

Introducción a la Cosmología Inflacionaria

Trabajo fin de grado



Universidad de Oviedo

Víctor García Muñoz

-2021-

Nuestra visión actual del universo se sustenta en su base por el principio cosmológico, el universo a gran escala es igual en cualquier punto del mismo. Esta afirmación se ve apoyada por las observaciones de los últimos tiempos, contaje de número de galaxias, estudios de estructuras a gran escala y, en especial, el análisis del fondo de radiación de microondas, la imagen más lejana (y por tanto más antigua) que puede observarse desde el entorno solar, y que es prácticamente igual en todas las direcciones.

A pesar de esto, experimentos como la observación de Supernovas de tipo Ia han mostrado que el Universo no es estático, evoluciona en el tiempo, más concretamente se encuentra en expansión. El debate se traslada, entonces, a la existencia de un *principio* del Universo y su naturaleza.

En especial, este trabajo es una introducción al mecanismo de inflación, un fenómeno hipotético que podría haber ocurrido en los primeros 10^{-33} s de la vida de nuestro Universo y que complementa a la teoría clásica del Big Bang.

Contents

1	Breve historia de la Cosmología	3
2	Cosmología del Big Bang	5
2.1	La métrica del espaciotiempo a gran escala	5
2.2	El tensor energía-momento	6
2.3	La ecuación de estado	7
2.4	De la ecuación de Einstein a las ecuaciones de Friedmann	9
2.5	Magnitudes cosmológicas	11
2.6	Historia térmica del Universo	13
2.7	Problemas de la teoría clásica del Big Bang	14
3	Inflación	18
3.1	Solución a los problemas del Big Bang	18
3.2	Inflación y el inicio del tiempo conforme	20
3.3	Inflatón	21
3.4	Inflación <i>slow-roll</i>	23
3.5	Ejemplo de inflación: $m^2\phi^2$	25
3.6	Recalentamiento	26
4	De fluctuaciones cuánticas a perturbaciones cosmológicas	27
4.1	Elección de gauge	27
4.2	Perturbaciones cosmológicas	27
4.2.1	Descomposición SVT en espacio real	29
4.2.2	Perturbaciones de la métrica	30
4.2.3	Perturbaciones de curvatura e invariantes gauge	31
4.3	Estadística de las perturbaciones cosmológicas: espectro de potencia	32
4.3.1	Espectro de potencia de las perturbaciones de curvatura	33
4.3.2	Espectro de potencia de las ondas gravitacionales	33
4.3.3	Perturbaciones no gaussianas	33
4.4	Fluctuaciones cuánticas de un campo escalar durante inflación	34
4.4.1	Modelo de espaciotiempo rígido	34
4.4.2	Transición a comportamiento clásico	37
4.4.3	Espaciotiempo real	37
4.5	Perturbaciones tensoriales: ondas gravitacionales	38
4.6	El ratio tensor-escalar	39

5	Inflación y el fondo cósmico de microondas	40
5.1	Análisis del CMB	40
5.2	Anisotropías de temperatura	41
5.3	Perturbaciones de gran escala	43
5.4	Predicción inflacionaria del CMB	44
6	Modelos de inflación	46
6.1	La inflación de campo grande	46
6.1.1	El problema η	47
6.2	Algunos modelos característicos	47
6.2.1	Inflación caótica	47
6.2.2	Inflación <i>plateau</i> (tipo meseta)	49
6.2.3	Inflación <i>hilltop</i> (cima de colina)	50
6.2.4	Inflación natural	52
6.2.5	Inflación <i>power law</i> (ley de potencias)	53
6.3	Generalizaciones	54
7	Contacto teoría-observaciones	55
7.1	Evaluación de modelos	58
7.2	Futuros experimentos	59
8	Conclusiones	60
A	Obtención de la ecuación de estado de un fluido perfecto	62
	References	64

1 Breve historia de la Cosmología

La estructura y evolución del Universo se ha tratado de explicar desde los inicios de la razón. Los primeros astrónomos se basaban en lo inmediatamente lógico, vivimos en una superficie plana en torno a la cual giran los astros que se observan en el cielo, el conocido como modelo geocéntrico. A pesar de que ya aparecieron ideas de un modelo centrado en el Sol o heliocéntrico en la era griega con Aristarco de Samos (S. III a.C.), no fue hasta finalizar la edad media que se comenzó a aceptar la idea con Nicolás Copernico. Un análisis preciso de los movimientos planetarios realizado por astrónomos como Johannes Keppler y Galileo Galilei, mostró que una descripción con el Sol en el centro era mucho más sencilla.

