que pueden ser descritos mediante branas de forma semiclásica, y que serán los que permitan un estudio más detallado de la teoría gauge dual a partir de la dualidad de Maldacena.

Esta dualidad se describe en el capítulo 4, y se presentará también la manera en la que se pueden relacionar los operadores de la teoría gauge con los campos de su teoría dual. Será importante también el estudio en esta misma parte sobre los límites de validez de la correspondencia, la cual será empleada de manera explícita en el capítulo 5, y permitirá observar como el comportamiento dinámico de un conjunto de  $N$  branas colocadas en un espacio AdS determina el espacio de moduli de la teoría conforme dual.

A continuación se pretenderá realizar un estudio análogo, pero asociado a  $N$  branas colocadas en el uplift de una solución concreta de supergravedad: la solución GPPZ [4]. El capítulo 6 tiene como objetivo describir esta solución, que originalmente fue propuesta en 5 dimensiones, y plantear su uplift hasta las 10 dimensiones en las que se puede emplear la teoría de supercuerdas. De la misma manera, se pretende introducir en el capítulo su teoría gauge dual, la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM.

En el capítulo 7 se detallará la relación entre las branas colocadas en este tipo de solución y el espacio de moduli correspondiente. A pesar de presentar un análisis similar al del capítulo 5, se podrá observar como el comportamiento dinámico de las branas es fundamentalmente distinto en cada caso.

El trabajo concluye con una serie de conclusiones en el capítulo 8 en las que se resumen los resultados que se han obtenido y se comparan con los resultados presentados en referencias bibliográficas íntimamente relacionadas con el trabajo.



## Capítulo 2

# El espacio de moduli de la teoría gauge

Una de las teorías que se referencian en la correspondencia de Maldacena es la teoría gauge conforme  $\mathcal{N} = 4$  SYM. La descripción de esta teoría será uno de los objetivos del capítulo, insistiendo además en la relevancia de las simetrías que existen en una teoría gauge, y en la definición del espacio de vacíos que caracterice la teoría.

### 2.1. Introducción a la ruptura espontánea de simetría.

Las leyes de la naturaleza podrían tener una serie de simetrías internas que no resultan aparentes debido a que el estado de vacío de la teoría que las describe no es invariante bajo dichas simetrías. Este concepto se conoce por *ruptura espontánea de simetría*, y resulta clave en el estudio de la Teoría Cuántica de Campos.

#### 2.1.1. Simetría discreta.

Un ejemplo clásico y sencillo se obtiene al considerar el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_a\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (2.1)$$

donde el subíndice  $a$  recorre  $a = 0, \dots, 3$ , y el parámetro  $\mu$  está relacionado con la masa de la forma  $m^2 = -\mu^2$ .

La simetría del lagrangiano, en este caso, es discreta: hay una invariancia al tomar  $\phi \rightarrow -\phi$ . El hamiltoniano correspondiente es el siguiente:

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right]. \quad (2.2)$$

La configuración clásica de menor energía se obtiene cuando el campo  $\phi$  es uniforme,  $\phi(x) = \phi_0$ , donde  $\phi_0$  es aquel valor que minimice el siguiente potencial:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (2.3)$$

Este potencial, representado en la figura 2.1, tiene dos mínimos que están situados en  $\phi_0 = \pm v = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ . A la constante  $v$  se le denomina como el *valor esperado de vacío* de  $\phi$ .

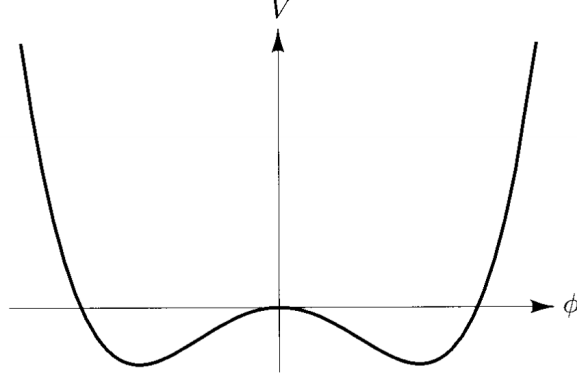


Figura 2.1: Forma del potencial  $V$  descrito en la ecuación (2.3).

La física que describe el sistema al situarse alrededor de uno de sus mínimos será la misma, sin importar cuál se ha escogido; sin embargo, esta selección provocará una ruptura de la simetría interna. Suponiendo que el sistema está situado alrededor del mínimo  $\phi_0 = v$ , resulta conveniente reescribir el lagrangiano en función de campos de la forma  $\phi(x) = v + \sigma(x)$ , de forma que  $\sigma(x)$  toma valores pequeños, obteniéndose así la expresión:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_a\sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4. \quad (2.4)$$

En este lagrangiano ya no se puede observar una simetría  $\phi \rightarrow -\phi$  como en el caso anterior: ha habido una ruptura espontánea de la misma.

### 2.1.2. Simetría continua.

Un lagrangiano con simetría continua también puede sufrir una ruptura espontánea de simetría. Un ejemplo análogo al discreto se obtiene al considerar un lagrangiano con  $N$  campos escalares de la forma:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2}(\partial_a\phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2 \right). \quad (2.5)$$

En este caso, el lagrangiano resulta invariante bajo transformaciones de la forma  $\phi^i \rightarrow R^{ij}\phi^j$ , donde  $R$  es una matriz ortogonal  $N \times N$  (es decir, es invariante bajo el *grupo ortogonal*  $O(N)$ ).

De nuevo, la configuración clásica de menor energía se obtiene al tomar un campo escalar uniforme  $\phi_0^i$ , cuyo valor minimiza el siguiente potencial (representado en la figura 2.2):

$$V(\phi^i) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2. \quad (2.6)$$

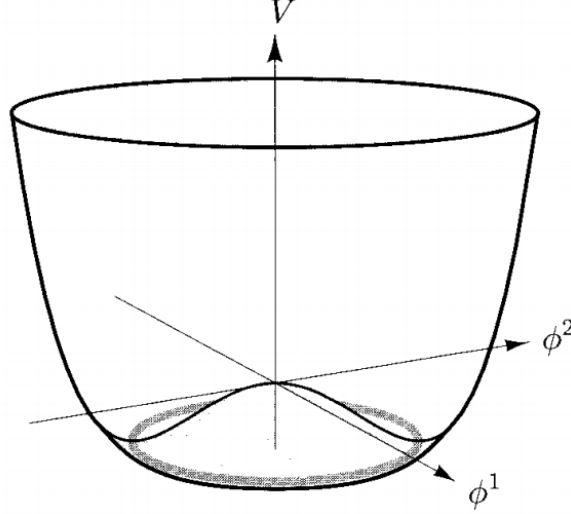


Figura 2.2: Forma del potencial  $V$  descrito en la ecuación (2.6), al considerar  $N = 2$  campos escalares. La región sombreada se corresponde con el espacio de moduli.

La expresión toma valores mínimos cuando se cumple  $(\phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$ ; esto determina la longitud (o módulo) de  $\phi_0^i$ , pero no su dirección. A este conjunto de valores se le conoce por *espacio de vacíos* o *espacio de moduli* de la teoría.

Al reescribir el lagrangiano alrededor de un mínimo situado en la dirección escogida se pierde la simetría inicial  $O(N)$ , obteniéndose en este caso una invariancia bajo el grupo  $O(N - 1)$ . El nuevo lagrangiano incluirá un campo masivo junto con un conjunto de  $N - 1$  campos sin masa invariantes bajo el grupo  $SO(N)/SO(N - 1) \sim \mathbb{S}^{N-1}$ , es decir, bajo las direcciones angulares del espacio  $\mathbb{R}^N$  que parametrizan los campos  $\phi^i$ .

La generación de partículas sin masa en un sistema donde se rompió una simetría continua espontáneamente es el suceso que predice el *Teorema de Goldstone*. Dichas partículas se conocen como *bosones de Goldstone*.

### 2.1.3. Degeneración de los estados de vacío.

En los dos tipos de ruptura que se han introducido en esta sección se ha podido observar una degeneración en los estados de vacío de la teoría cuántica. A continuación se va a mostrar como este hecho se relaciona con la existencia de simetrías en el hamiltoniano de la teoría.

Considérese que el hamiltoniano de la teoría es  $H$  y que la teoría permanece invariante bajo una simetría cuyo operador asociado es  $S$ . En esta situación, al efectuar una transformación

de semejanza en el hamiltoniano mediante el operador  $S$ , no habrá ninguna variación:

$$SHS^\dagger = H. \quad (2.7)$$

Debido a que  $S$  es un operador asociado a una simetría, se tratará de un operador unitario:  $S^\dagger = S^{-1}$ . Recuérdese, por ejemplo, el caso continuo discutido anteriormente cuyas matrices asociadas a la simetría pertenecían al grupo  $O(N)$  y, por tanto, eran reales y ortogonales.

Esto causa que el hamiltoniano conmute con la simetría:

$$H = SHS^\dagger = SHS^{-1} \implies HS = SH. \quad (2.8)$$

Así, al considerar un estado de vacío de la teoría  $|0\rangle$  con energía  $E_0$ , se puede obtener un estado con la misma energía,  $S|0\rangle$ :

$$HS|0\rangle = SH|0\rangle = SE_0|0\rangle = E_0S|0\rangle. \quad (2.9)$$

Los nuevos estados de vacío que se obtienen mediante cada operador de simetría pueden ser linealmente independientes del primero, formando así todo un espacio de estados de vacío degenerados.

## 2.2. La ruptura espontánea de simetría en una teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills.

En la teoría SYM con  $\mathcal{N} = 4$  supercargas se puede producir una ruptura espontánea de su simetría continua, de manera similar a lo que ocurría en la teoría cuyo lagrangiano venía representado por la expresión (2.5).

En esta sección se estudia dicha ruptura de manera análoga. En primer lugar, se atienden a las simetrías de la teoría; posteriormente se atiende al espacio de moduli que minimiza el potencial correspondiente; y, por último, se discuten las consecuencias al seleccionar un valor esperado de vacío de los campos.

### 2.2.1. Descripción de la teoría y sus simetrías.

Una teoría de Yang-Mills es una teoría gauge invariante bajo algún grupo de simetría que trata de describir el comportamiento de las partículas elementales a partir de grupos de Lie no abelianos.

La teoría de Yang-Mills supersimétrica (*Super Yang-Mills*, SYM) contempla la existencia de supersimetrías en el modelo de Yang-Mills. En particular, el lagrangiano para la teoría de dimensión 4 con 4 supersimetrías ( $\mathcal{N} = 4$ ) invariante bajo el grupo especial unitario,  $SU(N)$ ,

es único y puede expresarse de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \text{Tr} \left\{ -\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_a i \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a - \sum_i D_\mu X^i D^\mu X^i \right. \\ \left. + \sum_{a,b,i} g C_i^{ab} \lambda_a [X^i, \lambda_b] + \sum_{a,b,i} g \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [X^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g^2}{2} \sum_{i,j} [X^i, X^j]^2 \right\}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

En el lagrangiano descrito anteriormente, aparece el acoplamiento gauge representado por  $g$ , el ángulo del instantón representado por  $\theta_I$  y las matrices de Pauli representadas por  $\sigma^\mu$ , donde el índice recorre los valores  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Además, se reflejan los componentes del *multiplete gauge*  $\mathcal{N} = 4$ :

- Seis escalares reales (hermíticos),  $X^i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). En la teoría invariante bajo el grupo  $SU(N)$ , estos escalares son matrices  $N \times N$  que pueden ser agrupados en combinaciones complejas  $\phi^A = (X^A + iX^{A+3})/\sqrt{2}$ , con  $A = 1, 2, 3$ , formando parte de supermultipletes quirales que aparecen de manera holomorfa en el superpotencial (es decir, sin que dependa del hermítico conjugado de ninguno de ellos) [7].
- Cuatro fermiones de Weyl de quiralidad izquierda,  $\lambda_\alpha^a$  ( $a = 1, \dots, 4$ ,  $\alpha = 1, 2$ ).
- El campo de gauge  $A_\mu$ .

A partir del campo  $A_\mu$  se puede construir  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$ : la *fuerza del campo*. Por otra parte,  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$  es el *dual Poincaré* de  $F$ . De la misma manera,  $D_\mu$  denota la *derivada covariante* y sigue la expresión  $D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i[A_\mu, \lambda]$ .

Las constantes  $C_i^{ab}$  y  $C_{iab}$  están relacionadas con las matrices de Clifford Dirac para  $SO(6)_R \sim SU(4)_R$  [8]. En este grupo se representan las simetrías internas que permiten rotar las supercargas (*R-simetrías*) así como los campos fermiónicos y escalares sin variar la teoría.

La supersimetría de Poincaré  $\mathcal{N} = 4$  que caracteriza el lagrangiano tiene las leyes de transformación:

$$\begin{aligned} \delta X^i &= [Q_\alpha^a, X^i] = C^{iab} \lambda_{\alpha b}, \\ \delta \lambda_b &= \{Q_\alpha^a, \lambda_{\beta b}\} = F_{\mu\nu}^+ (\sigma^{\mu\nu})^\alpha_\beta \delta_b^a + [X^i, X^j] \epsilon_{\alpha\beta} (C_{ij})^a_b, \\ \delta \bar{\lambda}_\beta^b &= \{Q_\alpha^a, \bar{\lambda}_\beta^b\} = C_i^{ab} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu D_\mu X^i, \\ \delta A_\mu &= [Q_\alpha^a, A_\mu] = (\sigma_\mu)_\alpha^\beta \bar{\lambda}_\beta^a. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Los términos  $Q_\alpha^a$  son espinores de Weyl de quiralidad izquierda que representan la supercarga de espinor. La notación del espinor en dos componentes se relaciona con la notación del espinor de Dirac en 4 componentes de la manera:

$$Q^a = \begin{pmatrix} Q_\alpha^a \\ \bar{Q}_a^\alpha \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Por otra parte, las matrices  $\sigma^{\mu\nu}$  se definen por  $\sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ , y las constantes  $(C_{ij})^a_b$  que aparecen estarán relacionadas con formas bilineales de Clifford Dirac para  $SO(6)_R$  [8].

Dado que el lagrangiano es invariante Poincaré e invariante de escala (debido a que todos sus componentes tienen dimensión 4), tiene una mayor simetría conforme [9] que se ve representada por el grupo  $SO(2, 4) \sim SU(2, 2)$ . Más aún, el grupo que representa la supersimetría  $\mathcal{N} = 4$  Poincaré y las simetrías internas que rotan las supercargas es  $SU(2, 2) \times SU(4)_R$ ; dicho grupo constituye la parte bosónica del supergrupo  $SU(2, 2|4)$  que representa la simetría superconforme de la que se dispone. La teoría es también invariante de escala a un nivel cuántico y el supergrupo  $SU(2, 2|4)$  es una simetría a dicho nivel.

Además, la *dualidad de Montonen-Olive* o *S-dualidad* indica que existe una simetría global de la teoría. Para poder observarla es habitual combinar el acoplamiento  $g$  y el ángulo del instantón  $\theta_I$  en un único acoplamiento complejo:

$$\tau \equiv \frac{\theta_I}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}. \quad (2.13)$$

La teoría cuántica es invariante bajo transformaciones de la forma  $\theta_I \rightarrow \theta_I + 2\pi$  (o de la forma  $\tau \rightarrow \tau + 1$ ). Los físicos Montonen y Olive propusieron en 1977 que también hay una invariancia bajo  $\tau \rightarrow -1/\tau$  [10], como fue comprobado para la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM en 1995 [11]. Al combinar ambas simetrías, se obtiene el grupo S-dualidad  $SL(2, \mathbb{Z})$  generado por:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \quad (2.14)$$

### 2.2.2. El espacio de moduli clásico y la ruptura espontánea de simetría.

El comportamiento dinámico de la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM puede ser analizado a partir de su término de energía potencial,

$$-g^2 \sum_{i,j} \int \text{Tr}[X^i, X^j]^2. \quad (2.15)$$

Debido a que el álgebra gauge está asociada al grupo especial unitario, el cual es compacto [12], cada término de la suma anterior será positivo o nulo. Por lo tanto, si el potencial se anula, se obtiene un mínimo energético que se corresponde con el estado de vacío. Para ello, es necesario que ocurra:

$$[X^i, X^j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad (2.16)$$

Hay dos clases principales de soluciones para esta ecuación:

- La *fase superconforme*, en la cual  $\langle X^i \rangle = 0$  para cada  $i = 1, \dots, 6$ . En esta fase no hay una ruptura espontánea de la simetría gauge de los estados físicos y los operadores, los cuales transforman bajo representaciones unitarias de  $SU(2, 2|4)$ .
- La *fase de ruptura espontánea* o de *Coulomb*, en la cual existe algún  $i$  tal que  $\langle X^i \rangle \neq 0$ . Es el caso en el que los campos escalares se sitúan en un punto concreto del espacio de moduli distinto al origen, por lo que aparecerá una escala energética en la teoría y se provocará una ruptura espontánea de las  $R$ -simetrías y de la simetría superconforme. En esta fase se generarán bosones de Goldstone asociados a dicha ruptura espontánea.

En el último tipo de solución, las direcciones sobre las cuales el campo escalar cumple  $\langle X^i \rangle \neq 0$  serán las que conforman el espacio de moduli. Se puede dar una descripción invariante gauge en función de los valores esperados de los polinomios que son invariantes gauge en los campos.

Debido a que dos matrices semejantes determinan álgebras de Lie isomorfas [13], el espacio de moduli parametrizado por las seis matrices  $X^i$  será isomorfo al parametrizado por las matrices diagonales a las que son semejantes a cada uno de los campos escalares. La diagonal de estas últimas está compuesta por los valores propios de cada campo  $X^i$ , respectivamente. Esto permite afirmar que, debido a que cada una de las matrices es de tamaño  $N \times N$ , el espacio de moduli será a lo sumo isomorfo a  $\mathbb{R}^{6N}$ .

Hay que notar que dos matrices que tienen los mismos valores propios van a ser semejantes: esto implica que dos matrices diagonales que tienen los mismos valores en la diagonal serán semejantes también, independientemente de como se ordenen los mismos, produciendo así álgebras de Lie isomorfas. Esta observación reduce el espacio de moduli a un cociente de  $\mathbb{R}^{6N}$  sobre las simetrías discretas que permutan los valores propios de cada matriz.

Hay otro tipo de simetrías que reducen aún más el espacio: las  $R$ -simetrías. Una matriz  $O^{ij} \in SO(6)$  actúa de la forma  $X^i \rightarrow O^{ij} X^j$ , llevando a un punto del espacio de moduli  $X^i$  a otro punto del mismo que resulta físicamente inequivalente (situado a la misma distancia del origen del espacio). Este tipo de simetría es continua.

Dos espacios de moduli clásicos con un valor esperado del campo escalar no nulo distinto son físicamente inequivalentes. Esto se debe, por ejemplo, a que la masa de los bosones masivos generados al romperse la simetría será distinta en ambas teorías. Por lo tanto, una degeneración en el espacio de moduli clásico es accidental y podría no observarse en el estudio cuántico, con la excepción de que los valores esperados no nulos estén relacionados mediante una simetría como las descritas anteriormente. Si el espacio de moduli fuese isomorfo a una 5-esfera o un cociente de la misma<sup>1</sup>, la existencia de  $R$ -simetrías permitiría afirmar que no habrán correcciones cuánticas en ningún caso; sin embargo, el espacio de moduli es mayor y para evitar dichas correcciones es necesario que hayan simetrías adicionales. En este caso, las supersimetrías del modelo serán las que permitan proteger el espacio de moduli, que es isomorfo a un cociente de  $\mathbb{R}^{6N}$ , de posibles correcciones cuánticas.

Un ejemplo de operador sencillo que parametriza el espacio de moduli es el operador quiral primario  $\mathcal{Q}_{20'}^{(ij)} = \text{Tr} \left( X^i X^j - \frac{\delta^{ij}}{6} X^k X^k \right)$ , el cual hace referencia en su subíndice a que pertenece a la representación  $\mathbf{20}'$  del supergrupo  $SU(4)$  y es el componente de menor energía del multiplete de supercorriente  $\mathcal{N} = 4$ . Otro operador relevante, en este caso como componente de menor energía del multiplete de Konishi  $\mathcal{N} = 4$  del supergrupo  $SU(2, 2|4)$ , es el operador  $\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 : \text{Tr} (X^i X^i) :$ , donde el símbolo  $::$  denota la ordenación normal [14].

---

<sup>1</sup>Este sería el caso de una teoría cuyo lagrangiano resultase invariante bajo el grupo  $O(N)$ , como la descrita en la sección 2.1.2. Esta última describe un espacio de moduli isomorfo a una  $N$ -esfera.

## Capítulo 3

# Branas y campos en supergravedad

La teoría dual que se pretende asociar a la teoría gauge descrita en el capítulo 3 es una teoría de supercuerdas. Este capítulo tiene como objetivo describir este último tipo de teoría y los campos que aparecen en ella, introduciendo previamente la teoría de cuerdas bosónicas cuyo modelo será modificado considerando supersimetría en el mismo para poder evitar las limitaciones que se observan.

El concepto de brana aparecerá descrito también en este capítulo como un estado no perturbativo de la teoría de supergravedad ( $p$ -branas) y como un hiperplano en un espacio plano donde se sitúa el extremo de una cuerda abierta (D-branas).

### 3.1. Introducción a la teoría de cuerdas.

La idea principal a partir de la cual se desarrolla la teoría de cuerdas, es que las partículas elementales no son objetos puntuales, sino que se extienden a lo largo de una dimensión (y por ello son referidos como *cuerdas*). Estas cuerdas pueden ser tanto abiertas como cerradas, y están caracterizadas por una longitud característica  $L_s = 1/M_s$ . El motivo por el que percibimos las partículas elementales como puntos es que las energías a las que son observadas están por muy debajo de la escala energética  $M_s$  y no hay suficiente resolución para poder percibir su extensión espacial.

Los distintos modos de vibración de las cuerdas son percibidos como partículas completamente distintas, con números cuánticos y simetrías diferentes entre ellas. El número de modos de oscilación excitados se relaciona con la masa de la partícula, lo que permite definir una cantidad infinita de partículas con diferencias entre sus masas del orden de  $M_s$  (a menudo referida como torre de partículas). Al tratarse de una escala energética tan grande, las partículas que se pueden observar deben corresponderse con las de orden cero de la torre anterior (el orden más fundamental: *Leading Order*, LO).



### 3.1.1. Características de una teoría de cuerdas.

La superficie que describe una cuerda al moverse en el espaciotiempo, denotada por  $\Sigma$ , se conoce como *worldsheet*. Las cuerdas abiertas describen worldsheets con fronteras (descritas por los extremos de la cuerda en movimiento), al contrario que las cuerdas cerradas.

Cualquier punto de una worldsheet puede ser descrito a partir de dos coordenadas locales:  $t$ , que actúa como coordenada “temporal”; y  $\sigma$ , que parametriza la cuerda en el momento  $t$ . Una función de *embedding*  $X^\mu(\sigma, t)$ , con  $\mu = 0, \dots, d-1$ , permite parametrizar la worldsheet en un espacio de Minkowski de dimensión  $d$ ,  $M_d$  (que se conoce como *espaciotiempo objetivo*):

$$\begin{aligned} X^\mu : \quad \Sigma &\longrightarrow M_d \\ (\sigma, t) &\longrightarrow X^\mu(\sigma, t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

En la figura 3.1 se representa un ejemplo de embedding en un espaciotiempo 3-dimensional de una cuerda abierta y una cuerda cerrada. El área que define la worldsheet sirve a modo de acción que describe la cuerda al moverse en este espaciotiempo; esta idea se refleja en la *acción de Nambu-Goto*, en la cual se hace referencia a la tensión de la cuerda,  $T = M_s^2$ , en su fórmula<sup>1</sup>:

$$S_{NG} = -T \int_{\Sigma} (\partial_t X^\mu \partial_t X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^{1/2} d\sigma dt. \quad (3.2)$$

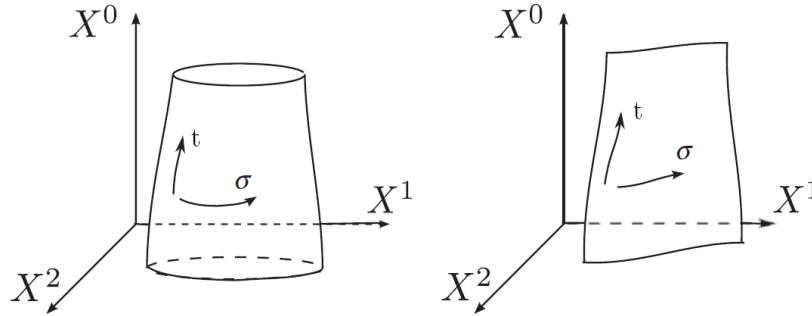


Figura 3.1: Embedding de una cuerda cerrada (izquierda) y una cuerda abierta (derecha) en movimiento en un espaciotiempo de 3 dimensiones. Tomado de [15].

Una acción clásicamente equivalente a la de Nambu-Goto, pero más fácil de cuantizar, es la *acción de Polyakov*:

$$S_P = -\frac{T}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}(\sigma, t) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} d\sigma dt, \quad (3.3)$$

donde aparece la función adicional  $g^{\alpha\beta}(\sigma, t)$  que puede ser interpretada como un campo auxiliar que define una métrica local en la worldsheet. Resulta notable observar que en las acciones definidas anteriormente se mantiene una simetría conforme.

<sup>1</sup>A menudo se encuentra la cantidad  $\alpha' = l_s^2$  en esta definición, relacionada con la tensión de la cuerda de la forma  $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ .

La suma de todas las worldsheets que pueden interpolarse entre dos configuraciones energéticas de una cuerda (que se corresponde con una integral de caminos) permite obtener la amplitud cuántica entre dichas configuraciones. Al realizar este cálculo es preciso tener en cuenta las topologías de las que puede disponer la worldsheet: hay que considerar superficies con distinto número de “agujeros” y distinto número de “asas” (en la figura 3.2 se muestran algunas topologías distintas entre dos configuraciones de una cuerda abierta a modo de ejemplo). La expresión que se obtiene es de la forma de la función de correlación:

$$\langle b | \text{evolución} | a \rangle = \sum_{\text{worldsheets}} \int [\mathcal{D}X] e^{-S_p[X]} \mathcal{O}_a[X] \mathcal{O}_b[X], \quad (3.4)$$

donde aparece la acción de Polyakov tras fijar un cierto gauge,  $S_p[X]$ , así como operadores de vértice  $\mathcal{O}_i[X]$  que aportan información sobre los estados inicial ( $a$ ) y final ( $b$ ) de la cuerda.

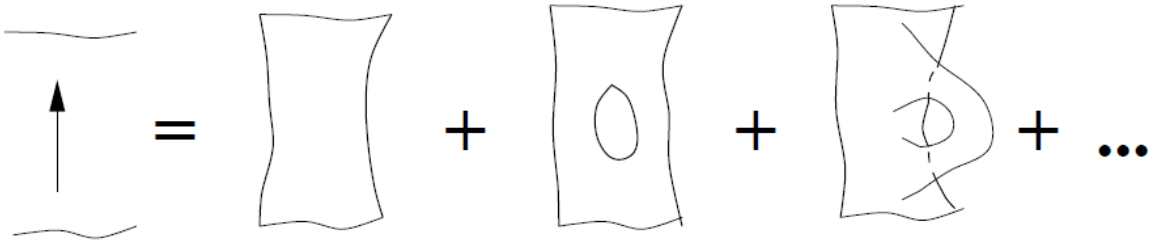


Figura 3.2: Algunas worldsheets interpoladas entre dos configuraciones de una cuerda abierta, cada una de ellas con distintas topologías. La segunda superficie tiene un “agujero” más que la primera, y la tercera superficie tiene un “asa” más que la primera.

Las interacciones más básicas entre cuerdas vienen representadas en la figura 3.3. Se tratan de interacciones que acoplan cuerdas abiertas, dando lugar a una nueva cuerda abierta (figura superior); interacciones análogas entre cuerdas cerradas (figura central); y una última interacción que acopla cuerdas abiertas y cerradas. Esta última interacción debe ser considerada en una teoría de cuerdas abiertas, dado que es uno de los procesos que median el acoplamiento entre tres cuerdas de este tipo. Por este motivo, una teoría de cuerdas abiertas que interactúan debe considerar cuerdas cerradas, mientras que el recíproco no es cierto.

Una ventaja fundamental de la teoría de cuerdas es su consistencia a nivel cuántico. Desde el punto de vista de la Teoría Cuántica de Campos, no existen divergencias en la región ultravioleta (UV) por distintos motivos:

- Las divergencias en esta región aparecen cuando dos vértices de interacción coinciden en el mismo punto del espacio tiempo. En la teoría de cuerdas, se evita esta situación al estar los vértices deslocalizados en toda una región de tamaño  $L_s$ .
- El comportamiento para energías muy altas (muy superiores a  $M_s$ ) en bucles (*loops*) es distinto del descrito en la Teoría Cuántica de Campos para partículas puntuales, en el cual se producen divergencias en la región UV. En la teoría de cuerdas, al intercambiarse estados de una cuerda cuya longitud aumenta con la energía, se observa un comportamiento característico de la región de infrarrojos (IR) de un canal dual de la teoría.

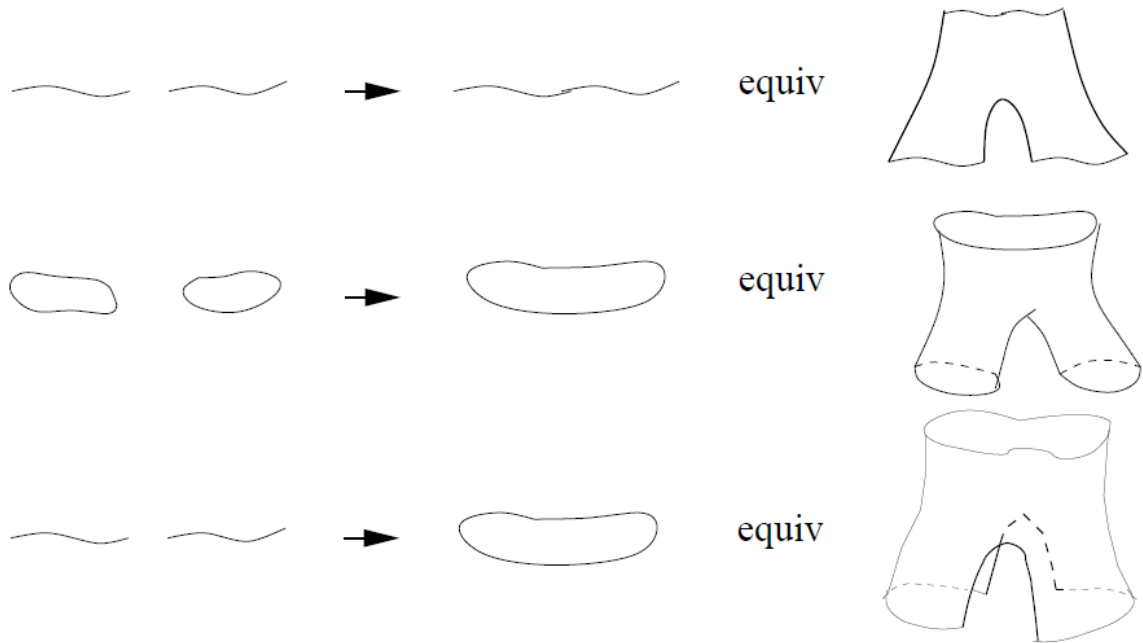


Figura 3.3: Interacciones básicas entre cuerdas. En energías mucho menores que  $M_s$ , las cuerdas son percibidas como puntos y los tres diagramas son equivalentes.

- En particular, la simetría conforme de la worldsheet permite describir cualquier diagrama con vértices muy próximos como un diagrama con los vértices bien separados, conectados por un canal dual arbitrariamente largo.

La simetría conforme de la worldsheet ha resultado una propiedad necesaria para que la teoría resulte consistente. Es necesario, por lo tanto, conservar esta simetría clásica en la teoría cuántica (es decir, evitar que se provoque una *anomalía*). Esto se consigue tomando un número concreto de campos en la teoría, que se corresponden con las  $d$  funciones de embedding descritas al principio de la sección,  $X^\mu$ . La teoría resulta consistente para la elección  $d = 26$ , que a su vez fija la dimensión del espacio de Minkowski en el que se describen las cuerdas en el mismo número. En el apéndice A se detalla el cálculo que permite llegar a esta conclusión, así como la cuantización de la cuerda que se ha descrito.

### 3.1.2. Teoría de cuerdas cerradas.

Los estados de menor energía de una teoría de cuerdas cerrada son los siguientes:

- El *estado fundamental de la cuerda*. Debido a que tiene una masa  $\alpha' M^2 = -2$  (es decir, una masa *taquiónica*, ya que su valor al cuadrado es negativo), se observa que la teoría no es estable: el valor esperado de vacío que trata de alcanzar este campo no estará situado en el mínimo del potencial, el cual podría no existir.
- Un *campo tensorial de rango 2*. Este campo puede descomponerse en su parte simétrica

(el gravitón,  $G_{MN}(X)$ ), su parte antisimétrica (la 2-forma denotada por  $B_{MN}(X)$ ) y su traza (el dilatón,  $\phi(X)$ , un escalar sin masa).

Es posible construir una acción efectiva para estados sin masa de la cuerda que reproduzca las amplitudes de la teoría en energías bajas,  $E \ll M_s$  (al tomar valores cercanos o superiores a  $M_s$ , esta teoría deja de ser una buena aproximación) y que esté bien definida a nivel cuántico. Dicha acción viene expresada de la forma:

$$S_{eff} = \frac{1}{2k_0^2} \int d^{26}X (-G)^{1/2} e^{-2\phi} \left\{ R - \frac{1}{12} H_{MNP} H^{MNP} + 4\partial_M \phi \partial^M \phi \right\} + \mathcal{O}(\alpha'), \quad (3.5)$$

donde  $M, N, P = 0, \dots, 25$  y  $H_{MNP} = \partial_{[M} B_{NP]}$ . Se trata de una acción invariante bajo transformaciones de coordenadas en 26 dimensiones y bajo la invariance gauge:

$$B_{MN}(X) \longrightarrow B_{MN}(X) + \partial_{[M} \Lambda_{N]}(X), \quad (3.6)$$

con  $\Lambda_M(X)$  una 1-forma que actúa como parámetro gauge.

Típicamente, los campos  $\phi$ ,  $G_{MN}$  o  $B_{MN}$  no tienen un potencial en su acción efectiva, por lo que pueden tomar cualquier valor esperado de vacío a priori: esto indica que si son campos constantes formarán parte del espacio de moduli de la teoría.

### 3.1.3. Teoría de cuerdas en espaciotiempos no triviales.

La acción de Polyakov puede generalizarse al considerar un espaciotiempo cuya métrica,  $G_{MN}(X)$ , no es trivial (las funciones de embedding llegan a un espaciotiempo curvo en lugar de  $M_{26}$ ). El modelo que se obtiene, conocido por *modelo sigma no lineal*, depende de los campos  $X(\sigma, t)$  y  $g(\sigma, t)$ , y queda definido por la acción:

$$S_p^G[X, g] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{-g} G_{MN}[X] g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^M \partial_{\beta} X^N d\sigma dt. \quad (3.7)$$

Si además se acoplan a la expresión los campos sin masa observados para la teoría de cuerdas cerradas, se obtiene una nueva expresión:

$$S_p^G[X, g] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \left[ G_{MN}[X] g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^M \partial_{\beta} X^N + B_{MN}[X] \epsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^M \partial_{\beta} X^N + \alpha' R[g] \phi \right] \sqrt{-g} d\sigma dt. \quad (3.8)$$

El término asociado al campo  $G_{MN}$  puede interpretarse como el área de la worldsheet bajo la métrica del espaciotiempo no trivial. Por otra parte, el que se asocia a  $B_{MN}$  es una integral de una 2-forma  $B_2 = B_{MN} dX^M \wedge dX^N$  sobre la worldsheet,  $\int_{\Sigma} B_2$ . Este último término es puramente topológico y se puede interpretar como una carga de la cuerda respecto a  $B_2$ .

La parte de la acción asociada a  $\phi$  actúa como un término de Einstein para la métrica  $g_{\alpha\beta}$  asociada a la worldsheet. Sin embargo, debido a que es una métrica sobre una superficie, añadir este término en el cálculo de una amplitud es equivalente a añadir un factor a la misma

con el valor de  $e^{-\phi\xi}$ , donde  $\xi$  es el número de Euler<sup>2</sup>. Esto muestra como el valor esperado de vacío del dilatón actúa como la constante de acoplamiento de la cuerda.

Al añadir campos no triviales a la acción, estos dejan de ser libres: esto invita a realizar un estudio según la teoría de perturbaciones, tomando como parámetro de expansión  $\alpha'/R^2$  (donde  $R$  es la escala de longitud para la variación de cualquier campo en el espaciotiempo). Requerir que se mantenga la simetría conforme que resulta clave en esta teoría se traduce, en el orden más bajo de la expansión, en que no debe haber dependencia entre la constante de acoplamiento de la cuerda con la escala energética (es decir, la *función beta* se debe anular).

## 3.2. La teoría de supercuerdas.

La teoría de cuerdas descrita en la sección anterior (la teoría de cuerdas *bosónica*) presentaba un estado fundamental de la cuerda con masa taquiónica y no contenía fermiones en su espectro perturbativo. Ambos argumentos pueden ser empleados para indicar que este modelo no representa de manera precisa la realidad; sin embargo, es posible modificar el modelo de manera que se eviten los inconvenientes anteriores.

La teoría de *supercuerdas* está definida por una teoría conforme en dos dimensiones, como la teoría de cuerdas bosónicas a partir de la worldsheet de la cuerda. Sin embargo, la teoría de supercuerdas es una teoría supersimétrica donde aparecen  $d$  campos fermiónicos en la worldsheet,  $\Psi^M(\sigma, t)$ , además de los  $d$  campos bosónicos,  $X^M(\sigma, t)$ , que son sus supercompañeros. De manera análoga, aparece el supercompañero de la métrica  $g_{\alpha\beta}(\sigma, t)$  de la worldsheet que se describía en la acción de Polyakov: el denominado *gravitino* de la worldsheet.

Los campos  $\Psi^\mu$  descritos son fermiones en la worldsheet, es decir, en la teoría de campos para 2 dimensiones definida sobre la superficie. Sin embargo, estos campos transforman como bosones en el espaciotiempo, por lo que la existencia de fermiones en la teoría de  $d$  dimensiones no se obtiene de manera directa mediante estos campos. Algo análogo ocurre con la supersimetría de la worldsheet, la cual no implica de manera directa que existirán supercompañeros de las partículas definidas en el espectro del espaciotiempo.