Pero si la tierra no es el centro del Universo, por qué iba a serlo nuestra estrella. En los últimos siglos se ha observado que este astro no es más que una estrella más orbitando el centro de una galaxia, que no es más que otra concentración de estrellas en un vasto universo casi vacío.

A principios del siglo XX, el desarrollo la teoría de la Relatividad General de Albert Einstein permitió un entendimiento radicalmente superior del comportamiento del espacio y el tiempo, unificando el significado físico de estos conceptos y definiendo el tejido que conforma nuestro Universo, el espaciotiempo. Poco después, observaciones realizadas por el Astrofísico Edwin Hubble demostraron que el Universo no es estático, las galaxias se alejan unas de otras con una velocidad proporcional a la distancia entre ellas. Con esto en mente es lógico pensar que en un tiempo pasado todas estas galaxias estarían juntas, y en un tiempo aún anterior toda la materia y energía del Universo se encontraría en una singularidad de densidad infinita que se denominó Big Bang¹ y a partir de la cual comenzó la expansión convirtiéndose en lo que hoy observamos.

Tras este descubrimiento se utilizó la Relatividad General con el fin de conocer el futuro del Universo, dado que a grandes escalas la fuerza absolutamente dominante es la gravedad (de carácter únicamente atractivo), la velocidad de expansión debe estar disminuyendo, quedando 2 posibles futuros, o bien el Universo se expande con una velocidad suficientemente alta para que la fuerza gravitatoria no sea capaz de frenarla (de manera que la expansión será eterna, *Big Freeze*), o bien esta velocidad no es lo suficientemente alta y en algún momento la gravedad será capaz de invertirla regresando de nuevo a un estado de singularidad conocido como *Big Crunch*.

Esta última hipótesis se probaría falsa en 1998, cuando se encontraron los primeros indicios de que el Universo no solo se expande, sino que lo hace cada vez más rápido. Este hecho no se puede explicar con la física conocida. Al mecanismo que produce esta aceleración se le conoce como energía oscura. Si esta energía exótica (de presión opuesta a su densidad) es una consecuencia de limitaciones de la Relatividad General o es realmente producto de una energía desconocida o *quintaesencia* (una quinta fuerza fundamental) es uno de los debates actuales de la física.

Actualmente el modelo cosmológico más extendido es Λ CDM, que sostiene la dominancia de la energía oscura, consecuencia de una constante cosmológica (Λ) que puede interpretarse como la energía del vacío, y de materia oscura fría (Cold Dark Matter), una forma de materia cuya existencia se observa indirectamente a través de interacción gravitatoria pero que no interactúa con la materia o radiación ordinarias.

¹Teoría clásica del Big Bang.

1 BREVE HISTORIA DE LA COSMOLOGÍA

El tema de este trabajo surge de contemplar con algo más de detenimiento el fenómeno antes mencionado como Big Bang, su origen y sus excesivamente excepcionales condiciones.

2 Cosmología del Big Bang

2.1 La métrica del espaciotiempo a gran escala

En esta sección se sigue el capítulo de Cosmología de las "Lecture Notes on General Relativity" de M. Carrol [1], se toma también apoyo de [2], [3], [4].

En un ámbito riguroso se habla de homogeneidad o invariancia traslacional (la métrica es igual en todos los puntos del espaciotiempo) e isotropía o invariancia bajo rotaciones lorentzianas $SO(1,3)$ (en cada punto del espacio todas las direcciones son equivalentes). Estas condiciones implican que el espacio es maximalmente simétrico, lo que permite definir de manera sencilla la estructura del espaciotiempo.

A partir de los estamentos anteriores se puede construir un espaciotiempo formado por una dirección temporal y una variedad tridimensional maximalmente simétrica (por lo que se trabajará con ella en coordenadas esféricas) que evoluciona en el tiempo y que representa las direcciones espaciales. Es posible elegir un marco de referencia en el que la métrica es diagonal, a las coordenadas de este marco se les denomina comóviles. De esta manera se fija la descripción de este espaciotiempo mediante la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]} \quad (1)$$

- La coordenada r es la coordenada radial² (su significado físico exacto no es relevante).
- La coordenada t se denomina tiempo cosmológico.
- $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ es el elemento de ángulo sólido.
- k es el parámetro de curvatura (define la curvatura espacial):

$$k = \begin{cases} +1 & \text{espacio cerrado} \\ 0 & \text{espacio plano} \\ -1 & \text{espacio abierto} \end{cases} \quad (2)$$

- $a(t)$ es el factor de escala, normalizado en el presente $a(t_0) = a_0 = 1$, relaciona el tamaño espacial del universo en un tiempo cosmológico t con el actual.

Para cada curvatura es posible definir una coordenada radial χ tal que:

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad (3)$$

de manera que la componente radial de la métrica sea $g_{\chi\chi} = a^2(t)$:

$$k = 0 \Rightarrow r = \chi \quad (4)$$

²Se trabaja con unidades naturales $c = \hbar = k_B = 1$ (velocidad de la luz, constante de Planck reducida y constante de Boltzmann iguales a la unidad).

$$k = 1 \Rightarrow r = \sin \chi \quad (5)$$

$$k = -1 \Rightarrow r = \sinh \chi \quad (6)$$

Las componentes generales de la métrica son:

$$g_{tt} = -1 \quad (7)$$

$$g_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij} \quad (8)$$

donde γ_{ij} es la métrica de la variedad espacial tridimensional maximalmente simétrica (solo dependiente de la curvatura):

$$\gamma_{rr} = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (9)$$

$$\gamma_{\theta\theta} = r^2 \quad (10)$$

$$\gamma_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta) \quad (11)$$

2.2 El tensor energía-momento

Para estudiar la dinámica de la energía y materia que llenan el espacio, estas pueden modelizarse como un fluido perfecto con 4-velocidad U^μ , densidad de energía (o materia)³ ρ y presión p (solo dependientes del tiempo debido a la homogeneidad) en el sistema de referencia del propio fluido. De manera que es posible describir esta materia y energía mediante el tensor energía-momento:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (12)$$

La 4-velocidad del fluido en el sistema de referencia estático del fluido será:

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (13)$$

De modo que la traza del tensor energía-momento es:

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + 3p \quad (14)$$

Utilizando, ahora, la conservación del tensor energía-momento:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (15)$$

³Se utilizarán los términos materia y energía de manera indistinta excepto que se explicite.

Se observa que la parte espacial es idénticamente 0 ($\nabla_\mu T^{\mu i} = 0$), pero de la parte temporal se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\nabla_\mu T^{\mu t} = \dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (16)$$

2.3 La ecuación de estado

Para completar el análisis es necesaria la utilización de una ecuación de estado que relacione densidad y presión de la energía ($f(P, \rho) = 0$). En el apéndice A se obtiene mediante mecánica estadística la ecuación de estado de un sistema ideal de partículas:

$$p = \omega \rho \quad (17)$$

donde $\omega = \frac{\alpha}{3}$ es una constante característica de la sustancia que compone el fluido y que tiene que ver con la forma del Hamiltoniano del mismo:

$$H = \lambda \sum_i |\mathbf{p}_i|^\alpha \quad (18)$$

λ es otra constante característica del Hamiltoniano. Se tiene:

- Materia estática (no relativista): $\alpha = 0$, $\lambda = m$. La energía de una partícula en reposo es su masa $E = m(c^2)$.

$$\omega_m = 0 \quad (19)$$

- Materia relativista: $\alpha = 2$, $\lambda = 1/2m$. Para una velocidad suficiente, la energía cinética domina sobre la masa de la propia partícula $E = \frac{p^2}{2m}$.

$$\omega_{mr} = 2/3 \quad (20)$$

- Radiación: $\alpha = 1$, $\lambda = h$. Para fotones, la energía está dada por la constante de Planck multiplicada por su frecuencia, que no es más que otra expresión del momento de la partícula $E = h\nu$.

$$\omega_r = 1/3 \quad (21)$$

Introduciendo (17) en la ecuación de continuidad (16):

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a} \quad (22)$$

e integrando, se obtiene la evolución de la densidad de energía del Universo en función del factor de escala y de la forma de energía dominante:

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (23)$$

Los principales constituyentes del universo son la "materia" (entendiendo esta como materia oscura y bariónica no relativista) y la "radiación", que incluye materia ultrarelativista (fotones, neutrinos...).

Para la "materia" se tiene una presión nula, ya que, a gran escala, el Universo es un sistema no colisional, lo que es coherente con el resultado anterior

$$p = 0 \Rightarrow \omega_m = 0 \quad (24)$$

En universos dominados por materia la densidad es inversamente proporcional al volumen:

$$\rho \propto a^{-3} \quad (25)$$

Para radiación:

$$\rho \propto a^{-4} \quad (26)$$

El mayor decrecimiento de la radiación se debe al redshift cosmológico. A medida que el universo se expande, los fotones reducen su frecuencia y por tanto su energía, esto añade un factor a^{-1} .