### 3.2.1. Características de las supercuerdas abiertas o cerradas.

El efecto que tienen los fermiones de la worldsheet en la acción de Polyakov, definida según (3.7), se refleja en su expresión añadiendo un nuevo término asociado al supercompañero de la posición de la cuerda en la worldsheet  $X^M$ , denotado por  $\Psi^M$ :

$$S_p^G = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{-g} G_{MN}[X] g^{\alpha\beta} \left( \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N + i \bar{\Psi}^M \gamma_\alpha \partial_\beta \Psi^N \right) d\sigma dt. \quad (3.9)$$

Los espinores  $\Psi^M$  de la worldsheet pueden ser tratados como espinores de Majorana, con una forma  $\Psi^M = (\psi_-^M, \psi_+^M)^T$ , donde aparecen dos componentes reales  $\psi_\pm^M$ . En la expresi-

---

<sup>2</sup> $\xi = 2 - 2g - n_b$ , donde  $g$  es el número de “asas” de la superficie, y  $n_b$  el número de fronteras.

sión anterior también se emplean las matrices de Dirac denotadas por  $\gamma^\alpha$ , con una posible representación dada por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

La parte fermiónica de la acción de Polyakov puede ser reescrita de la forma:

$$S_f = \frac{i}{2\pi\alpha'} \int (\psi_-^M \partial_+ \psi_{-M} + \psi_+^M \partial_- \psi_{+M}) d\sigma dt, \quad (3.11)$$

y a partir de ella se obtienen unas ecuaciones del movimiento que describen ondas moviéndose a izquierda y derecha:

$$\partial_- \psi_-^M = \partial_+ \psi_+^M = 0. \quad (3.12)$$

La acción es invariante bajo transformaciones de supersimetría de la forma  $\delta_\epsilon X^M = \bar{\epsilon} \Psi^M$  y  $\delta_\epsilon \Psi^M = \gamma^\alpha \partial_\alpha X^M \epsilon$ , con  $\epsilon$  un espinor de Majorana infinitesimal y constante. Más aún, si se considera que la coordenada  $\sigma$  toma valores en el intervalo  $[0, 2\pi]$  al describir cuerdas cerradas y en el intervalo  $[0, \pi]$  al describir cuerdas abiertas, la integración de la expresión (3.11) permite obtener un término de frontera de la forma:

$$\delta S_f = \frac{i}{4\pi\alpha'} \int dt (\psi_-^M \delta \psi_{-M} - \psi_+^M \delta \psi_{+M}) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}. \quad (3.13)$$

### 3.2.2. Supercuerdas abiertas.

Las contribuciones en  $\sigma = 0$  y  $\sigma = \pi$  del término de frontera (3.13) deben anularse al tratar supercuerdas abiertas, lo cual es equivalente a que se cumpla:

$$\psi_-^M \delta \psi_{-M} - \psi_+^M \delta \psi_{+M} \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad \iff \quad \delta(\psi_{+m})^2 \Big|_{\sigma=0, \pi} = \delta(\psi_{-m})^2 \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0. \quad (3.14)$$

Se puede imponer que  $\psi_+^M(0, t) = \psi_-^M(0, t)$ , lo que provoca que la condición de frontera en  $\sigma = \pi$  deba cumplir:

$$\begin{aligned} R : \quad & \psi_+^M(\pi, t) = +\psi_-^M(\pi, t), \\ NS : \quad & \psi_+^M(\pi, t) = -\psi_-^M(\pi, t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

La teoría tendrá dos sectores asociados a que se haya cumplido una de las dos condiciones anteriores: el sector de *Ramond* (representado por  $R$ ) y el sector de *Neveu-Schwarz* (representado por  $NS$ ). Cada uno de ellos tiene asociado una expansión de Fourier de la forma:

$$\begin{aligned} R : \quad & \psi_{\mp}^M(\pi, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^M e^{-in\sigma_{\mp}}, \\ NS : \quad & \psi_{\mp}^M(\pi, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} - 1/2} b_r^M e^{-ir\sigma_{\mp}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $d_n, b_r$  son números de Grassmann. El espectro de la supercuerda abierta se puede determinar de manera análoga al caso bosónico, imponiendo las siguientes relaciones de anticonmutación sobre los modos de Fourier:

$$\{d_m^M, d_n^N\} = \eta^{MN} \delta_{m, -n}, \quad \{b_r^M, b_s^N\} = \eta^{MN} \delta_{r, -s}. \quad (3.17)$$

El estado fundamental en el sector  $NS$  se caracteriza por la relación con operadores de destrucción  $b_r^M|0\rangle_{NS}$ , para cada  $r > 0$ ; siendo los modos con  $r < 0$  los que se corresponden con operadores de creación. En el sector  $R$ , el estado fundamental cumplirá una relación análoga y se ve representado por un espinor del espaciotiempo con espín  $1/2$ . Para obtener estados excitados en ambos sectores, basta con aplicar operadores de creación (teniendo en cuenta que al anticonmutar los modos  $b_r$  y  $d_m$ , solo se puede aplicar cada operador una vez).

La masa que obtendrán los estados energéticos en el sector  $NS$  se puede obtener a partir de la expresión [16]:

$$\alpha' M^2 = \sum_{j=2}^{d-1} \left( \sum_{n>0} \alpha_{-n}^j \alpha_n^j + \sum_{r \in \mathbb{N}+1/2} r b_{-r}^j b_r^j \right) - \frac{d-2}{16}, \quad (3.18)$$

donde los valores de  $\alpha_n^j$  y  $\alpha_{-n}^j$  están asociados con la expansión de Fourier de la parte bosónica de la cuerda. A partir de esta fórmula, se puede determinar el valor de la masa del primer estado excitado en este sector,  $b_{-1/2}^i|0\rangle_{NS}$  (con  $i = 1, \dots, d-2$ ):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( \frac{1}{2} - \frac{d-2}{16} \right), \quad (3.19)$$

Este estado se esperaría que siguiese unas normas de transformación según  $SO(d-1)$  en el caso de tener masa no nula; sin embargo, al transformar como un vector en  $SO(d-2)$ , se determina que debe cumplirse  $M^2 = 0$  y, por tanto, se debe cumplir la condición  $d = 10$  en las teorías de supercuerdas.

El estado vacío en el sector  $NS$  será por tanto taquiónico, con un cuadrado de su masa negativo:  $M^2 = -1/2\alpha'$ . En el sector  $R$ , sin embargo, el vacío tendrá masa nula y contendrá ambas quiralidades. El valor de la masa en este sector puede ser obtenido a partir de la expresión [16]:

$$\alpha' M^2 = \sum_{j=2}^{d-1} \left( \sum_{n>0} \alpha_{-n}^j \alpha_n^j + \sum_{r \in \mathbb{N}} r d_{-r}^j d_r^j \right). \quad (3.20)$$

Al introducir el operador  $F$ , cuyo valor propio denota el número de veces que se ha aplicado un operador de creación fermiónico (es decir, se corresponde con el operador  $\sum_{r \in \mathbb{N}+1/2} b_{-r}^j b_r^j$  en el sector  $NS$  y con el operador  $\sum_{r \in \mathbb{N}} d_{-r}^j d_r^j$  en el sector  $R$ ), la expresión  $e^{i\pi F}$  tomará valores negativos si este número es impar y positivos en caso contrario. Es preciso notar que las teorías de supercuerdas abiertas contienen un estado fundamental *fantasma* (un estado no físico necesario para preservar la invariancia gauge); y, como consecuencia, aparece un factor  $(-1)$  al aplicar el operador  $e^{i\pi F}$  sobre un estado cualquiera [17]. Esto encaja con la idea de que  $F$  cuenta el número de veces que se aplicó un operador de creación, ya que su paridad cambia al considerar un estado adicional.

Si sólo se consideran los estados con valor positivo en el sector  $NS$  (con  $F$  impar), entonces se estaría logrando rechazar el estado taquiónico que surge en este sector. De la misma manera, tomando una elección sobre la paridad de  $F$  en el sector  $R$  permite que los estados tengan una única quiralidad bien definida y sean reales (es decir, que sean espinores de Majorana-Weyl).

La elección sobre la paridad de  $F$  que se puede realizar en estos sectores se conoce como *proyección de Gliozzi-Scherk-Olive* (proyección GSO). Otra ventaja de esta proyección es que permite obtener el mismo número de bosones y de fermiones para cada masa, como se esperaría en una teoría con supersimetría.

### 3.2.3. Supercuerdas cerradas.

La teoría de supercuerdas cerradas puede describir los modos de vibración que se desplazan hacia la derecha o hacia la izquierda según los distintos sectores estudiados para supercuerdas abiertas. Esto desemboca en bosones en el espaciotiempo, en los casos  $NS - NS$  y  $R - R$ , y en fermiones en el espacio tiempo en los casos  $NS - R$  y  $R - NS$ .

Los estados de menor energía se obtienen al considerar dos copias de los estados considerados para supercuerdas abiertas. Denotando los estados con  $F$  impar por  $+$  y a los estados con  $F$  par por  $-$ , hay dos teorías de interés para la dualidad gauge/gravedad: las denominadas como teorías de *tipo IIA* y de *Tipo IIB*. La proyección GSO permite obtener los siguientes sectores:

$$\begin{aligned} \text{Tipo IIA: } & (NS+, NS+), (R+, NS+), (NS+, R-), (R+, R-), \\ \text{Tipo IIB: } & (NS+, NS+), (R+, NS+), (NS+, R+), (R+, R+). \end{aligned}$$

La representación del grupo  $SO(8)$  del sector  $NS - NS$  de la teoría de tipo IIB es de la forma  $\mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{35}$ . Esta representación tiene un campo escalar asociado  $\phi$  (el dilatón), una 2-forma diferencial  $B_{MN}$  (el campo de Kalb-Ramond) y una 4-forma  $g_{MN}$  (el gravitón), respectivamente.

La representación del grupo  $SO(8)$  del sector  $R - R$  en la misma teoría es de la forma  $\mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{35}_+$ . Tendrá asociados un campo escalar  $C_0$  (el axión) y dos tensores antisimétricos, uno de rango 2 ( $C_2$ ) y otro de rango 4 ( $C_4$ , cuyo tensor de fuerza asociado,  $F_5$ , satisficará la condición de autodualidad).

Los tensores antisimétricos son  $p$ -formas diferenciales que se corresponden con potenciales de gauge, por lo que sus interacciones y acoplamientos serán invariantes bajo transformaciones de gauge cuyo parámetro viene dado por una  $(p - 1)$ -forma  $\Lambda_{p-1}$ ; es decir, serán invariantes bajo  $C_p \rightarrow C_p + d\Lambda_{p-1}$ .

Las fuerzas de campo de las formas vienen dadas por su diferencial:

$$F_{p+1} = dC_p. \quad (3.21)$$

Por otra parte, los grados de libertad de cada  $p$ -forma  $C_p$  son reflejados en una  $(8 - p)$ -forma dual  $\hat{C}_{8-p}$ , cuya fuerza de campo,  $\hat{F}_{9-p}$ , está asociada a  $F_{p+1}$  mediante la dualidad Hodge:

$$F_{p+1} = \star_{10d} \hat{F}_{9-p} \quad (3.22)$$

### 3.2.4. Distintos tipos de teoría de supercuerdas.

En la sección anterior se describían dos tipos de teorías de supercuerdas cerradas, la de tipo IIA y la de tipo IIB. Ambas contienen cuerdas cerradas orientadas en su modelo y  $\mathcal{N} = 2$



supersimetrías locales; es decir, son invariantes bajo dos supercargas de Majorana-Weyl (de distinta quiralidad en la teoría IIA y de la misma quiralidad en la teoría IIB).

En la teoría IIA aparecen partículas supercompañeras de los campos descritos que se corresponden con gravitinos de quiralidad opuesta y espín  $3/2$ , así como dos fermiones de quiralidad opuesta y espín  $1/2$ . La teoría IIB también contiene algunos gravitinos, que en este caso tienen igual quiralidad, y dos fermiones también con la misma quiralidad.

Además de las teorías anteriores, también hay otros ejemplos de teorías de supercuerdas, como el caso de las supercuerdas heteróticas y las de tipo I. La *teoría de supercuerdas heterótica* es una teoría de cuerdas cerradas orientadas con una sola supersimetría local ( $\mathcal{N} = 1$ ). Una vez más, la teoría contiene los campos  $G_{MN}$ ,  $B_{MN}$  y  $\phi$ , además de sus supercompañeros fermiónicos. Más aún, existen 496 bosones gauge  $A_M^a$  (así como sus supercompañeros fermiónicos) asociados a generadores del grupo gauge, que puede ser  $E_8 \times E_8$  o  $SO(32)$  (en cada caso, definiéndose una teoría de cuerdas heterótica distinta).

La *teoría de supercuerdas de tipo I* es una teoría de cuerdas abiertas y cerradas, sin orientar (es decir, las worldsheets pueden definir superficies no orientables), con una supersimetría local ( $\mathcal{N} = 1$ ). Los campos sin masa que contiene la teoría son los mismos que se observan en la teoría de supercuerdas heteróticas, pero con la única posibilidad de asociar los bosones  $A_M^a$  al grupo gauge  $SO(32)$ .

### 3.3. Teoría no perturbativa.

A partir de lo desarrollado en este capítulo y mediante la teoría de perturbaciones, es posible calcular amplitudes de interacciones en la teoría de cuerdas. Sin embargo, las acciones que se han introducido no son acciones del espaciotiempo, sino de la worldsheet. Esto provoca que no se pueda definir de manera no perturbativa una integral de caminos, la cual es importante para completar el estudio de los campos en el espaciotiempo.

#### 3.3.1. Estados no perturbativos de $p$ -branas.

Una consecuencia básica del estudio de la teoría de cuerdas no perturbativa es que se obtendrán estados de energía que no se podrían obtener en el sector perturbativo de la misma.

#### Estados no perturbativos a bajas energías.

Para la obtención de los estados no perturbativos de la cuerda, se emplea como acción del espaciotiempo una aproximación a bajas energías de una acción efectiva, como la denotada por  $S_{eff}$  en la expresión (3.5). A pesar de ser una aproximación a bajas energías, más adelante se comprobará como las soluciones particulares descritas también son soluciones de la teoría completa.

Cada una de estas soluciones se asocia a una teoría de supergravedad de 10 dimensio-

nes distinta, la cual describe un tipo de supercuerda en particular. A partir de esta teoría se obtiene una solución de energía finita de las ecuaciones del movimiento, la cual describe “bultos” de energía (regiones donde se puede localizar la energía) situados en determinadas direcciones y que se extienden a lo largo de  $p$  dimensiones espaciales. Estas soluciones, invariantes bajo una simetría de Poincaré en  $p+1$  dimensiones, son conocidas como  $p$ -*branas*; y la región donde se localiza la energía se denomina *worldvolume* de la  $p$ -brana. Las características principales de este tipo de soluciones son las siguientes:

1. Por cada  $(p+1)$ -forma obtenida en el espectro perturbativo sin masa de una cuerda, existe una solución no perturbativa definida por una  $p$ -brana. Las soluciones para las teorías de supercuerdas introducidas se pueden observar en el cuadro 3.1.
2. La energía por unidad de volumen de cada brana es del orden de  $1/g_s$ , donde  $g_s$  representa el *acoplamiento a la cuerda*.
3. La carga eléctrica de la  $p$ -brana se obtiene a partir de cada  $(p+1)$ -forma, mientras que su carga magnética se obtiene a partir de la  $(7-p)$ -forma dual de las mismas.
4. Las soluciones son invariantes bajo la mitad de las transformaciones de supersimetría en la teoría de vacíos, es decir, son soluciones  $1/2$  *BPS*.
5. El worldvolume de cada  $p$ -brana define una teoría de campos supersimétrica en  $(p+1)$  dimensiones conocida, la cual contiene  $9-p$  campos escalares reales, bosones de Goldstone por cada simetría traslacional rota y distintos fermiones que pueden interpretarse como Goldstinos.

Teoría de cuerdas	Branas	$(p+1)$ -forma	Tensión
Tipo IIA	F1, NS5	$B_2, \tilde{B}_6$	$\sim 1/g_s^2$
	D0, D2, D4, D6, D8	$C_1, C_3, \hat{C}_5, \hat{C}_7$	$\sim 1/g_s$
Tipo IIB	F1, NS5	$B_2, \tilde{B}_6$	$\sim 1/g_s^2$
	D(-1), D1, D3, D5, D7	$a, \tilde{B}_2, C_4, \hat{C}_6, \hat{C}_8$	$\sim 1/g_s$
Heteróticas	F1, NS5	$B_2, \tilde{B}_6,$	$\sim 1/g_s^2$
Tipo I	D1, D5	$\tilde{B}_2, \hat{C}_6$	$\sim 1/g_s$

Cuadro 3.1: Soluciones de tipo  $p$ -brana en distintas teorías de supercuerdas.

### Estados no perturbativos en energías arbitrarias.

La obtención de los estados de energía ha empleado una aproximación a bajas energías de una acción efectiva (es decir, se ha trabajado en la región  $\alpha' \rightarrow 0$ ). Los estados construidos tienen la propiedad de ser estados BPS, y gracias a esta característica se pueden generalizar a estados de una acción general (con valores de  $\alpha'$  alejados de 0), como se muestra a continuación.

En una teoría supersimétrica, los multipletes supersimétricos de estados se obtienen a partir de los supergeneradores de la misma. Los supergeneradores son divididos en operadores

de creación y destrucción, y al definir un estado fundamental (el cual es aniquilado por todo operador de destrucción), la actuación de los operadores de creación sobre este permite obtener el multiplete.

Los estados no perturbativos que se han obtenido tienen una característica clave: son soluciones 1/2 BPS, y la invariancia bajo la mitad de supersimetrías del estado se traduce en que la mitad de operadores de creación lo aniquilan. El multiplete, por lo tanto, tendrá la mitad de estados que un multiplete genérico. Para diferenciar ambos tipos de multiplete, a menudo se les hace referencia como multiplete “corto” (al que tiene la mitad de estados) y “largo” (al genérico).

La diferencia de estados entre un multiplete largo y uno corto es un indicativo de que un estado BPS no podrá transformarse en un estado no BPS mediante una transformación continua de los parámetros del sistema (en particular, al aumentar el parámetro  $\alpha'$  que se supone próximo a 0 en un principio).

El álgebra supersimétrica en presencia de  $p$ -formas incluye una serie de *cargas centrales*  $Z(\phi)$ , es decir, operadores que conmutan con todos los supergeneradores y el hamiltoniano. Las cargas centrales son funciones del espacio de moduli y aparecen en el álgebra mediante la relación:

$$\{Q_\alpha^A, Q_{\dot{\alpha}}^B\} = \delta_{AB}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}P_\mu + Z_{\alpha\dot{\alpha}}^{AB}(\phi), \quad (3.23)$$

donde  $Q_\alpha^A$  y  $Q_{\dot{\alpha}}^B$  denotan los supergeneradores.

Si se denota a los operadores que aniquilan los estados BPS por  $Q^B$ , la parte izquierda de la igualdad anterior quedaría anulada anulada. La expresión se reduce entonces a una igualdad entre la masa o tensión del objeto con su carga para este tipo de estados.

Las cargas a las que se hace referencia están cuantizadas; si se tiene en cuenta este argumento, junto con el hecho de que un estado BPS no puede cambiar a un estado no BPS cuando se modifican los parámetros de manera continua, se puede concluir que la tensión de un estado BPS seguirá estando determinada incluso al incluir las correcciones en el parámetro  $\alpha'$ .

Esto demuestra que al encontrar un estado BPS en una aproximación a bajas energías de supergravedad, existirá un estado en la teoría completa que comparta su carga y tensión.

### 3.3.2. Dualidad en la teoría de cuerdas.

Una  $p$ -brana puede tener un acoplamiento eléctrico a la 2-forma sin masa que contiene la teoría, de la misma manera que una cuerda puede tenerlo también. La solución de supergravedad que describe la brana no es diferente del fondo que se genera por una cuerda de la teoría, por lo que las 1-branas con esta característica son conocidas como soluciones fundamentales de la cuerda y se denotan por  $F1$ -branas.

El hecho de que aparezca esta cuerda fundamental de una manera similar a la que aparecen otros tipos de  $p$ -brana, sugiere que todas las branas deberían tratarse de la misma manera. Esta idea también surge al notar que, a menudo, las soluciones de branas están relacionadas entre sí por simetrías en la supergravedad, que se conocen como *simetrías de U-dualidad*.

A la idea que se ha introducido se le conoce como *democracia de p-branas* [18]. Mediante ella se podría proponer una única teoría detrás de todas las teorías de cuerdas, y al estudiarse un caso lejos del general (como el límite de acoplamiento débil) es cuando unos estados son más fundamentales que otros. El espectro de menor energía se obtendría en este contexto al cuantizar dichos estados fundamentales.

En la sección 3.1.1 se proponía un límite en el estudio perturbativo en la región ultravioleta, en el cual la teoría podía describirse según la región infrarroja de un canal dual de la teoría. Volviendo al caso de las supercuerdas en 10 dimensiones, en el estudio no perturbativo se encuentran branas “democráticas” con una relación análoga a la del estudio perturbativo: el límite de acoplamientos arbitrariamente grandes de una teoría puede simplificarse mediante una teoría dual con acoplamientos débiles (la cual no tiene por qué contener supercuerdas del mismo tipo), cuyos grados de libertad se corresponden con estados no perturbativos. La tensión de los objetos puede describirse mediante una función del espacio de moduli gracias a que los estados no perturbativos son estados BPS.

### Auto-dualidad de la teoría de supercuerdas de tipo IIB.

Esta sección describe un ejemplo en el estudio no perturbativo de supercuerdas de tipo IIB, en el cual se observa como un acoplamiento fuerte en esta teoría puede describirse mediante una teoría dual (también de tipo IIB) cuyo acoplamiento está relacionado con el primero según la relación:

$$(g_s)_1 = \frac{1}{(g_s)_2}. \quad (3.24)$$

Al estudiar la teoría dual a la primera, hay que tener en cuenta también cual es la relación entre las branas y los campos sin masa entre las teorías:

	Teoría IIB (acoplamiento fuerte) $\iff$	Teoría IIB (acoplamiento débil)
Branas	F1, NS5 D3	D1, D5 D3
Campos sin masa	$\tau = a + ie^{-\phi}$ $G_{MN}$ $B_2$ $\tilde{B}_2$ $C_4$	$-1/\tau$ $G_{MN}$ $\tilde{B}_2$ $B_2$ $C_4$

Cuadro 3.2: Relación entre las branas y los campos sin masa de dos teorías duales de tipo IIB.

La transformación  $g_s \rightarrow 1/g_s$  es conocida como una transformación de *S-dualidad*<sup>3</sup>. Debido a que se relaciona una teoría de tipo IIB con otra teoría del mismo tipo, se dice que es una transformación de autodualidad. También resulta destacable que pertenece al subgrupo de simetría  $SL(2, \mathbb{Z})$  de la teoría, el cual es un caso particular de U-dualidad.

<sup>3</sup>Se trata de una transformación equivalente a la descrita en la sección 2.2.1 para una teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM.

## Red de dualidades.

Al recuperar la física que se puede observar en un espaciotiempo de 4 dimensiones a partir de una geometría con un mayor número de dimensiones (es decir, al *compactificar* el espacio), el espacio de moduli se hace mayor. Esto permite tomar límites más variados en sus parámetros, que tienen como consecuencia un mayor número de relaciones de dualidad que no resultan triviales.

Este hecho reafirma la idea introducida al principio de la sección sobre la democracia de las  $p$ -branas: el mayor número de dualidades permite relacionar a las teorías de supercuerdas descritas al compactificarse, dando lugar a una *red de dualidades*. Una única teoría que describa todos los objetos BPS extendidos (como la  $M$ -teoría) podría estar detrás de cada tipo distinto de supercuerda, el cual se obtiene al estudiar un límite de la teoría.

En la red de dualidades se pueden encontrar relaciones de S-dualidad entre las teorías que se relacionan, como en el caso de la auto-dualidad de la teoría de tipo IIB. Otra dualidad que puede existir es la  $T$ -dualidad, que relaciona dos teorías que son equivalentes pero están descritas en espaciotiempos distintos. Esta última dualidad relaciona las teorías de tipo IIA y tipo IIB, como prueban Dai, Leigh y Polchinski (1989) [19]. En la figura 3.4 se puede apreciar distintas teorías de supercuerdas relacionadas mediante este tipo de dualidades.

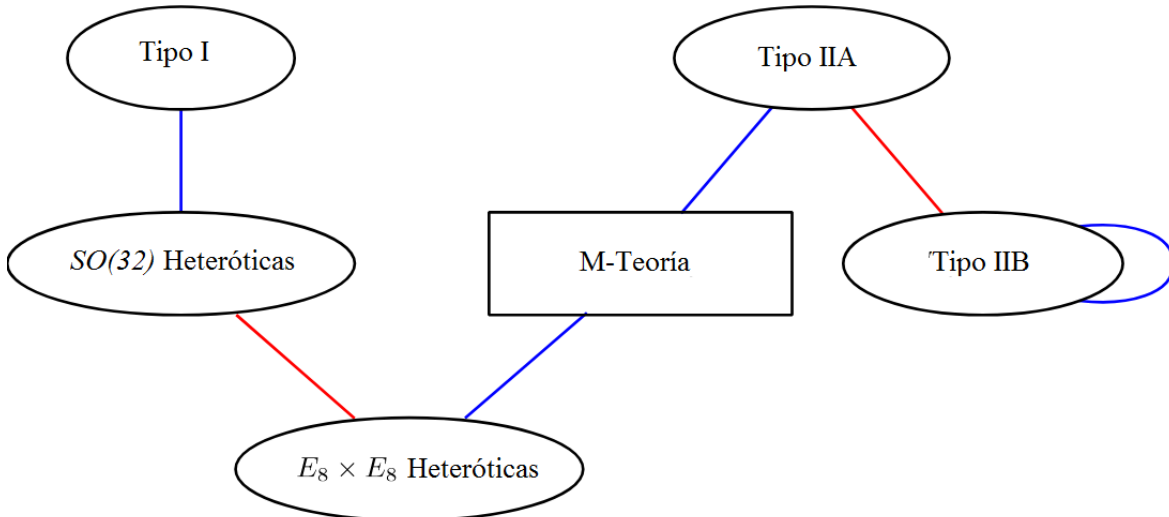


Figura 3.4: Red de dualidades para distintas teorías de supercuerdas. Las relaciones de T-dualidad son representadas mediante líneas rojas, y las de S-dualidad mediante líneas azules. La relación de autodualidad en teorías de tipo IIB se describe en la sección anterior; el resto de S-dualidades aparecen descritas en [20]; la dualidad IIB - IIA es propuesta en [19]; y la dualidad entre cuerdas heteróticas se discute en [21].

### 3.4. Las D-branas.

El concepto de  $Dp$ -brana fue introducido por Polchinski (1995) [22] con el objetivo de estudiar el espectro de una teoría de cuerdas alrededor de un cierto estado de  $p$ -brana. Este tipo de branas se definen como hiperplanos extendidos en  $p + 1$  dimensiones en un espacio plano, de manera que la existencia de fluctuaciones de la teoría alrededor de una  $p$ -brana se corresponde con una cuerda abierta que sitúa uno de sus extremos dicha superficie.

La  $Dp$ -brana es un estado no perturbativo de la teoría, y no aparece como un estado de oscilación de la cuerda. Sin embargo, la cuantización de la misma permite obtener el espectro de fluctuaciones de la teoría alrededor de la  $p$ -brana.

Algunas de las propiedades de las que disponen  $Dp$ -branas son las siguientes:

- La interacción de las branas con cuerdas cerradas se representa mediante diagramas con la topología de un disco, como se representa en la figura 3.5.
- Las  $Dp$ -branas tienen una tensión y carga que se corresponden con las observadas en las soluciones de  $p$ -branas de la supergravedad.
- Una  $Dp$ -brana influye en el espacio (plano) donde se sitúa curvándolo y modificando la solución completa de supergravedad.
- Estas branas son invariantes bajo la mitad de supersimetrías (son estados 1/2 BPS).

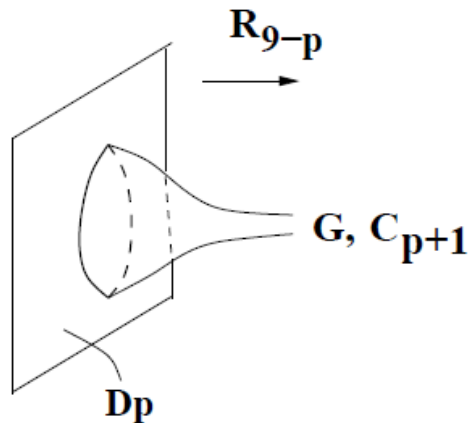


Figura 3.5: Interacción de una  $Dp$ -brana con una cuerda cerrada (en este caso se acopla un gravitón  $G$  y una  $(p + 1)$ -forma  $C_{p+1}$ ). Tomado de [23].

Es importante también señalar que no todas las  $p$ -branas de la teoría de cuerdas son  $Dp$ -branas (este es el caso, por ejemplo, de las NS5-branas); ni todas las teorías de supercuerdas contienen D-branas (por ejemplo, en la teoría de cuerdas heteróticas). Algunas teorías en las que sí que aparecen D-branas son las teorías de tipo IIB ( $D(2p + 1)$ -branas), las de tipo IIA ( $D2p$ -branas) y las de tipo I (D1, D5 y D9-branas).

### 3.4.1. El worldvolume de la D-brana.

El worldvolume de una  $Dp$ -brana se extiende a lo largo de  $p + 1$  direcciones espaciales, con funciones de embedding  $x^0, \dots, x^p$ , en un espaciotiempo de 10 dimensiones plano. Los estados de oscilación de menor energía de una cuerda abierta cuyos extremos están situados en la brana se corresponden con bosones gauge  $A_\mu$ , con  $9 - p$  escalares  $y^i$  (que a su vez se corresponden con los bosones de Goldstone generados en la ruptura de las simetrías traslacionales del vacío a causa de la brana), y con algunos fermiones  $\lambda^a$  (los goldstinos asociados a las supersimetrías del vacío que han sido rotas por la brana). Todos los campos se sitúan en el worldvolume de la brana, definiendo así una teoría de campos en  $p + 1$  dimensiones que describe la dinámica de la misma.

Las  $Dp$ -branas (y las  $p$ -branas en general) son estados 1/2 BPS y por tanto la tensión y carga que las caracteriza es la misma. Esto permite considerar configuraciones en las que una cantidad arbitraria de branas son colocadas de manera paralela en distintos puntos del espacio, de forma que la atracción gravitatoria que podrían sufrir entre ellas sea cancelada con la repulsión entre sus cargas.

Si se considera, por ejemplo, el caso de las D3-branas en la teoría de tipo IIB, el worldvolume de una brana contiene un bosón vector  $U(1)$ , seis escalares reales y cuatro fermiones de Majorana (todos invariantes bajo el grupo  $U(1)$ ). Si en lugar de considerar una única brana se consideran  $N$   $Dp$ -branas que coinciden en el mismo punto del espacio, hay  $N^2$  configuraciones posibles de cuerdas abiertas con extremos en la brana (considerando que son orientadas, cuyos extremos inicial y final pueden localizarse en cualquiera de las  $N$  branas sin la necesidad de estar en la misma). Esto provoca en el ejemplo que hayan  $N^2$  bosones gauge relacionados según el grupo  $U(N)$ , seis escalares reales y cuatro fermiones de Majorana.

Los modos que aparecen en las  $N$   $Dp$ -branas coincidentes no tienen masa; pero si se considera que hay una cierta separación entre las branas se traduce en la adquisición de masa de algunos campos cuyo valor es el producto de la tensión de la cuerda por la separación entre las branas (con separaciones lo suficientemente pequeñas se puede afirmar que la masa es mucho menor que  $M_s$ ).

Una manera de definir una acción efectiva para los modos de menor energía consiste en el empleo de una acción en dos dimensiones asociada a la worldsheet en presencia de los campos en supergravedad que han sido descritos anteriormente, y bajo la imposición de que existe simetría conforme. El acoplamiento de los campos a la worldsheet es descrito mediante un término que se añade a la acción de Polyakov que expresa la acción en la frontera:

$$S_{bdry} = \int_{\partial\Sigma} dx^a \partial_a X^\mu(\sigma, t) A_\mu(X(\sigma, t)), \quad (3.25)$$

donde  $\Sigma$  denota la worldsheet y  $\partial\Sigma$  su frontera. A partir de esta expresión se puede observar como los extremos de la cuerda están cargados mediante la 1-forma  $A_\mu$  del worldvolume de la brana.

La acción efectiva que se obtiene se puede expresar a su vez como una suma de dos acciones,  $S = S_{DBI} + S_{WZ}$ . En primer lugar, la denominada *acción de Dirac-Born-Infeld*

(DBI) describe su parte bosónica y toma la expresión:

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}x e^{-\phi} \sqrt{-\det(P[g]_{ab} + P[B]_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})}. \quad (3.26)$$

En la acción de DBI aparecen campos pertenecientes al sector  $NS - NS$  de la teoría, donde el tensor  $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$  refleja el efecto de  $A_\mu$ , que es un campo gauge  $U(1)$ . La tensión de la brana en  $p$  dimensiones está relacionada con  $\alpha'$  de la forma:

$$T_p = (2\pi)^{-p} \alpha'^{-(p+1)/2}. \quad (3.27)$$

Las expresiones  $P[g]$  y  $P[B]$  denotan el pullback de los campos  $g$  o  $B$ , respectivamente, es decir, dadas unas funciones de embedding de la brana en el espaciotiempo  $X^M$ :

$$\begin{aligned} P[g]_{ab} &= \frac{\partial X^M}{\partial x^a} \frac{\partial X^N}{\partial x^b} g_{MN} \\ P[B]_{ab} &= \frac{\partial X^M}{\partial x^a} \frac{\partial X^N}{\partial x^b} B_{MN} \end{aligned} \quad (3.28)$$

A la acción anterior se le debe sumar el término que acopla a la brana las formas diferenciales descritas en el sector  $R - R$  de la teoría, conocido como acción de *Wess-Zumino* (WZ):

$$S_{WZ} = \mu_p \int \sum_q P[C_{q+1}] \wedge e^{P[B] + 2\pi\alpha' F}, \quad (3.29)$$

donde aparece el factor  $\mu_p = T_p/g_s$ .

### 3.4.2. Dp-branas en teorías de tipo IIB.

Las D-branas resultan ser una herramienta muy útil en las teorías de cuerdas. Su popularidad ha llevado a expresar las soluciones de supergravedad mediante un número grande de D-branas con las mismas simetrías y cargas que capturan la dinámica de las mismas.

Si se considera una D-brana extendida a lo largo de  $p$  dimensiones espaciales, su espacio transversal tendrá dimensión  $D - p - 1$ . En dimensión 10, la brana conserva las simetrías  $\mathbb{R}^{p,1} \times SO(p, 1) \times SO(9 - p)$ , y un ansatz que resuelve las ecuaciones del movimiento de la gravedad de tipo IIB viene dado por:

$$ds^2 = H_p(r)^{-1/2} \eta_{ab} dx^a dx^b + H_p(r)^{1/2} dy^i dy^i, \quad (3.30)$$

$$e^\phi = g_s H_p(r)^{(3-p)/4}, \quad (3.31)$$

$$C_{p+1} = (H_p(r)^{-1} - 1) dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p, \quad (3.32)$$

$$B_{MN} = 0, \quad (3.33)$$

donde  $x^a$  ( $a = 0, \dots, p$ ) son las coordenadas en el volumen del mundo, e  $y^i$  ( $i = p + 1, \dots, 9$ ) las coordenadas perpendiculares a la brana. Por otra parte, se define  $r$  de forma que  $r^2 = \sum_{i=p+1}^9 y_i^2$ .



Esta solución es la más simétrica en este tipo de supergravedad, y al considerar las ecuaciones del movimiento se obtiene que se debe cumplir:

$$\square H_p(r) = 0, \quad (3.34)$$

cuando  $r \neq 0$ . Esto implica que  $H_p(r)$  debe ser una función armónica de la forma:

$$H_p(r) = 1 + \left(\frac{L_p}{r}\right)^{7-p}. \quad (3.35)$$

En el límite de grandes  $r$ , se recupera un espaciotiempo de Minkowski gracias a la definición de  $H_p(r)$  anterior. Por otra parte,  $L_p$  se obtiene mediante la carga de la solución de la  $Dp$ -brana, la cual viene dada por  $Q = N\mu_p$ , siendo  $N$  el número de  $Dp$ -branas [15]. La longitud característica  $L_p$  sigue por tanto la expresión:

$$L_p^{7-p} = (4\pi)^{(5-p)/2} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right) g_s N \alpha'^{(7-p)/2}. \quad (3.36)$$

En particular, si se consideran  $N$  D3-branas (conjunto que cobrará importancia en las siguientes secciones), se obtiene la relación:

$$L_3^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2. \quad (3.37)$$

### 3.4.3. Algunos usos de las D-branas en teorías de cuerdas.

De la misma manera que se emplean D-branas para formular teorías de supergravedad, como la teoría de tipo IIB, es frecuente afirmar en las teorías que contienen cuerdas abiertas que el extremo de dichas cuerdas siempre va a estar situado en una D-brana. Un ejemplo de ello es la teoría de supercuerdas de tipo I: en el vacío de la teoría se encuentran cuerdas abiertas cuyos extremos pueden estar en cualquier lugar de las diez dimensiones del espaciotiempo. Esto se traduce en que el vacío contendrá una serie de D-branas que se extienden en todo el espacio (D9-branas), y los bosones gauge de la teoría formarán parte del worldvolume de las mismas.

Hay más ejemplos de la utilidad de este tipo de branas en teorías de cuerdas. La capacidad de describir estados no perturbativos fue relevante en el estudio de la compactificación de la teoría de tipo IIB de espacios Calabi-Yau de Greene, Morrison y Strominger (1995) [24], donde hay una singularidad de la acción efectiva en una parte del espacio de moduli. Esta singularidad se obtiene a partir de una subvariedad del espacio descrita mediante los puntos de  $\mathbb{C}^4$  que cumplen  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es el valor esperado de vacío de un campo del espacio de moduli en 4 dimensiones, cuando se considera el caso  $\epsilon = 0$ .

Para evitar la singularidad se puede notar la existencia de un estado no perturbativo correspondiente con una D3-brana que cubre la subvariedad [25], aparentando ser un estado que se corresponde con una partícula. Para valores reales de  $\epsilon$ , la subvariedad es una 3-esfera  $\mathbb{S}^3$  cuyo volumen se relaciona con la masa y la tensión de la brana de la forma  $M_{D3} = T_{D3} V_{\mathbb{S}^3}$ ,

obteniéndose por tanto una partícula sin masa en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Al considerar este estado se puede conocer el espectro completo de la teoría y, así, determinar por completo la acción.