Sin embargo, es necesaria la adición de una tercera forma de energía que no puede modelizarse mediante un fluido perfecto.

Cuando Einstein ideó su modelo cosmológico, introdujo en sus ecuaciones de la Relatividad General un término constante (proporcional a una famosa "constante cosmológica") para contrarrestar el carácter exclusivamente atractivo de la gravedad y conseguir un universo estático. Sin embargo, los posteriores descubrimientos de Hubble de la expansión del Universo le harían desechar esta idea.

En los últimos tiempos, gracias a observaciones de supernovas de tipo Ia (y a sus propiedades de luminosidad con muy poca variabilidad que permiten utilizarlas como candelas estándar) se ha visto que el universo no solo se halla en expansión, sino que esta expansión se está acelerando. Este hecho hizo recuperar la idea de la constante cosmológica, esta vez con un significado cuántico, la energía del vacío. Escribiendo las ecuaciones de Einstein (que se introducirán en la sección 2.4) con constante cosmológica, que puede verse ahora como un tensor energía-momento del vacío:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}) \quad (27)$$

donde $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}$ tiene forma de fluido perfecto con:

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G} \Rightarrow \omega = -1 \quad (28)$$

De manera que la densidad de energía del vacío es constante en el tiempo, es decir, a medida que el universo se expande, la energía del vacío es mayor y produce una expansión aún más rápida.

A pesar de ser una explicación sencilla y concisa, la interpretación de la energía del vacío como causa de la expansión acelerada tiene un inconveniente, los datos experimentales

difieren de los cálculos teóricos en proporciones absurdas ("Problema de la Constante Cosmológica")⁴. Por este motivo, la aceleración de la expansión es una cuestión muy debatida en la física actual y no se tiene una explicación clara de lo que ocurre. Como se ha mencionado, de manera general se conoce al fenómeno que produce la aceleración como "energía oscura", ya sea una modificación de la Relatividad General o una nueva forma de energía exótica ($sign(\rho) \neq sign(p)$).

Cuando se observa el conjunto puede verse que el universo estaría inicialmente gobernado por la radiación, pero a medida que la expansión avanzara pasaría a estar dominado por materia y posteriormente por vacío, quedando las otras dos reducidas a la nada en un tiempo suficiente.

Por el tema de este trabajo, es importante mencionar que un Universo en el que el único componente es una constante cosmológica positiva ($\Lambda > 0$) se expandiría indefinidamente de manera exponencial ($a \propto e^{Ht}$). Este tipo de espaciotiempo fue estudiado por *de Sitter* (por lo que llevan su nombre) y son maximalmente simétricos en las 4 dimensiones. El caso contrario ($\Lambda < 0$) es también una solución maximalmente simétrica y se les llama espaciotiempos *anti-de Sitter* (AdS).

2.4 De la ecuación de Einstein a las ecuaciones de Friedmann

Faltaría, ahora, describir la dinámica del espaciotiempo y su relación con la materia que habita en él. Esto se rige por la ecuación de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (29)$$

De manera general se utilizará $m_{pl}^{-2} = 8\pi G \equiv 1$ (unidades en masa de Planck reducida).

Debido a la elección del sistema de referencia comóvil, los tensores de (29) solo tienen componentes en la diagonal. Los componentes del tensor de Ricci son:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (30)$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (31)$$

$$R_{\theta\theta} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (32)$$

$$R_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta)(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (33)$$

Con esto se obtienen 2 ecuaciones, una por la parte temporal y otra por la espacial (las tres componentes son equivalentes debido a la isotropía):

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{4}(\rho + 3p) \quad (34)$$

⁴Los valores experimentales y teóricos de la constante cosmológica se diferencian en unos 120 órdenes de magnitud.

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k = (\rho - p)a^2 \quad (35)$$

Manipulando un poco se obtienen las ecuaciones de Friedmann canónicas:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)} \quad (36)$$

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a^2}} \quad (37)$$

En cosmología, suelen definirse parámetros como el parámetro de Hubble:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (38)$$

cuyo valor actual se conoce como constante de Hubble ($H_0 = H(t_0)$); y el parámetro de densidad:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (39)$$

que representa la densidad de energía en relación a la densidad crítica, siendo esta la necesaria para tener un universo plano $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$. Esto se observa escribiendo (37) en términos de estos parámetros:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (40)$$

Se observa que la curvatura espacial está determinada por el parámetro de densidad, es decir, que la densidad sea inferior, igual o superior a la crítica, define que el Universo sea abierto, plano o cerrado respectivamente.

Este parámetro de densidad es una suma de todos los constituyentes del universo, materia (Ω_m), radiación (Ω_r) y energía del vacío o "energía oscura" (Ω_{de}). En la sección 7 se discuten las observaciones experimentales de estas cantidades.

Introduciendo (23) en la ecuación (37) y omitiendo la curvatura ($k = 0$) se puede obtener la evolución del factor de escala en función del valor de ω :

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} & \text{si } \omega \neq -1 \\ e^{Ht} & \text{si } \omega = -1 \end{cases} \quad (41)$$

Una dominancia de materia o radiación (primer caso) llevarían al Universo a un destino diferente dependiendo de que la densidad sea o no superior a la crítica (*Big Crunch*, *Big Freeze*). Por otro lado, el segundo es el caso de dominancia de una energía exótica, que acelera la expansión infinitamente en un espaciotiempo de de Sitter. La figura 1 esquematiza estas posibilidades dependiendo de la porción de materia y energía oscura que se tome.

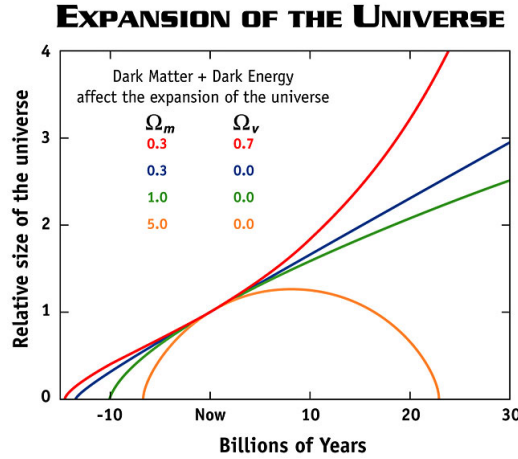


Figure 1: Destino del Universo. La línea amarilla muestra una dominancia de energía ordinaria capaz de revertir la expansión por atracción gravitatoria resultando en una vuelta a la singularidad (Big Crunch). Las líneas azul y verde corresponden a un caso similar, pero con una densidad la energía suficientemente baja para que la expansión sea eterna, reduciendo (Big Freeze). La línea roja incluye una energía exótica dominante. Esta energía oscura propulsa una expansión acelerada del espaciotiempo que terminará por desgarrar toda la materia del Universo convirtiéndolo en un mar de radiación cada vez más débil (Big Rip). [NASA: https://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_fate.html]

2.5 Magnitudes cosmológicas

Será conveniente definir distancias y tiempos con los que sea sencillo trabajar.

- Distancia comóvil. Una partícula en reposo en el sistema de referencia comóvil permanecerá en reposo. Las distancias comóviles χ son tales que:

$$\chi = \frac{d}{a(t)} \quad (42)$$

donde d es la distancia física. Entre dos partículas libres, la distancia física depende de la curvatura del espacio:

$$d(r, t) = \int ds = a(t) \int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t) \begin{cases} \sinh^{-1} r & k = -1 \\ r & k = 0 \\ \sin^{-1} r & k = +1 \end{cases} \quad (43)$$

De la primera relación puede deducirse la ley de Hubble:

$$\dot{d} = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a}d = Hd \quad (44)$$

La velocidad a la que se "alejan" dos partículas se conoce como velocidad de recesión y depende directamente de la distancia que las separa⁵.

⁵Se refiere siempre a escalas cosmológicas, a escalas galácticas o solares esta ley carece de sentido.

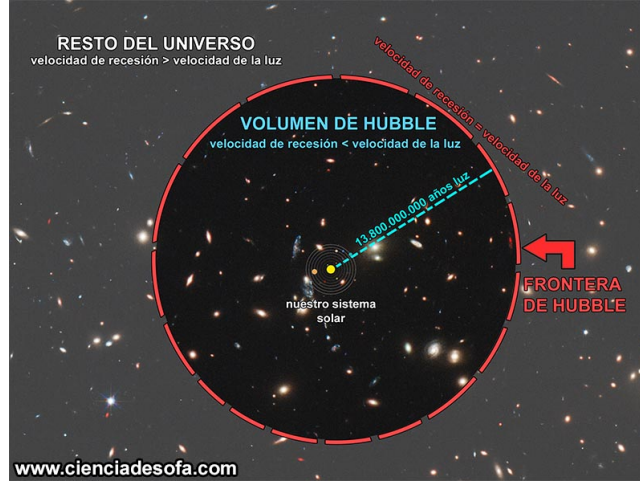


Figure 2: Representación del radio de Hubble, es la distancia a la que las galaxias se alejan unas de otras a la velocidad de la luz siguiendo la ley de Hubble.