Tras considerar este enfoque en los espacios de Calabi-Yau, el estudio de Greene, Morrison y Strominger permitió comprobar la utilidad de las D-branas como mediadoras de transiciones de fase en las que la topología del espacio interno cambia. Este es el caso de un espacio de Calabi-Yau en el que se consideran dos singularidades como la anterior, definiendo una teoría gauge a bajas energías en el espacio de moduli dada por el grupo  $\mathcal{N} = 2 U(1)$  con dos hipermultipletes cargados y sin masa. Los hipermultipletes pueden adquirir un valor esperado de vacío en la rama de Higgs de la teoría, lo cual se interpreta geoméricamente como la parametrización de una 2-esfera  $S^2$ . Así, es posible describir un cambio de fase en este contexto de una esfera  $S^3$  a una esfera  $S^2$  (primero, empleando una D3-brana como se describía anteriormente y llevando el radio de la esfera al límite  $\epsilon \rightarrow 0$ ; y, posteriormente, asociando un valor esperado al estado de vacío que aparece en el punto singular que se obtiene).

## Capítulo 4

# La correspondencia AdS/CFT

En una teoría de cuerdas en la que se describen  $Dp$ -branas, es posible considerar un límite de bajas energías en el cual todas las cantidades físicas relativas a la teoría gauge del worldvolume de las branas permanezcan finitas. En este límite, la dinámica del sistema se reduce a una teoría gauge cuántica en  $p + 1$  dimensiones desacoplada de la gravedad. Por este motivo, el conocimiento de las dinámicas perturbativas y no perturbativas de la teoría de cuerdas y de las D-branas permite estudiar las dinámicas de la teoría gauge.

De esta manera se está relacionando a un nivel fundamental una teoría de cuerdas, que resulta ser una candidata para elaborar una teoría de gravedad cuántica consistente; con una teoría cuántica de campos en un espaciotiempo plano, la cual no parecía estar relacionada con la gravedad cuántica a priori.

Esta correspondencia, que se conoce como *correspondencia AdS/CFT* (*Anti-de Sitter/Conformal Field Theory*), supone además una aplicación del *principio holográfico*, el cual postula que la información contenida en un volumen  $V_{d+1}$  se puede obtener a partir del área de su frontera,  $\partial V_{d+1}$  [15] (en este contexto, se obtiene en la frontera del espacio AdS la teoría gauge).

### 4.1. La dualidad de Maldacena.

Considérese una teoría de supercuerdas de tipo IIB en un espacio de Minkowski de 10 dimensiones. Considérese además  $N$  D3-branas paralelas y muy próximas entre sí (extendidas a lo largo de las coordenadas  $x^0, \dots, x^3$ ), donde se sitúan los extremos de las cuerdas abiertas (este es el contexto de la sección 3.4.1, tomando  $p = 3$ ). Las soluciones de supergravedad que se obtienen fueron estudiadas en la sección 3.4.2, y al considerar  $p = 3$  se obtiene:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H(r)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H(r)^{1/2} dy^i dy^i, \\ F_5 &= dC_4 = (1 + \star) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge (dH^{-1}), \\ H(r) &= 1 + \left(\frac{L_3}{r}\right)^4; \quad L_4^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2; \quad Q = N \mu_3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

La solución es de tipo 1/2 BPS y, por tanto,  $Q = M$ . En el caso de considerar una pequeña variación en la masa,  $M + \delta M$ , la solución describiría un horizonte de sucesos con un pequeño radio  $r_0 > 0$ , similar a un agujero negro de Schwarzschild, emitiendo así cierta radiación térmica mediante su horizonte (conocida como *radiación de Hawking*).

Para comprender la correspondencia de Maldacena [1], es preciso estudiar el contexto descrito desde dos enfoques que a priori son distintos.

### Punto de vista 1.

Debido a que la teoría se describe mediante D-branas, las excitaciones perturbativas de la solución exacta se pueden describir mediante cuerdas cerradas, que se corresponden con excitaciones fuera del worldvolume de la brana, en el espacio vacío; así como mediante cuerdas abiertas, que describen las excitaciones de las propias branas. Las interacciones entre las cuerdas pueden ser descritas mediante un lagrangiano efectivo que representaría, por ejemplo, la radiación de Hawking. Así, denotando a la acción asociada a este último como  $S_{int}$ , hay dos contribuciones a la acción más que se están considerando: la que describe las excitaciones de las cuerdas cerradas ( $S_{bulk}$ ), asociada un lagrangiano de supergravedad de tipo IIB que da lugar a un supermultiplete en 10 dimensiones y que está acoplada a los modos masivos de la cuerda; y la que describe las excitaciones de las cuerdas abiertas ( $S_{brana}$ ), asociada al lagrangiano de una teoría  $\mathcal{N} = 4$   $U(N)$  SYM que da lugar a un supermultiplete con  $\mathcal{N} = 4$  en 4 dimensiones en adición con ciertos términos de mayor orden en derivadas.

La acción efectiva completa de las cuerdas tendrá por tanto una expresión de la forma:

$$S = S_{bulk} + S_{brana} + S_{int}. \quad (4.2)$$

La acción  $S_{bulk}$  se obtiene a partir de la acción de Polyakov, y adopta la expresión [15]:

$$S_{bulk} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (R_h + 4\partial_M \phi \partial^M \phi) + \dots \sim -\frac{1}{2} \int d^{10}x \partial_M h \partial^M h + \mathcal{O}(\kappa). \quad (4.3)$$

En la expresión aparece el valor  $\kappa$ , dado por  $2\kappa^2 = (2\pi)^7 \alpha'^4 g_s^2$ ; el escalar de Ricci,  $R_h$ ; y el dilatón,  $\phi$ , cuyo valor esperado se relaciona con la constante de acoplamiento de la forma  $g_s = e^\phi$ . La parte de la derecha de la expresión considera una expansión de la métrica de la forma  $g = \eta + \kappa h$  y desprecia las fluctuaciones de la métrica plana denotadas por  $h$  (el factor  $\kappa$  en la expansión asegura que el término cinético de la acción para  $h$  pueda normalizarse de manera canónica [15]). En la ecuación no se muestra de manera explícita, sin embargo, los términos que involucran las fuerzas de campo de las formas diferenciales que aparecen en la solución, ni los campos fermiónicos.

Las acciones  $S_{brana}$  y  $S_{int}$  se obtienen a partir de las acciones DBI y WZ para las branas. Si se considera el caso en el que se coloca una sola brana y el campo de Kalb-Ramond se anula,  $B_{MN} = 0$ ; que las coordenadas transversas a la brana tienen asociadas los índices  $i, j = 5, \dots, 9$ ; y que se toma el primer orden en  $\alpha'$  de las expansiones en  $e^{-\phi}$  y  $g = \eta + \kappa h$ , las expresiones que se obtienen son las siguientes:

$$S_{brana} \sim -\frac{1}{2\pi g_s} \int d^4x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^i + \mathcal{O}(\alpha') \right), \quad (4.4)$$

$$S_{int} \sim -\frac{1}{8\pi g_s} \int d^4x (\kappa\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \quad (4.5)$$

La última expresión ha reescalado el dilatón  $\phi$  por  $\kappa$ , de manera similar a la expansión en la métrica, para que la normalización canónica sea posible [15].

Para generalizar las acciones a las asociadas a la consideración de  $N$  branas paralelas, es preciso notar que los escalares y los campos gauge estarán representados por el grupo  $U(N)$ , por lo que para asegurar invariancia gauge es preciso tomar la traza sobre dicho grupo (tendrá la forma  $\phi^i = \phi^{ia} T_a$ ,  $A_\mu = A_\mu^a T_a$ , donde  $T_a$  son los generadores de  $U(N)$ ). Esto también influye en el término cinético, que toma la forma  $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ ; así como en las derivadas parciales, que deben ser sustituidas por derivadas covariantes. Por último, aparece un potencial escalar en la acción  $S_{brana}$  en el orden más bajo de  $\alpha'$  de la forma:

$$V = \frac{1}{2\pi g_s} \sum_{i,j} \text{Tr}[\phi^i, \phi^j]^2. \quad (4.6)$$

El límite a bajas energías se considera manteniendo fijos parámetros sin dimensión como el acoplamiento a la cuerda  $g_s$  o el número de branas  $N$ , pero estudiando el caso  $l_s \rightarrow 0$  ( $\alpha' \rightarrow 0$ ; esto justifica haber considerado anteriormente el menor orden en  $\alpha'$  en las expansiones). En este límite se obtiene lo siguiente:

- $S_{bulk} \rightarrow S_{IIB}$ : a bajas energías solo pueden ser excitados los estados sin masa de las cuerdas cerradas. Al desacoplar los estados masivos de la acción, esta se reduce a una acción de supergravedad.
- $S_{brana} \rightarrow S_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}}$ : la acción de las cuerdas abiertas se corresponde exactamente con la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM en el límite de bajas energías, anulando los términos de mayor orden en derivadas (identificando los valores  $2\pi g_s = g_{YM}^2$ ).
- $S_{int} \rightarrow 0$ : esto se debe a que la acción es proporcional a  $\kappa \propto g_s \alpha'^2$ , y un límite de bajas energías implica tomar  $\alpha' \rightarrow 0$ . Esto provoca que los dos sistemas anteriores queden desacoplados y no interaccionen entre ellos (es decir, la gravedad se vuelve libre a bajas energías o, equivalentemente, a largas distancias).

## Punto de vista 2.

Debido a que la teoría se está describiendo mediante  $p$ -branas, es posible tomar un segundo punto de vista a partir de las soluciones de supergravedad descritas al principio de la sección. Si la métrica que se obtiene a partir del elemento de línea  $ds^2$  de las expresiones (4.1) se denota por  $g_{MN}$ , es posible comprobar como dicha métrica no va a ser constante. En particular, debido a que  $g_{00}$  no es constante, la energía de un objeto medida por un observador en una posición constante  $r$ ,  $E_r$ , estará relacionada con la energía del mismo objeto medida por un observador situado en el infinito,  $E$ , mediante un factor de redshift,

$$E = \sqrt{-g_{00}} E_r = H(r)^{-1/4} E_r. \quad (4.7)$$

Por otra parte, al considerar valores de  $r$  pequeños se obtiene que:

$$H(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \left( \frac{L_3}{r} \right)^4. \quad (4.8)$$

Consecuentemente habrá una relación de proporcionalidad  $E \propto rE_r$  que indica que la energía para el observador situado en el infinito será arbitrariamente pequeña al tomar valores de  $r$  cada vez más pequeños.

El límite de bajas energías, por lo tanto, se obtiene en la *región cerca del horizonte* (al considerar  $r \rightarrow 0$ ). En este contexto, el observador situado en el infinito aprecia dos tipos de excitaciones (cuerdas cerradas que se propagan) desacopladas:

- Partículas sin masa que se propagan en el espaciotiempo, con longitudes de onda muy grandes. En el límite  $r \rightarrow 0$ , la longitud de onda de las partículas resulta mucho mayor que la longitud característica  $L_3$ , evitando que se acoplen con las excitaciones en la región cerca del horizonte.
- Excitaciones cerca de  $r = 0$  que no son capaces de evitar el potencial gravitacional para escapar a la región asintótica.

Más aún, la región cerca del horizonte adopta una geometría característica de un espacio  $AdS_5 \times S^5$ . Para comprobar esto es preciso tener en cuenta que la métrica plana de  $\mathbb{R}^6$ , descrita en las expresiones (4.1) por  $dy^i dy^i$ , se puede escribir de manera equivalente como  $dr^2 + r^2 d\Omega_5$ , con  $d\Omega_5$  el elemento de línea de la esfera  $S^5$ ; así como recordar la forma que toma  $H(r)$  descrita en la expresión (4.8):

$$ds^2 = \frac{r^2}{L_3^2} (-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + L_3^2 \frac{dr^2}{r^2} + L_3^2 d\Omega_5. \quad (4.9)$$

Efectuando el cambio de variable  $r/L_3 \equiv L_3/z$ , se obtiene la nueva expresión:

$$ds^2 = L_3^2 \frac{-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dz^2}{z^2} + L_3^2 d\Omega_5, \quad (4.10)$$

donde se puede ver con mayor claridad un primer término que se corresponde con un espacio anti-de Sitter (en el sistema de coordenadas de Poincaré), sumado al término que describe una 5-esfera.

En la región cerca del horizonte, la expresión que toma la forma  $F_5$  es la siguiente:

$$\begin{aligned} H^{-1} &\longrightarrow \left( \frac{r}{L_3} \right)^4 \\ dH^{-1} &\longrightarrow 4 \frac{r^3}{L_3^4} dr \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$F_5 \longrightarrow (1 + \star) 4 \frac{r^3}{L_3^4} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dr = 4L_3^4 (1 + \star) \omega_5,$$

donde  $\omega_5$  es la forma de volumen,

$$\omega_5 = \frac{\sqrt{-g}}{L_3^5} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dr. \quad (4.12)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión de  $L_3^4$  en (4.1), el flujo estará cuantizado en unidades de  $N$ .

## Correspondencia entre los puntos de vista.

Se ha podido estudiar el sistema descrito desde dos puntos de vista distintos, obteniéndose a su vez en cada uno de ellos dos sistemas desacoplados en el límite de bajas energías. Uno de los dos sistemas fue, en ambos casos, la supergravedad en un espacio plano. Es natural asumir entonces una correspondencia entre el segundo sistema de cada punto de vista, es decir, que *una teoría  $\mathcal{N} = 4 U(N)$  Super Yang-Mills en 4 dimensiones es igual o dual a una teoría de supercuerdas de tipo IIB en un espacio  $AdS_5 \times S^5$ .*

Desde el punto de vista de la solución de supergravedad, la teoría gauge se obtiene al considerar el límite  $r \rightarrow \infty$  (o el límite  $z \rightarrow 0$ ), el cual se corresponde con un espacio de Minkowski en la métrica y describe la frontera del espacio  $AdS_5$ .

Además, es posible estudiar la región cerca del horizonte de forma más precisa. Si se estudia el límite  $\alpha' \rightarrow 0$ , como en la discusión de la teoría de campos descritos en la brana, es preciso que la energía de los objetos que viven en esta región se mantenga fija para poder considerar estados de las cuerdas arbitrariamente excitados. Esto implica que se debe fijar la cantidad  $\sqrt{\alpha'} E_p$ .

Al considerar valores pequeños de  $\alpha'$  y recordando la expresión (4.7), se puede afirmar que la energía medida por un observador en el infinito será del orden  $E \sim E_p \frac{r}{\sqrt{\alpha'}} = \sqrt{\alpha'} E_p \frac{r}{\alpha'}$ . Las energías medidas en la teoría de campos se corresponden con las medidas por este tipo de observador, por lo que para mantener fija esta medida en el límite  $r \rightarrow 0$ , se debe mantener la variable  $U \equiv r/\alpha'$  fija<sup>1</sup>. La métrica adquiere la siguiente expresión al introducir esta variable:

$$ds^2 = \alpha' \left[ \frac{U^2}{\sqrt{4\pi g_s N}} (-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \sqrt{4\pi g_s N} \frac{dU^2}{U^2} + \sqrt{4\pi g_s N} d\Omega_5 \right]. \quad (4.13)$$

Esta métrica es la que se obtiene cuando se consideran D3-branas situadas alrededor de un punto del espaciotiempo a una distancia  $r$ . En la teoría de Yang-Mills, fijar esta posición se corresponde con asignar un valor esperado de vacío a un escalar (en este caso, la masa de la cuerda con un extremo en el punto donde se colocan las D-branas y el otro situado en  $r = 0$ ; un valor proporcional a  $U$  que permanecerá fijo en el límite de desacoplamiento).

La teoría gauge  $U(N)$  que se describe en la brana es equivalente a la que se obtiene mediante un producto de un multiplete vector  $U(1)$  y una teoría gauge  $SU(N)$ , salvo identificaciones  $\mathbb{Z}_N$  que solo afectan a simetrías globales. La teoría de cuerdas dual, por otra parte, se ve descrita por el grupo de simetría  $SU(N)$ : esto es debido a que todos los modos interaccionan con la gravedad y no hay modos desacoplados. Para entender el significado del multiplete  $U(1)$  en la teoría de gravedad, se atiende con más precisión a las excitaciones que pueden describir las cuerdas.

Los modos de vibración que se han descrito hasta ahora se situaban en el la región cerca del horizonte (la región donde  $r$  toma valores próximos a 0). Además de ellos, hay una serie

---

<sup>1</sup>El límite  $\alpha' \rightarrow 0$  en el cual se está manteniendo fijo  $r/\alpha'$  se conoce como *límite de Maldacena*. Se trata de un límite equivalente al de la región cerca del horizonte en la solución de supergravedad, debido a que  $\frac{L_3^4}{r^4} = 4\pi g_s N \frac{\alpha'^2}{r^4} = 4\pi g_s N U^{-4} \alpha'^{-2} \rightarrow \infty$ , y por tanto  $r \rightarrow 0$ .

de modos (de valor propio nulo) que conectan esta región del espacio con el espacio que le rodea (caracterizado por valores de  $r$  arbitrariamente grandes). Dichos modos son descritos mediante 6 escalares y describen el movimiento del centro de masas de las branas, viéndose representados por el grupo de simetría  $U(1)$ .

Al formularse la correspondencia AdS/CFT, se pueden incluir los modos anteriores y de esta manera se relacionan dos teorías con grados de libertad  $U(N)$  (esta relación ha sido la introducida hasta ahora, y por tanto en ella se refleja la región que conecta la teoría  $r \rightarrow 0$  con la teoría de valores de  $r$  altos). También es posible atender a una correspondencia que no los incluye, *relacionando así la teoría gravitacional en  $r \rightarrow 0$  con una teoría  $\mathcal{N} = 4$   $SU(N)$  Super Yang-Mills*.

Por último, la relación que existen entre los parámetros libres de la teoría de Yang-Mills (el parámetro  $N$  y el acoplamiento de Yang-Mills,  $g_{YM}$ ) y los parámetros libres de la teoría de cuerdas (la relación  $L_3/\sqrt{\alpha'}$  y la constante de acoplamiento de la cuerda en la teoría de gravedad,  $g_s$ ) viene expresada de la forma:

$$2\pi g_s = g_{YM}^2, \quad 2g_{YM}^2 N = L_3^2/\alpha'^2. \quad (4.14)$$

## 4.2. Validez de la correspondencia.

La dualidad AdS/CFT relaciona una teoría de cuerdas en su límite a bajas energías y en presencia de D3-branas con una teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM  $SU(N)$  en cuatro dimensiones en la frontera del espacio  $AdS_5$ . En esta sección se profundiza en los límites donde la correspondencia resulta válida.

En primer lugar, para poder tomar la aproximación de supergravedad en la teoría de cuerdas, es necesario que se cumplan una serie de condiciones:

- Para evitar que la teoría sea sensible a la extensión finita de la cuerda, es necesario que la curvatura del espacio ambiente dado por la ecuación (4.13),  $L_3$ , sea mucho mayor que la longitud de la cuerda:  $L_3 = \sqrt{\alpha'}(4\pi g_s N)^{1/4} \gg \sqrt{\alpha'} = l_s$ . Esto sitúa la aproximación en el límite  $\lambda \equiv 2\pi g_s N = g_{YM}^2 N \gg 1$ . En caso contrario podrían aparecer estados masivos de la cuerda a bajas energías junto con los campos sin masa de supergravedad.
- Para evitar correcciones cuánticas en la cuerda, gobernadas por  $g_s$ , la aproximación se sitúa en el límite  $g_s \rightarrow 0$ .

El límite donde se sitúa la aproximación se obtiene, por tanto, al considerar  $g_s \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$  manteniendo constante el denominado *acoplamiento de 't Hooft*,  $\lambda$ , de manera que cumpla  $\lambda \gg 1$ .

En una teoría gauge con campos adjuntos, los parámetros de expansión serán  $\lambda$  y  $1/N$ . Si solo hay campos adjuntos, la dependencia de las amplitudes con los parámetros de expansión es de la forma [28]:

$$\sim (g_{YM}^2 N)^L N^{1-2h}, \quad (4.15)$$



donde  $L$  es el número de loops o bucles en el diagrama de Feynman y  $h$  el número de asas de la superficie donde se sitúa la interacción representada por el diagrama.

La expresión anterior permite ver como los diagramas que no pueden dibujarse sobre una superficie plana estarán multiplicados por factores  $1/N^2$ . Esto tiene como consecuencia que en el límite  $N \rightarrow \infty$ , donde  $g_{YM}^2 N$  permanece fijo (conocido como *límite de 't Hooft*), los diagramas planos tengan una amplitud mucho mayor que permite despreciar el resto de diagramas. Es posible realizar una expansión perturbativa sobre la constante de acoplamiento  $\lambda$ , requiriendo por lo tanto  $\lambda \ll 1$  (al contrario que en la aproximación de supergravedad).

Es por este motivo que la correspondencia es considerada una dualidad: las dos descripciones que son asociadas son válidas en regiones completamente opuestas. Esto también provoca que sea difícil comprobar dicha dualidad, ya que en cada régimen solo es posible emplear una de las dos descripciones del sistema.

La validez de la correspondencia AdS/CFT puede ser una cuestión más compleja que lo descrito en esta sección. Hay distintas versiones de la dualidad que difieren en los límites para los cuales ésta será cierta, y cada una de ellas tiene una serie de dificultades asociadas:

- La versión más débil de la correspondencia postula que para que sea cierta, la aproximación de supergravedad de la teoría de cuerdas debe poder realizarse y, por tanto, será preciso que el valor  $\lambda = 4\pi g_s N$  sea siempre grande. Este punto de vista ha sido el que se ha tomado en el resto del capítulo.
- Una versión algo más fuerte afirma que la correspondencia es válida para cualquier  $g_s N$  finito, siempre que  $N \rightarrow \infty$  y  $g_s \rightarrow 0$ . Esto permite identificar las correcciones del acoplamiento de la cuerda y la worldsheet cuyo factor es  $\alpha'/L_3^2 = 1/\sqrt{\lambda}$ , pero no se puede comprobar si las correcciones de factor  $4\pi g_s = g_{YM}^2 = \lambda/N^2$  también coincidirán.
- La versión más fuerte de la dualidad, y la que se piensa que es la versión correcta, afirma que la correspondencia es válida para cualquier valor de  $g_s$  y  $N$ , a pesar de que los cálculos solo puedan ser realizados en determinados límites.

Los cálculos que se puedan realizar de manera exacta bajo estas aproximaciones resultan de gran interés, ya que en caso de poder realizarse suponen pruebas “experimentales” de la validez de la dualidad en estos regímenes.

#### 4.2.1. Técnicas de localización en la teoría de campos.

Las técnicas de localización supersimétrica son herramientas capaces de conectar la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM con una teoría de cuerdas para cualquier valor de  $g_s$ , requiriendo tan solo que el valor de  $N$  sea suficientemente grande. En esta sección permitirán realizar los cálculos correspondientes con la teoría conforme en la región  $\lambda \gg 1$ , donde se podían despreciar los diagramas que no fuesen planos al realizar una expresión sobre  $1/N$ , pero ahora no es posible realizar una expansión perturbativa sobre la constante de acoplamiento.

Un operador con un dual holográfico bien definido que además puede ser calculado mediante estas técnicas de localización, es el *loop de Wilson*. Se trata de un observable invariante

gauge (obtenido a partir de la holonomía de la conexión gauge alrededor de un loop [29]) definido de la forma:

$$W_{\mathcal{R}}(C, \mathbf{n}) = \left\langle \text{Tr}_{\mathcal{R}} P \exp \left[ \oint_C ds (i\dot{x}^\mu A_\mu + |\dot{x}| n^I \Phi_I) \right] \right\rangle. \quad (4.16)$$

El operador está caracterizado por un contorno  $C = \{x^\mu(s) | s \in (0, 2\pi)\}$  en el espaciotiempo 4-dimensional, un contorno en  $\mathbb{S}^5$  parametrizado por un vector unidad 6-dimensional  $n^I$ , y por una representación  $\mathcal{R}$  del grupo gauge  $U(N)$  (en la representación fundamental, esta etiqueta se omitirá). Además, aparece el operador de orden de caminos  $P$  (*path-ordering operator*), el cual ordena los factores del campo gauge que surgen al expandir la exponencial siguiendo el orden en el que se insertan en el contorno. En esta sección se van a considerar loops de tipo espacial y, por tanto, se va a obtener siempre que  $\dot{x} > 0$ .

El loop de Wilson resulta invariante local bajo transformaciones de supersimetría. Para mostrar esto, se muestra la expresión de una variación por supersimetría del operador:

$$\delta_\epsilon W = \left\langle \text{Tr}_{\mathcal{R}} P \int dt \bar{\epsilon} (i\dot{x}^\mu \gamma_\mu + |\dot{x}| \gamma^5 n^I \Gamma_I) \Psi \exp \left[ \int_t^{t+2\pi} ds (i\dot{x}^\mu A_\mu + |\dot{x}| n^I \Phi_I) \right] \right\rangle. \quad (4.17)$$

La combinación de las matrices de Dirac que aparecen en la variación es degenerada debido a que  $n^I$  es un vector unitario:

$$(i\dot{x}^\mu \gamma_\mu + |\dot{x}| \gamma^5 n^I \Gamma_I)^2 = 0. \quad (4.18)$$

Esto permite reescribir la expresión de la forma:

$$\bar{\epsilon} (i\dot{x}^\mu \gamma_\mu + |\dot{x}| \gamma^5 n^I \Gamma_I) \Psi = i\bar{\epsilon} \mathcal{P}^+ \dot{x}^\mu \gamma_\mu \Psi, \quad (4.19)$$

haciendo uso de proyectores que se definen como sigue:

$$\mathcal{P}^\pm = 1 \pm i \frac{\dot{x}^\mu}{|\dot{x}|} \gamma_\mu \gamma^5 n^I \Gamma_I. \quad (4.20)$$

Si se toma  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_0 \mathcal{P}^-$  y se considera constante (lo cual no es trivial al haber dependencia con el vector  $\dot{x}^\mu$ ), la variación supersimétrica del loop de Wilson se anula. Este sería el caso, por ejemplo, si  $C$  describe una línea recta. No considerar el parámetro de variación constante refleja de manera más general la dependencia con el espaciotiempo, pero aparece un contorno sobre  $\mathbb{S}^5$  no trivial y correlacionado con el contorno sobre el espaciotiempo  $C$  [30].

La invariancia local es suficiente para evitar divergencias a la región ultravioleta en los loops de Wilson, debido a que dichas divergencias surgen de pequeñas variaciones de un campo cuántico y, a bajas distancias, una curva derivable se comporta como una recta.

Un loop de Wilson algo más complejo que el descrito en el caso completamente supersimétrico, es el loop invariante bajo transformaciones superconformes. Si bien no estará completamente protegido de posibles correcciones cuánticas, este operador resultará invariante bajo transformaciones de la forma:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\eta} + \bar{\chi} x^\mu \gamma_\mu, \quad (4.21)$$

que son transformaciones superconformes debido a que  $\bar{\epsilon}$  es una función lineal de  $x^\mu$ . En la expresión aparecen además dos espinores de Majorana-Weyl arbitrarios e independientes de las coordenadas,  $\bar{\eta}$  y  $\bar{\chi}$ . El caso más simple, el loop circular, puede ser calculado de manera exacta mediante localización, así como partiendo de un enfoque desde la teoría dual según la correspondencia AdS/CFT.

En primer lugar, para comprobar que este operador es invariante bajo la mitad de transformaciones superconformes, se va a considerar que el loop está situado en el plano que forman las direcciones cuyo índices asociados son  $\mu = 2$  y  $\mu = 3$ . Esto permite establecer las siguientes identificaciones:

$$\dot{x}^a = \epsilon^{ab}x_b, \quad \gamma_a\gamma^5 = \epsilon_{ab}\gamma^0\gamma^1\gamma^b, \quad (4.22)$$

donde los índices  $a$  y  $b$  recorren las direcciones del plano. Bajo estas expresiones, los proyectores definidos en (4.20) se describen de la forma:

$$\mathcal{P}^\pm = 1 \pm i\gamma^0\gamma^1n^I\Gamma_Ix^a\gamma_a. \quad (4.23)$$

Un loop de Wilson cuya curva  $C$  está situada en un plano como el que se describe, en general, conmuta con 4 de las 16 supercargas de la teoría, probando ser una solución de tipo 1/4 BPS [30]. En este plano se cumple la relación  $x^a\gamma_a = x^\mu\gamma_\mu$ , lo que permite que en el caso del loop circular un espinor de la forma  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_0\mathcal{P}^-$  (con  $\bar{\epsilon}_0$  constante) tenga la forma de variación superconforme descrita en la expresión (4.21). Esto supone una relación del operador de Wilson con el que define  $C$  al ser una línea recta mediante una transformación conforme [31], y por este motivo el operador será de tipo 1/2 BPS.

El valor esperado de un loop con estas características puede ser calculado mediante técnicas de localización<sup>2</sup>. Para ello, la integral de caminos definida en  $\mathbb{S}^4$  localiza los modos de valor propio nulo de uno de los campos escalares (que por consistencia, es el mismo que aparece en el operador del loop de Wilson) y la función de partición se queda reducida al modelo matricial gaussiano hermítico:

$$Z = \int d^{N^2}\Phi e^{-\frac{8\pi^2N}{\lambda}\text{Tr}\Phi^2}. \quad (4.24)$$

El motivo por el que se considera la integral definida en  $\mathbb{S}^4$  es que en una teoría conforme (como la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM) las funciones de correlación en la esfera son equivalentes a las del plano  $\mathbb{R}^4$ . En el modelo sobre la esfera, el loop de Wilson cuya curva se sitúa en el ecuador de la misma (la cual se denota por  $C_{esf}$ ) se reduce al promedio de la exponencial [32]:

$$W_{\mathcal{R}}(C_{esf}) = \langle \text{Tr}_{\mathcal{R}} e^{2\pi\Phi} \rangle. \quad (4.25)$$

El valor esperado en la representación fundamental del grupo gauge puede ser calculado de manera exacta [33], empleando los polinomios de Laguerre denotados por  $L_n^m(x)$ :

$$W(C_{esf}) = e^{\frac{\lambda}{8N}} L_{N-1}^1\left(-\frac{\lambda}{4N}\right). \quad (4.26)$$

---

<sup>2</sup>Esto se debe a que el generador empleado para la localización en la integral de caminos se encuentra entre las supersimetrías que preserva el loop de Wilson [32].

Para poder emplear más adelante la correspondencia AdS/CFT, es necesario situarse en el límite de grandes  $N$ . La función de partición puede expresarse, denotando los valores propios del modelo matricial por  $a_i, a_j$ , de la forma [34]:

$$Z = \int d^N a \prod_{i < j} (a_i - a_j)^2 e^{-\frac{8\pi^2 N}{\lambda} \sum_i a_i^2}. \quad (4.27)$$

Los valores propios que minimizan la acción efectiva satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{8\pi}{\lambda} a_i, \quad (4.28)$$

que se obtuvieron al aplicar la aproximación de punto de silla (la cual resulta exacta en el límite  $N \rightarrow \infty$ ). Estas suponen una condición de equilibrio de  $N$  partículas que se repelen entre sí de manera logarítmica según un mismo potencial armónico. Esta repulsión evita que los valores propios se sitúen en el mínimo del potencial, provocando una distribución discreta de dichos valores. En el límite de grandes  $N$  se reemplaza el caso en el que se toman un conjunto discreto de valores propios por toda una distribución continua, cuya expresión es la siguiente:

$$\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(x - a_i). \quad (4.29)$$

Con ayuda de esta expresión de la distribución, se puede reescribir la condición (4.28) de la forma:

$$\int_{-\mu}^{\mu} \frac{dy \rho(y)}{x - y} = \frac{8\pi^2}{\lambda} x, \quad x \in (-\mu, \mu). \quad (4.30)$$

El valor de  $\mu$  de la ecuación se determina a partir de la condición de normalización. Si este valor es fijo y se cumple  $\rho(\pm\mu) = 0$ , la solución será única [35], y será la *distribución semicircular de Wigner*:

$$\rho(x) = \frac{2}{\pi\mu^2} \sqrt{\mu^2 - x^2}, \quad \text{donde } \mu = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}. \quad (4.31)$$

A partir de la ecuación (4.25) y con las expresiones sobre la distribución de valores propios, se obtiene que [36]:

$$\frac{1}{N} W(C_{esf}) = \int_{-\mu}^{\mu} dx \rho(x) e^{2\pi x} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}), \quad (4.32)$$

donde  $I_\nu(z)$  es una función de Bessel modificada. En el régimen de acoplamiento fuerte, en el cual  $\lambda$  toma valores altos, estas funciones tienen un comportamiento asintótico de la forma [37]:

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k(\nu)}{z^k} + \frac{ie^{-z+\pi\nu i}}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\nu)}{z^k}, \quad (4.33)$$

denotando por  $a_k(\nu)$  a las funciones:

$$a_k(\nu) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \left(\frac{1}{2} + \nu\right)_k \left(\frac{1}{2} - \nu\right)_k \quad (k \geq 0), \quad (4.34)$$

y tomando<sup>3</sup>  $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a) = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ . Así, para acoplamientos fuertes, se obtiene a primer orden en  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  (y teniendo en cuenta que el segundo sumatorio se vuelve despreciable al estar multiplicado por  $e^{-\sqrt{\lambda}}$ ):

$$\frac{1}{N}W(C_{esf}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda^{-3/4}e^{\sqrt{\lambda}}. \quad (4.35)$$

La expresión (4.35) se trata de un resultado explícito calculado a partir de la integral de caminos de la teoría SYM en el límite  $\lambda \gg 1$ . El valor esperado del loop de Wilson en la representación fundamental, según la correspondencia de Maldacena, se corresponderá con la amplitud de la teoría de supergravedad dada por:

$$W(C, \mathbf{n}) = \int \mathcal{D}h_{ab}\mathcal{D}X^M\mathcal{D}\theta^\alpha e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}S_{cuerda}}. \quad (4.36)$$

Se ha denotado al campo interpretable como métrica de la worldsheet por  $h_{ab}$ , la cual es riemanniana al ser un loop de tipo espacial; a la función de embedding de la cuerda por  $X^M$ ; y a los fermiones de la worldsheet por  $\theta^\alpha$ . En el análisis clásico que se está realizando, basta con considerar que la acción de la cuerda denotada por  $S_{cuerda}$  es la parte bosónica del modelo sigma no lineal en supercuerdas bajo una métrica riemanniana. La acción de dicho modelo fue descrita en la expresión (3.9), sobre la cual se considera que está situado en un espacio  $AdS_5$ , y por lo tanto aparece una coordenada más que en el espaciotiempo plano en 4 dimensiones, denotada por  $Z(\sigma, t)$ ; se toma unas unidades adecuadas en la longitud de la cuerda que permitan identificar  $\alpha' = \frac{1}{2\pi}$ ; y se considera sin pérdida de generalidad que el término asociado al área de la worldsheet es  $G_{MN}(X) = 1$ :

$$S_{cuerda} = \frac{1}{2} \int dt d\sigma \sqrt{h} h^{ab} \frac{1}{Z^2} (\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \partial_a Z \partial_b Z) + \cdots \quad (4.37)$$

Es necesario que la curva  $C$  asociada al loop de Wilson esté situada en la frontera del espacio AdS (en el punto  $z = 0$  según el sistema de coordenadas de Poincaré, descrito en la métrica (4.10)) para justificar el estudio del operador desde el punto de vista de la teoría conforme de campos. Esto provoca una serie de condiciones de frontera sobre las funciones de embedding de la worldsheet, de la misma manera que lo hace  $n^I$  sobre la 5-esfera:

$$X^\mu(\sigma, 0) = x^\mu(\sigma), \quad Z(\sigma, 0) = 0, \quad N^I(\sigma, 0) = n^I(\sigma), \quad (4.38)$$

donde  $N^I(\sigma, t)$  denota el vector normal a  $S^5$  en cada punto.

En el régimen de fuertes acoplamientos,  $\lambda \rightarrow \infty$ , la integral de caminos de la cuerda se ve saturada por un punto de silla y el valor esperado para el loop de Wilson será el que minimice el área de la worldsheet. Esto permite calcular este valor mediante las simetrías del problema, tratando de encontrar una superficie en el espacio AdS que forme un círculo en su frontera.

Si la curva  $C$  fuese una línea recta caracterizada por  $x^\mu(\sigma) = \frac{n_1^\mu}{2R} + \sigma n_2^\mu$ , con  $n_1^\mu$  y  $n_2^\mu$  dos vectores unitarios ortogonales y  $R$  una constante, la superficie minimal se obtendría de manera trivial:

$$X^\mu = \frac{n_1^\mu}{2R} + \sigma n_2^\mu, \quad Z = t, \quad (4.39)$$

---

<sup>3</sup>La notación empleada se conoce como símbolo de Pochhammer.

que se corresponde con el embedding de un hiperplano  $AdS_2$  en  $AdS_5$ .

Para obtener la superficie minimal en la que  $C = C_{esf}$  describe una circunferencia, es posible aplicar una isometría en la métrica del espacio  $AdS_5$  que se traduce, en la frontera, por una inversión y una traslación:

$$\bar{X}^\mu = \frac{X^\mu}{Z^2 + X^2} - Rn_1^\mu, \quad \bar{Z} = \frac{Z}{Z^2 + X^2}. \quad (4.40)$$

La transformación descrita mantiene invariante la acción de la cuerda, por lo que sus ecuaciones de movimiento serán también ecuaciones de movimiento transformadas de la acción original. Al aplicarse este cambio a las igualdades (4.39), y transformando a su vez las coordenadas de la worldsheet de la forma:

$$\tanh \bar{t} = \frac{t}{R} \frac{1}{\frac{1}{4R^2} + t^2 + \sigma^2}, \quad \tan \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{R} \frac{1}{\frac{1}{4R^2} - t^2 - \sigma^2}, \quad (4.41)$$

se obtiene la superficie minimal buscada, descrita por:

$$\bar{X}^\mu = \frac{R}{\cosh \bar{t}} (n_1^\mu \cos \bar{\sigma} + n_2^\mu \sin \bar{\sigma}), \quad \bar{Z} = R \tanh \bar{t} \quad (4.42)$$

Esta solución describe una semiesfera en el espacio AdS, ya que cumple  $\bar{X}^2 + \bar{Z}^2 = R^2$ . La curva descrita al tomar  $t = 0$  cumple las condiciones de frontera propuestas anteriormente y, por tanto, es un círculo situado en el gauge conforme. Para calcular el área se puede tomar en la acción de la cuerda que  $h_{ab} = \delta_{ab}$ . La divergencia que aparece en la integral sobre  $\bar{t}$  debido al factor  $1/\bar{Z}^2$  se puede regularizar mediante un *cutoff*  $\bar{Z} < \varepsilon$  [38], y aplicando sobre el área regularizada (más adelante denotada por  $S_{cuerda,ren}$ ) un operador  $1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$ . Al aplicar este procedimiento y tomar el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se obtiene:

$$S_{cuerda,ren}(C_{esf}) = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \int_\varepsilon^\infty \frac{d\bar{t}}{\sinh^2 \bar{t}} = -2\pi. \quad (4.43)$$

Así, el valor esperado del loop de wilson para grandes  $\lambda$  es el siguiente:

$$W(C_{esf}) \sim e^{\sqrt{\lambda}}. \quad (4.44)$$

Este resultado es perfectamente compatible con (4.35) [36]. El factor  $N$  que aparece en el cálculo se corresponde con fluctuaciones de la cuerda alrededor de la superficie minimal calculada [39]; el factor  $\lambda^{-3/4}$  se asocia a la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  de la función de partición del disco [33]; y la constante numérica se asocia a fluctuaciones [40] así como a la estructura y normalización de la integral de caminos [41].