De igual manera, pueden definirse longitudes de onda y momentos comóviles:

$$\lambda_{com} = \frac{\lambda_{fis}}{a(t)} \quad (45)$$

$$k_{com} = a(t)k_{fis} \quad (46)$$

- Radio de Hubble H^{-1} . A partir de la ley de Hubble $v_{rec} = Hd$, se observa que a una distancia H^{-1} :

$$d = H^{-1} \Rightarrow v_{rec} = 1(= c) \quad (47)$$

Objetos situados a una distancia superior al radio de Hubble tienen una velocidad de recesión superior a la de la luz, por lo que ya no es posible la comunicación. La figura 2 representa esto mismo.

A la bola de radio H^{-1} se la conoce como volumen de Hubble.

- Redshift cosmológico. El redshift es una magnitud que relaciona la longitud de onda de un haz de luz cuando es emitido y cuando es recibido. En el caso del redshift cosmológico, esta diferencia es resultado de la propia expansión del Universo, de manera que la luz se emite en un tiempo t_{em} y se recibe en el presente t_0 :

$$z = \frac{\lambda_{em}}{\lambda_0} - 1 \quad (48)$$

y debido al cambio del factor de escala en el intervalo en el que el fotón viaja. Por la ley de Hubble:

$$1 + z = \frac{\lambda_{em}}{\lambda_0} = \frac{a_0}{a(t_{em})} = a^{-1}(t_{em}) \quad (49)$$

El redshift cosmológico es, por tanto, una medida de la distancia a la que se encuentra un objeto. Además, se habla de redshift para referirse a eras del Universo, ya que la

distancia a la que se encuentra un objeto define el tiempo que tarda su luz en llegar y por tanto la época en la que se encontraba. Para un redshift dado, se tendrá que el Universo era $(1+z)^{-1}$ veces más pequeño.

Debe quedar claro que, aunque el redshift aparece normalmente cuando sucede efecto Doppler, en este caso no es así, no son los objetos los que se mueven en sentidos opuestos, sino el espacio el que se expande aumentando la distancia entre ellos.

- **Tiempo conforme.** Es una coordenada temporal útil en ciertas ocasiones. Puede interpretarse como un reloj que se ralentiza con la expansión del universo:

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \tau = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (50)$$

De forma que, para una propagación radial:

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + d\chi^2] \quad (51)$$

- **Horizonte de partículas.** Es la máxima distancia comóvil que puede recorrer un haz de luz (geodésica nula $ds^2 = 0$) en un intervalo temporal $\Delta t = t - t_i$, corresponde al tiempo conforme de este intervalo:

$$\chi_p(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)} \quad (52)$$

Suele tomarse t_i como el origen del Universo $t_i \equiv 0$ encontrándose este como una singularidad $a(t) = 0$. El tamaño físico del horizonte de partículas vendrá dado por $R_p = a(t)\chi_p$

- **Horizonte de sucesos.** Su significado es análogo al conocido horizonte de sucesos de un agujero negro. Es el conjunto de puntos a partir de los cuales una señal emitida en un tiempo τ nunca serán recibidas por un observador futuro:

$$\chi_h = \int_{\tau}^{\tau_{max}} d\tau = \tau_{max} - \tau \quad (53)$$

donde τ_{max} es el momento final del tiempo. El tamaño físico del horizonte de sucesos es $R_h = a(t)\chi_h$.

2.6 Historia térmica del Universo

Como se ha visto, nuestro universo se encuentra en expansión, lo que supone que en algún momento (el "principio del tiempo") toda la energía que contiene se encontraba en una singularidad que comenzó a expandirse. Desde el instante inicial del Universo, la densidad de energía fue descendiendo pudiendo distinguirse diferentes etapas, algunas separadas por cambios de fase producidos cuando alguna de las especies que forma el plasma primordial pasa a un estado de equilibrio térmico desacoplándose del resto (la tasa de interacción entre partículas pasa a ser inferior a la tasa de expansión H [7]). Además, es posible que ciertas simetrías rotas en las condiciones actuales no lo estuvieran en etapas de muy alta energía.