### 4.3. Relación entre los operadores de la teoría gauge y los campos de la teoría de gravedad.

Una vez propuesta la correspondencia entre la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM y la supergravedad en  $AdS_5$ , en esta sección se estudiará la relación entre los operadores invariantes gauge de la primera teoría con los campos de la última.

Un operador gauge en la teoría conforme,  $\mathcal{O}$ , queda caracterizado por sus dimensiones conformes,  $\Delta$ , y su índice de representación en el grupo gauge que representa las simetrías internas,  $I_n$ . Las simetrías internas mencionadas son las  $R$ -simetrías discutidas en la sección 2.2.1, y el grupo gauge al que pertenecen es  $SO(6) = SU(4)$ ; este grupo se corresponde con la simetría de la esfera  $\mathbb{S}^5$  en el espacio  $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$ . El espacio  $AdS_5$  tendrá una isometría con el grupo de simetrías conformes,  $SO(2,4)$  (el cual se estudia en la sección 2.2.1, al igual que el grupo  $SO(6)$ ). Por último, es preciso que el operador  $\mathcal{O}$  sea invariante gauge ya que no hay un grupo gauge en la teoría de supergravedad.

En la teoría de cuerdas,  $\mathcal{O}$  se corresponderá con un campo. En particular, esto será cierto en el límite de supergravedad, en el cual se va a limitar la discusión. Con el objetivo de ver esta correspondencia, es posible realizar una expansión de un campo de supergravedad en armónicos esféricos en  $\mathbb{S}^5$ : estos modos actúan de manera similar a los modos de una expansión de Fourier y pueden ser tomados al ser  $\mathbb{S}^5$  un espacio compacto.

El campo escalar queda expandido de la forma:

$$\phi(x, y) = \sum_n \sum_{I_n} \phi_{(n)}^{I_n}(x) Y_{(n)}^{I_n}(y). \quad (4.45)$$

En la expresión aparecen las coordenadas en  $AdS_5$  representadas por  $x$  y las coordenadas en  $\mathbb{S}^5$  por  $y$ . El armónico esférico,  $Y_{(n)}^{I_n}(y)$ , actúa como un modo de Fourier de la forma  $e^{inx/L_3}$ , donde el orden de la expansión viene denotado en ambos casos por  $n$ .

El campo que existe en el espacio AdS (y tiene masa  $M$ ),  $\phi_{(n)}^{I_n}(x)$ , será el que se corresponde con un operador en la teoría gauge (de dimensión conforme  $\Delta$ ),  $\mathcal{O}_{(n)}^{I_n}$ . La relación entre  $\Delta$  y  $M$  para un espacio  $AdS_{d+1}$  de dimensión más general viene dada por:

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + M^2 L_3^2}. \quad (4.46)$$

Más aún, si en lugar de considerar un campo escalar se considera una  $p$ -forma diferencial en un espacio  $AdS_{d+1}$ , la relación  $(\Delta - p)(\Delta + p - d) = M^2 L_3^2$  permite obtener la siguiente expresión:

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + M^2 L_3^2 - p(p - d)}. \quad (4.47)$$

Una reducción dimensional en  $\mathbb{S}^5$  vendrá determinada por el orden más bajo de la expansión, proporcionando así una teoría de supergravedad en  $AdS_5$ . Es preciso notar que en este espacio, al contrario que en un espaciotiempo plano, no es necesario que se cumpla  $M^2 \geq 0$  para que el campo sea estable. Para que la estabilidad sea garantizada basta con que la dimensión  $\Delta$  sea real (esto se conoce como *cota de Breitenlohner-Freedman*). En un campo escalar, esto se traduce en la condición:

$$M^2 L_3^2 \geq -\frac{d^2}{4}. \quad (4.48)$$

Una prueba de este límite se puede obtener a partir de la acción del campo escalar libre en el espacio AdS,

$$S = -\frac{C}{2} \int dz d^d x \sqrt{-g} (g^{mn} \partial_m \phi \partial_n \phi + M^2 \phi^2), \quad (4.49)$$

donde  $C$  es una constante proporcional a  $N^2$  y  $M$  la masa del escalar. Si además el campo es de la forma  $\phi = \phi(z)$  (y teniendo en cuenta la expresión de  $g^{mn}$ ), la acción tiene la forma:

$$S = -\frac{CL_3^{d-1}}{2} \int dz d^d x \frac{1}{z^{d+1}} (z^2 \partial_z \phi \partial_z \phi + M^2 L_3^2 \phi^2) \quad (4.50)$$

Un cambio de coordenadas  $y = \ln z$  junto con un reescalado del campo escalar dado por  $\phi = z^{d/2} \tilde{\phi}$  reduce la acción (salvo términos frontera) a la expresión:

$$S = -\frac{CL_3^{d-1}}{2} \int dy d^d x \left( \partial_y \tilde{\phi} \partial_y \tilde{\phi} + \left( M^2 L_3^2 + \frac{1}{4} d^2 \right) \tilde{\phi}^2 \right). \quad (4.51)$$

Esta última expresión puede interpretarse como la acción de un campo escalar de masa  $M_{eff}^2 L_3^2 = M^2 L_3^2 + \frac{1}{4} d^2$  en un espaciotiempo plano. La condición (4.48) se deduce al notar que en un espaciotiempo plano, la teoría de campos solo es consistente para  $M_{eff}^2 \geq 0$ .

#### 4.4. La correspondencia en el espectro.

La expansión descrita en la ecuación (4.45) da lugar a una torre de campos  $\phi_{(n)}$  en supergravidad. A su vez, el operador  $\mathcal{O}$  da lugar a una torre similar de operadores en la teoría gauge que se corresponden con una representación definida de un grupo de simetría. En esta sección se pretenden identificar los componentes más bajos de las torres, como debería ocurrir al identificarse los dos tipos de teoría, así como se comparan las masas de los campos con las dimensiones conformes de los operadores.

Para obtener el espectro de operadores en el grupo de simetría conforme,  $SO(2,4)$ , se actúa sobre  $\mathcal{O}$  con el operador  $P_\mu$  como si se tratase de un operador de creación. Sin embargo, al considerar la supersimetría, el grupo de la teoría es  $SU(2,2|4)$  y hay un mayor número de representaciones (debido a que hay una mayor cantidad de simetrías y, por tanto, se obtendrá un mayor número de campos o de “operadores de creación”). A pesar de que esto supondría que la representación de supersimetría  $\mathcal{N} = 4$  en cuatro dimensiones tuviese  $2^{16}$  operadores primarios, obtenidos por sus 16 supercargas, es preciso recordar que los estados no perturbativos de la supergravidad son de tipo 1/2 BPS: se puede obtener un supermultiplete “corto” a partir de los operadores quirales primarios, que son aquellos que son aniquilados por alguna combinación de las supercargas.

La dimensión conforme de los operadores quirales primarios está determinada únicamente por la carga de  $R$ -simetría, ya que la masa de este tipo de estados es igual a dicha carga (y a partir de la masa se obtiene  $\Delta$  según la expresión (4.47)). Es por este motivo que, a pesar de estar trabajando en una región de la teoría gauge no perturbativa ( $\lambda \gg 1$ ), no habrán correcciones cuánticas sobre la dimensión conforme; estas correcciones se traducirían a su vez en correcciones cuánticas sobre la  $R$ -carga, lo cual es imposible debido a la relación de igualdad entre la carga y la masa que dejaría de respetarse. Esto prueba que la dimensión  $\Delta$  será igual independientemente del valor de  $\lambda$  y, por tanto, se puede aplicar la correspondencia AdS/CFT para calcular su valor.



Los modos de supergravedad de la teoría  $AdS_5$  se corresponderán con campos quirales primarios de la teoría SYM, mientras que los campos generados por perturbaciones de las cuerdas estarán, en general, en el supermultiplete grande. En particular, hay 6 tipos de campos escalares de supergravedad en  $AdS_5$ , los cuales se corresponden con las 6 representaciones quirales primarias siguientes (donde los campos de la teoría gauge quedan denotados por  $\phi^I, \lambda_{\alpha A}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^A$  y  $A_\mu$ ):

- $\mathcal{O} \equiv \text{Tr}(\phi^{I_1} \dots \phi^{I_n})$ , de dimensión  $\Delta = n$  (hay  $n$  campos de dimensión 1) y con masas de los campos dadas por  $M^2 L_3^2 = n(n-4)$  ( $n \geq 2$ ).
- $Q^2 \mathcal{O}_{n+2} (\equiv \epsilon^{\alpha\beta} \{Q_\alpha, [Q_\beta, \mathcal{O}_n]\}) = \text{Tr}(\epsilon^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha A} \lambda_{\beta B} \phi^{I_1} \dots \phi^{I_n})$ , de dimensión  $\Delta = n+3$  (la dimensión de  $\lambda$  es  $3/2$ ) y masas  $M^2 L_3^2 = (n+3)(n-1)$  ( $n \geq 0$ ).
- $Q^4 \mathcal{O}_{n+2} = \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \phi^{I_1} \dots \phi^{I_n})$ , de dimensión  $\Delta = n+4$  ( $A_\mu$  tiene dimensión 1) y masas  $M^2 L_3^2 = n(n+4)$  ( $n \geq 0$ ).
- $Q^2 \bar{Q}^2 \mathcal{O}_{n+4} = \text{Tr}(\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \lambda_{\alpha A_1} \lambda_{\beta A_2} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^{B_1} \lambda_{\dot{\beta}}^{B_2} \phi^{I_1} \dots \phi^{I_n})$ , de dimensión  $\Delta = n+6$  y masas  $M^2 L_3^2 = (n+6)(n+2)$  ( $n \geq 0$ ).
- $Q^4 \bar{Q}^2 \mathcal{O}_{n+4} = \text{Tr}(\epsilon^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha A} \lambda_{\beta B} F_{\mu\nu}^2 \phi^{I_1} \dots \phi^{I_n})$ , de dimensión  $\Delta = n+7$  y masas  $M^2 L_3^2 = (n+3)(n+7)$  ( $n \geq 0$ ).
- $Q^4 \bar{Q}^4 \mathcal{O}_{n+4} = \text{Tr}(F_{\mu\nu}^4 \phi^{I_1} \dots \phi^{I_n})$ , de dimensión  $\Delta = n+8$  y masas  $M^2 L_3^2 = (n+4)(n+8)$  ( $n \geq 0$ ).

El cálculo de las masas de cada campo se ha realizado mediante la relación descrita en (4.47). El hecho de que se obtenga mediante este método unos valores de masa iguales a los que se obtienen al estudiar los campos sin considerar la correspondencia AdS/CFT puede considerarse una prueba “experimental” de la validez de esta correspondencia.

## Capítulo 5

# D3-branas en un espacio Anti-de Sitter

En este capítulo se va a atender de manera más concreta a las características de un espacio Anti de-Sitter en el que se colocan  $N$  D3-branas. El estudio parte del ansatz para las soluciones en supergravedad descrito en la sección 3.4.2, el cual se volvió a emplear en el capítulo 4 demostrando su compatibilidad con la correspondencia de Maldacena. El ansatz supone una solución de una teoría de tipo IIB cuya métrica tiene un comportamiento propio de un espacio  $AdS_5 \times S^5$  en su región cerca del horizonte.

En una teoría de tipo II hay un acoplamiento entre cuerdas cerradas y cuerdas abiertas, y dado que estas últimas solo tienen una supersimetría que mantiene invariante la condición sobre sus extremos, la teoría es invariante bajo  $\mathcal{N} = 1$  supersimetría. Si no hay ninguna D-brana, el espacio vacío es invariante bajo  $\mathcal{N} = 2$  supersimetrías: esto vuelve a señalar que las D-branas en la teoría II pueden ser interpretadas como  $p$ -branas, que son estados 1/2 BPS invariantes bajo la mitad de las supersimetrías.

La consistencia en la identificación entre D-branas y las soluciones de supergravedad de  $p$ -branas se ve reflejada en distintos aspectos. En ambos casos, la carga surge al acoplar de manera natural el worldvolume de la brana a una  $(p + 1)$ -forma diferencial  $C_{p+1}$ , por lo que cada tipo de brana tendrá asociada una carga  $R - R$ . La carga de las D-branas está cuantizada debido a que son soluciones de tipo 1/2 BPS, al igual que ocurre con la carga de las  $p$ -branas al estudiarla más allá del límite clásico (la carga clásica de este último tipo de brana no está cuantizada). Más aún, la tensión de una D-brana se comporta de forma  $\sim 1/g_s$ , causando que su acción sea de tipo solitónico (en el cuadro 3.1 se mostraba una dependencia entre el tipo de D-brana con el comportamiento de la tensión); esto ocurre de igual manera con la acción de las  $p$ -branas, que se comportan como un solitón  $R - R$  [25] y por tanto su tensión tiene la misma forma  $\sim 1/g_s$ .

Como se introducía anteriormente, el número de dimensiones ortogonales a la  $Dp$ -brana determina el tipo de teoría de supercuerdas. La teoría IIA admite  $Dp$ -branas con  $p = 0, 2, 4, 6$  y 8, mientras que la teoría IIB admite  $p = -1, 1, 3, 5, 7$  y 9. La dualidad de Hodge descrita en la sección 3.2.3 relaciona las distintas fuerzas de campo que se obtienen al diferenciar las

$(p+1)$ -formas diferenciales (que por tanto son  $(p+2)$ -formas). Más concretamente, una fuerza de campo descrita por una  $n$ -forma será dual Hodge de otra fuerza de campo descrita por una  $(10-n)$ -forma. Así, una  $p$ -brana y una  $(6-p)$ -brana son fuentes de los mismos campos, pero la interpretación de qué campo es “magnético” y cual es “eléctrico” varía en cada caso.

Las D3-branas suponen un caso notable en el que la fuerza de campo es una 5-forma diferencial y por tanto es autodual, permitiendo así interpretar la forma  $C_4$  como un campo eléctrico y magnético. Otros casos notables son el de las D9-branas, que no se acoplan a una fuerza de campo pero sí a un potencial no trivial [42]; y el de las D8-branas, ya que la ecuación de campos para la 10-forma no permite estados que se propagan, pero dispone de una densidad de energía significativa físicamente [22].

La  $(-1)$ -brana es, esencialmente, un *instantón de Dirichlet* (o *D-instantón*) obtenido al imponer condiciones de Dirichlet tanto en la dirección temporal como en las espaciales [43]. Si bien no está claro que la T-dualidad en la dirección temporal, mediante la cual se relacionan  $(-1)$ -branas y 0-branas, tenga un sentido físico, se puede argumentar la presencia de las primeras de la siguiente forma. Al admitir la existencia de 0-branas en la teoría IIA, la línea del universo de las mismas (requerida por la mecánica cuántica) puede estar descrita en una dirección puramente espacial. Esto implicaría que las branas estén localizadas en el tiempo (serán instantones), y al aplicar la relación de T-dualidad sobre dicha dirección espacial se obtendría una  $(-1)$ -brana.

Al tener una acción de la forma  $\sim 1/g_s$ , los D-instantones son una de las claves de la relevancia de la presencia de D-branas en las teorías de supergravedad, ya que sus efectos contribuyen con orden  $e^{-1/g_s}$  como se espera que se comporten las correcciones no perturbativas en la teoría de cuerdas [44].

## 5.1. Comportamiento de las $N$ D3-branas.

El comportamiento dinámico que siguen las  $N$  D3-branas colocadas en un espacio con supergravedad puede ser descrito, atendiendo a la correspondencia de Maldacena, mediante una teoría  $\mathcal{N} = 4$   $U(N)$  SYM.

Al estudiar el comportamiento de una D $p$ -brana, es frecuente tomar un sistema de referencia que permita localizar la brana en  $9-p$  coordenadas del mundo, mientras que aparece extendida en las  $p+1$  coordenadas restantes. La tabla 5.1 representa esta elección de coordenadas para el caso de una D3-brana, la cual se extiende en las direcciones  $M = 0, 1, 2, 3$  y es localizada en el resto de direcciones espaciales.

$s^M$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D3-brana	×	×	×	×	·	·	·	·	·	·

Cuadro 5.1: Extensión de una D3-brana a partir del sistema de referencia escogido. Las coordenadas del mundo están representadas por  $s^M$  (siendo  $s^0$  la dirección temporal). Las direcciones sobre las que se extiende la D3-brana están denotadas por un aspa, así como las direcciones donde aparece localizada lo están por un punto.

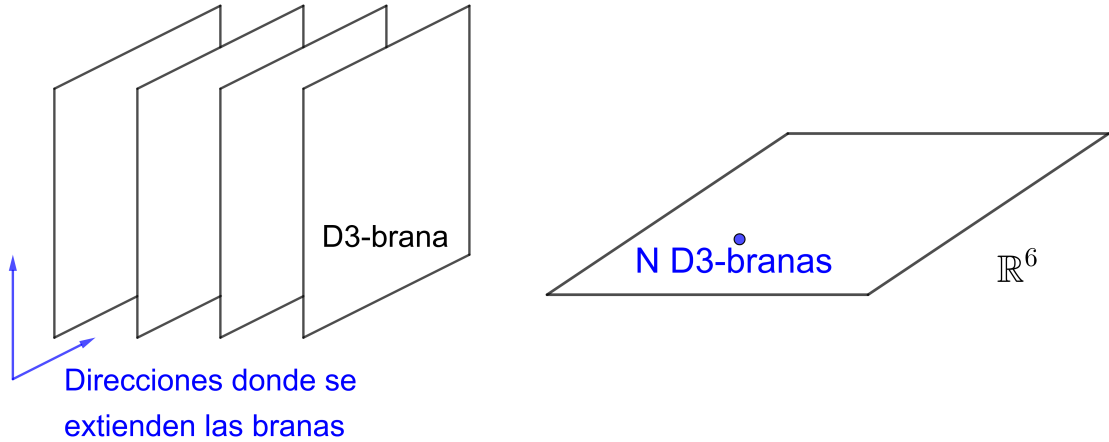


Figura 5.1: Representación esquemática de un conjunto de  $N$  D3-branas colocadas en un espaciotiempo de 10 dimensiones. En la figura de la izquierda las branas son representadas como objetos de dos dimensiones, y están colocados de manera paralela con una separación despreciable entre ellos. La figura de la derecha coloca este conjunto de branas en las 6 coordenadas sobre las que están localizadas, que forman en este caso un espacio  $\mathbb{R}^6$ .

La colocación de las branas en un espaciotiempo vacío tiene como consecuencia un cambio en la métrica del mismo. Siguiendo con lo introducido en la sección 3.4.2, se puede plantear un ansatz para el caso particular de la solución de  $N$  D3-branas que preservan las isometrías  $SO(3,1) \times SO(6)$  en una teoría de supercuerdas de tipo IIB para la acción que describen un gravitón, un dilatón y una fuerza de campo descrita por una 5-forma. Este ansatz expresa el elemento de línea de la forma:

$$ds_{\text{IIB}}^2 = H(r)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} ds^\mu ds^\nu + H(r)^{1/2} dy^i dy^i. \quad (5.1)$$

En la expresión se denotó las coordenadas transversales a cada brana por  $y^i$  ( $i = 4, \dots, 9$ ). Es posible realizar un cambio a coordenadas esféricas ( $dr^2 + r^2 d\Omega_5 = \sum_{i=4}^9 dy^i dy^i$ , teniendo en cuenta que  $r^2 = \sum_{i=1}^6 y_i^2$ ), el cual permite localizar la brana en la hipersuperficie con más simetrías que podría rodearla, una 5-esfera. El elemento de línea queda por tanto expresado de la forma:

$$ds_{\text{IIB}}^2 = H(r)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} ds^\mu ds^\nu + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5). \quad (5.2)$$

La expresión de  $H$  quedaba restringida mediante las ecuaciones del movimiento de la forma  $\square H(r) = 0$  ( $r \neq 0$ ). Esto suponía tomar una expresión armónica en la que aparecía una longitud característica  $L_3$ , cuya expresión se obtiene a su vez analizando la carga de las branas dada por  $Q = N\mu_3$ . Concretamente, se obtiene que:

$$H(r) = 1 + \left(\frac{L_3}{r}\right)^4, \quad L_3^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2. \quad (5.3)$$

La región cerca del horizonte fue una zona de interés en secciones anteriores, y estaba caracterizada por valores de  $r$  próximos a 0 y bajas energías. Al situarse en esta región,

resulta útil observar que:

$$H(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \left(\frac{L_3}{r}\right)^4, \quad H(r)^{-1} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \left(\frac{r}{L_3}\right)^4. \quad (5.4)$$

En esta región, la ecuación 4.10 permitía ver como el elemento de línea se corresponde con el de un espacio  $AdS_5 \times S^5$ . Sin embargo, al tomar valores altos de  $r$  (alejados de las D3-branas), se recupera una métrica de Minkowski en 10 dimensiones. Este tipo de geometría viene representada en la figura 5.2, la cual sitúa a las branas en el centro de la “garganta” que se forma.

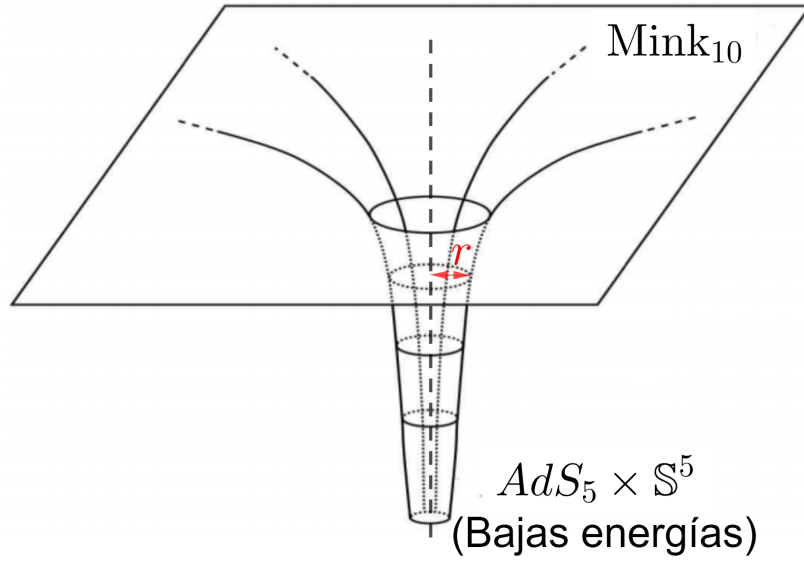


Figura 5.2: Geometría del espaciotiempo en el que se han colocado  $N$  D3-branas. La región cerca del horizonte está representada por valores de  $r$  cercanos a 0, que se corresponden con valores próximos al centro de la “garganta” de la figura, donde están situadas las branas. Al tomar valores altos de  $r$  se recupera una geometría plana.

## 5.2. Separación de una brana de prueba.

En esta sección se va a considerar que se separa una brana de prueba del conjunto de  $N$  branas considerado anteriormente. Al tener una masa y carga despreciable en comparación con el conjunto de  $N - 1$  branas, se pueden despreciar los efectos que tenga separar esta brana sobre la métrica del espacio o sobre el factor  $H(r)$ .

La D3-brana de prueba será denotada de ahora en adelante por D3'. Su interacción con el resto de branas puede ser descrita mediante un intercambio de cuerdas cerradas, y puede ser tanto atractiva (la cual se interpreta como una generalización de la atracción gravitatoria y está causada por los campos del sector  $NS - NS$ ) como repulsiva (similar a la repulsión eléctrica, y ocurriendo entre objetos con carga del mismo signo obtenida a partir de los campos del sector  $R - R$ ).

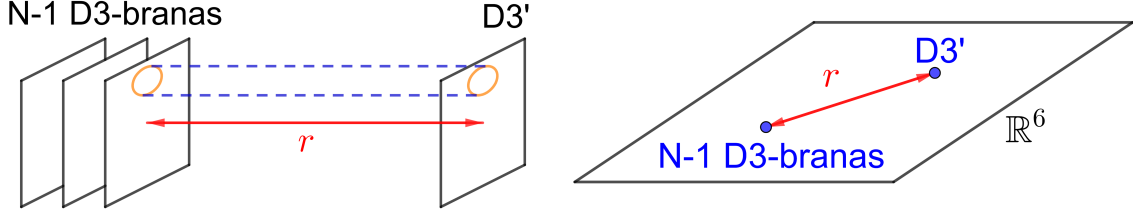


Figura 5.3: Representación de la separación de una brana de pruebas del conjunto de  $N$  D3-branas. En la figura de la izquierda se representan las dimensiones sobre las que se extienden las branas, que se mantienen paralelas entre sí, y se representa la interacción del conjunto con D3' mediante el intercambio de cuerdas cerradas (de color naranja). En la figura de la derecha, se representa esta separación en las coordenadas sobre las que están localizadas las branas.

La acción de D3', descrita en la sección 3.4.1 para una  $Dp$ -brana en general, refleja los dos tipos de interacción. El término DBI permite estudiar las fuerzas atractivas, y la expresión que toma para el caso  $p = 3$  es la siguiente:

$$S_{DBI} = -T_3 \int d^4s e^{-\phi} \sqrt{-\det(P[g]_{ab} + P[B]_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})}, \quad T_3 = (2\pi)^{-3} \alpha'^{-2}, \quad (5.5)$$

donde es preciso tener en cuenta que según el ansatz considerado en esta sección, los campos  $B_{MN}$  y  $F_{ab}$  están apagados ( $B_{MN} = F_{ab} = 0$ ). El dilatón, sin embargo, se considera que sigue la expresión:

$$e^{\phi} = g_s. \quad (5.6)$$

Al tener todo esto en cuenta, la acción DBI queda simplificada de la siguiente manera:

$$S_{DBI} = -\frac{T_3}{g_s} \int d^4s \sqrt{-\det(P[g]_{ab})} = -\mu_3 \int d^4s \sqrt{-\det(P[g]_{ab})}. \quad (5.7)$$

El término de la acción que acopla a la brana los campos del sector  $R - R$  de la teoría tomaba la expresión, para  $p = 3$ :

$$S_{WZ} = \mu_3 \int \sum_q P[C_{q+1}] \wedge e^{P[B] + 2\pi\alpha' F}, \quad (5.8)$$

donde se acoplan las formas diferenciales  $C_{q+1}$  con  $q < p$ . Esta expresión se simplifica en el ansatz debido a los campos del sector  $NS - NS$  apagados y debido también a que solo se acopla una forma  $C_4$ :

$$S_{WZ} = \mu_3 \int P[C_4]. \quad (5.9)$$

El campo  $C_4$  determina la carga eléctrica y magnética de la brana (ya que la fuerza de campo,  $F_5 = dC_4$ , es autodual en este caso) y viene dada como sigue:

$$C_4 = (H(r)^{-1} - 1) ds^0 \wedge ds^1 \wedge ds^2 \wedge ds^3. \quad (5.10)$$

En la expresión anterior aparece un factor  $(H(r)^{-1} - 1)$  que multiplica el producto exterior de 1-formas diferenciales. Debido a que la fuerza de campo es un invariante gauge, este factor se puede describir sumándole a  $H(r)^{-1}$  cualquier potencial constante, no solo  $-1$ , ya que mantendrá invariante su diferencial. Se trata por tanto de un potencial puramente gauge que, en este caso, se había escogido para obtener  $C_4 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ . Para simplificar la expresión en la región cerca del horizonte, resulta más práctico considerar que  $C_4$  viene dado por:

$$C_4 = (H(r)^{-1}) ds^0 \wedge ds^1 \wedge ds^2 \wedge ds^3, \quad (5.11)$$

y, por tanto,

$$C_4 \xrightarrow{r \rightarrow 0} \left(\frac{r}{L_3}\right)^4 ds^0 \wedge ds^1 \wedge ds^2 \wedge ds^3. \quad (5.12)$$

La brana de prueba se extiende en 3 dimensiones espaciales, y está localizada en el resto de ellas. Si se considera que fue separada del resto de branas manteniéndose paralela y siguiendo la dirección radial  $r$ , las expresiones de sus funciones de embedding pueden ser las siguientes:

$$\begin{aligned} X^\mu &= s^\mu, \\ X^4 &= r, \\ X^5 &= X^6 = X^7 = X^8 = X^9 = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde  $r$  denota el valor radial fijo que caracteriza  $D3'$  (el cual no depende de  $s^\mu$  y, por tanto,  $\partial_\mu r \equiv \frac{\partial r}{\partial s^\mu} = 0$ ).

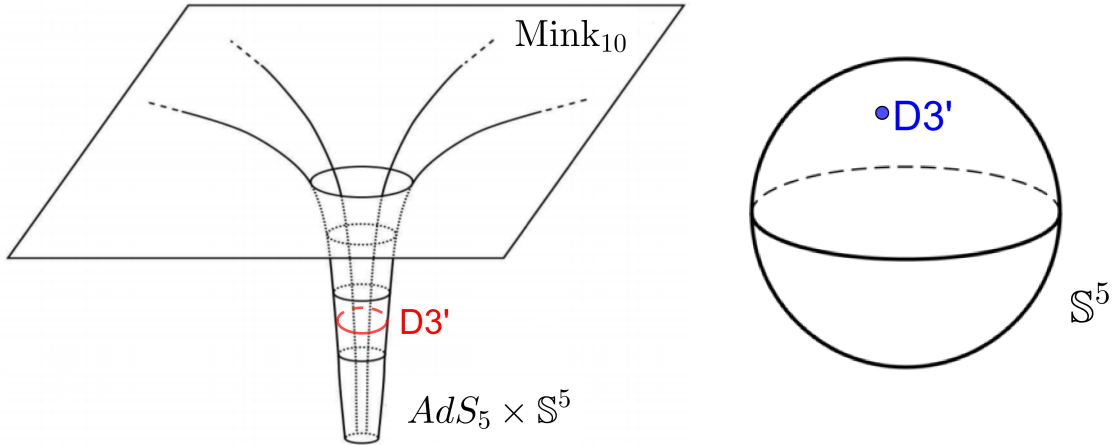


Figura 5.4: A la izquierda se representa la  $D3$ -brana de prueba localizada en un valor de  $r$  constante. Si se considera que se ha alejado poco sobre la dirección radial, la brana permanece en la región cerca del horizonte, representada con forma de “garganta” en la figura. A la derecha, se representa  $D3'$  localizada en un punto de  $S^5$ , representada en este caso de manera esquemática como una esfera en 3 dimensiones.

El pullback de la métrica viene dado por la expresión:

$$P[g]_{\mu\nu} = g_{MN}(X) \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N. \quad (5.14)$$

Al tener en cuenta la expresión del embedding, se tiene que:

- $X^M = 0$  (y por tanto  $\partial_\mu X^M = 0$ ) para  $M = 5, \dots, 9$ .
- $\partial_\mu X^4 = \partial_\mu r = 0$ .
- $\partial_\mu X^\nu = \partial_\mu s^\nu = \delta_\mu^\nu$ .

Así, el pullback queda determinado por:

$$P[g]_{\mu\nu} = \frac{r^2}{L_3^2} \eta_{\mu\nu}, \quad (5.15)$$

donde se tuvo en cuenta que  $-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = \frac{r^2}{L_3^2}$ . El determinante de esta expresión es:

$$\det(P[g]_{\mu\nu}) = -\frac{r^8}{L_3^8}. \quad (5.16)$$

En la acción WZ también aparece un pullback, esta vez de la forma  $C_4$ , que viene dado por la expresión:

$$P[C_4] = \frac{1}{4!} C_{MNPQ}(X) \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N \partial_\rho X^P \partial_\sigma X^Q ds^\mu \wedge ds^\nu \wedge ds^\rho \wedge ds^\sigma, \quad (5.17)$$

donde  $M, N, P, Q = 0, \dots, 9$  y  $\mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3$ .

El comportamiento de las derivadas parciales de las funciones de embedding fue descrito para el cálculo de  $P[g]_{\mu\nu}$ . En la región cerca del horizonte, además, se obtuvo que  $C_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{r^4}{L_3^4}$ . Esto simplifica la expresión de la forma:

$$P[C_4] = \frac{r^4}{L_3^4} ds^0 \wedge ds^1 \wedge ds^2 \wedge ds^3 \equiv \frac{r^4}{L_3^4} d^4s, \quad (5.18)$$

donde el factor  $\frac{1}{4!}$  desaparece al sumar cada término correspondiente con una ordenación distinta de los elementos que aparecen en el producto exterior.

Todos estos cálculos permiten concluir que la acción total de las D3-branas, bajo esta solución de supergravedad, se anula:

$$S = S_{DBI} + S_{WZ} = -\mu_3 \int d^4s \sqrt{-\det(P[g]_{ab})} + \mu_3 \int P[C_4] = -\mu_3 \int d^4s \frac{r^4}{L_3^4} + \mu_3 \int d^4s \frac{r^4}{L_3^4} = 0. \quad (5.19)$$

Este resultado muestra como las fuerzas atractivas que surgen de los campos del sector  $NS - NS$  se ven compensadas con las fuerzas repulsivas del sector  $R - R$ , probando que no supone un gasto energético separar una D3-brana del resto de ellas en la región cerca del horizonte. Dicho de otra manera, la energía de la brana será la misma independientemente de donde esté colocada, por lo que su posición aparecerá en un espacio de moduli de la teoría.



### 5.3. Consecuencias de la separación de la brana en el espacio de moduli.

La dinámica del conjunto de  $N$  branas se podía obtener a partir de la teoría gauge  $\mathcal{N} = 4$  SYM. En la sección 2.2.2 se comprobó como los seis campos escalares de la teoría,  $\phi^i$ , definen un espacio de moduli caracterizado de la forma<sup>1</sup>:

$$[\phi^i, \phi^j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad (5.20)$$

Estos campos minimizan un potencial con la forma  $V = -g^2 \sum_{i,j} \int \text{Tr}[\phi^i, \phi^j]^2$ , debido a que este último es definido positivo.

Los escalares están representados por matrices hermíticas  $N \times N$ . El espacio de moduli puede parametrizarse por matrices diagonales de este tipo, es decir, matrices de la forma:

$$\phi^i = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{iN} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (5.21)$$

Cada valor  $\lambda_{ia}$ , con  $a = 1, \dots, N$ , es un valor real debido a que la matriz es hermítica (esto permite afirmar que el espacio de moduli es isomorfo a un cociente de  $\mathbb{R}^{6N}$ ). Más aún, en la teoría  $\mathcal{N} = 4$   $SU(N)$  SYM (que según la sección 4.1 caracteriza la dinámica de las branas, salvo por los modos de vibración que conectan la región cerca del horizonte con la región para valores de  $r$  grandes), los valores de la diagonal seguirán la relación  $\sum_{a=1}^N \lambda_{ia} = 0$ .

Además, existe una relación entre los campos escalares de la teoría y las direcciones transversales a cada D3-brana, las cuales forman un espacio  $\mathbb{R}^6$ . Concretamente, los valores  $\lambda_{ia}$  de las matrices pueden ser interpretados como la coordenada en la dirección  $i$  en  $\mathbb{R}^6$  de la brana número  $a$  [45]. Si se toma la siguiente representación,

$$\phi^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (5.22)$$

se estaría considerando que todas las branas han sido colocadas en un mismo punto genérico en el espacio transversal, asignando en este caso el valor 0 a cada una de las coordenadas (por lo que se puede considerar este punto como el origen del espacio de moduli). Esto se correspondería con la fase superconforme del espacio de moduli, y con la situación descrita en la sección 5.1.

En la fase superconforme, los campos escalares son invariantes bajo el grupo de simetría que caracteriza la teoría,  $SU(N)$ . Esto quiere decir que una transformación gauge del tipo

$$\phi^i \longrightarrow U_N \phi^i U_N^\dagger, \quad U_N \in SU(N), \quad (5.23)$$

---

<sup>1</sup>En esta sección se cambia la notación de los campos escalares para evitar confusiones con las funciones de embedding definidas anteriormente.

mantendrá invariante a la matriz  $\phi^i$ .

Otra solución de la ecuación (5.20) y, por tanto, otro punto en el espacio de moduli, consiste en tomar la siguiente expresión en los campos escalares:

$$\phi^1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 2, \dots, 6. \quad (5.24)$$

Recordando la interpretación de las matrices, esta solución supone separar una de las branas en la dirección 1 una distancia  $|\lambda|$  de las  $N - 1$  branas restantes situadas en el origen. Esta situación es la que se describe en la sección anterior, donde la brana de prueba fue separada en la dirección radial una distancia  $r$ .

Al tomar  $\phi^1$  no nulo, ya no se mantiene la invariancia bajo transformaciones de la forma descrita en la expresión (5.23). En su lugar, el conjunto de  $N - 1$  branas será invariante bajo el grupo de simetría  $SU(N - 1)$  mientras que la brana de prueba será invariante bajo  $U(1)$ , por lo que los campos escalares serán invariantes bajo transformaciones dadas por representaciones del grupo  $SU(N - 1) \times U(1)$ :

$$\phi^i \longrightarrow U \phi^i U^\dagger, \quad U = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0_{N-1}^\dagger \\ 0_{N-1} & e^{-i\phi/(n-1)} U_{N-1} \end{pmatrix}, \quad U_{N-1} \in SU(N - 1), \quad (5.25)$$

donde  $0_{N-1}$  representa un vector (columna) con  $N - 1$  ceros,  $\phi \in \mathbb{R}$  y la fase  $e^{-i\phi/(n-1)}$  que precede a  $U_{N-1}$  asegura que el determinante de  $U$  sea la unidad.

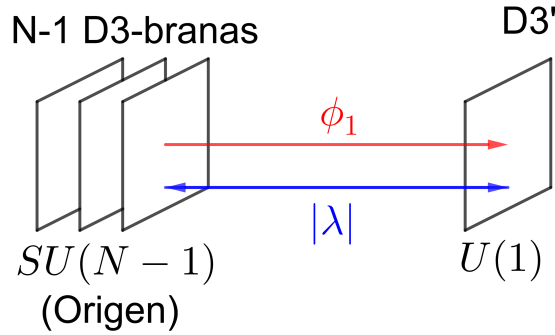


Figura 5.5: Representación de la separación de una brana de prueba  $D3'$  del conjunto de  $N$  branas. Se separa en la dirección que representa  $\phi_1$  una distancia  $|\lambda|$ . Cada conjunto por separado es invariante bajo un grupo de simetría distinto.