Las etapas y sucesos más importantes son ([2], [3], [9]):

- Época de Planck ($t = 0 - 10^{-43}s$), el primer instante del Universo, dura una unidad de tiempo de Plank. En este periodo, según la teoría clásica del Big Bang, las 4 fuerzas estarían unificadas en una fuerza fundamental. Durante los siguientes instantes hasta los $10^{-10}s$ de vida del Universo, ocurrirían varias rupturas de simetría y desacoplamiento de especies del plasma primordial (Gran Unificación, ruptura de la supersimetría, bariogénesis, época electrodébil...). Los experimentos actuales no alcanzan el nivel de energía de estas etapas por lo que son completamente especulativas.
- Época de los quarks, $t \sim 10^{-10}s$, aparecen las partículas siendo la radiación la forma de energía dominante, la densidad de energía impide que ningún tipo de materia se forme teniéndose un plasma de quarks y gluones.
- Era de los hadrones, $t \sim 10^{-4}s$ $T \sim 100MeV$. La temperatura desciende lo suficiente para permitir que estos quarks y gluones se unan formando hadrones.
- Nucleosíntesis del Big Bang (BBN), $t \sim 10^2s$ la temperatura baja de la escala de los MeV y los hadrones empiezan a formar núcleos ligeros (H, He, Li). Las acertadas predicciones desarrolladas con la teoría clásica del Big Bang acerca de la abundancia de estos núcleos es uno de los puntos más fuertes de esta teoría.
- Igualdad materia-radiación. A medida que la expansión continúa, $t \sim 10^4yr$ con una temperatura del orden de eV , la materia pasa a ser el constituyente dominante del Universo.
- Recombinación, $t \sim 10^5yr$, $T \sim 0.1eV$. Con la temperatura por debajo de la energía de enlace núcleo-electrón, comienzan la era de los átomos. Además, a partir de este momento, el recorrido libre medio de los fotones aumenta drásticamente ("surface of last scattering") dejando en este instante un muro de radiación que pueden medirse actualmente en el límite del Universo observable y se conoce como fondo de radiación de microondas (CMB). Mientras que esta señal de fondo es relativamente homogénea, contiene unas fluctuaciones correspondientes a fluctuaciones de la densidad de materia primordial que crecerían por inestabilidad gravitatoria hasta convertirse en las estructuras a gran escala del Universo actual. Esto anima a analizar en mayor detalle el origen microscópico de estas fluctuaciones, lo que se verá en secciones posteriores.
- Los átomos neutros comienzan a interactuar gravitacionalmente formándose estructuras cada vez mayores y entrando en la era de las galaxias $t \sim 10^9yr$ con $T \sim 10^{-3}eV$.
- Presente, $t \approx 13.8Gyr$. La temperatura del Universo es $T \approx 2.73K \sim 10^{-4}eV$ y la forma de energía dominante es la energía oscura.

2.7 Problemas de la teoría clásica del Big Bang

A partir de las observaciones y suponiendo que el universo se ha comportado igual durante toda su evolución, puede retrocederse hasta el "inicio del tiempo" $a(0) = 0$ en el que todo el Universo se reduce a la singularidad del Big Bang. Sin embargo, cuando se hace este análisis se observa que las condiciones iniciales de la singularidad deben estar muy específicamente definidas para llegar al Universo que existe en el presente. En este apartado y la sección siguiente (sección 3) se sigue la bibliografía [2], [3], [5] y [6].

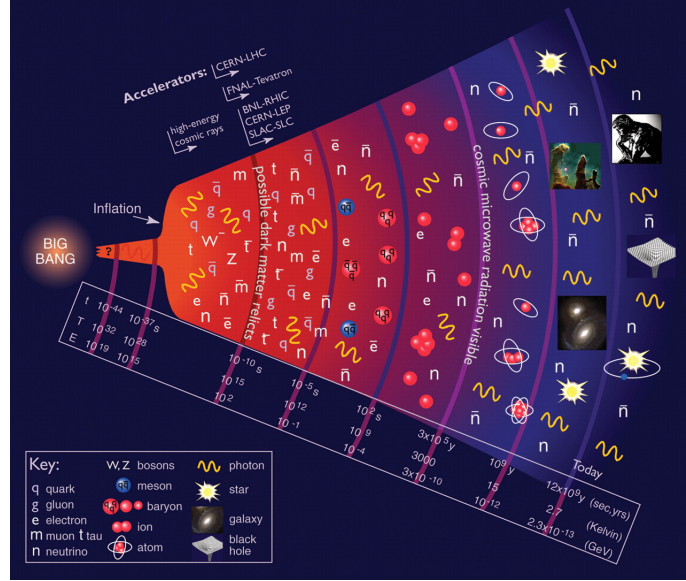


Figure 3: Historia térmica del Universo. [Particle Data Group, LBNL 2008]

Problema del horizonte

La base sobre la que se está trabajando es la homogeneidad e isotropía del espaciotiempo. Sin embargo, las inhomogeneidades son gravitacionalmente inestables, lo que supone que la actual homogeneidad del cosmos debía ser mucho más fuerte en un Universo primordial.