El proceso de separar una brana de prueba ha probado tener una ruptura espontánea de la simetría de la forma  $SU(N) \rightarrow SU(N - 1) \times U(1)$ . El motivo por el que se conocía a esta ruptura como “fase de Coulomb” en la sección 2.2.2 es que aparece un grupo  $U(1)$  representando las simetrías de la brana separada, y se trata del mismo grupo que se asocia al electromagnetismo.

Se puede considerar que las branas de cada conjunto son, en particular, D-branas, y por tanto se pueden plantear cuerdas abiertas cuyos extremos están situados en ellas. Una cuerda abierta cuyos extremos estén en branas situadas en el mismo punto del espacio transversal (ya sea el origen del espacio de moduli, o el lugar donde se coloca la brana de prueba) no tendrá masa. Esto se debe a que la longitud de este tipo de cuerdas es arbitrariamente pequeña, y a que la energía de la cuerda es proporcional a su longitud (como se muestra en las distintas acciones planteadas en el capítulo 3), por lo que la energía se anulará del mismo modo. A partir de las cuerdas abiertas sin masa se pueden describir los bosones sin masa de la teoría, los cuales estarán descritos por lo tanto mediante los grupos de simetría  $SU(N - 1)$  y  $U(1)$ .

Sin embargo, al separar una brana de prueba se puede considerar otro tipo de cuerda: una cuerda abierta con un extremo en la brana separada y el otro extremo en una de las branas agrupadas en el origen. Esta cuerda tendrá una longitud no despreciable, y por tanto tendrá asociado un bosón con masa. Separar una brana de prueba ha supuesto ser un proceso de *Higgsing*, es decir, un proceso que permite plantear bosones con masa en la teoría al realizar una ruptura espontánea de su simetría. Por este motivo se puede afirmar que la fase de Coulomb es, además, una fase de Higgs. Este tipo de proceso es similar al mecanismo de Higgs que genera la masa de los bosones  $W$  y  $Z$  en el modelo estándar al haber una ruptura de simetría del tipo  $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$  [46].

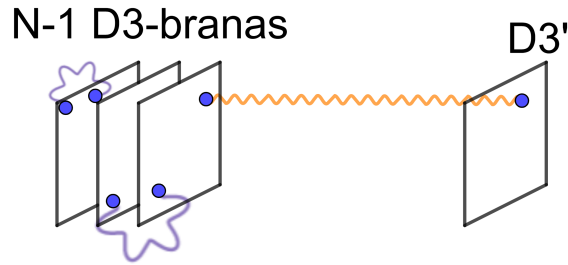


Figura 5.6: Cuerdas abiertas cuyos extremos están situados en las branas consideradas. La cuerda extendida desde el origen hasta D3' (color naranja) tiene una longitud no despreciable y, por tanto, puede estar asociada a un bosón con masa; esto no ocurre sin embargo en el resto de cuerdas representadas (color violeta).

Esta separación de branas puede generalizarse. Cada vez que se separa una brana adicional del conjunto, un elemento de la diagonal de  $\phi^i$  deja de ser nulo, para algún valor de  $i$ . Este proceso da lugar a distintos tipos de ruptura espontánea de simetría.

En particular es posible separar cada una de las branas, de forma que acaben colocadas de manera paralela en la región cerca del horizonte y en puntos arbitrarios del espacio de moduli. Los campos escalares estarán representados por matrices como las de la expresión (5.21), con  $\lambda_{ia} \neq \lambda_{jb}$  en general.

Cada una de las branas tendrá asociado un grupo de simetría  $U(1)$  como en el caso anterior, por lo que el conjunto de todas ellas será invariante bajo el grupo  $U(1)^N$ . Dado que la ruptura de simetría que tiene lugar en este proceso es del tipo  $SU(N) \rightarrow U(1)^N$ , se dice que esta es la *rama coulombiana* de la teoría (*Coulomb branch*). Las cuerdas abiertas cuyos

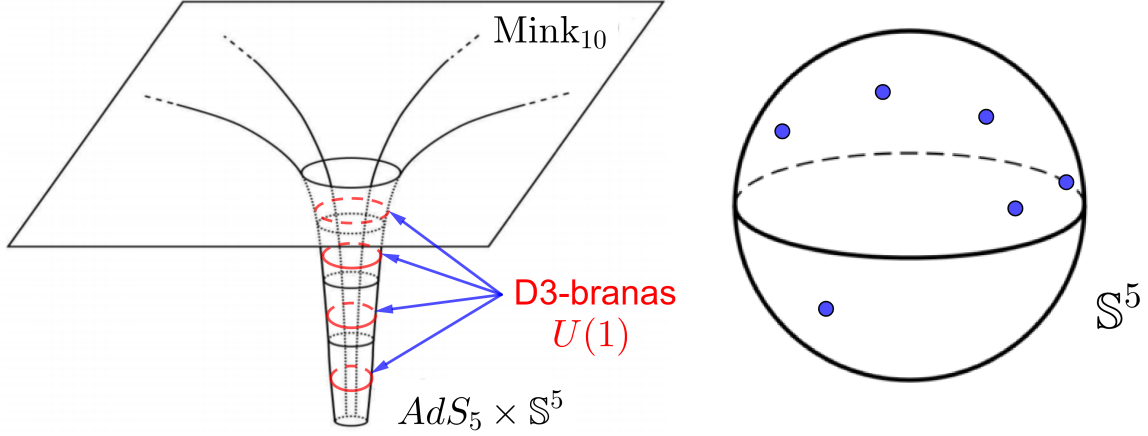


Figura 5.7: Representación de distintas D3-branas colocadas en puntos arbitrarios del espacio transversal. Cuando el número de branas separadas es mucho menor que  $N$ , los efectos de su separación sobre la geometría del espacio o el factor  $H(r)$  se pueden despreciar, al igual que en el caso en el que se separaba una sola brana. A la izquierda se representan las distintas branas separadas con valores de  $r$  distintos pero pequeños; mientras que a la derecha se representan branas localizadas en distintos puntos de  $S^5$  mediante puntos azules.

extremos estén situados en branas distintas en esta rama, de manera análoga al caso en el que se separaba una sola brana de prueba, tendrán bosones asociados de masa no nula.

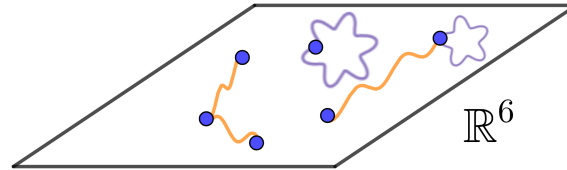


Figura 5.8: Representación de las  $N$  D3-branas colocadas en puntos arbitrarios del espacio transversal. Las cuerdas abiertas cuyos extremos están en la misma brana tienen una masa nula (color violeta), mientras que las cuerdas que conectan branas distintas tienen cierta longitud y, por tanto, cierta masa (color naranja).

# Capítulo 6

## La solución GPPZ

La solución de supergravedad en 5 dimensiones de tipo GPPZ fue propuesta por Girardello, Petrini, Porrati y Zaffaroni en 1999 [4]. Un uplift de esta teoría a 10 dimensiones puede asociarse a una teoría gauge  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM invariante bajo el grupo  $SU(N)$  mediante la correspondencia AdS/CFT. El objetivo de este capítulo es la descripción de estos dos tipos de teoría.

### 6.1. La teoría de campos $\mathcal{N} = 1$ SYM.

En esta sección, se va a describir una teoría  $\mathcal{N} = 1$  Super Yang-Mills que considera su lagrangiano invariante bajo el grupo  $SU(N)$ , el mismo grupo que se consideró en el caso  $\mathcal{N} = 4$ . La forma que toma su acción es:

$$S = \int d^4x \operatorname{tr} \left\{ -\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\vartheta}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{2i}{g^2} \bar{\lambda} \sigma^\mu D_\mu \lambda \right\}. \quad (6.1)$$

En la acción aparece el ángulo del vacío, denotado por  $\vartheta$ ; la derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ ; y los componentes del multiplete gauge de la teoría en la representación adjunta del grupo de simetría, que son un campo vector,  $A_\mu$ ; y un espinor de Weyl junto con su conjugado,  $\lambda_\alpha$  y  $\bar{\lambda}^\alpha$  (que se conoce como *gaugino*, y es equivalente a un espinor de Majorana [47]). Por último, también se ha empleado la fuerza del campo  $A_\mu$ ,  $F_{\mu\nu}$ , y la expresión:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (6.2)$$

Se piensa que este tipo de teoría es confinante y asintóticamente libre [7], de manera análoga a una teoría de *cromodinámica cuántica* (QCD), pero con la diferencia fundamental de que la teoría SYM está considerando la existencia de supersimetría.

#### 6.1.1. El condensado de gluinos y el espacio de moduli discreto.

El valor esperado  $\langle \lambda\lambda \rangle$  representa el *condensado de gluinos* o de gauginos de la teoría que, en el caso de  $\mathcal{N} = 1$  SYM, es distinto de 0 y viene dado en el régimen no perturbativo por la

expresión [47]:

$$\langle \lambda^\alpha \lambda_\alpha \rangle = -6N\Lambda^3 \exp \left\{ i \left( \frac{2\pi k}{N} + \frac{\vartheta}{N} \right) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.3)$$

En esta expresión aparece la escala del régimen de acoplamientos fuertes de la teoría denotada por  $\Lambda$ . También aparece un parámetro  $k$  que influye sobre la fase del valor, y etiqueta los distintos vacíos supersimétricos: esto refleja que el conjunto de vacíos de la teoría no es un conjunto continuo, como en  $\mathcal{N} = 4$  SYM, sino que se trata de un conjunto discreto. Esto supone otra similitud con la teoría QCD, cuyo conjunto de vacíos tiene un carácter discreto al estar compuesto por un solo vacío; y supone una diferencia con otros tipos de teorías de supersimetría, en los cuales surge un conjunto de vacíos continuo y, por tanto, la ruptura espontánea de simetría que se produciría al situarse en un punto del espacio de moduli tendría asociada la generación de bosones de Goldstone.

El número de vacíos de la teoría  $\mathcal{N} = 1$  SYM (y, por tanto, su carácter discreto) puede deducirse a partir de la simetría global del lagrangiano  $U(1)_A$ . Se trata de una simetría quirral que permite rotar el espinor de la forma:

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow e^{i\theta} \lambda, \\ \bar{\lambda} &\rightarrow e^{-i\theta} \bar{\lambda}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Esta simetría global tiene asociada una corriente  $J^\mu = \bar{\lambda} \bar{\sigma}^\mu \lambda$ , la cual es conservada clásicamente:  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Sin embargo, la corriente no se conserva a nivel cuántico: existe una anomalía, representada por el diagrama de Feynman de la figura 6.1. La divergencia puede ser calculada de manera exacta:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{N}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (6.5)$$

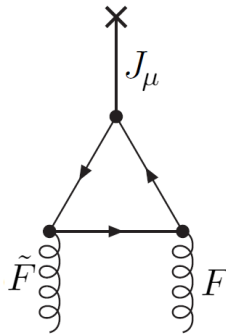


Figura 6.1: Anomalía triangular en la teoría  $\mathcal{N} = 1$  que rompe la simetría quirral  $U(1)_A$ .

La anomalía evita que se conserve la simetría quirral, provocando una ruptura del tipo  $U(1)_A \rightarrow \mathbb{Z}_{2N}$ ; siendo este último grupo el asociado a las distintas elecciones de  $\theta = \pi k/N$ , con  $k = 1, \dots, 2N$ . Pero  $\mathbb{Z}_{2N}$  sufre a su vez una ruptura espontánea en el caso  $\langle \lambda \lambda \rangle \neq 0$ , debido a que el condensado no es invariante bajo dicho grupo. Este condensado sí es invariante, sin

embargo, bajo  $\mathbb{Z}_2$  (cambiar el signo de  $\lambda$  no altera el valor esperado  $\langle \lambda\lambda \rangle$ ), por lo que la ruptura producida es del tipo  $\mathbb{Z}_{2N} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . El espacio de vacíos de la teoría tendrá asociado, por tanto, un grupo de simetría  $\mathbb{Z}_{2N}/\mathbb{Z}_2$ ; y teniendo en cuenta que  $\mathbb{Z}_{2N} = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_2$ , el grupo de simetría asociado a los vacíos será  $\mathbb{Z}_N$ .

## 6.2. La teoría de campos $\mathcal{N} = 1^*$ SYM.

La teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  *Super Yang-Mills* que se describirá en esta sección se obtiene al producir una deformación de masa en la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM ya estudiada. Por este motivo, es conveniente organizar los componentes del multiplete gauge  $\mathcal{N} = 4$  descritos en la sección 2.2.1 en un multiplete vector  $\mathcal{N} = 1, \vec{V}$ , y tres multipletes quirales,  $\Phi_A$ , de la forma:

$$\vec{V} = (A_\mu, \lambda_4), \quad \Phi_A = (\lambda_A, \phi_A), \quad (6.6)$$

donde  $A_\mu$  era el campo gauge de la teoría,  $\lambda_a$  ( $a = 1, \dots, 4$ ) los fermiones de Weyl de quiralidad izquierda, y  $\phi_A = (X_A + iX_{A+3})/\sqrt{2}$  ( $A = 1, 2, 3$ ), siendo  $X_1, \dots, X_6$  los campos escalares hermíticos. El fermión  $\lambda_4$ , que aparece en un multiplete distinto del resto de fermiones, será el que actúe como gaugino de la teoría.

Al reescribir el multiplete de esta manera, las  $R$ -simetrías de  $\mathcal{N} = 4$  SYM, cuyo grupo asociado era  $SU(4)_R$ , se ven parcialmente ocultas salvo por las transformaciones que mantienen invariante  $\vec{V}$ , representadas por el subgrupo  $U(1)_R$ . Dado que el índice  $A$  transforma bajo la representación fundamental de  $SU(3)$  (su simetría puede ser vista como una simetría de sabor similar a la de la teoría QCD) las simetrías internas que mantienen invariante de forma explícita la teoría estarán representadas por el grupo  $SU(3) \times U(1)_R$ ; a pesar de ello, el lagrangiano todavía es invariante bajo su simetría inicial  $SU(4)_R$ , la cual no ha sido rota.

Por otra parte, el lagrangiano quiral se verá determinado completamente por el superpotencial  $W$  y el superpotencial de Kähler,  $K$ , que toman la expresión:

$$K = \frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr} \Phi_A^\dagger \Phi_A, \quad W = \frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr} [\Phi_1, \Phi_2] \Phi_3. \quad (6.7)$$

La deformación de la teoría se produce al modificar el superpotencial  $W$  añadiendo el siguiente término:

$$\Delta W = \frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr} (m_1 \Phi_1^2 + m_2 \Phi_2^2 + m_3 \Phi_3^2). \quad (6.8)$$

Este tipo de modificación permite considerar una masa no nula para los supermultipletes  $\Phi_A$ . El tipo de teoría que se obtiene mediante la deformación, así como el número de supersimetrías que conserva, dependerá del valor que tomen los parámetros  $m_1, m_2$  y  $m_3$ . Para obtener la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  en la que se centra este trabajo, es preciso considerar una deformación en la que el valor de cada parámetro es el mismo:  $m_f = m_1 = m_2 = m_3$ ; esto romperá el número de supersimetrías  $\mathcal{N} = 4$ , el cual pasará a ser  $\mathcal{N} = 1$  (más explícitamente, se producirá una ruptura de la simetría de sabor del tipo  $SU(3) \rightarrow SO(3)$ ).

### 6.2.1. El espacio de moduli de la teoría.

El espacio de moduli clásico que se obtiene al minimizar el término de energía potencial es distinto al de la teoría con  $\mathcal{N} = 4$  debido a la deformación producida por  $\Delta W$ . En este caso, los valores de  $\phi_A$  que forman el espacio de vacíos son los que siguen la expresión:

$$[\phi_A, \phi_B] = -m_f \varepsilon_{ABC} \phi_C. \quad (6.9)$$

Debido a que los campos escalares son matrices en la representación adjunta de  $SU(N)$ , se tratan de matrices  $N \times N$  cuya traza es nula. Los campos del espacio de moduli, que además cumplen la relación (6.9), serán por tanto representaciones del grupo  $SU(2)$ . Este tipo de representación resulta, en general, reducible: para cada entero  $d \geq 0$ , existirá una representación irreducible de  $SU(2)$  de dimensión  $d$ . Cada vacío de la teoría vendrá determinado, por tanto, por una partición de  $N$ :

$$\sum_{d=1}^N dk_d = N, \quad (6.10)$$

donde  $k_d \geq 0$  es un entero que denota el número de veces que la representación de dimensión  $d$  aparece. El número de vacíos clásicos se determina mediante el número de este tipo de particiones.

Bajo este tipo de representaciones irreducibles, las matrices  $\phi_A$  son matrices diagonales por bloques, de manera que  $k_d$  es un valor que determina el número de bloques de dimensión  $d$  contenidos en la propia matriz. Por ejemplo, si se considera  $k_d = 1$  y  $k_{N-d} = 1$ , las matrices  $\phi_A$  estarán compuestas por dos bloques en la diagonal: uno de dimensión  $d$  y otro de dimensión  $N - d$ .

La simetría  $SU(N)$ , en general, no se va a preservar. Teniendo en cuenta que cada bloque de la diagonal preserva una simetría  $U(k_d)$ , y que al rotar dichos bloques en la diagonal el campo escalar seguirá perteneciendo al espacio de moduli, la teoría conservará en general una simetría  $(\prod_d U(k_d)) / U(1)$ . Si los valores de  $k_d$  son 1 ó 0 para cada  $d$ , como en el ejemplo dado, la diagonal estará compuesta por  $k$  bloques de distinta dimensión y preservará una simetría  $U(1)^{k-1}$  (y, por tanto, este tipo de vacíos son conocidos como *vacíos de Coulomb*).

Otro caso particular surge para los valores que dividen a  $N$ . Si  $D$  es uno de esos valores, al tomar  $k_D = N/D$  y  $k_d = 0$  cuando  $d \neq D$ , se obtiene una matriz con  $N/D$  bloques que preservará una simetría  $SU(N/D)$ . Si, además, se considera  $D = N$ , la simetría original se verá completamente rota en un tipo de vacío que se conoce como *vacío de Higgs*. Estos vacíos están caracterizados por tener una masa no nula [48], siendo el vacío de Higgs el único con masa a nivel clásico.

Un último caso particular surge al tomar  $k_D = N/D$ , como en el ejemplo anterior, pero con  $D = 1$ . El vacío correspondiente con  $\phi_A = 0$  se mantiene invariante bajo la simetría inicial  $SU(N)$ , y se puede dividir en  $N$  vacíos de la teoría [49]. Esta situación se obtiene al considerar valores de la energía mucho menores que las masas de los supermultipletes quirales, obteniéndose de manera efectiva una teoría  $\mathcal{N} = 1$  SYM que admite  $N$  vacíos con un grupo asociado  $\mathbb{Z}_N$ . Debido a que compartirá el carácter confinante de  $\mathcal{N} = 1$  SYM, a este tipo de vacío se le conoce como *vacío confinante*.



Cada vacío masivo, caracterizado por un grupo gauge  $SU(N/D)$  conservado, se puede dividir en la teoría cuántica en  $N/D$  vacíos distintos [48]. Cada vacío tiene la capacidad de condensar monopolos o diones, los cuales pueden clasificarse mediante un par de enteros  $(m, n)$  que representan su carga magnética y eléctrica<sup>1</sup> [50]. El vacío de Higgs ( $N/D = 1$ ) está caracterizado por los valores  $(0, 0)$  y  $(0, 1)$ ; el vacío confinante ( $N/D = N$ ), por otra parte, tendrá asociado  $N$  vacíos caracterizados por valores  $(1, n)$ , con  $n = 0, \dots, N - 1$ , cuyo carácter confinante es debido a que la carga magnética no es nula; así como un vacío en el que no se condensan cargas, caracterizado por el par  $(0, 0)$ . El resto de vacíos masivos ( $1 < N/D < N$ ) son los denominados como *confinamientos oblicuos*, y tendrán la capacidad de condensar cargas  $(m, n)$ , con  $1 < m < N$  (las cuales son confinantes al tener una carga magnética distinta de cero).

### 6.3. La solución de supergravedad.

El dual en supergravedad de la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM fue originalmente descrito en 5 dimensiones. En esta sección se describirá esta solución de supergravedad inicial, así como el uplift a 10 dimensiones propuesto por Bobev, Gautason, Niehoff y Muiden en 2018 [51].

#### 6.3.1. La solución GPPZ en 5 dimensiones.

El flujo GPPZ es una solución de supergravedad  $\mathcal{N} = 8$  con grupo gauge  $SO(6)$  en 5 dimensiones. La teoría considera 15 campos vectoriales sin masa en la representación adjunta de  $SO(6)$ ; 12 2-formas diferenciales con masa topológica que transforman en la representación  $(\mathbf{6}, \mathbf{2})$  de  $SO(6) \times SL(2)$ ; y 42 campos escalares que parametrizan  $E_{6(6)}/USp(8)$  y transforman de la forma:

$$\mathbf{42} = \mathbf{20}'_{(0)} + \mathbf{10}_{(-2)} + \overline{\mathbf{10}}_{(2)} + \mathbf{1}_{(4)} + \mathbf{1}_{(-4)}, \quad (6.11)$$

donde los subíndices denotan la carga bajo el subgrupo  $U(1)_Y \subset SL(2)$  [52]. La masa asociada a los campos  $\mathbf{20}'$  viene dada por  $M^2 L^2 = -4$ ; la masa de los campos asociados a  $\mathbf{10}$  y  $\overline{\mathbf{10}}$  es  $M^2 L^2 = -3$ ; y para el resto de campos, asociados a  $\mathbf{1}$ , se obtiene una masa  $M^2 L^2 = 0$ .

Este tipo de solución está planteada bajo una métrica de un espacio  $AdS_5$  cuya longitud característica es el parámetro  $L$  al que se referenciaba en la descripción de la masa. Este planteamiento permite emplear las fórmulas de la sección 4.3 para obtener la dimensión conforme del operador dual, descrito en la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM, a partir de la masa de cada campo escalar (en particular, se emplea la relación  $M^2 L^2 = \Delta(\Delta - 4)$ ). Esto clasifica a los campos asociados a  $\mathbf{20}'$  como escalares bilineales de dimensión  $\Delta = 2$ ; a los campos asociados a  $\mathbf{10}$  como deformaciones masivas de dimensión conforme  $\Delta = 3$ ; y a los escalares asociados a  $\mathbf{1}$  como deformaciones del acoplamiento gauge con  $\Delta = 4$ .

En la sección 6.2 se estudiaba una deformación de masa de la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM, y debido a que los campos asociados a la representación  $\mathbf{10}$  tienen asociado este efecto en la teoría

---

<sup>1</sup>Los valores que pueden tomar estas cargas son  $0 \leq n \leq N/D - 1$  y  $m = D$ , en módulo  $N$ ; así como el valor  $(0, N/D)$ , también en módulo  $N$  [49].

gauge, se vuelve a dar esta situación. La teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM estudiada permite describir el dual de la solución GPPZ, descomponiendo el término **10** de la forma:

$$\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{6}, \quad (6.12)$$

donde **6** se identifica con la deformación denotada en (6.8) por  $\Delta W$ ; **3** se corresponde con los multipletes quirales  $\Phi_A$ ; y **1** se corresponde con el condensado de gauginos,  $\langle \lambda_4 \lambda_4 \rangle$ .

En particular, la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM está considerando que las masas asociadas a  $\Phi_A$  son iguales. Como consecuencia, no aparecerá la parte asociada a **20'** en la teoría [53]; y, considerando además la simetría residual que aparece y que se asocia al sabor,  $SO(3)$ , estos argumentos permiten representar la teoría apagando consistentemente todos los campos salvo el módulo de dos escalares:  $\underline{m} \in \mathbf{6}$  y  $\underline{\sigma} \in \mathbf{1}$  (cuyo módulo vendrá dado por  $\sigma$  y  $m$ , respectivamente). Estos campos son duales, respectivamente, a los operadores:

$$\mathcal{O}_3 = \sum_{A=1}^3 [\text{tr}(\lambda_A \lambda_A) + m_f \text{tr}|\phi_A|^2], \quad \mathcal{O}_4 = \text{tr}(\lambda_4 \lambda_4). \quad (6.13)$$

La expresión del operador  $\mathcal{O}_3$  aparece desplazada una cantidad  $m_f \sum_{A=1}^3 |\phi_A|^2$  respecto de la que se obtendría en una teoría con campos escalares sin masa. Esta modificación es requerida al extender el centro del álgebra de la supersimetría [54]; y el factor que la multiplica refleja la adquisición de masa de los campos. Para que se preserve la supersimetría, es preciso que la masa que toman los campos escalares sea igual a la masa de los fermiones, por lo que el factor es  $m_f$ .

Las soluciones en 5 dimensiones que se están buscando son de la forma:

$$ds^2 = dz^2 + e^{2\phi(z)} dx^\mu dx_\mu, \quad (6.14)$$

donde  $z$  denota la coordenada radial que toma valores entre  $-\infty$  (región IR) y  $+\infty$  (región UV, cuyo comportamiento asintótico es el de un espacio AdS). El lagrangiano que se obtiene bajo esta truncación tiene la expresión:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4} R + \frac{1}{2} (\partial m)^2 + \frac{1}{2} (\partial \sigma)^2 - \frac{3}{8} \left[ \left( \cosh \frac{2m}{\sqrt{3}} \right)^2 + 4 \cosh \frac{2m}{\sqrt{3}} \cosh 2\sigma - (\cosh 2\sigma)^2 + 4 \right] \right\}. \quad (6.15)$$

El escalar de Ricci viene denotado por  $R$  en la expresión. Por otra parte, apareció un campo real  $\phi(z)$  en la métrica cuya expresión, junto con la de los campos reales  $m(z)$  y  $\sigma(z)$ , forma el denominado *flujo GPPZ*. Las ecuaciones que describen este flujo se pueden deducir a partir de la supersimetría de la teoría y toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \log \left[ \frac{1+e^{-(z-C_1)}}{1-e^{-(z-C_1)}} \right] = \sqrt{3} \operatorname{arctanh} e^{-(z-C_1)}, \\ \sigma(z) &= \frac{1}{2} \log \left[ \frac{1+e^{-3(z-C_2)}}{1-e^{-3(z-C_2)}} \right] = \operatorname{arctanh} e^{-3(z-C_2)}, \\ \phi(z) &= z + \frac{1}{2} \log [1 - e^{-2(z-C_1)}] + \frac{1}{6} \log [1 - e^{-6(z-C_2)}] = z - \log \cosh \frac{m(z)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \log \cosh \sigma(z), \end{aligned} \quad (6.16)$$

siendo  $C_1$  y  $C_2$  dos constantes de integración arbitrarias.

Teniendo en cuenta la expresión que toma  $\phi(z)$ , se puede comprobar que habrá una singularidad en la métrica (6.14) cuando  $z \rightarrow C_1$  (con  $z \geq C_1$ ). Para expresar la métrica en las cercanías de este punto, resulta útil notar:

$$\begin{aligned} e^{-2(z-C_1)} &= 1 - 2(z - C_1) + \dots; \\ 1 - e^{-6(z-C_2)} &= 2e^{-3(z-C_2)} \sinh(3(z - C_2)). \end{aligned} \quad (6.17)$$

De esta manera, se obtiene que:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dz^2 + \left( e^{2z} \left[ 1 - e^{-2(z-C_1)} \right] \left[ 1 - e^{-6(z-C_2)} \right]^{1/3} \right) dx^\mu dx_\mu \\ &= dz^2 + \left( e^{2z} [2(z - C_1) + \dots] e^{-z+C_2} [2 \sinh(3(z - C_2))]^{1/3} \right) dx^\mu dx_\mu \\ &\stackrel{z \rightarrow C_1}{\approx} dz^2 + 2e^{C_1+C_2} (2 \sinh(3(C_1 - C_2)))^{1/3} (z - C_1) dx^\mu dx_\mu. \end{aligned} \quad (6.18)$$

También es preciso notar como la expresión de  $m(z)$  diverge cuando  $z$  toma este valor:

$$m(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \log \left[ \frac{1 + 1 - (z - C_1) + \dots}{1 - 1 + (z - C_1) + \dots} \right] \stackrel{z \rightarrow C_1}{\approx} \frac{\sqrt{3}}{2} \log \left[ \frac{2 - z + C_1}{z - C_1} \right] \approx -\frac{\sqrt{3}}{2} \log(z - C_1). \quad (6.19)$$

Este tipo de singularidades son comunes en las soluciones de supergravedad en 5 dimensiones, y se han establecido una serie de criterios que permiten distinguir las singularidades que podrían tener un significado físico de aquellas que no. En particular, Gubser (2000) [55] propuso que para que la solución fuese físicamente aceptable, debía poder obtenerse en el límite de temperatura cero de un agujero negro. La solución GPPZ cumplirá este requisito si se impone que  $C_2 \leq C_1$ ; esto tiene como consecuencia, además, que la solución tendrá un carácter confinante (observando el comportamiento de los loops de Wilson bajo esta condición [56]), por lo que deberá ser dual a uno de los vacíos confinantes de la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM.

### 6.3.2. Descripción de los vacíos mediante 5-branas.

Los vacíos de la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM pueden ser asociados en la teoría de cuerdas a la polarización de D3-branas en 5-branas con un flujo de fondo definido por una 3-forma diferencial. Dicho flujo estará controlado por los parámetros de masa de la teoría de campos, que en este caso han sido planteados iguales a un valor  $m_f$ . La polarización de las D3-branas, así como la física que describen las 5-branas que surgen, está descrita por el *efecto dieléctrico de Myers* [57] y es compatible con el comportamiento de los vacíos discutido para la teoría gauge dual.

En la teoría gauge, el flujo eléctrico y el flujo magnético pueden agruparse dinámicamente en el interior de un cilindro (un *tubo de flujo*). En particular, se puede observar esta agrupación del flujo magnético al considerar el vacío de Higgs, mientras que el vacío confinante tendrá

asociada la observación de tubos de flujo eléctrico (esto ocurrirá también en el resto de vacíos confinantes oblicuos; pero en otros vacíos masivos se podrá observar flujos de ambos tipos, así como en los vacíos de Coulomb podría no ser posible la agrupación en el interior de un cilindro de ningún tipo de flujo).

Las líneas de flujo eléctrico entre fuentes cargadas situadas en una teoría de campos  $\mathcal{N} = 4$  conforme (y, por tanto, no confinante) pueden ser representadas, empleando la dualidad AdS/CFT, mediante una cuerda en la teoría dual de 10 dimensiones. En la parte  $AdS_5$  de la geometría, la cuerda tiende a desplazarse hacia la región cerca del horizonte, lo cual tiene asociado en la teoría dual una mayor dispersión en las líneas de campo entre las fuentes (como se espera en una teoría no confinante). La energía de la cuerda se podrá describir como una suma de una constante y un término inversamente proporcional a la distancia entre las fuentes cargadas [3].

En el caso opuesto, una teoría gauge que fuese confinante puede proporcionar en la teoría dual un mínimo de distancia radial a la que se debe situar la cuerda en el espacio  $AdS_5$  [58]. Esto supone que las líneas de flujo de la teoría gauge estarán atrapadas en un objeto físico similar a una cuerda de longitud finita y tensión no nula. Al contrario que en el caso anterior, la energía de la cuerda definida en este contexto será proporcional a la distancia que separan las fuentes cargadas.

Polchinski y Strassler (2000) [3] propusieron que la singularidad de la métrica (6.14), descrita en la sección anterior, puede describirse situando en ese punto una 5-brana de cargas eléctrica y magnética  $(p, q)$  obtenida a partir de la polarización de D3-branas mediante el efecto dieléctrico de Myers. En este contexto se puede considerar, además, una cuerda de cargas  $(p, q)$  que puede conectarse a la brana en un estado de longitud finita y tensión no nula. La cuerda se caracterizará por una worldsheet orientada en las direcciones  $x^\mu$  del espacio, y con un valor  $z$  constante.

El vacío de Higgs permite describir la singularidad mediante una 5-brana de cargas  $(p, q) = (0, 1)$ : una D5-brana. El potencial asociado a dos fuentes con carga eléctrica puede representarse mediante una cuerda fundamental (una F1-brana) en la frontera del espacio AdS. La cuerda F1, sin embargo, puede dividirse en dos cuerdas que enlazan cada fuente con la brana situada en la singularidad (a la cual se denota por D5/D3 para insistir en que es obtenida mediante la polarización de D3-branas), como se muestra en la figura 6.2 (a). Debido a la dispersión de las líneas de campo asociada a esta descomposición de la cuerda, la energía asociada a la separación de las dos fuentes permanece constante (no hay confinamiento): las cargas eléctricas se ven apantalladas. Esto no ocurre, sin embargo, al considerar D1-branas (cuerdas con carga magnética): dichos objetos físicos no pueden situar uno de sus extremos en la D5/D3-brana, provocando una limitación en la coordenada radial de D1, como se muestra en la figura 6.2 (b). En este último caso, la energía de la cuerda sí es proporcional a la distancia que separa las fuentes cargadas, y por tanto, estarán confinadas.

Al considerar la relación de S-dualidad, se puede argumentar de manera similar como las cuerdas F1 tendrán asociado un confinamiento de las cargas eléctricas (figura 6.2 (c)), mientras que las cuerdas D1 podrán enlazarse a una NS5/D3-brana, con carga  $(1, 0)$ , la cual producirá un apantallamiento entre las cargas (figura 6.2 (d)). Esta física coincide con la asociada al vacío confinante de la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM.

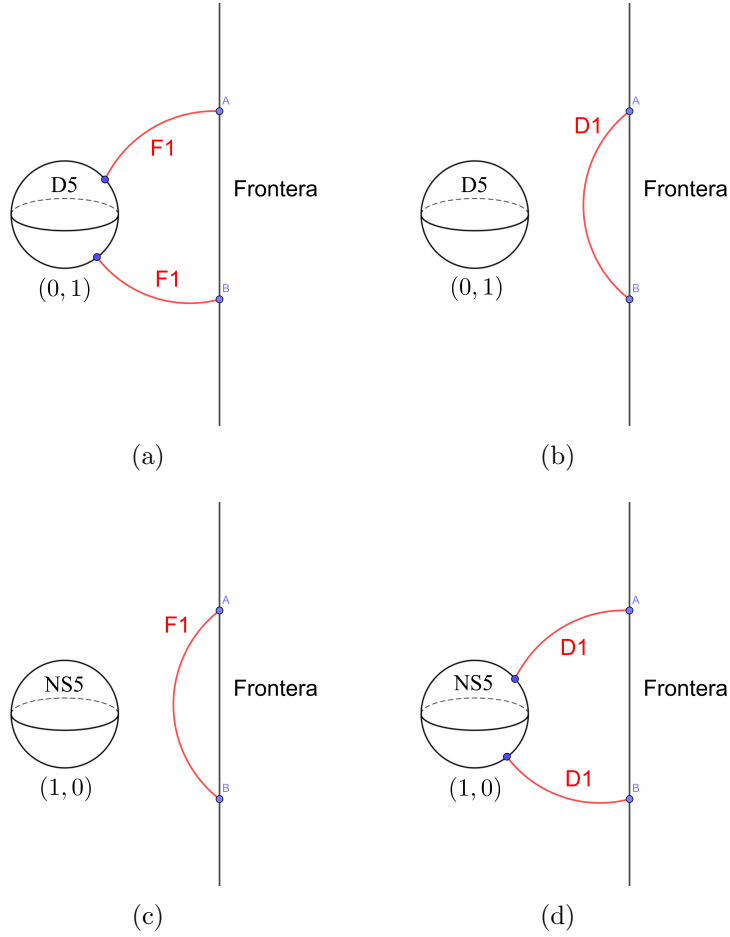


Figura 6.2: Relación entre los distintos tipos de cuerda y la 5-brana, cuyas cargas vienen denotadas por el par  $(p, q)$ . Dadas dos fuentes cargadas en la frontera del espacio AdS representadas por A y B, se representa el apantallamiento de sus cargas en las figuras (a) y (d); por otra parte, las figuras (b) y (c) representan el caso en el que las cargas se ven confinadas y la cuerda no puede enlazarse a la 5-brana.

### 6.3.3. La solución de supergravedad truncada a 4 campos escalares y las ecuaciones BPS.

Se puede encontrar una truncación consistente de supergravedad  $\mathcal{N} = 8$  con grupo gauge  $SO(6)$  en 5 dimensiones mediante una truncación consistente a 4 campos escalares. Esta construcción parte de la truncación a 8 campos escalares reales que mantiene invariante  $SO(3)$  [59], y se reduce a 4 campos escalares al imponer simetrías discretas adicionales [60]. La solución GPPZ que se discute en este capítulo es una solución particular de este modelo que además apaga dos de los cuatro campos escalares que caracterizan la truncación.

El lagrangiano que caracteriza la solución con 4 campos escalares se describe a partir de la métrica en 5 dimensiones,  $g$ ; los superpotenciales  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{K}$ ; y dos escalares complejos,  $z^1$  y

$z^2$ , de la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi G_N} \sqrt{|g|} \left( \frac{1}{4} R + \frac{1}{2} \mathcal{K}_{\alpha\bar{\beta}} \partial_\mu z^\alpha \partial^\mu \bar{z}^\beta - \mathcal{P} \right). \quad (6.20)$$

En la expresión también aparecen la constante de Newton,  $G_N$ , y el escalar de Ricci,  $R$ . Mediante el escalar de Kähler se puede determinar el término cinético  $\mathcal{K}_{\alpha\bar{\beta}}$  y, empleando también el superpotencial  $\mathcal{W}$ , se puede determinar el potencial escalar  $\mathcal{P}$  que aparece en dicha expresión. Esto se muestra en las relaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\alpha\bar{\beta}} &= \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K}, & \mathcal{K} &= -\log \left[ (1 - z_1 \bar{z}_1)(1 - z_2 \bar{z}_2)^3 \right], \\ \mathcal{W} &= \frac{3g}{4} (1 + z_1 z_2)(1 - z_2^2), & \mathcal{P} &= \frac{1}{2} e^{\mathcal{K}} \left[ \mathcal{K}^{\alpha\bar{\beta}} D_\alpha \mathcal{W} D_{\bar{\beta}} \bar{\mathcal{W}} - \frac{8}{3} \mathcal{W} \bar{\mathcal{W}} \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

La derivada covariante de Kähler que aparece en las relaciones anteriores actúa de la forma:  $D_\alpha f = (\partial_\alpha + \partial_\alpha \mathcal{K}) f$ .

El modelo admite una métrica como la formulada en la ecuación (6.14). Por otra parte, las *ecuaciones BPS* se obtienen al imponer que se preserve parte de la supersimetría  $\mathcal{N} = 8$  (más concretamente, imponiendo que las variaciones fermiónicas  $\delta\lambda_\mu$  se anulen). La expresión que toman dichas ecuaciones es la siguiente [49]:

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} - \frac{2}{3} e^{\mathcal{K}/2} |\mathcal{W}| = 0, \quad \frac{\partial z^\alpha}{\partial z} + e^{\mathcal{K}/2} \frac{\mathcal{W}}{|\mathcal{W}|} \mathcal{K}^{\alpha\bar{\beta}} D_{\bar{\beta}} \bar{\mathcal{W}} = 0. \quad (6.22)$$

Nótese como una solución simple para estas ecuaciones se puede obtener considerando  $z^1 = z^2 = 0$  y  $\phi(z) = \frac{gz}{2}$ : el vacío maximalmente supersimétrico de  $AdS_5$ . Las soluciones que resultarán de interés son aquellas que permiten obtener este vacío en la frontera del espacio AdS, y con el objetivo de obtener soluciones que cumplan este requisito se pueden resolver las ecuaciones BPS expandidas alrededor del vacío (en la región UV).

En primer lugar, se realiza el siguiente cambio de variable para simplificar las expresiones:

$$\begin{aligned} z_1 &= \tanh \frac{1}{2} (3\alpha + \varphi - 3i\psi + i\psi_4), \\ z_2 &= \tanh \frac{1}{2} (\alpha - \varphi - i\psi - i\psi_4). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Los campos escalares  $\psi$  y  $\psi_4$  suponen, a su vez, un cambio de variable respecto a los campos  $m(z)$  y  $\sigma(z)$  que caracterizaban la solución GPPZ en la sección 6.3.1 y tendrán, de la misma manera, una masa  $m_\psi^2 L^2 = m_{\psi_4}^2 L^2 = -3$ . Concretamente, el cambio de variable vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \tan \left( \frac{1}{2} (\psi_4 - 3\psi) \right) &= -\tanh \left( \frac{1}{2} (\sqrt{3}m - \sigma) \right), \\ \tan \left( \frac{1}{2} (\psi_4 + \psi) \right) &= \tanh \left( \frac{1}{6} (\sqrt{3}m + \sigma) \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Más aún, tendrán unos operadores duales asociados en la teoría gauge completamente análogos:

$$\psi \longleftrightarrow \mathcal{O}_3 = \sum_{A=1}^3 \left[ \text{tr}(\lambda_A \lambda_A) + m_f \text{tr} |\phi_A|^2 \right], \quad \psi_4 \longleftrightarrow \mathcal{O}_4 = \text{tr}(\lambda_4 \lambda_4). \quad (6.25)$$

Los otros dos campos escalares, de masas  $m_\alpha^2 L^2 = -4$  y  $m_\varphi^2 L^2 = 0$ , estarán asociados a los campos que transforman de la forma  $\mathbf{20}'$  y  $\mathbf{1}$  (respectivamente) y serán apagados en la solución GPPZ. La masa de cada escalar se obtiene al expandir el potencial escalar  $\mathcal{P}$  alrededor del punto  $z_1 = z_2 = 0$ , expresado tras el cambio de variable [49].

La expansión UV de las ecuaciones BPS toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\psi &= \hat{m}\epsilon^{1/2} - \frac{5}{6}\hat{m}^3\epsilon^{3/2} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \psi_4 &= w\epsilon^{3/2} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \alpha &= v\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \varphi &= \varphi_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \phi(z) &= -\frac{1}{2}\log \epsilon - \frac{\hat{m}}{2}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{6.26}$$

La distancia al vacío de la solución se controla tomando el parámetro  $\epsilon = e^{-gz}$  próximo a 0. El parámetro  $\hat{m}$  que aparece en las expresiones se corresponde con un término de fuente del operador asociado al campo  $\psi$  y es proporcional al parámetro de masa  $m_f$  de la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM. También aparecen el parámetro  $w$ , relacionado con el valor esperado de vacío del operador gaugino bilineal asociado a  $\psi_4$ ; y el parámetro  $v$ , relacionado con el valor esperado de vacío del operador asociado a  $\alpha$ . El condensado de gauginos de la teoría se corresponderá con el valor que tome  $w$ ; y no habrá un condensado asociado a  $v$  en la solución GPPZ debido a que la solución está caracterizada por  $\alpha = 0$ .

La expansión UV de los campos  $m(z)$  y  $\sigma(z)$  se puede obtener a partir de las expresiones obtenidas en (6.26) y mediante el cambio de variable (6.24), dando lugar a la expresión:

$$\begin{aligned}m &= \sqrt{3}\hat{m}\epsilon^{1/2} + \frac{\hat{m}^3}{\sqrt{3}}\epsilon^{3/2} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \sigma &= (w - \hat{m}^3)\epsilon^{3/2} + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{6.27}$$

A partir de dichas expresiones, se puede calcular el valor esperado de vacío del operador gaugino bilineal [61] de la siguiente manera:

$$\langle \mathcal{O}_4 \rangle = \frac{N^2}{\pi^2}(w - \hat{m}^3).\tag{6.28}$$

### 6.3.4. El uplift a 10 dimensiones de la solución GPPZ.

Mediante la notación introducida en la sección 6.3.3, es posible expresar el elemento de línea de la solución GPPZ en 5 dimensiones de la forma:

$$ds_5^2 = \frac{4}{g^2 t^2} \left( dt^2 + (1-t^2)(1-\lambda^2 t^6)^{1/3} dx^\mu dx_\mu \right),\tag{6.29}$$

donde se han empleado las expresiones:

$$t = \hat{m}e^{-gz/2}, \quad z_1 = i\frac{\mu - \nu^3}{\mu + \nu^3}, \quad z_2 = i\frac{1 - \mu\nu}{1 + \mu\nu}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1 + \lambda t^3}{1 - \lambda t^3}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{1 + t}{1 - t}}.\tag{6.30}$$

Se ha empleado una nueva variable radial  $t$  en las expresiones. También se puede observar como los complejos  $z_1$  y  $z_2$  son puramente imaginarios, debido a que los escalares  $\alpha$  y  $\varphi$  se

anulan en esta solución. La frontera del espacio AdS, en la que se obtiene el vacío maximalmente simétrico, se obtiene cuando  $t \rightarrow 0$  y, al expandir la solución cerca de esta frontera, se puede relacionar la constante de integración  $\lambda$  con el condensado de gauginos y la masa de la teoría conforme de la siguiente forma:

$$(\lambda + 1)\hat{m}^3 = w. \quad (6.31)$$

La constante  $\lambda$  se define, más concretamente, en función de las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  que aparecen en las ecuaciones del flujo GPPZ (6.16) de la siguiente forma [53] [59]:

$$\lambda = e^{3(C_2 - C_1)}. \quad (6.32)$$

Bajo esta notación, la singularidad de la solución se encontrará en  $t = 1$ , y su estructura dependerá del valor de  $\lambda$ . Siguiendo una vez más los criterios de Gubser [55] para que una solución tenga interpretación física es preciso restringir los valores de la constante de integración en el rango  $|\lambda| \leq 1$  [4].

Es posible realizar un *uplift* de esta solución a una solución de tipo IIB de supergravedad en 10 dimensiones mediante las fórmulas descritas por Baguet, Hohm y Samtleben (2015) [62]. En esta sección se van a introducir los campos y expresiones más relevantes, cuya obtención es detallada por Bobev, Gautason, Nichoff y van Muiden (2018) [51]; así como por Petrini, Samtleben, Schmidt y Skenderis (2018) [53].

La métrica del uplift de la solución GPPZ se puede expresar de la forma:

$$ds_{10}^2 = \frac{(K_1 K_2 - K_3^2)^{1/4}}{\sqrt{g_s}} \left( \frac{ds_5^2}{(1-t^2)\sqrt{1-\lambda^2 t^6}} + \frac{4\sqrt{1-\lambda^2 t^6}}{g^2(K_1 K_2 - K_3^2)} d\Omega_5 \right). \quad (6.33)$$

Para poder expresar la métrica de manera compacta, se han definido las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} K_1 &= (1+t^2)(1-\lambda^2 t^8) + 2t^2 \left( (1-\lambda^2 t^6) - \lambda t^2(1-t^2) \cos(4\alpha) \right) \cos 2\chi, \\ K_2 &= (1+t^2)(1-\lambda^2 t^8) - 2t^2 \left( (1-\lambda^2 t^6) - \lambda t^2(1-t^2) \cos(4\alpha) \right) \cos 2\chi, \\ K_3 &= 2\lambda t^4(1-t^2) \cos 2\chi \sin 4\alpha, \\ K_4 &= (1+t^2)^2(1+\lambda t^4)^2 - 4t^4(1+\lambda t^2)^2 \cos^2 2\chi, \end{aligned} \quad (6.34)$$

donde se ha empleado una elección de coordenadas en  $S^5$  que permite describir de manera explícita la ruptura  $SU(4) \rightarrow SO(3) \times U(1)$  de la forma:

$$\begin{pmatrix} Y_1 + iY_2 \\ Y_3 + iY_4 \\ Y_5 + iY_6 \end{pmatrix} = e^{i\alpha} \cos \chi \mathcal{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ie^{i\alpha} \sin \chi \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

Las coordenadas  $Y_1, \dots, Y_6$  describen un embedding de  $S^5$  en  $\mathbb{R}^6$ . También es empleada la matriz de rotación  $\mathcal{R}$ , definida como  $\mathcal{R} = e^{\omega g_1} e^{\xi_1 g_2} e^{\xi_2 g_1}$ , donde  $(\omega, \xi_1, \xi_2)$  son los ángulos de Euler y  $g_1, g_2$  son los generadores de  $SO(3)$ :

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$



Cada una de las coordenadas angulares tendrá un valor comprendido en los siguientes rangos:

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad 0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi, \quad 0 \leq \xi_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \xi_2 \leq \pi. \quad (6.37)$$

En la expresión 6.33, también aparece la métrica de  $\mathbb{S}^5$ , definida de la forma:

$$\begin{aligned} d\Omega_5 = & K_4 d\chi^2 - 4\lambda t^4 (1-t^2)^2 (\cos 2\alpha d\chi - \sin 2\alpha \cos 2\chi \sigma_3)^2 \\ & - 4\lambda t^6 d(\cos 2\alpha \cos 2\chi)^2 + \frac{(1-\lambda^2 t^8)^2 (1-t^2)}{1-\lambda^2 t^6} (d\alpha + \sin 2\chi \sigma_3)^2 \\ & + \cos^2 2\chi (1+\lambda t^4)^2 (4t^2 d\alpha^2 + (1-t^2)^2 \sigma_3^2) \\ & + (1-t^2) (\sin^2 \chi K_1 \sigma_1^2 + \sin 2\chi K_3 \sigma_1 \sigma_2 + \cos^2 \chi K_2 \sigma_2^2), \end{aligned} \quad (6.38)$$

donde se emplean las 1-formas  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  que vienen dadas de manera explícita en función de los ángulos de Euler de la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \cos \xi_2 \sin \xi_1 d\omega - \sin \xi_2 d\xi_1, \\ \sigma_2 &= -\sin \xi_2 \sin \xi_1 d\omega - \cos \xi_2 d\xi_1, \\ \sigma_3 &= -\cos \xi_1 d\omega - d\xi_2. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Los campos de supergravedad que caracterizan la teoría de tipo IIB se pueden describir de manera explícita siguiendo las siguientes expresiones<sup>2</sup>:

$$\text{Dilatón: } e^\phi = \frac{g_s(1+\lambda t^4)}{\sqrt{K_1 K_2 - K_3^2}} \left( (1+t^2)(1-\lambda t^4) + 2t^2(1-\lambda t^2) \cos 2\chi \cos 2\alpha \right), \quad (6.40)$$

$$\text{Axión: } C_0 = -\frac{2t^2(1+\lambda t^2)(1-\lambda t^4) \cos 2\chi \sin 2\alpha}{g_s(1+\lambda t^4)((1+t^2)(1-\lambda t^4) + 2t^2(1-\lambda t^2) \cos 2\chi \cos 2\alpha)}, \quad (6.41)$$

$$\text{4-forma: } C_4 = -\frac{16}{g^4 g_s} \left[ \frac{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^8)}{t^4(1-\lambda^2 t^6)^{1/3}} dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right], \quad (6.42)$$

2-formas:

$$\begin{aligned} B_2 + ig_s C_2 = & \frac{4}{g^2} \frac{te^{-i\alpha}}{K_1 K_2 - K_3^2} \left[ (a_1 d\chi + a_2 \sigma_3 - i(1-\lambda^2 t^8)(K_1 + K_2) \sin 2\chi d\alpha) \wedge \Sigma \right. \\ & \left. - (a_3 d\chi + a_4 \sigma_3 - i(1-\lambda^2 t^8)(K_1 - K_2 - 2iK_3) \sin 2\chi d\alpha) \wedge \bar{\Sigma} \right]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

De manera análoga a cuando se expresó la métrica en 6.33, se han definido una serie de funciones que permiten expresar de manera compacta las 2-formas:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2iK_3(1+t^2)(1-\lambda^2 t^6), \\ a_2 &= i(1+t^2)[(K_1 - K_2)(1-\lambda^2 t^6) \cos 2\chi - 2(1-\lambda^2 t^8)^2 - 2t^2(1+\lambda^4 t^{12} - \lambda^2 t^4(1+t^4)) \cos^2 2\chi], \\ a_3 &= 4t^4(1-\lambda^2 t^4)(1-\lambda^2 t^6 - \lambda t^2(1-t^2)e^{4i\alpha}) \cos^2 2\chi - (1+t^2)^2(1-\lambda^2 t^8)(1-\lambda^2 t^6 + \lambda t^2(1-t^2)e^{4i\alpha}), \\ a_4 &= i(1-t^2)^2(1-\lambda^2 t^8)(1-\lambda^2 t^6 - \lambda t^2(1-t^2)e^{4i\alpha}) \cos 2\chi. \end{aligned} \quad (6.44)$$

---

<sup>2</sup>Se ha añadido un factor 16 multiplicando la expresión de  $C_4$  que no aparece en la referencia [49]. Se puede comprobar como este factor sí aparece en una referencia anterior con los mismos autores, [51], y es necesario para la obtención correcta del potencial de una D3-brana.

Finalmente, en la expresión de las 2-formas aparece la 1-forma compleja  $\Sigma$  dada por:

$$\Sigma = i \sin \chi \sigma_1 + \cos \chi \sigma_2. \quad (6.45)$$

La simetría  $SO(3)$  (asociada a las 1-formas  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ ) se preserva en el uplift a 10 dimensiones de la solución GPPZ. Además, se observa como la solución mantiene invariante sus campos de supergravedad bajo una transformación de dualidad combinada con un cambio en el ángulo  $\alpha$  de la forma  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi/2$ . Esto se comprueba fácilmente en la expresión de la métrica y de la 4-forma, observando que son invariantes bajo la S-dualidad y que su período en  $\alpha$  es  $\pi/2$ . Para poder comprobarlo en el resto de campos, es preciso notar que transforman bajo S-dualidad de la forma:

$$\tau = C_0 + ie^{-\phi} \rightarrow -\frac{1}{g_s^2 \tau}, \quad B_2 \rightarrow -g_s C_2, \quad C_2 \rightarrow g_s^{-1} B_2. \quad (6.46)$$

## Capítulo 7

# D3-branas en el uplift de la solución GPPZ

Se va a plantear, una vez más, un conjunto de  $N$  D3-branas en una solución de supergravedad (que en este caso será la solución GPPZ) mediante las cuales se podrá estudiar su teoría gauge dual según la correspondencia AdS/CFT (la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM) en su régimen no perturbativo. Este tipo de estudio de la teoría gauge sería mucho más complejo sin la dualidad que se está empleando, por lo que este capítulo puede considerarse un ejemplo de la capacidad de dicha herramienta en la Teoría Cuántica de Campos.

### 7.1. Acción de la brana de prueba.

Es posible estudiar el comportamiento dinámico de un conjunto de  $N$  D3-branas consideradas en el uplift de la solución de supergravedad descrita en el capítulo anterior, la solución GPPZ. El procedimiento es similar al descrito en el capítulo 5 cuando se calculaba la acción de una brana separada de las  $N - 1$  restantes en un espacio AdS. La expresión de la acción será, una vez más, la suma de un término DBI (que sigue la expresión de la ecuación (5.5)) y un término WZ (que sigue la expresión de la ecuación (5.8)).

Las direcciones a lo largo de las cuales se verá extendida cada D3-brana se representan mediante un aspa en la siguiente tabla, mientras que aquellas donde está localizada son denotadas mediante un punto. En la tabla se denotó a las coordenadas del mundo de la brana por  $s^M$ .

$s^M$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D3-brana	×	×	×	×	·	·	·	·	·	·

El espacio transversal a la brana puede describirse mediante la coordenada radial  $t$  que se introdujo en la sección 6.3.4 para describir el espacio  $AdS_5$ ; junto con una elección de coordenadas que parametrize la 5-esfera, como es el caso de las coordenadas  $(\alpha, \omega, \xi_1, \xi_2, \chi)$

introducidas en la misma sección. La brana estará localizada en un valor constante de cada coordenada de las direcciones transversas, y se puede establecer un embedding como el descrito por la siguiente tabla:

Función de embedding, $X^M$	$X^0$	$X^1$	$X^2$	$X^3$	$X^4$	$X^5$	$X^6$	$X^7$	$X^8$	$X^9$
Valor de la función	$s^0$	$s^1$	$s^2$	$s^3$	$t$	$\alpha$	$\omega$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\chi$

El valor que toma la derivada parcial con respecto a cada coordenada del mundo de la función de embedding viene dado, por lo tanto, por:

- $\partial_\mu X^M = 0$  para  $M = 4, \dots, 9$ , debido a que la función de embedding es constante.
- $\partial_\mu X^\nu = \partial_\mu s^\nu = \delta_\mu^\nu$ .

Esto permite expresar el pullback de la métrica según la expresión:

$$P[g]_{\mu\nu} = g_{MN}(X)\delta_\mu^M\delta_\nu^N = g_{\mu\nu}(X) = \frac{4(K_1K_2 - K_3^2)^{1/4}}{g^2t^2\sqrt{g_s}} \frac{1}{(1 - \lambda^2t^6)^{1/6}}\eta_{\mu\nu}. \quad (7.1)$$

El producto externo de formas diferenciales que definen  $B_2$  y  $C_2$  está compuesto por 1-formas en  $S^5$ , por lo que el pullback de las 2-formas será anulado. La acción de Dirac-Born-Infeld quedará descrita, por lo tanto, de la forma:

$$\begin{aligned} S_{DBI} &= -\mu_3 \int d^4s \sqrt{-\det \left( \frac{4(K_1K_2 - K_3^2)^{1/4}}{g^2t^2\sqrt{g_s}} \frac{1}{(1 - \lambda^2t^6)^{1/6}}\eta_{\mu\nu} \right)} \\ &= -\mu_3 \int d^4s \frac{16\sqrt{K_1K_2 - K_3^2}}{g^4t^4 g_s} \frac{1}{(1 - \lambda^2t^6)^{1/3}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Por otra parte, es preciso determinar el pullback de la forma  $C_4$  para calcular el término WZ de la acción, el cual da lugar a la expresión:

$$\begin{aligned} P[C_4] &= \frac{1}{4!} C_{MNPQ} \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N \partial_\rho X^P \partial_\sigma X^Q ds^\mu \wedge ds^\nu \wedge ds^\rho \wedge ds^\sigma \\ &= -\frac{16}{g^4g_s} \frac{(1-t^2)(1-\lambda^2t^8)}{t^4(1-\lambda^2t^6)^{1/3}} ds_0 \wedge ds_1 \wedge ds_2 \wedge ds_3. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Teniendo en cuenta la expresión del pullback, la acción de Wess-Zumino toma la siguiente forma<sup>1</sup>:

$$S_{WZ} = \mu_3 \int d^4s \frac{16}{g^4g_s} \frac{(1-t^2)(1-\lambda^2t^8)}{t^4(1-\lambda^2t^6)^{1/3}}. \quad (7.4)$$

<sup>1</sup>El signo que adquiere la acción es el opuesto al que se consideró al calcular (5.9). Esto es debido a que bajo esta coordenada radial  $t$ , la región UV está situada en la región  $t \rightarrow 0$ , mientras que la región IR se sitúa en  $t \rightarrow +\infty$ . En la sección 5.1 se adquieren bajas energías cuando la coordenada radial considerada toma valores próximos a 0, y altas energías en  $\infty$ ; lo cual indica que hubo un cambio de orientación al cambiar las coordenadas, que se refleja en el signo de esta acción.

Al sumar los términos DBI y WZ se obtiene la acción total, que sigue la expresión:

$$S = S_{DBI} + S_{WZ} = \frac{16}{g^4 g_s} \mu_3 \int d^4 s \frac{-\sqrt{K_1 K_2 - K_3^2} + (1-t^2)(1-\lambda^2 t^8)}{t^4 (1-\lambda^2 t^6)^{(1/3)}}. \quad (7.5)$$

De manera opuesta a lo que ocurría en la sección 5.1, separar una D3-brana del conjunto inicial de  $N$  branas sí podría suponer un gasto energético en una solución de supergravedad de tipo GPPZ. El espacio de moduli relacionado con la posición de la brana vendrá determinado por aquellos puntos del espacio que permitan minimizar el potencial asociado a dicha acción.

## 7.2. La singularidad de la solución.

Recordando las expresiones introducidas en la sección 6.3.4, la solución GPPZ tiene una singularidad en el punto  $t = 1$  cuya estructura depende del valor de  $\lambda$ . En la misma sección se indicó que los únicos valores de la constante que permitían a la solución tener un significado físico según los criterios de Gubser [55] eran aquellos valores situados en  $|\lambda| \leq 1$ . En esta sección se estudiará por separado la singularidad cuando  $|\lambda| < 1$  y cuando  $|\lambda| = 1$ .

### 7.2.1. Singularidad en $|\lambda| < 1$ .

La singularidad en  $t = 1$  cuando el valor de  $\lambda$  se sitúa en el intervalo  $(-1, 1)$  puede describirse mediante la colocación de un tipo de D-branas en la geometría. Dicha singularidad estará situada, más concretamente, en el mínimo de energía de la solución que se obtiene en  $(t, \chi) = (1, 0)$ , sin estar localizada en el resto de sus coordenadas angulares (esto será argumentado más adelante en la sección 7.3.2).

La expresión que adopta la métrica alrededor de este punto es la siguiente [51]:

$$ds_{10}^2 \approx \frac{8}{g^2 \sqrt{g_s}} H^{-1/4} \left[ (1-\lambda^2)^{1/3} dx^\mu dx_\mu + k(\alpha)(d\chi^2 + \chi^2 \sigma_1^2) \right] \\ + \frac{1}{2g^2 \sqrt{g_s}} H^{3/4} \left[ \frac{4}{k(\alpha)} (d\alpha^2 + d\rho^2 + \rho^2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)) \right], \quad (7.6)$$

donde aparecen la coordenada  $\rho \equiv 1 - t$  (y por tanto,  $\rho \approx 0$ ); las 1-formas diferenciales que parametrizan  $SO(3)$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , descritas en (6.39); y las siguientes funciones:

$$H \equiv \frac{2k(\alpha)}{\rho}, \quad k(\alpha) \equiv \frac{1-\lambda^2}{1+2\lambda \cos 4\alpha + \lambda^2}. \quad (7.7)$$

La métrica que describían las D3-branas en una teoría  $\mathcal{N} = 4$  fue descrita en la sección 5.1, tomando una expresión de la siguiente forma:

$$ds_{D3}^2 = h^{-1/2} \underbrace{dx^\mu dx_\mu}_{\text{Extensión de la brana}} + h^{1/2} \underbrace{(dr^2 + r^2 d\Omega_5)}_{\text{Espacio transversal}}, \quad h = 1 + \left( \frac{L_3}{r} \right)^4, \quad (7.8)$$

donde la coordenada  $r$  denotaba la distancia al conjunto de branas. Sin embargo, se puede observar como la geometría que se obtiene en la expresión (7.6) tiene la misma forma que la que describe un conjunto de 5-branas colocadas en un espacio plano [63]:

$$ds_{D5}^2 = h^{-1/4} \underbrace{ds_6^2}_{\text{Extensión de la brana}} + h^{3/4} \underbrace{ds_4^2}_{\text{Espacio transversal}}, \quad h = 1 + \frac{T}{r^2}, \quad (7.9)$$

donde  $T$  está relacionada con la tensión de la brana. En estas expresiones se está observando de manera explícita el efecto de la polarización de las D3-branas en 5-branas descrito en la sección 6.3.2, el cual tiene lugar en la singularidad de la solución GPPZ.

Recordando la manera de determinar los vacíos de una teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM a partir de la descomposición de  $N$  de la expresión (6.10), cada conjunto de vacíos se describe mediante representaciones irreducibles de  $SU(2)$  de dimensión  $d$  que aparecen  $k_d$  veces en la partición de  $N$ . En el caso de las representaciones que descomponen  $N$  de la forma  $N = dk_d$  (y por lo tanto  $d$  es un valor que divide a  $N$ ), el tipo de vacío que se considera tiene una masa no nula, lo cual provoca la polarización de las D3-branas en 5-branas mediante el efecto dieléctrico de Myers. Un vacío asociado a  $\{k_d\}$  con estas características se puede describir mediante  $k_d$  D5-branas, manteniéndose invariante bajo transformaciones de  $SU(k_d)$ ; y cada una de dichas branas se habrá formado a partir de la polarización de  $d$  D3-branas. Esta interpretación se puede realizar de manera completamente dual mediante  $d$  NS5-branas coincidentes, siendo cada una de ellas producto de la polarización de  $k_d$  D3-branas.

La solución GPPZ, en general, permitirá una descomposición del tipo:

$$N = \sum_{i=1}^M n_i k_i, \quad (7.10)$$

donde  $k_i$  denota el número de D3-branas que polarizan en una 5-brana;  $n_i$  denota el número de 5-branas que se obtienen polarizando  $k_i$  D3-branas; y  $M$  es un entero con un valor muy alto,  $M \gg 1$ . Los vacíos masivos estarán asociados a las descomposiciones de  $N$  de tipo  $N = pq$ ; es decir, son aquellos en los  $k_i \neq 0$  para un solo valor de  $i$ . El valor que tome caracterizará su vacío asociado, y al variar dicho valor se producirán distintos tipos de vacíos (es decir, estarán asociados a 5-branas con distinta carga). Una partición según (7.10) con más de un valor de  $k_i$  no nulo se corresponde con un vacío sin masa, ya que su grupo gauge asociado incluye factores  $U(1)$ , permitiendo la existencia de modos de masa nula.

Una de las diferencias principales entre la métrica (7.6) y la métrica (7.9) está en el término  $+1$  que aparece en la función  $h$ ; este término no aparece en la función armónica de la primera expresión debido a que ya se está considerando el límite cerca del horizonte.

La otra diferencia fundamental se observa en el grado de singularidad de las funciones armónicas  $H \sim \rho^{-1}$  y  $h \sim r^{-2}$ . La métrica (7.6) tiene un grado menor debido a que las branas no están localizadas en la coordenada  $\alpha$ : el espacio transversal a la brana adopta la forma de un cilindro en 4 dimensiones en el cual se puede describir una 5-brana en todo punto de cada circunferencia  $S^1$  recorrida por la coordenada  $\alpha$ .

$$\frac{4}{k(\alpha)} \left( \underbrace{d\alpha^2}_{S^1} + \underbrace{d\rho^2 + \rho^2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}_{\mathbb{R}^3} \right). \quad (7.11)$$

Un esquema que representa este espacio se puede observar en la figura 7.1. El tipo de brana que se describe dependerá del valor de  $\alpha$ , y la distribución de las branas a lo largo de la circunferencia se repetirá al combinar una transformación de S-dualidad con una transformación  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi/2$ . El inverso de la función  $k(\alpha)$ , la cual tiene en efecto un período  $\pi/2$ , aparece como factor en la geometría del cilindro descrito en (7.11); así como la propia función  $k(\alpha)$  aparece multiplicando el espacio descrito por las coordenadas  $(\chi, \sigma_1)$  en el worldvolume 6-dimensional de las branas. Este último es la subvariedad compacta 2-dimensional de  $S^5$  en la que las 5-branas se polarizan, por lo que el factor  $k(\alpha)$  que lo multiplica puede ser interpretado como un radio de dicha polarización. Por último, esta función también actúa como la tensión de la 5-brana, como se deduce al comparar las expresiones de  $H$  y  $h$ . La forma que adopta  $k(\alpha)$  para distintos valores de  $\lambda$  puede observarse representada en la figura 7.2

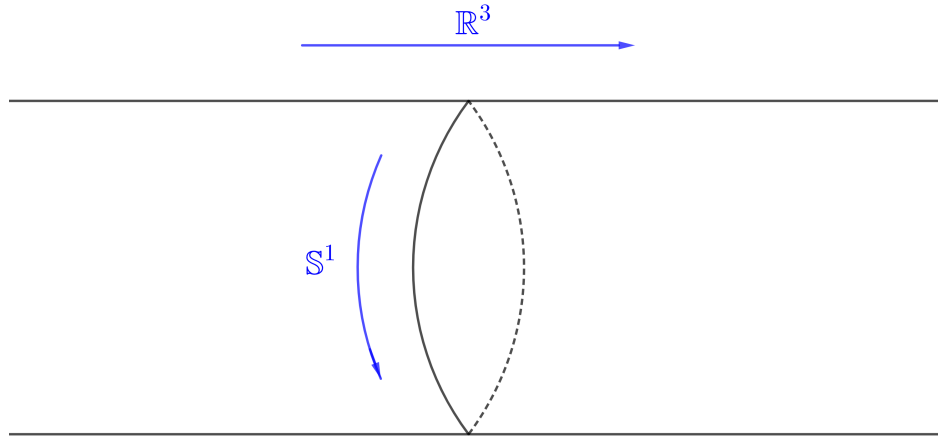


Figura 7.1: Representación de la geometría que adoptan las coordenadas transversas a las 5-branas. La coordenada  $\alpha$  describe una circunferencia  $S^1$ , a lo largo de la cual están distribuidas las 5-branas; mientras que  $\rho$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  describen  $\mathbb{R}^3$ , dando lugar a la geometría de un cilindro en 4 dimensiones.

El resto de campos de supergravedad de tipo IIB son compatibles con la descripción de la geometría mediante D3-branas polarizadas en 5-branas:

$$\text{Dilatón: } e^\phi \approx g_s H^{1/2} \cos^2 \alpha, \quad (7.12)$$

$$\text{Axión: } C_0 \approx -\frac{\tan \alpha}{g_s}, \quad (7.13)$$

$$\text{4-forma: } C_4 \approx \frac{2(1-\lambda^2)^{2/3}}{g^4 g_s} dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \quad (7.14)$$

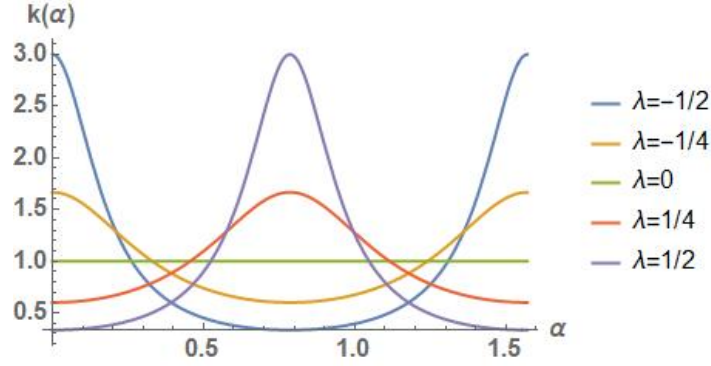


Figura 7.2: Forma de  $k(\alpha)$  para distintos valores de  $\lambda$ . La función es igual a 1 para todo punto si  $\lambda = 0$ ; sin embargo, al tomar valores mayores de  $\lambda$ , la función alcanza sus valores máximos alrededor de los puntos caracterizados por  $\cos 4\alpha = -1$ , llegando a diverger en el límite  $\lambda \rightarrow 1$ . Al tomar valores de  $\lambda$  menores que 0, los puntos máximos de la función se encuentran alrededor de los puntos caracterizados por  $\cos 4\alpha = 1$ , de manera análoga al caso anterior.

$$\text{2-formas: } \begin{bmatrix} B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \cos \alpha & g_s \sin \alpha \\ -g_s^{-1} \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{g_s g^2} \text{vol}_{\mathbb{S}^2} \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

donde  $\text{vol}_{\mathbb{S}^2}$  denota la forma de volumen de la 2-esfera formada por  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ .

Las 6-formas que se acoplan a las 5-branas definidas alrededor de la circunferencia descrita por  $\alpha$  y que definen su carga se obtienen a partir de las 2-formas  $B_2$  y  $C_2$ :

$$\begin{cases} H_3 = dB_2 \approx \frac{4}{g^2} \cos \alpha d\alpha \wedge \text{vol}_{\mathbb{S}^2} \\ F_3 = dC_2 \approx -\frac{4}{g_s g^2} \sin \alpha d\alpha \wedge \text{vol}_{\mathbb{S}^2} \end{cases}, \quad (7.16)$$

$$\begin{cases} dB_6 = H_7 = \star H_3 \approx \frac{4}{g^2} \cos \alpha d^4x \wedge \text{vol}_{\mathbb{S}^2} \wedge d\rho \\ dC_6 = F_7 = \star F_3 \approx -\frac{4}{g_s g^2} \sin \alpha d^4x \wedge \text{vol}_{\mathbb{S}^2} \wedge d\rho \end{cases},$$

$$\begin{cases} B_6 \approx \frac{4}{g^2} \cos \alpha d^4x \wedge \text{vol}_{\mathbb{S}^2} \\ C_6 \approx -\frac{4}{g_s g^2} \sin \alpha d^4x \wedge \text{vol}_{\mathbb{S}^2} \end{cases},$$

donde se denotó por  $\text{vol}_{\mathbb{S}^2}$  a la forma de volumen de la 2 esfera formada por  $\chi$  y  $\sigma_1$ .

A partir de las expresiones de las 6-formas, se puede deducir la carga de una NS5-brana, cuya carga eléctrica y magnética viene dada por el par  $(p, q) = (1, 0)$ ; y de una D5-brana, de carga  $(p, q) = (0, 1)$ :

$$\frac{1}{(2\pi l_s)^2} \int_{NS5} B_6 = \frac{4}{\pi l_s^2 g^2} \cos \alpha = \sqrt{\frac{4g_s N}{\pi}} \cos \alpha, \quad (7.17)$$

$$\frac{1}{(2\pi l_s)^2} \int_{D5} C_6 = -\frac{4}{\pi l_s^2 g_s g^2} \sin \alpha = -\sqrt{\frac{4N}{\pi g_s}} \sin \alpha.$$



De manera más general, una  $(p, q)$ -brana situada en  $\alpha$  tendrá una carga:

$$\frac{1}{(2\pi l_s)^2} \int_{(p,q)} (pB_6 + qC_6). \quad (7.18)$$

En la expresión (6.46) se describió como transformaban las 2-formas bajo una transformación de S-dualidad. Las 6-formas transformarán de una manera análoga,

$$B_6 \rightarrow -g_s C_6, \quad C_6 \rightarrow \frac{1}{g_s} B_6; \quad (7.19)$$

y puede observarse como al transformar 4 veces una forma diferencial se obtendrá la misma forma:

$$\begin{aligned} B_6 &\rightarrow -g_s C_6 \rightarrow -B_6 \rightarrow g_s C_6 \rightarrow B_6, \\ C_6 &\rightarrow \frac{1}{g_s} B_6 \rightarrow -C_6 \rightarrow -\frac{1}{g_s} C_6 \rightarrow B_6. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, se puede analizar, por ejemplo, como variará la carga de una NS5-brana caracterizada por un cierto  $\alpha$  al aplicar cada transformación de S-dualidad:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} \sqrt{\frac{4g_s N}{\pi}} \cos \alpha \\ (1, 0) \end{array}} & \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} \sqrt{\frac{4g_s N}{\pi}} \sin \alpha \\ (0, -1) \end{array}} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \boxed{\begin{array}{c} -\sqrt{\frac{4g_s N}{\pi}} \sin \alpha \\ (0, 1) \end{array}} & \longleftarrow & \boxed{\begin{array}{c} -\sqrt{\frac{4g_s N}{\pi}} \cos \alpha \\ (-1, 0) \end{array}} \end{array} \quad (7.21)$$

En general, se puede afirmar que la carga de una 5-brana cambiará mediante una transformación de S-dualidad de la forma:

$$(p, q) \longrightarrow (q, -p) = (q, N - p), \quad (7.22)$$

donde se tiene en cuenta que la notación  $(p, q)$  está expresada en módulo  $N$ . Recordando que al combinar una transformación de S-dualidad con una transformación de la forma  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi/2$  la forma diferencial se mantiene invariante, se ha representado de manera esquemática en la figura 7.3 distintas 5-branas con carga equivalente en función del cambio en el ángulo que debe realizarse para observar la equivalencia. Por ejemplo, se representa una  $(p, q)$ -brana colocada en un ángulo  $\alpha$ , y se observa como es equivalente a una  $(q, N - p)$ -brana tras un cambio  $\alpha + \pi/2$ ; así como será equivalente a una  $(N - p, N - q)$ -brana tras un cambio  $\alpha + \pi$ . En particular, también se representan en la figura las equivalencias para una NS5-brana colocada en  $\alpha = 0$ .

La polarización de distintos números de D3-branas da lugar a distintos tipos de 5-branas (es decir, branas caracterizadas por una carga diferente). La figura 7.4 representa la colocación

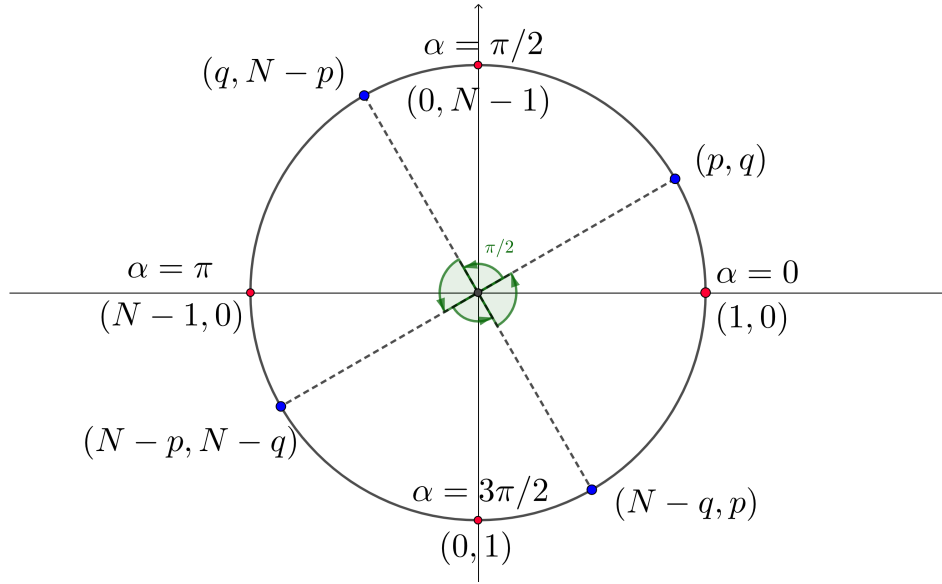


Figura 7.3: 5-branas obtenidas mediante transformaciones de S-dualidad cuya carga es equivalente al desplazar  $\alpha$  el valor indicado. Se representa, en particular, una NS5-brana, de carga  $(p, q) = (1, 0)$ , colocada en  $\alpha = 0$ .

en el espacio transversal de cada conjunto de  $n_i$  5-branas obtenidas mediante la polarización de  $k_i$  D3-branas. Al considerar un número de D3-branas muy grande,  $N \gg 1$ , se obtiene que el número de tipos de 5-branas también es muy elevado,  $M \gg 1$ ; y, por tanto, se puede considerar que existen branas para todo valor de  $\alpha$ , colocadas de manera continua en  $S^1$ .

### 7.2.2. Singularidad en $|\lambda| = 1$ .

La singularidad de la solución GPPZ sigue siendo físicamente aceptable cuando  $|\lambda| = 1$  según los criterios de Gubser. Sin embargo, la diferencia fundamental con el caso  $|\lambda| < 1$  consiste en que la singularidad no va a poder interpretarse en esta ocasión mediante 5-branas polarizadas.

Si se fija el valor  $\lambda = 1$  y se definen las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \cos 2\chi \cos 2\alpha, & w_2 &= \cos 2\chi \sin 2\alpha, \\
 W_1 &= -4(w_1^2 + 4(w_2^2 - 1)), & W_2 &= -\frac{2(w_1^2 + 2w_2^2)}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{7.23}$$

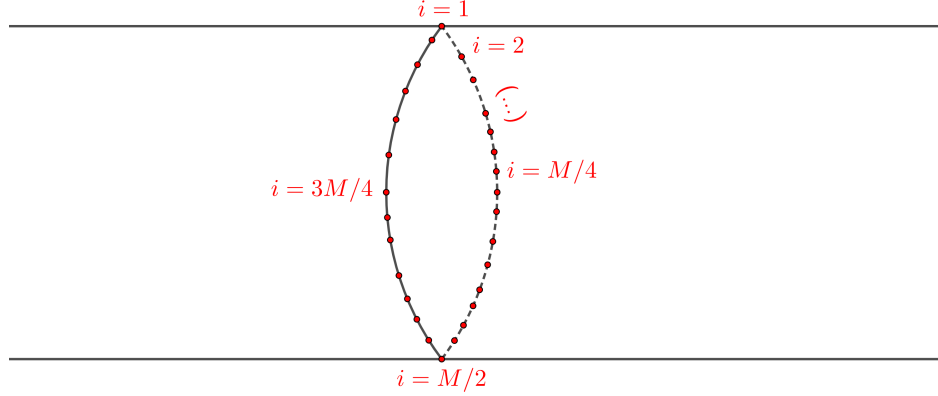


Figura 7.4: Colocación de 5-branas en su espacio transversal para distintos valores de  $\alpha$ , recorriendo la circunferencia  $S^1$ . Cada punto  $i$  representa un conjunto de 5-branas, representando los valores  $i = 1, \dots, M$ . Tomando  $M \gg 1$  se puede considerar que existen 5-branas en cualquier valor de  $\alpha$ .

la métrica cerca del límite  $t \rightarrow 1$  tomará la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 ds_{10}^2 \approx & \frac{W_1^{1/4}}{g^2 \sqrt{g_s} \sqrt{6}} \frac{1}{1-t} \left( 4dt^2 + \frac{12}{W_1} dw_2^2 \right) + \frac{48^{1/3} W_1^{1/4}}{g^2 \sqrt{g_s} \sqrt{6}} (1-t)^{1/3} ds_4^2 \\
 & + \frac{1}{g^2 \sqrt{g_s} \sqrt{6} W_1^{3/4}} (1-t) \left[ 24 \left( (4 - W_2) \sin^2 \chi \sigma_1^2 + (4 + W_2) \cos^2 \chi \sigma_2^2 + \frac{1}{2} \sin 4\chi \sin 4\alpha \sigma_1 \sigma_2 \right) \right. \\
 & \left. + 16 (3w_1 (2 \sin 2\alpha d\chi + w_1 \sigma_3) + 4 \sin 2\chi (2d\alpha + \sin 2\chi \sigma_3)) \sigma_3 \right]. \quad (7.24)
 \end{aligned}$$

Al contrario que en el caso  $|\lambda| < 1$ , la expresión que se obtiene no tiene la misma forma que la geometría descrita por un conjunto de 5-branas dada por (7.9). Por ejemplo, se puede observar como los términos dominantes en el límite  $t \rightarrow 1$  son los asociados a las coordenadas  $t$  y  $w_2$ . Si se presta atención a dichos términos y se realiza el cambio de variable  $t \equiv 1 - e^{-\hat{\rho}}$ , la métrica toma la forma:

$$ds_{10}^2 \approx \frac{W_1^{1/4}}{g^2 \sqrt{g_s} \sqrt{6}} e^{\hat{\rho}} \left( 4e^{-2\hat{\rho}} d\hat{\rho}^2 + \frac{12}{W_1} dw_2^2 \right). \quad (7.25)$$

Esta métrica, que se obtiene en  $\hat{\rho} \rightarrow \infty$  tras el cambio de variable, tiene una forma más similar a la métrica de un espacio  $AdS_2$  de signatura euclídea en el mismo límite, cuya expresión para una longitud característica unidad del espacio viene dada por [64]:

$$ds_{AdS_2}^2 = \frac{dz^2 + dx_0^2}{z^2} \xrightarrow{z \equiv e^{-\rho}} ds_{AdS_2}^2 = e^{2\rho} (e^{-2\rho} d\rho^2 + dx_0^2). \quad (7.26)$$

El límite que se analiza se alcanza en la métrica de  $AdS_2$  cuando  $\rho \rightarrow \infty$ . A pesar de ser una expresión similar a (7.25), se observa una diferencia fundamental al comparar la función

exponencial que multiplica ambos diferenciales (en (7.25) aparece  $e^{\hat{\rho}}$ , mientras que en (7.26) aparece  $e^{2\rho}$ ). Se está observando, por lo tanto, como la geometría tiene la forma de una garganta infinita de dos dimensiones al acercarse a la singularidad, de manera similar a la forma que tomaba la métrica descrita en la sección 5.1 en la región cerca del horizonte (representada por la figura 5.2), salvo por un factor  $e^{\hat{\rho}}$ .

Por otra parte, se puede observar en la expresión (7.24) como la 5-esfera en su totalidad será singular en el límite  $t \rightarrow 1$ , lo cual dificulta una interpretación mediante branas. Esto se debe a que ni la 4-forma  $C_4$  ni el axi3n  $C_0$  divergen en ningún punto, y la expresión del dilat3n y de las 2-formas es la siguiente:

$$e^{\phi} \approx \frac{2g_s(2 + \cos 2\chi \cos 2\alpha)}{\sqrt{W_1}}, \quad (7.27)$$

$$B_2 + ig_s C_2 \approx \frac{4e^{-i\alpha}}{g^2 W_1} \left[ 4i \sin 2\chi \left( \left( 4 - 3 \cos 2\chi + \frac{(w_1 + iw_2)^2}{\cos 2\chi} \right) \bar{\Sigma} + 8i \sin \chi \sigma_1 \right) \wedge d\alpha \right. \\ \left. + iW_1 \Sigma \wedge \sigma_3 + (12iw_1 \sin 2\alpha \Sigma - (4e^{4i\alpha} + 2(w_1 + iw_2)^2 + 9 - 12 \cos 4\chi) \bar{\Sigma}) \wedge d\chi \right]. \quad (7.28)$$

No es posible describir una distribuci3n de branas compatible con las simetrías del problema que sea capaz de dar lugar a esta singularidad [49]. Nótese que tomando  $\lambda = -1$  se puede llegar a la misma conclusi3n de manera an3loga.

En la secci3n 7.3 se detalla un estudio del potencial asociado a la separaci3n de una D3-brana de prueba del resto de  $N - 1$  D3-branas. En ella se puede seguir observando la naturaleza de la singularidad cuando  $|\lambda| = 1$ , y se argumenta que los puntos donde el dilat3n diverge coinciden con los m3nimos relativos del potencial de la brana. Esto supone una prueba adicional de que la aproximaci3n de supergravedad bajo estos valores de  $\lambda$  no es precisa cerca de la singularidad en  $t = 1$  y no se puede interpretar mediante branas.

### 7.3. La forma del potencial.

Es posible formular un t3rmino de energía potencial a partir de la expresi3n de la acci3n calculada en la secci3n anterior. Los puntos donde se localicen los m3nimos en el potencial, en el caso de existir, tendr3n asociados estados de vaci3o que pueden ser descritos mediante un espacio de moduli.

Teniendo en cuenta la acci3n (7.5), el potencial de una D3-brana separada de las  $N - 1$  branas restantes del conjunto tendr3 la forma de la siguiente expresi3n:

$$V = \frac{\sqrt{K_1 K_2 - K_3^2} - (1 - t^2)(1 - \lambda^2 t^8)}{t^4 (1 - \lambda^2 t^6)^{1/3}}. \quad (7.29)$$

La expresi3n rigurosa del potencial est3 multiplicada por un factor  $\frac{2\pi}{g_s (2\pi l_s g)^4}$  [60], el cual se decide obviar en el c3lculo de la secci3n ya que no influye en la localizaci3n de sus puntos cr3ticos o de sus zonas de menor energía.

Para calcular los mínimos relativos del potencial se analizarán los puntos donde las derivadas parciales de  $V$  con respecto a cada coordenada transversal a la brana se anule. Mediante la función de embedding que se introdujo en la sección 7.1, estas coordenadas fueron descritas por  $(t, \alpha, \omega, \xi_1, \xi_2, \chi)$ . Teniendo en cuenta la expresión explícita de  $K_1 K_2 - K_3^2$ ,

$$\begin{aligned} & K_1 K_2 - K_3^2 \\ &= (1+t^2)^2(1-\lambda^2 t^8)^2 - 4t^4((1-\lambda^2 t^6)^2 + \lambda^2 t^4(1-t^2)^2 - 2\lambda t^2(1-t^2)(1-\lambda^2 t^6) \cos 4\alpha) \cos^2 2\chi, \end{aligned} \quad (7.30)$$

se puede anticipar que en el caso de existir algún punto crítico, dicho punto estará caracterizado por cualquier valor que puedan tomar  $\omega$ ,  $\xi_1$  y  $\xi_2$  al no aparecer de manera explícita en la expresión de  $V$ . Las derivadas parciales de  $V$  respecto a estas 3 coordenadas serán siempre nulas; esto refleja de manera explícita que la solución se mantiene invariante bajo el grupo de simetría  $SO(3)$ .

### 7.3.1. Límite $t \rightarrow 0$ .

Para comprobar la forma que adquiere el potencial en el límite  $t \rightarrow 0$ , región donde se obtiene de manera asintótica una métrica de espacio AdS, se estudiará una expansión alrededor de dicho límite de su expresión. El potencial vendrá determinado por las expansiones asociadas al término DBI y WZ (respectivamente):

$$\frac{\sqrt{K_1 K_2 - K_3^2}}{t^4(1-\lambda^2 t^6)^{1/3}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} - 2 \cos^2 2\chi + \mathcal{O}(t^2), \quad (7.31)$$

$$\frac{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^8)}{t^4(1-\lambda^2 t^6)^{1/3}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} + \mathcal{O}(t^2), \quad (7.32)$$

Esto permite observar como diverge el potencial hacia  $+\infty$  al tomar valores de  $t$  pequeños,

$$V \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{2}{t^2} - 2 \cos^2 2\chi, \quad (7.33)$$

y por lo tanto se puede concluir que no se puede separar una D3-brana de su conjunto en la región  $t \rightarrow 0$  sin evitar que esto conlleve un gasto energético. Esto implica que no existirá un espacio de vacíos en dicha región.

### 7.3.2. Valores $|\lambda| < 1$ .

En primer lugar, resulta de ayuda observar que la expresión  $K_1 K_2 - K_3^2$  no puede anularse para ninguno de los valores que pueden tomar  $\lambda$ ,  $t$ ,  $\alpha$  y  $\chi$  cuando no se considera el límite  $t \rightarrow 1$ , el cual se analizará en detalle. Por lo tanto, en esta sección se tratará  $K_1 K_2 - K_3^2$  como una valor no nulo al tomar valores de  $t$  fuera del límite.

Recordando la expresión para el potencial descrita en (7.29), se pueden extraer las siguientes condiciones para sus puntos críticos a partir de las derivadas parciales respecto a las

coordenadas  $\alpha$  y  $\chi$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} V = -\frac{16\lambda t^2 (1-t^2) (1-\lambda^2 t^6)^{2/3} \sin 4\alpha \cos^2 2\chi}{\sqrt{K_1 K_2 - K_3^2}} = 0, \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} V = \frac{8 \left( (1-\lambda^2 t^6 + \lambda t^2 (t^2-1) \cos 4\alpha)^2 + \lambda^2 t^4 (t^2-1)^2 \sin^2 4\alpha \right) \sin 2\chi \cos 2\chi}{(1-\lambda^2 t^6)^{1/3} \sqrt{K_1 K_2 - K_3^2}} = 0. \quad (7.35)$$

En primer lugar se van a considerar valores de  $t$  en el intervalo  $(0, 1)$  (en el cual se cumple  $K_1 K_2 - K_3^2 \neq 0$  y, por supuesto,  $t \neq 0, 1$ ), lo que permite simplificar las ecuaciones (7.34) y (7.35) de la forma:

$$\lambda \sin 4\alpha \cos^2 2\chi = 0, \quad (7.36)$$

$$\left( (1-\lambda^2 t^6 + \lambda t^2 (t^2-1) \cos 4\alpha)^2 + \lambda^2 t^4 (t^2-1)^2 \sin^2 4\alpha \right) \sin 4\chi = 0. \quad (7.37)$$

Los puntos que cumplen la condición (7.36) serán aquellos caracterizados por uno de los tres siguientes casos:

- a)  $\cos^2 2\chi = 0 \implies \chi = \pi/4$ . Esto implicaría que  $\sin 4\chi = 0$ , garantizando que se cumpla la segunda condición dada por (7.37) para cualquier valor de  $\lambda$ ,  $t$  y  $\alpha$ . Más aún, se puede comprobar como el potencial  $V$  no dependerá del ángulo  $\alpha$ .
- b)  $\sin 4\alpha = 0$ , y por lo tanto se cumple uno de las condiciones siguientes:
  - b.1)  $\cos 4\alpha = 1$ ,
  - b.2)  $\cos 4\alpha = -1$ .
- c)  $\lambda = 0$ . Una vez más, el potencial  $V$  no dependería de  $\alpha$ , y en particular sus puntos críticos podrán tomar cualquier valor de este ángulo.

La derivada parcial  $\partial V/\partial \chi$  bajo el caso c) (es decir, considerando  $\lambda = 0$ ) sólo se podrá anular si se cumple  $\sin 4\chi = 0$  (es decir  $\chi = 0$  o  $\chi = \pi/4$ ). Nótese como el potencial asociado a  $\chi = \pi/4$  y  $\lambda = 0$  es un resultado particular del caso a) en el que se considera un valor de  $\lambda$  determinado.

Esto ocurre también en el caso b) ( $\cos 4\alpha = \pm 1$ ): la derivada  $\partial V/\partial \chi$  solo se anula cuando se cumple  $\sin 4\chi = 0$  (y por tanto,  $\chi = 0$  o  $\chi = \pi/4$ ). Una vez más, la combinación ( $\chi = \pi/4$ ,  $\cos 4\alpha = \pm 1$ ) resulta ser un resultado particular del caso a) en el que se toma un valor de  $\alpha$  en concreto. Más aún, la combinación ( $\chi = 0$ ,  $\cos 4\alpha = \pm 1$ ,  $\lambda = 0$ ) se puede obtener en el caso c) considerando un  $\alpha$  determinado.

Por lo tanto, se pueden distinguir cuatro posibles combinaciones de valores bajo las cuales se podrían obtener puntos críticos en esta región:

a)	b.1)	b.2)	c)
$\chi = \pi/4$	$\chi = 0$	$\chi = 0$	$\chi = 0$
$\alpha \in [0, 2\pi]$	$\cos 4\alpha = 1$	$\cos 4\alpha = -1$	$\alpha \in [0, 2\pi]$
$\lambda \in (-1, 1)$	$\lambda \in (-1, 1), \lambda \neq 0$	$\lambda \in (-1, 1), \lambda \neq 0$	$\lambda = 0$

Cuadro 7.1: Valores para los que se anula  $\partial V/\partial\alpha$  y  $\partial V/\partial\chi$ .

El potencial asociado a cada uno de estos casos ha sido representado en la figura 7.5. Se concluye, a la vista de estos resultados, que no existe ningún punto crítico en el potencial al considerar valores de  $|\lambda| < 1$  y  $t \in (0, 1)$ . Sin embargo, sí se puede observar como el potencial será estrictamente decreciente al recorrer valores mayores en el eje de  $t$  en cada uno de los 4 casos, situando por lo tanto el mínimo de energía en el límite  $t \rightarrow 1$ .

Por otra parte, los casos representados en la tabla 7.1 son los puntos críticos que alcanza el potencial cuando se está considerando un valor de  $t$  fijo en  $(0, 1)$ . En la figura 7.6 se puede observar cada uno de dichos puntos al variar  $\lambda$  entre sus valores  $-1$  y  $1$  fijando  $t$  en un valor próximo a  $1$  ( $t = 0,99$ ).

En dicha figura se comprueba, al considerar  $\lambda > 0$ , como los puntos mínimos están situados en  $(\chi = 0, \cos 4\alpha = -1)$ ; los máximos lo están en  $\chi = \pi/4$ ; y hay diversos puntos de silla en  $(\chi = 0, \cos 4\alpha = 1)$ . Cuando se considera  $\lambda < 0$  las figuras observadas son análogas, pero intercambiando la posición de los puntos mínimos y los puntos de silla situados en  $\chi = 0$ . Por último, la representación de  $\lambda = 0$  permite ver la no dependencia de  $V$  con el valor de  $\alpha$ , así como un mínimo en  $\chi = 0$  y un máximo en  $\chi = \pi/4$ .

En el límite  $t \rightarrow 1$ , donde se situará el mínimo energético, la derivada respecto a  $\alpha$  se anula y la condición (7.34) siempre se cumple. El potencial  $V$  y la derivada (7.35) toman, por otra parte, las siguiente expresiones:

$$V \xrightarrow{t \rightarrow 1} 2(1 - \lambda^2)^{2/3} \sin 2\chi, \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi} V \xrightarrow{t \rightarrow 1} 4(1 - \lambda^2)^{2/3} \cos 2\chi. \quad (7.39)$$

Es preciso notar que el límite  $t \rightarrow 1$  y el límite  $\chi \rightarrow 0$  no son intercambiables cuando  $|\lambda| < 1$ . Esto observación es relevante porque, como se dedujo anteriormente, la derivada  $\partial V/\partial\chi$  se anula en  $\chi = 0$  fuera del límite  $t \rightarrow 1$  (por tanto,  $\lim_{t \rightarrow 1} \lim_{\chi \rightarrow 0} (\partial V/\partial\chi) = 0$ ); pero en este límite, la derivada parcial toma la expresión (7.39), la cual es distinta de 0 cuando  $\chi \rightarrow 0$  ( $\lim_{\chi \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 1} (\partial V/\partial\chi) \neq 0$ ).

La única manera de anular (7.39) (y, por tanto, ser compatible con la existencia de un punto crítico) es considerar  $\chi = \pi/4$ . Al tomar este valor del ángulo, la derivada respecto de  $t$  de  $V$  en su límite  $t \rightarrow 1$  toma la siguiente expresión:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} V \right|_{t \rightarrow 1, \chi = \pi/4} = -\frac{4(2\lambda^2 + 1)}{(1 - \lambda^2)^{1/3}}. \quad (7.40)$$

Dado que esta última derivada parcial no se puede anular para ningún valor de  $\lambda$ , se concluye

que no existirán puntos críticos en el límite  $t \rightarrow 1$ . A pesar de ello, el potencial tomará sus menores valores en el punto  $\chi = 0$  (para cualquier ángulo  $\alpha$ ), alcanzando el valor  $V = 0$ .

### 7.3.3. Valor $|\lambda| = 1$ .

Un caso destacable en el estudio de la forma del potencial surge al considerar  $|\lambda| = 1$  (es decir,  $\lambda = \pm 1$ ). La expresión que toma  $V$  al tomar dicho valor de  $\lambda$  es la siguiente:

$$V = \frac{\sqrt{K_1 K_2 - K_3^2} - (1 - t^2)(1 - t^8)}{t^4(1 - t^6)^{1/3}}, \quad (7.41)$$

$$K_1 K_2 - K_3^2 = (1 + t^2)^2(1 - t^8)^2 - 4t^4 \left( (1 - t^6)^2 + t^4(1 - t^2)^2 \mp 2t^2(1 - t^2)(1 - t^6) \cos 4\alpha \right) \cos^2 2\chi. \quad (7.42)$$

En la expresión de  $K_1 K_2 - K_3^2$  aparece un signo  $\mp$  que se corresponde con el hecho de haber tomado  $\lambda = \pm 1$ . Además, al igual que ocurre cuando se considera  $|\lambda| < 1$ , esta expresión sólo se anulará en el límite  $t \rightarrow 1$ .

Las condiciones que deben cumplir sus puntos críticos obtenidas a partir de las derivadas parciales respecto a  $\alpha$  y  $\chi$  son las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} V = \mp \frac{16t^2 (1 - t^2)^2 (t^4 + t^2 + 1) \sin 4\alpha \cos^2 2\chi}{(1 - t^6)^{1/3} \sqrt{K_1 K_2 - K_3^2}} = 0, \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} V = \frac{4(t^2 - 1)^2 (t^8 + 2t^6 + 4t^4 + 2t^2 + 1 \mp 2(t^6 + t^4 + t^2) \cos 4\alpha) \sin 4\chi}{(1 - t^6)^{1/3} \sqrt{K_1 K_2 - K_3^2}} = 0, \quad (7.44)$$

donde una vez más, la notación empleada para las operaciones donde hay dos signos posibles relaciona el signo superior con el caso  $\lambda = 1$ , y el inferior con  $\lambda = -1$ .

El análisis en el intervalo  $t \in (0, 1)$  es muy similar al realizado en la sección anterior para  $|\lambda| < 1$ . Las condiciones se simplifican de la forma:

$$\sin 4\alpha \cos^2 2\chi = 0, \quad (7.45)$$

$$(t^8 + 2t^6 + 4t^4 + 2t^2 + 1 \mp 2(t^6 + t^4 + t^2) \cos 4\alpha) \sin 4\chi = 0, \quad (7.46)$$

y a partir de ellas se vuelve a obtener que para que pueda existir un punto crítico en esta región, es preciso que  $\chi$  y  $\alpha$  tomen las combinaciones de valores descritas en la tabla 7.1, pero tomando  $\lambda = \pm 1$ . La forma de  $V$  en cada uno de estos casos se representa en la figura 7.7, donde se puede observar que una vez más, no existirán puntos críticos en  $t \in (0, 1)$ , pero sí hay una tendencia decreciente al tomar valores de  $t$  más próximos a 1.

Sin embargo, la principal diferencia con el análisis anterior para  $|\lambda| < 1$  nace en el estudio del límite  $t \rightarrow 1$ . Las condiciones (7.43) y (7.44) se anulan siempre en este límite para  $\lambda = \pm 1$ , sin depender del valor que tomen el resto de sus parámetros; esto se comprobó para la derivada



$\partial V/\partial\alpha$  con un valor de  $\lambda$  cualquiera, y ocurrirá de la misma manera para  $\partial V/\partial\chi$  como se puede observar por su expresión (7.39). La existencia de un punto crítico en el límite  $t \rightarrow 1$  depende exclusivamente, por lo tanto, de que se anule la derivada respecto a  $t$  del potencial.

La forma que toma el valor absoluto de  $\partial V/\partial t$  está representada en la figura 7.8 para distintos valores de  $t$  que se aproximan gradualmente a 1, considerando  $\lambda = 1$ . En cada gráfica se puede apreciar como los puntos  $(\chi = 0, \cos 4\alpha = -1)$  toman el valor absoluto mínimo de la derivada, el cual se hace menor al tomar valores de  $t$  más próximos a 1. En el límite  $t \rightarrow 1$ , estos puntos serán los únicos que anulen  $\partial V/\partial t$ , por lo que se puede concluir (recordando que se anulan el resto de sus derivadas parciales) que son puntos críticos del potencial. Recordando la figura 7.6 se deduce que son puntos mínimos en las direcciones de  $\alpha$  y  $\chi$ ; y observando la figura 7.7, se concluye además que el potencial decrece al acercarse a  $t \rightarrow 1$  por la izquierda (sin estar definido para valores de  $t$  mayores); por lo tanto,  $(\chi = 0, \cos 4\alpha = -1)$  son puntos mínimos del potencial  $V$  en el límite  $t \rightarrow 1$  cuando  $\lambda = 1$ .

En el caso  $\lambda = -1$  se emplea un razonamiento similar, obteniéndose una forma de  $\partial V/\partial t$  análoga a la forma anterior, pero situando los valores absolutos mínimos en  $(\chi = 0, \cos 4\alpha = 1)$ . En este caso, dichos puntos también se pueden caracterizar como puntos mínimos de  $V$ .

Sin embargo, independientemente de la caracterización que tenga cada punto en el límite  $t \rightarrow 1$  atendiendo a la derivada parcial respecto a  $t$ , el potencial  $V$  se anulará para cualquier valor de  $\chi$  y  $\alpha$  cuando  $|\lambda| = 1$ , como se observa en su expresión (7.39). Esto muestra como asignar a la brana distintos valores de cada uno de sus ángulos no supondrá un mayor o menor coste energético en el límite  $t \rightarrow 1$  si  $\lambda = \pm 1$ .

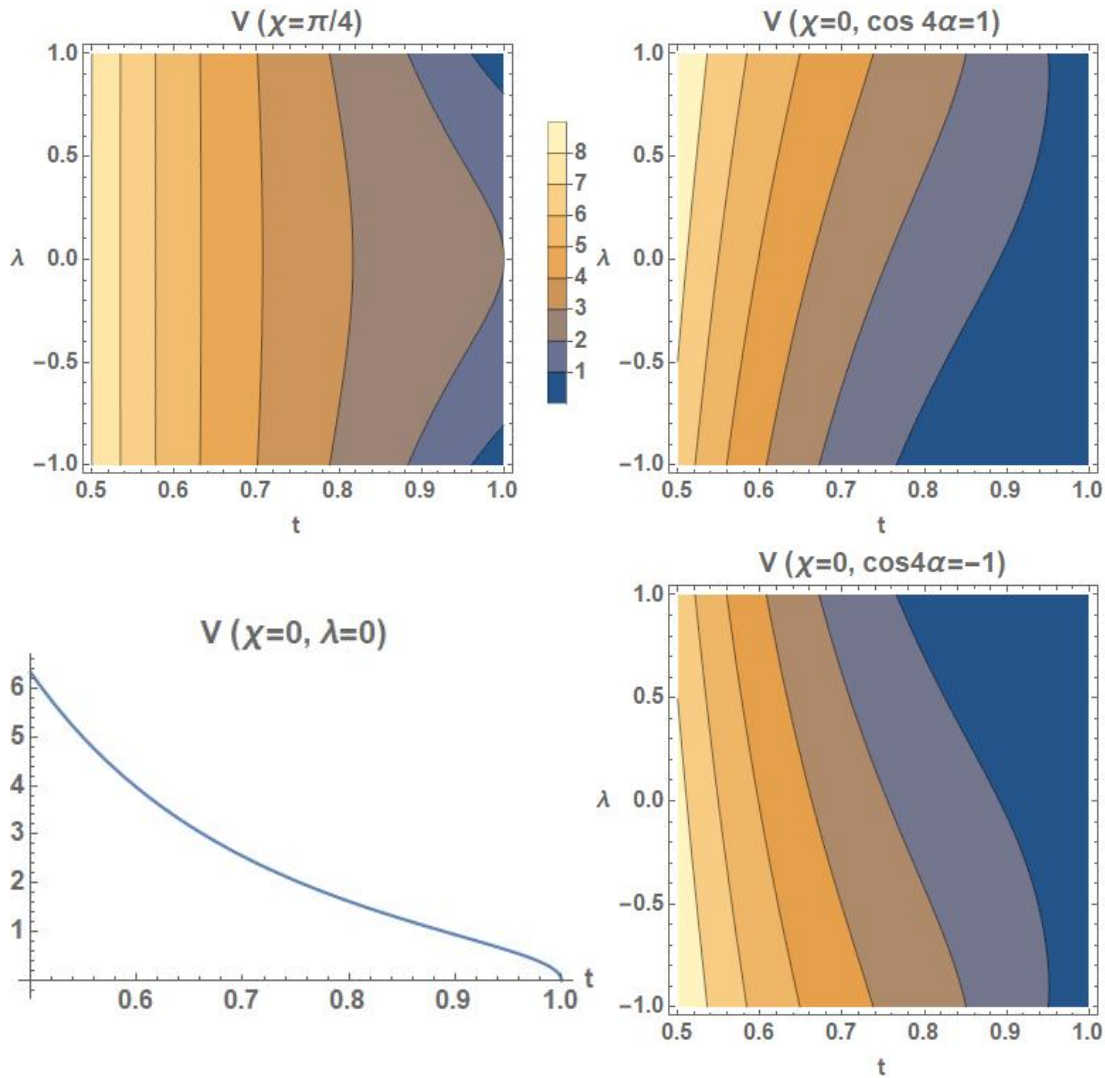


Figura 7.5: Forma del potencial  $V$  para las distintas combinaciones de sus parámetros que podrían permitir observar un punto crítico. El potencial en cada caso diverge hacia  $+\infty$  para valores de  $t$  menores que los representados. No se observa en ningún caso la existencia de un punto crítico; pero sí se observa como el valor mínimo del potencial se alcanza en el límite  $t \rightarrow 1$  para cualquier  $\lambda$  si  $\chi = 0$ ; o bien en el mismo límite para  $\lambda = \pm 1$  si  $\chi = \pi/4$ , alcanzando en cualquier caso el valor  $V = 0$ .

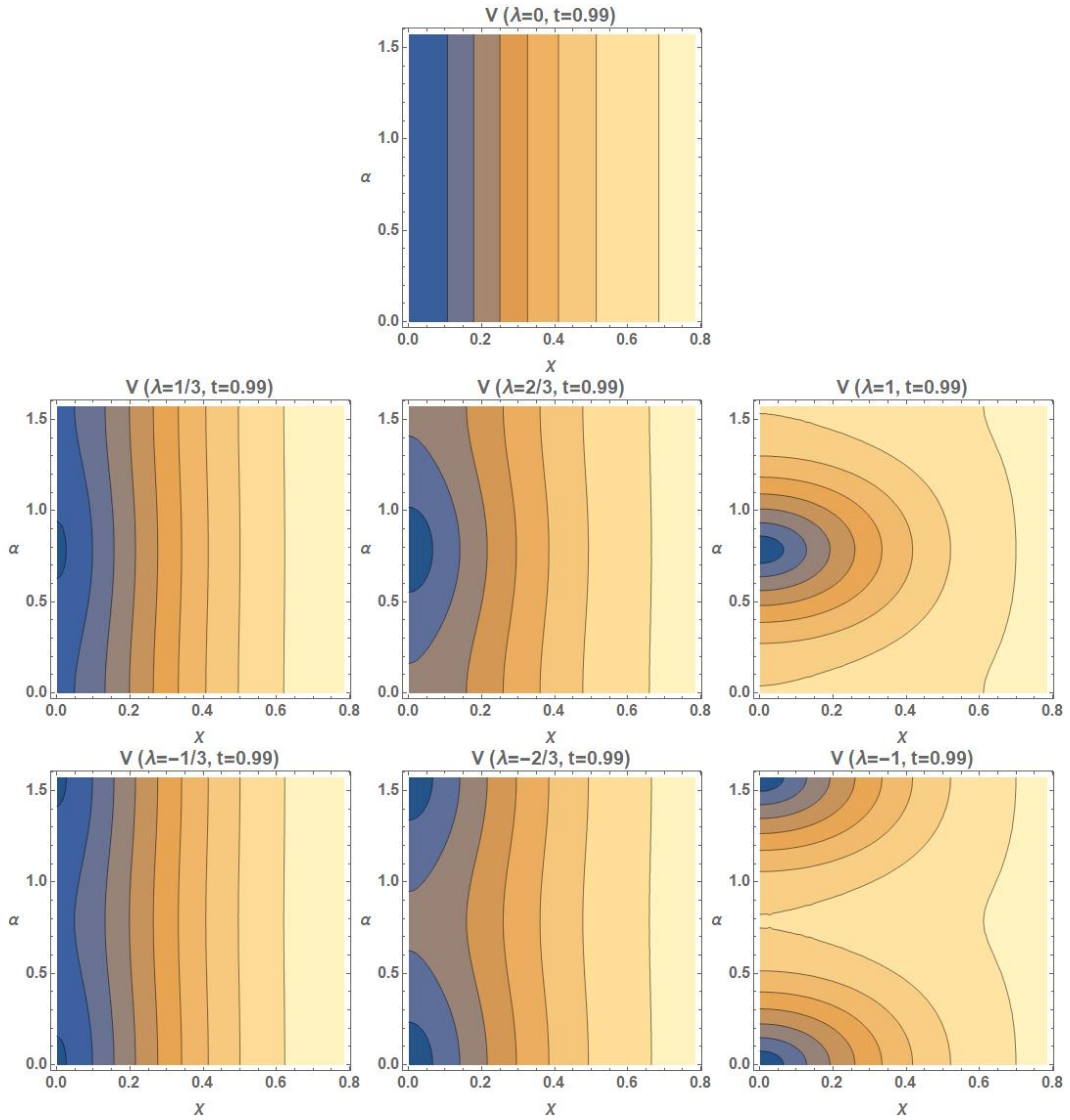


Figura 7.6: Valor del potencial para un valor de  $t = 0,99$  fijo, en el que se varía el valor de  $\lambda$ . La función se repite de manera periódica a lo largo del eje vertical hasta llegar a  $\alpha = 2\pi$ . Los colores más oscuros representan valores más bajos que alcanza el potencial.

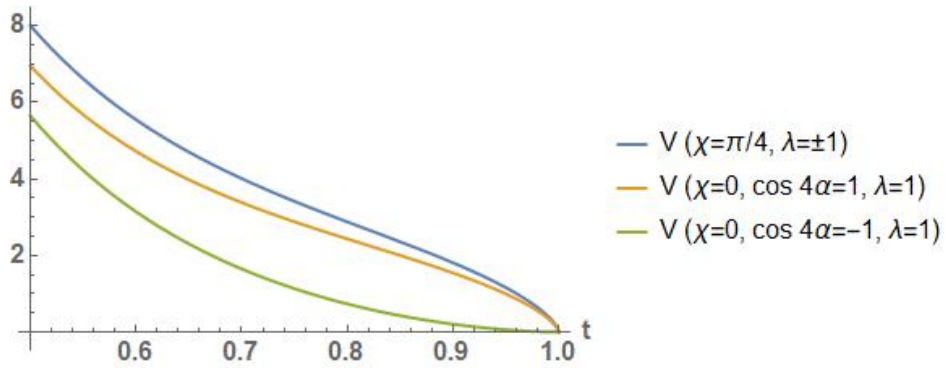


Figura 7.7: Forma del potencial  $V$  para las distintas combinaciones de sus parámetros que podrían permitir observar un punto crítico. En  $\chi = \pi/4$  se obtienen curvas equivalentes para  $\lambda = 1$  o  $\lambda = -1$ ; la curva amarilla resulta equivalente a la que se obtiene si  $(\chi = 0, \cos 4\alpha = -1, \lambda = -1)$ ; y la curva verde es equivalente a la asociada a  $(\chi = 0, \cos 4\alpha = 1, \lambda = -1)$ .

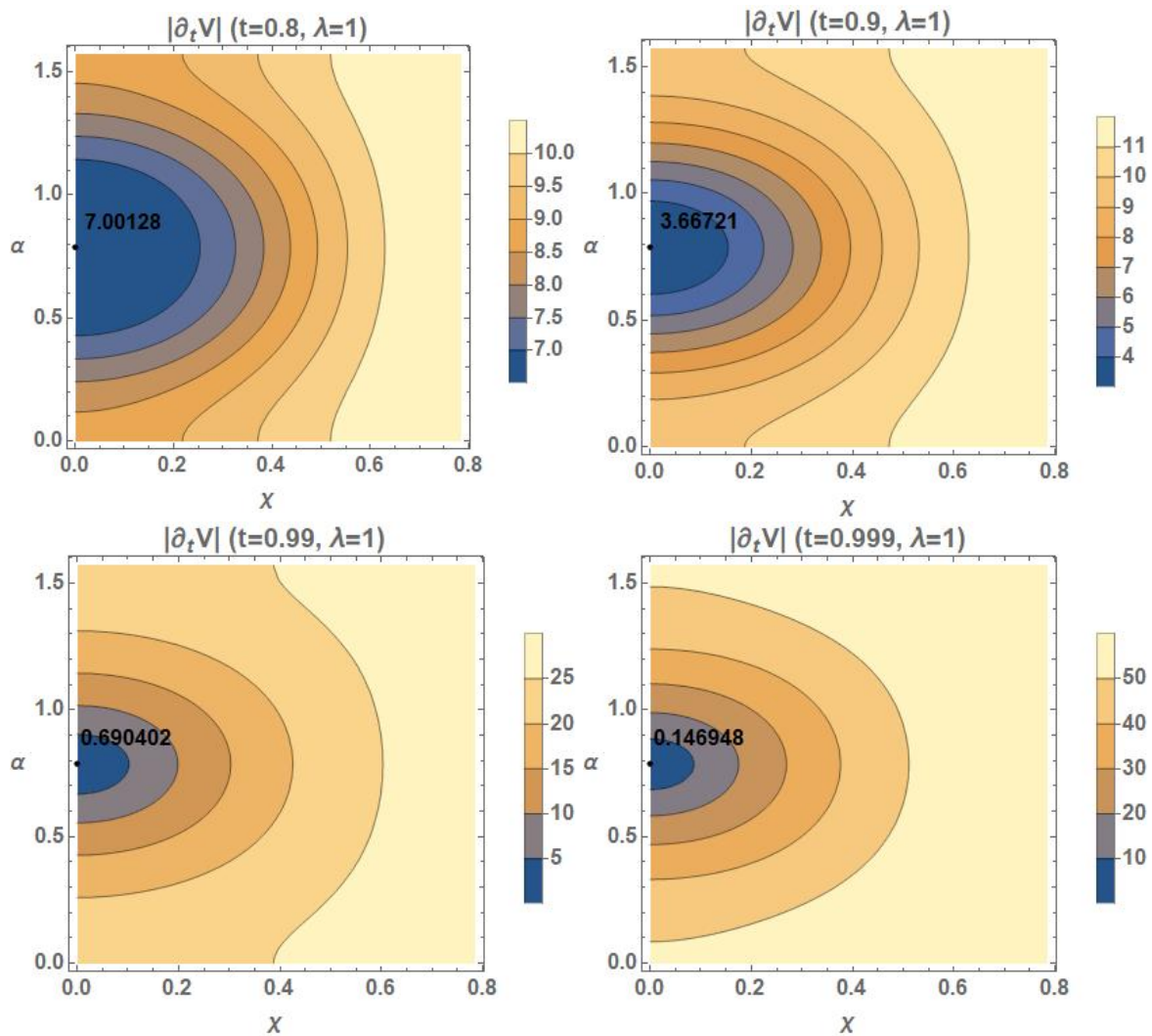


Figura 7.8: Forma del valor absoluto de la derivada parcial  $\partial_t V$  cuando se consideran valores de  $t$  cada vez más próximos a 1, tomando  $\lambda = 1$ . Se localiza un punto mínimo en  $(\chi = 0, \alpha = \pi/4)$  cuyo valor se representa en cada gráfica, y se aproxima a 0 al tomar valores de  $t$  más próximos a 1.

## 7.4. El espacio de moduli y la separación de la brana.

El espacio de vacíos clásico transverso a una D3-brana, en una teoría dual a  $\mathcal{N} = 4$  SYM, se podía describir mediante  $\mathbb{R}^6$ . Sin embargo, el que se describe en la solución GPPZ adopta una forma algo más compleja.

Cuando se consideran valores  $|\lambda| < 1$ , el espacio de moduli clásico está localizado, como se muestra en la sección 7.3.2, en  $t = 1$  y  $\chi = 0$ . La expresión de la métrica en estos puntos se puede deducir a partir de la expresión (7.6):

$$ds_{10}^2 \approx \frac{8}{g^2 \sqrt{g_s}} H^{-1/4} (1 - \lambda^2)^{1/3} dx^\mu dx_\mu + \frac{1}{2g^2 \sqrt{g_s}} \frac{4}{k(\alpha)} H^{3/4} d\alpha^2. \quad (7.47)$$

Se puede observar como sólo aparece de manera explícita una coordenada asociada a las direcciones transversas a la brana: la coordenada  $\alpha$ . Los valores que toma dicha coordenada se sitúan entre 0 y  $2\pi$ , y pueden describirse por una circunferencia a la que se denotará por  $\mathbb{S}_\alpha^1$ . Por otra parte, los vacíos de la teoría estarán localizados en el resto de direcciones transversas a la brana.

En la sección 7.3.2 se observó también como se puede alcanzar el mínimo del potencial para cualquier valor  $\lambda \in (-1, 1)$ . Fijar un valor de este parámetro tiene un efecto en la teoría gauge sobre el operador gaugino bilineal, y a partir de las expresiones (6.28) y (6.31) se puede expresar este efecto mediante el valor esperado de dicho operador:

$$\langle \mathcal{O}_4 \rangle = \langle \text{tr}(\lambda_4 \lambda_4) \rangle = \frac{N^2}{\pi^2} \lambda \hat{m}^3. \quad (7.48)$$

Debido a que cada vacío de la teoría está caracterizado por el valor esperado que toma el gaugino, el espacio de moduli quedará descrito, además, por los valores que pueda alcanzar  $\lambda$ . Este espacio tiene por lo tanto forma cilíndrica:

$$(\alpha, \lambda) \in \mathbb{S}_\alpha^1 \times (-1, 1) \quad (7.49)$$

En la teoría gauge dual, la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM, el espacio de moduli clásico estaba caracterizado mediante la ecuación (6.9) a partir de los multipletes quirales  $\Phi_A = (\lambda_A, \phi_A)$  descritos en la sección 6.2 ( $A = 1, 2, 3$ ), que se mantienen invariantes bajo transformaciones de  $SO(3)$  (de dimensión 3). Estos multipletes parametrizan parte del espacio transverso a las branas situadas en el mínimo localizado en  $(t = 1, \chi = 0)$ ; más concretamente, recordando la forma que toma la geometría de la solución cerca de este punto dada por el elemento de línea (7.6), el espacio parametrizado se corresponde con el descrito por las 1-formas invariantes bajo  $SO(3)$   $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , y por la coordenada radial  $\rho$ . En esta geometría se podía observar el efecto dieléctrico de Myers que polariza D3-branas en 5-branas y, por lo tanto, el espacio transverso a las mismas tenía forma cilíndrica y quedaba completamente determinado por el valor de los multipletes  $\Phi_A$  y el valor de  $\alpha$ .

Sin embargo, la geometría de la brana de prueba en un estado de vacío viene descrita por la expresión (7.47). Al colocar la brana de manera exacta en el punto  $\chi = 0$ , esta expresión permite observar que su extensión vendrá descrita únicamente por las  $3 + 1$  coordenadas  $x^\mu$ ,

y que el espacio transversal estará igualmente reducido al localizar la brana de manera exacta en  $\rho = 0$ , quedando descrito tan solo por la coordenada  $\alpha$ . Por este motivo, los multipletes  $\Phi_A$  que parametrizan el espacio descrito por  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y  $\rho$  deben anularse para así situar a la brana en el origen de dicho espacio, localizado en  $\rho = 0$ .

En este caso, la simetría interna que mantendrá invariante el potencial será la asociada a la coordenada  $\alpha$ , descrita por  $U(1)_R$ , por lo que se obtiene un estado de Coulomb. Cada punto del espacio de vacíos  $\mathbb{S}_\alpha^1 \times (-1, 1)$  se corresponde con un estado de este tipo que se observa tras la separación de una D3-brana, por lo que este proceso pertenece a la rama coulombiana de la teoría. La solución completa de supergravedad, sin embargo, no es invariante bajo el grupo  $U(1)_R$ , ya que el valor de los campos de supergravedad descritos en la sección 7.2.1 depende del valor que tome  $\alpha$ . No obstante, como se notó en la misma sección, sí será invariante al combinar una transformación de  $U(1)_R$  y S-dualidad, bajo la cual la solución es periódica.

Un vacío masivo está asociado a la descomposición de  $N$  como producto de dos factores,  $N = pq$ , lo cual fue interpretado en la sección 7.2.1 como un vacío descrito mediante un sólo conjunto de  $q$  D5-branas del mismo tipo (o como  $p$  NS5-branas de un mismo tipo), entendiendo que las branas del mismo tipo son en este contexto aquellas que se forman como polarización del mismo número de D3-branas. Sin embargo, lejos de observarse un solo conjunto de 5-branas en esta solución, lo que se obtiene en general es una distribución de estos conjuntos para cada valor de  $\alpha$ , como se observaba en la figura 7.4, cada uno de ellos asociados a 5-branas de distinto tipo; por este motivo, los vacíos de la teoría no tendrán un estado de masa mínima. Además, esto tiene como consecuencia también que en la ruptura del grupo gauge  $SU(N)$ , asociado a las  $N$  branas, aparecerán factores  $U(1)$ ; por este motivo, estos vacíos se describen en la rama coulombiana de la teoría.

En general, los puntos del espacio de vacíos asociados a la separación de un número arbitrario de branas pueden describirse mediante el valor de  $\lambda \in (-1, 1)$  que caracteriza la teoría, y una matriz de la forma:

$$\phi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\alpha_N} \end{pmatrix}. \quad (7.50)$$

Cada valor  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) representa el valor que toma la brana  $i$  en su coordenada  $\alpha$  cuando se sitúa en  $t = 1$ ,  $\chi = 0$ . Se trata de una matriz invariante bajo el grupo  $U(1)^N$ , que parametriza un toro  $N$ -dimensional  $(\mathbb{S}_\alpha^1)^N$ . En este caso, el espacio de moduli estará representado por  $(\mathbb{S}_\alpha^1)^N \times (-1, 1)$ .

Es preciso tener en cuenta como algunos procesos podrían modificar el espacio que describe la coordenada  $\alpha$  en un estado de vacío. Pequeñas correcciones en la aproximación de supergravedad podrían cambiar el potencial de la D3-brana de prueba en el límite  $t = 1$ , lo cual puede causar que este potencial dependa del valor de  $\alpha$  en dicho límite. Por otra parte, se puede tratar de evitar la singularidad (y, por tanto, lograr estados de vacíos en zonas próximas a  $t = 1$  pero no en este valor exacto) mediante un cutoff en la región IR de la teoría gauge dual, dando un valor finito a la temperatura [65] [66]; o situando la teoría de supergravedad en 5 dimensiones dual a la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM en un espacio  $\mathbb{S}^4$  [60].

Cuando  $\lambda \neq 0$ , procesos de esta naturaleza pueden causar que  $\alpha$  esté localizado en tan sólo 4 posibles valores en los estados de vacío, ya que el potencial mantendría una forma similar a la descrita en la figura 7.6. Sería una ruptura de tipo  $S^1 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  (denotando este último espacio por  $\mathbb{Z}_{4,\alpha}$  para mantener la notación). El conjunto de valores que pueda tomar  $\alpha$  para minimizar el potencial estará afectado por el signo de  $\lambda$ , como ocurría con el potencial estudiado en regiones cercanas a  $t = 1$ .

Si  $\lambda$  se anula, por otra parte, el potencial  $V$  no depende de  $\alpha$  y tampoco lo hará al introducir este tipo de correcciones. En este caso,  $\alpha$  podrá seguir tomando cualquier valor entre 0 y  $2\pi$ . En la figura 7.9 se muestra un esquema de cómo sería el espacio de moduli si el mínimo del potencial modificado estuviese localizado en los mínimos relativos que se obtuvieron en la sección 7.3.2 en el plano  $\chi - \alpha$ , que fueron resumidos en el cuadro 7.1 junto al máximo relativo situado en  $\chi = \pi/4$ .

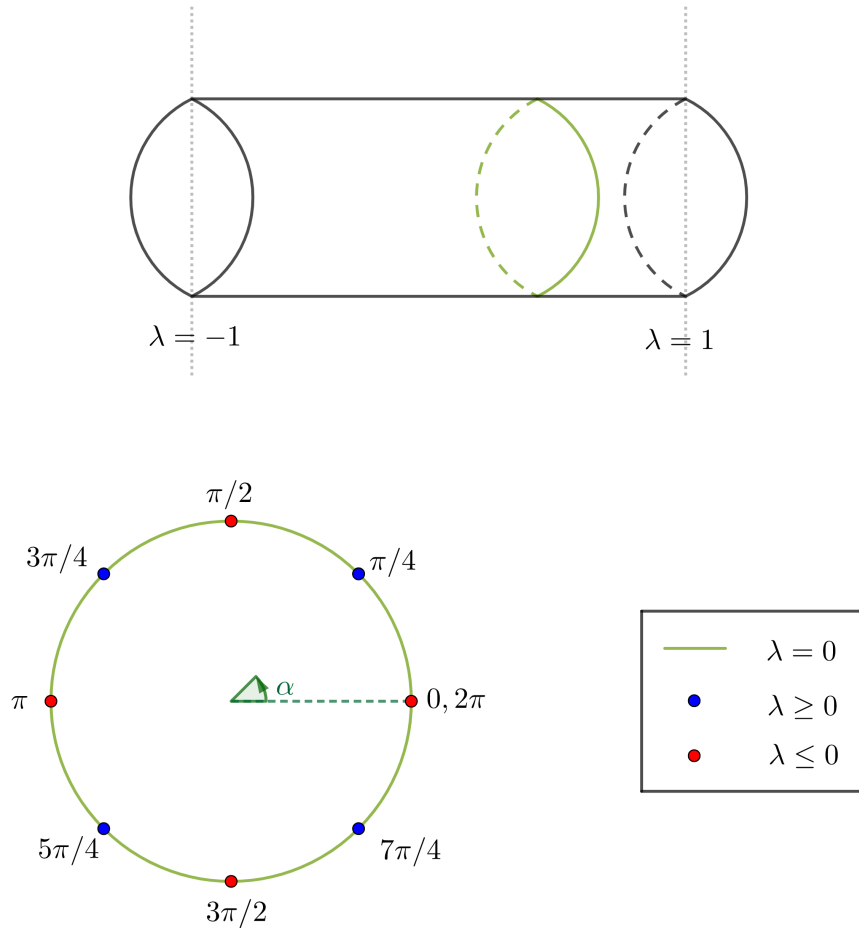


Figura 7.9: Forma que tiene el espacio de moduli cuando  $|\lambda| < 1$  y cuando hay pequeñas modificaciones en el potencial o un cutoff en la temperatura. Se trata de un cilindro cuya coordenada periódica  $\alpha$  tomará valores entre 0 y  $2\pi$  si  $\lambda = 0$ ; o tendrá 4 posibles valores en caso contrario (se representan los mínimos relativos descritos en la tabla 7.1, con  $\chi = 0$ ).



En el caso de considerar un cutoff en la región IR y, por tanto, obtener estados de vacío fuera de la singularidad (pero cercanos a ella), los multipletes quirales  $\Phi_A$  no se anularían. Otra posibilidad es que se podrían obtener configuraciones de 5-branas distintas que describan estados con masa de la teoría, situándose estas soluciones en la rama de Higgs. En la expresión (7.47) se podía observar como localizar a las branas en  $\chi = 0$  y  $\rho = 0$  tenía como consecuencia adicional que los términos asociados a las formas diferenciales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  (invariantes bajo transformaciones de  $SO(3)$ ) se anulasen; sin embargo, en soluciones de la rama de Higgs o con un cutoff en la región IR, estos términos no tienen por qué anularse al localizar la brana en los puntos que hacen mínimo su potencial. Los multipletes  $\Phi_A$ , que son representaciones del grupo  $SU(2)$  como se describe en la sección 6.2.1, parametrizan el espacio descrito mediante las 1-formas; esto indica que el espacio de moduli estará representado localmente por el producto cartesiano de una esfera en 3 dimensiones isométrica a dicho grupo<sup>2</sup> y un cilindro como el descrito en la figura 7.9.

También es preciso notar como este tipo de modificaciones podrían tener como consecuencia la introducción de un potencial que dependa del condensado de gauginos,  $\langle \text{tr} \lambda_4 \lambda_4 \rangle$ . Esto podría traducirse en que el estado de menor energía no esté caracterizado por cualquier valor de  $\lambda$ , y por lo tanto el cilindro que se forma en la figura 7.9 tendría su coordenada no periódica restringida. Por ejemplo, Bena et al. [66] describen la existencia de soluciones con un condensado de gauginos no nulo a partir de un determinado valor de deformación de masa crítica de la teoría  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM; en caso de no darse una deformación de masa lo suficientemente grande, el mínimo energético se situaría en  $\lambda = 0$  y no habría una ruptura del tipo  $S^1 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  en el espacio de moduli.

Por último, la singularidad en  $t = 1$  no se pudo describir mediante D-branas cuando  $|\lambda| = 1$ . Esto se refleja, por ejemplo, en la acción de la D3-brana de prueba en este límite, la cual es idénticamente nula y, por lo tanto, se observa que la brana no tendrá tensión en este límite. Esto no tiene por qué significar que la solución no sea física bajo estos valores de  $\lambda$ ; en esta misma sección se introdujeron, por ejemplo, distintas formas de evitar la existencia de una singularidad desnuda [60] [65] [66] que son compatibles con la teoría cuando  $|\lambda| = 1$ .

---

<sup>2</sup>No se trata de un espacio  $S^3$  rigurosamente hablando, ya que  $SO(3) \simeq S^3/\mathbb{Z}_2$

# Capítulo 8

## Conclusiones

Empleando la correspondencia de Maldacena [1], en este trabajo se ha tratado de mostrar el comportamiento dinámico de un conjunto de  $N$  D3-branas en distintas soluciones de supergravedad, relacionándolo con el espacio de moduli que se describe en la teoría dual según la correspondencia.

En el capítulo 5 se separa una brana de prueba del conjunto en un espacio  $AdS_5 \times S^5$ , y se pudo comprobar como su acción se anula en la región cerca del horizonte de la geometría. Esto indica que se pueden separar una pequeña cantidad de branas en esta región sin que varíe la energía<sup>1</sup>, mecanismo que describe un proceso de Higgsing que ya era mencionado en el artículo de Maldacena (1998) [1]. En el tratamiento de este proceso se detallan las operaciones en el marco de supergravedad que justifican que la separación de la brana de prueba no tiene un coste energético, y una vez que se observa que su posición describe un espacio de vacíos, se estudia dicho espacio en el contexto de la teoría gauge dual (la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM). La interpretación de los campos escalares como campos que sitúan cada brana en el espacio transversal al conjunto ya era detallada por Kraus, Larsen y Trivedi (1998) [45], y en este trabajo permite describir de manera explícita la rama coulombiana de la teoría.

En el capítulo 7 se pretende realizar un análisis análogo sobre un conjunto de D3-branas que son colocadas, en este caso, en el uplift a 10 dimensiones de la solución de supergravedad descrita por Girardello, Petrini, Porrati y Zaffaroni (1999) [4] (la denominada solución GPPZ). Los resultados probaron ser sustancialmente distintos de los obtenidos en el capítulo 5, los cuales reflejaban como la brana de prueba debe localizarse en 5 de sus 6 coordenadas transversas para alcanzar el mínimo energético. Esta es la misma conclusión a la que llegan Pileh y Warner (2002) [59], al igual que Bobev, Gautason, Niehoff y Muiden (2018) [51] (y, posteriormente, en 2019 [49]).

El mínimo energético del sistema se alcanza al colocar la brana de prueba en la singularidad que describe la solución GPPZ. Se trata de una singularidad físicamente aceptable según los criterios de Gubser [55] cuando el parámetro  $\lambda$ , relacionado con el condensado de gauginos de la teoría gauge dual  $\mathcal{N} = 1^*$  SYM, toma valores en el intervalo  $[-1, 1]$ . En el trabajo se

---

<sup>1</sup>Se requiere que sea un número mucho menor que  $N$  para poder desprestigiar los efectos de su separación en la geometría del espacio.

justifica que esta singularidad puede ser descrita mediante un conjunto de branas si  $|\lambda| < 1$ , y se muestra de manera explícita que dichas branas tendrán carga de 5-brana debido al efecto dieléctrico de Myers [57]. Pilch y Warner también argumentaban que la singularidad podía ser descrita mediante 7-branas polarizadas [59]; sin embargo, al considerar el uplift descrito por Bobev, Gautason, Niehoff y Muiden [51] (el cual se corresponde con el descrito en el trabajo) no se encuentran evidencias de este comportamiento.

El espacio de moduli que caracteriza esta teoría está relacionado a la coordenada transversa a la brana no localizada, denotada en el trabajo como  $\alpha$ ; y al valor que toma el condensado de gauginos, reflejado en el parámetro  $\lambda$  de la solución de supergravedad. De manera análoga al estudio del capítulo 5, se puede parametrizar este espacio mediante un campo que en este caso es invariante bajo  $U(1)$ , así como por el valor que tome  $\lambda$  en el intervalo  $(-1, 1)$ , describiendo una vez más la rama coulombiana de la teoría. Así, la forma del espacio cuando se consideran  $N$  branas de prueba en una solución fija de supergravedad es  $(\mathbb{S}_\alpha^1)^N \times (-1, 1)$ ; sin embargo, se argumenta como este espacio podría verse reducido fácilmente cuando  $\lambda \neq 0$  al considerar pequeñas correcciones en la aproximación de supergravedad o un cutoff en la región IR de la teoría gauge dual, tomando la forma representada en la figura 7.9. Esta situación, además, puede llegar a permitir formular estados de vacío caracterizados por una masa no nula, y por lo tanto la rama de Higgs de la teoría precisará de este tipo de correcciones.

Como es señalado en distintas referencias [51] [53] [59] [60], la singularidad de la solución GPPZ deja de poder interpretarse mediante branas al tomar valores  $|\lambda| = 1$ , bajo los cuales sigue siendo físicamente aceptable. En el capítulo 7 se ha mostrado la forma que toma la solución bajo estos valores, llegando a la misma conclusión, y se han señalado distintas formas de evitar la singularidad sin su descripción mediante branas (y, por lo tanto, no se ha insistido sobre ellas) [60] [65] [66].

En cada una de las referencias mencionadas en este capítulo, así como en el propio trabajo, se ha logrado caracterizar el espacio de moduli de distintas teorías gauge a partir del comportamiento de un conjunto de branas en la teoría de supergravedad adecuada empleando la correspondencia AdS/CFT. Al estar tratando con el régimen de acoplamientos fuertes de la teoría gauge, este tipo de estudio se complicaría en gran medida sin la existencia de dicha herramienta. Esto demuestra lo útil que puede llegar a ser la dualidad entre estos dos tipos de teoría, y se trata de un mecanismo especialmente relevante en la descripción de la gravedad a altas energías mediante la Teoría Cuántica de Campos.

# Apéndice A

## La cuantización de la cuerda bosónica

En este apéndice se dan detalles sobre la cuantización de la cuerda bosónica, así como sobre la elección del número de dimensiones  $d = 26$  que permite que la teoría mantenga una simetría conforme.

### A.1. Las restricciones de Virasoro.

Con el objetivo de cuantizar la cuerda bosónica, se parte de las ecuaciones del movimiento para el campo auxiliar  $g^{\alpha\beta}$  obtenidas a partir de la acción de Polyakov dada por la ecuación (3.3) ( $\delta S_P / \delta g^{\alpha\beta} = 0$ ), en la que aparece descrito por primera vez el campo. Esto permite obtener la que se conoce como *restricción de Virasoro*:

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{4\pi\alpha'}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_P}{\delta g^{\alpha\beta}} = \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \eta_{MN} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \partial_\rho X^M \partial_\sigma X^N \eta_{MN} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Por otra parte, se puede comprobar como la acción de Polyakov es invariante bajo las siguientes simetrías:

- Transformaciones de Poincaré  $d$ -dimensionales del espaciotiempo objetivo:

$$X^M \rightarrow X'^M = \Lambda^M_N X^N + a^M, \quad \delta g^{\alpha\beta} = 0, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\Lambda^M_N$  es una transformación de Lorentz del espaciotiempo objetivo y  $a^M$  es una traslación.

- Reparametrización de la worldsheet:

$$\sigma^\alpha \rightarrow \sigma'^\alpha = f^\alpha(\sigma), \quad g_{\alpha\beta}(\sigma, t) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial f^\delta}{\partial \sigma^\beta} g_{\gamma\delta}(\sigma', t'), \quad X'^M(\sigma', t') = X^M(\sigma, t). \quad (\text{A.3})$$

- Transformaciones de Weyl:

$$g_{\alpha\beta}(\sigma, t) \rightarrow e^{2\omega(\sigma, t)} g_{\alpha\beta}(\sigma, t), \quad X'^M(\sigma', t') = X^M(\sigma, t). \quad (\text{A.4})$$

Esta colección de simetrías locales permiten elegir un gauge conveniente que permita expresar la métrica de la worldsheet con una matriz diagonal. Se puede tomar el gauge conforme:

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\omega(\sigma,t)}\eta_{\alpha\beta}, \text{ donde } \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Tras la selección de dicho gauge, la acción de Polyakov se puede expresar como:

$$S_P = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int (\partial_t X^M \partial_t X^N - \partial_\sigma X^M \partial_\sigma X^N) \eta_{MN} d\sigma dt, \quad (\text{A.6})$$

y las ecuaciones del movimiento para  $X^M(\sigma, t)$  vienen dadas por una ecuación de onda relativista:

$$(\partial_t^2 - \partial_\sigma^2)X^M = \partial_+ \partial_- X^M = 0, \quad (\text{A.7})$$

donde se ha empleado la notación  $\partial_\pm \equiv \partial/\partial\sigma^\pm$ ,  $\sigma^\pm \equiv t \pm \sigma$ . Debe cumplirse además la condición de frontera en los límites de la cuerda:

$$\partial_\sigma X^M \delta X_M \Big|_0^{\sigma_0} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Por último, la elección del gauge conforme permite expresar la restricción de Virasoro de la forma:

$$T_{++} = \partial_+ X^M \partial_+ X_M = 0, \quad T_{--} = \partial_- X^M \partial_- X_M = 0, \quad T_{+-} = T_{-+} = 0. \quad (\text{A.9})$$

## A.2. El espectro de la cuerda en el espacio de Minkowski.

A fin de estudiar las soluciones clásicas de la ecuación de movimiento (A.6), resulta útil la descomposición de  $X^M(\sigma, t)$  en modos de vibración que se desplazan hacia la derecha ( $X_{(R)}^M$ ) y hacia la izquierda ( $X_{(L)}^M$ ) de la forma:

$$X^M(\sigma, t) = X_{(L)}^M(\sigma^+) + X_{(R)}^M(\sigma^-). \quad (\text{A.10})$$

La descomposición en series de Fourier de dichos modos de vibración sigue la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} X_{(L)}^M(\sigma^+) &= \frac{\tilde{x}_0^M}{2} + \frac{\alpha'}{2} \tilde{p}^M \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^M}{n} e^{-in\sigma^+}, \\ X_{(R)}^M(\sigma^-) &= \frac{x_0^M}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^M \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^M}{n} e^{-in\sigma^-}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Es conveniente tomar la notación  $\alpha_0^M = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^M$  y  $\tilde{\alpha}_0^M = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \tilde{p}^M$ , teniendo en cuenta que debido a que  $X^M$  debe ser real, se cumplirá  $\alpha_{-n}^M = (\alpha_n^M)^*$  y  $\tilde{\alpha}_{-n}^M = (\tilde{\alpha}_n^M)^*$ .

El *momento canónico* de una cuerda viene dado por la expresión:

$$\Pi^M(\sigma, t) = \frac{\partial_t X^M(\sigma, t)}{2\pi\alpha'}, \quad (\text{A.12})$$

y la cuantización la cuerda se logra al imponer las relaciones de conmutación:

$$[X^M(\sigma, t), \Pi^N(\sigma', t)] = i\eta^{MN}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (\text{A.13})$$

Se pueden definir unos operadores de creación  $(a_m^{M\dagger}, \tilde{a}_m^{M\dagger})$  y de destrucción  $(a_m^M, \tilde{a}_m^M)$  según las expresiones:

$$\begin{aligned} a_m^M &= \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha_m^M, & a_m^{M\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha_{-m}^M, \\ \tilde{a}_m^M &= \frac{1}{\sqrt{m}}\tilde{\alpha}_m^M, & \tilde{a}_m^{M\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{m}}\tilde{\alpha}_{-m}^M, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde se toma  $m > 0$ . Estos operadores permiten expresar un estado físico  $|\psi\rangle$  de la forma:

$$|N, \tilde{N}, k\rangle = \left[ \prod_{i=1}^{D-2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n^{i\dagger})^{N_{in}} (\tilde{a}_n^{i\dagger})^{\tilde{N}_{in}}}{\sqrt{N_{in}! \tilde{N}_{in}!}} \right] |0, 0, k\rangle, \quad (\text{A.15})$$

donde aparece un estado de  $p^M$  de valor propio  $k^M$ ,  $|0, 0, k\rangle$ , el cual es aniquilado por todos los operadores  $a_n^i$  y  $\tilde{a}_n^i$ . La masa del estado  $|N, \tilde{N}, k\rangle$  viene dada por la expresión:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \left( \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{n=1}^{\infty} (nN_{in} + n\tilde{N}_{in}) + \frac{2-d}{12} \right). \quad (\text{A.16})$$

Para que el estado de la cuerda sea físicamente aceptable, es preciso que cumpla la restricción de Virasoro expresada en A.9. Esto se traduce en esta notación en la condición  $N = \tilde{N}$  y, de esta manera, el estado más ligero (que se corresponde con el vacío) tiene una masa  $M^2 = \frac{2-d}{6\alpha'}$ . Los primeros estados excitados serán entonces de la forma  $a_1^i \tilde{a}_1^j |0, 0, k\rangle$ , con una masa  $M^2 = \frac{26-D}{6\alpha'}$ . Estos últimos estados, al considerar  $d = 26$ , se corresponden con el tensor de rango 2 que puede ser descompuesto en  $G_{MN}(X)$ ,  $B_{MN}(X)$  y  $\phi(X)$ .

La acción que tiene en cuenta el acoplamiento de la cuerda en el espacio objetivo al campo  $B_{MN}(X)$ , con un estado asociado  $a_1^{[M} \tilde{a}_1^{N]} |0, 0, k\rangle$ , y al dilatón, con estado  $a_1^M \tilde{a}_{1M} |0, 0, k\rangle$ , viene dada por la expresión:

$$S_{B,\phi} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} (\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N B_{MN}(X) + \alpha' R_h \phi(X)), \quad (\text{A.17})$$

donde  $R_h$  denota el escalar de Ricci en la worldsheet. El acoplamiento a la cuerda se identifica con el valor  $g_s = e^\phi$ .

# Bibliografía

- [1] J. M. Maldacena, *The Large  $N$  limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [[hep-th/9711200](#)].
- [2] G. 't Hooft, *A Planar Diagram Theory for Strong Interactions*, *Nucl. Phys. B* **72** (1974) 461.
- [3] J. Polchinski and M. J. Strassler, *The String dual of a confining four-dimensional gauge theory*, [hep-th/0003136](#).
- [4] L. Girardello, M. Petrini, M. Porrati and A. Zaffaroni, *The Supergravity dual of  $N=1$  superYang-Mills theory*, *Nucl. Phys. B* **569** (2000) 451 [[hep-th/9909047](#)].
- [5] S. Coleman, *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*. Cambridge University Press, 1985, 10.1017/CBO9780511565045.
- [6] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [7] M. Bertolini, *Lectures on supersymmetry, Lecture notes given at SISSA* (2015) .
- [8] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, *Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 2001): Strings, Branes and EXTRA Dimensions*, 1, 2002, [hep-th/0201253](#).
- [9] M. F. Sohnius and P. C. West, *Conformal Invariance in  $N=4$  Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Phys. Lett. B* **100** (1981) 245.
- [10] C. Montonen and D. I. Olive, *Magnetic Monopoles as Gauge Particles?*, *Phys. Lett. B* **72** (1977) 117.
- [11] L. Girardello, A. Giveon, M. Porrati and A. Zaffaroni, *S duality in  $N=4$  Yang-Mills theories*, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **45BC** (1996) 162 [[hep-th/9507064](#)].
- [12] B. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, aug, 2016.
- [13] A. Fialowski and M. Penkava, *Stratification of moduli spaces of lie algebras, similar matrices and bilinear forms*, *Journal of Algebra* **498** (2017) .

- [14] M. Bianchi, B. Eden, G. Rossi and Y. S. Stanev, *On operator mixing in sym*, *Nuclear Physics B* **646** (2002) 69–101.
- [15] M. Ammon and J. Erdmenger, *Gauge/gravity duality: Foundations and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 4, 2015.
- [16] C. P. Bachas, *Preliminary draft of the first four lectures at LACES 2019*. 2019.
- [17] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 12, 2007, 10.1017/CBO9780511618123.
- [18] P. K. Townsend, *P-brane democracy*, in *PASCOS / HOPKINS 1995 (Joint Meeting of the International Symposium on Particles, Strings and Cosmology and the 19th Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory)*, 7, 1995, [hep-th/9507048](#).
- [19] J. Dai, R. G. Leigh and J. Polchinski, *New Connections Between String Theories*, *Mod. Phys. Lett. A* **4** (1989) 2073.
- [20] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, *Nuclear Physics B* **443** (1995) 85 .
- [21] V. Nair, A. D. Shapere, A. Strominger and F. Wilczek, *Compactification of the Twisted Heterotic String*, *Nucl. Phys. B* **287** (1987) 402.
- [22] J. Polchinski, *Dirichlet branes and ramond-ramond charges*, *Physical Review Letters* **75** (1995) 4724–4727.
- [23] A. M. Uranga, *Introduction to String Theory*. Apr, 2005.
- [24] B. R. Greene, D. R. Morrison and A. Strominger, *Black hole condensation and the unification of string vacua*, *Nuclear Physics B* **451** (1995) 109–120.
- [25] A. Strominger, *Massless black holes and conifolds in string theory*, *Nuclear Physics B* **451** (1995) 96–108.
- [26] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, *Large N field theories, string theory and gravity*, *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [[hep-th/9905111](#)].
- [27] H. Năstase, *Introduction to AdS-CFT*, 0712.0689.
- [28] H. Năstase, *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. Cambridge University Press, 2015, 10.1017/CBO9781316090954.
- [29] R. Giles, *Reconstruction of gauge potentials from wilson loops*, *Phys. Rev. D* **24** (1981) 2160.
- [30] K. Zarembo, *Supersymmetric wilson loops*, *Nuclear Physics B* **643** (2002) 157–171.
- [31] N. Drukker, S. Giombi, R. Ricci and D. Trancanelli, *More supersymmetric wilson loops*, *Physical Review D* **76** (2007) .



- [32] V. Pestun, *Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric wilson loops*, *Communications in Mathematical Physics* **313** (2012) 71–129.
- [33] N. Drukker and D. J. Gross, *An exact prediction of  $n=4$  supersymmetric yang–mills theory for string theory*, *Journal of Mathematical Physics* **42** (2001) 2896–2914.
- [34] A. Morozov and S. Shakirov, *Generation of matrix models by  $\hat{W}$ -operators*, *Journal of High Energy Physics* **2009** (2009) 064–064.
- [35] F. Gakhov, *Boundary Value Problems*. Courier Corporation, 1990.
- [36] J. Erickson, G. Semenoff and K. Zarembo, *Wilson loops in supersymmetric yang–mills theory*, *Nuclear Physics B* **582** (2000) 155–175.
- [37] R. B. Paris, *A note on the asymptotics of the modified bessel functions on the stokes lines*, 2017.
- [38] N. Drukker, D. J. Gross and H. Ooguri, *Wilson loops and minimal surfaces*, *Physical Review D* **60** (1999) .
- [39] K. Zarembo, *Localization and ads/cft correspondence*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **50** (2017) 443011.
- [40] M. Kruczenski and A. Tirziu, *Matching the circular wilson loop with dual open string solution at 1-loop in strong coupling*, *Journal of High Energy Physics* **2008** (2008) 064–064.
- [41] C. Kristjansen and Y. Makeenko, *More about one-loop effective action of open superstring in  $ads5 \times s5$* , *Journal of High Energy Physics* **2012** (2012) .
- [42] C. V. Johnson, *D–brane primer*, *Strings, Branes and Gravity* (2001) .
- [43] M. Gutperle, *Aspects of D instantons*, *NATO Sci. Ser. C* **520** (1999) 411 [hep-th/9712156].
- [44] S. H. Shenker, *The Strength of nonperturbative effects in string theory*, in *Cargese Study Institute: Random Surfaces, Quantum Gravity and Strings*, pp. 191–200, 8, 1990.
- [45] P. Kraus, F. Larsen and S. P. Trivedi, *The Coulomb branch of gauge theory from rotating branes*, *JHEP* **03** (1999) 003 [hep-th/9811120].
- [46] S. Dawson, *Introduction to electroweak symmetry breaking*, *arXiv preprint hep-ph/9901280* (1999) .
- [47] C. Ludeling, *From Super-Yang-Mills to QCD*, 12, 2004, hep-th/0412178.
- [48] R. Donagi and E. Witten, *Supersymmetric yang–mills theory and integrable systems*, *Nuclear Physics B* **460** (1996) 299–334.
- [49] N. Bobev, F. F. Gautason, B. E. Niehoff and J. van Muiden, *A holographic kaleidoscope for  $\mathcal{N} = 1^*$* , *Journal of High Energy Physics* **2019** (2019) .

- [50] Y. Kinar, A. Loewy, E. Schreiber, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, *Supergravity and world volume physics in the dual description of  $N=1^*$  theory*, *JHEP* **03** (2001) 013 [[hep-th/0008141](#)].
- [51] N. Bobev, F. F. Gautason, B. E. Niehoff and J. van Muiden, *Uplifting GPPZ: a ten-dimensional dual of  $\mathcal{N} = 1^*$* , *JHEP* **10** (2018) 058 [[1805.03623](#)].
- [52] M. Gunaydin and N. Marcus, *The Spectrum of the  $S^5$  Compactification of the Chiral  $N=2$ ,  $D=10$  Supergravity and the Unitary Supermultiplets of  $U(2, 2/4)$* , *Class. Quant. Grav.* **2** (1985) L11.
- [53] M. Petrini, H. Samtleben, S. Schmidt and K. Skenderis, *The 10d uplift of the gppz solution*, *Journal of High Energy Physics* **2018** (2018) .
- [54] C. Hoyos, S. Paik and L. G. Yaffe, *Screening in strongly coupled  $N=2^*$  supersymmetric Yang-Mills plasma*, *JHEP* **10** (2011) 062 [[1108.2053](#)].
- [55] S. S. Gubser, *Curvature singularities: The Good, the bad, and the naked*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2000) 679 [[hep-th/0002160](#)].
- [56] L. Girardello, M. Petrini, M. Porrati and A. Zaffaroni, *The supergravity dual of  $n=1$  super yang-mills theory*, *Nuclear Physics B* **569** (2000) 451–469.
- [57] R. C. Myers, *Dielectric branes*, *JHEP* **12** (1999) 022 [[hep-th/9910053](#)].
- [58] E. Witten, *Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505 [[hep-th/9803131](#)].
- [59] K. Pilch and N. P. Warner,  *$N=1$  supersymmetric renormalization group flows from IIB supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2002) 627 [[hep-th/0006066](#)].
- [60] N. Bobev, H. Elvang, U. Kol, T. Olson and S. S. Pufu, *Holography for  $\mathcal{N} = 1^*$  on  $S^4$* , *JHEP* **10** (2016) 095 [[1605.00656](#)].
- [61] K. Skenderis, *Lecture notes on holographic renormalization*, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 5849 [[hep-th/0209067](#)].
- [62] A. Baguet, O. Hohm and H. Samtleben, *Consistent type IIB reductions to maximal 5D supergravity*, *Physical Review D* **92** (2015) .
- [63] J. X. Lu and S. Roy, *An  $SL(2, Z)$  multiplet of type IIB super five-branes*, *Phys. Lett. B* **428** (1998) 289 [[hep-th/9802080](#)].
- [64] J. Maldacena, D. Stanford and Z. Yang, *Conformal symmetry and its breaking in two dimensional Nearly Anti-de-Sitter space*, *PTEP* **2016** (2016) 12C104 [[1606.01857](#)].
- [65] D. Z. Freedman and J. A. Minahan, *Finite temperature effects in the supergravity dual of the  $N=1^*$  gauge theory*, *JHEP* **01** (2001) 036 [[hep-th/0007250](#)].
- [66] I. Bena, O. J. C. Dias, G. S. Hartnett, B. E. Niehoff and J. E. Santos, *Holographic dual of hot Polchinski-Strassler quark-gluon plasma*, *JHEP* **09** (2019) 033 [[1805.06463](#)].