Las pruebas experimentales de esta homogeneidad se obtienen, principalmente, del fondo de radiación de microondas. A pesar de ser infinitamente pequeño, la rápida expansión del Universo en los primeros instantes de su existencia debió impedir el contacto causal de diferentes regiones espaciales, es decir, el horizonte de partículas era inferior a la distancia entre estas regiones. Este hecho lleva a preguntarse cómo puede ser que el CMB sea prácticamente igual en todas las direcciones del espacio. Esto significaría que, de manera aleatoria, todas estas regiones han acabado teniendo las mismas características.

Este horizonte de partículas, y por tanto el tamaño de las regiones causales, es:

$$\chi_p(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{d \ln(a')}{a'H} \quad (54)$$

donde se ha expresado el horizonte de partículas como la integral logarítmica del radio de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$. Siendo este último tal que:

$$(aH)^{-1} = \left(a \frac{\dot{a}}{a} \right)^{-1} = \dot{a}^{-1} \propto t^{1-n} \quad (55)$$

ya que, para un universo dominado por materia o radiación (41) $a(t) \propto t^n$ con $n_m = 2/3$, $n_r = 1/2$. Por tanto, dado que el radio de Hubble comóvil aumenta con el tiempo, el horizonte de partículas también. Efectivamente, retrocediendo al Universo joven, este horizonte sería mucho menor a las distancias que, tras la expansión, son completamente coherentes entre sí.

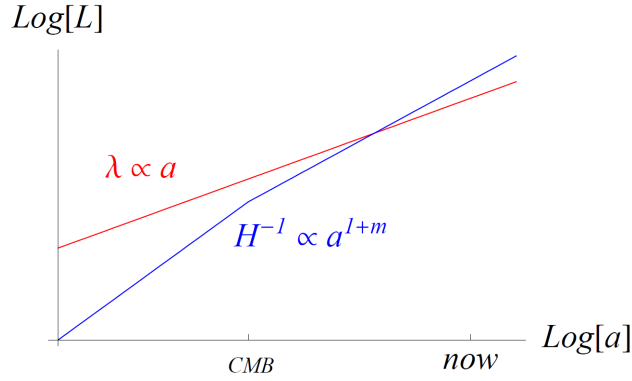


Figure 4: Evolución de la distancia física λ y el radio de Hubble con el factor de escala. $m = 1$ para dominancia de radiación y $m = 1/2$ para dominancia de materia. (fuente [3])

La cantidad de estas regiones puede estimarse relacionando la escala del horizonte de partículas en el *last scattering* $R_p(t_{ls})$ con la distancia correspondiente al radio del Universo observable actual $H_0^{-1} \sim R_p(t_0)$ en este mismo instante, es decir, la distancia de igual magnitud comóvil $\lambda_{R_{p0}}$:

$$\frac{R_p(t_0)}{a_0} = \frac{\lambda_{R_{p0}}}{a(t_{ls})} \Rightarrow \lambda_{R_{p0}} = R_p(t_0) \frac{a(t_{ls})}{a_0} \quad (56)$$

El horizonte de partículas en el *last scattering* era del orden del radio de Hubble, con lo que:

$$R_p(t_{ls}) \sim H_{ls}^{-1} = H_0^{-1} \frac{H_0}{H_{ls}} \sim R_p(t_0) \frac{H_0}{H_{ls}} \quad (57)$$

Teniendo en cuenta que en el periodo transcurrido la materia es dominante en el Universo, el radio de Hubble crece como $H^{-1} \propto a^{3/2}$ y que la temperatura lo hace como $T \propto a^{-1}$:

$$\frac{\lambda_{R_{p0}}}{R_p(t_{ls})} \sim \frac{R_p(t_0) \frac{a(t_{ls})}{a_0}}{R_p(t_0) \frac{H_0}{H_{ls}}} = \frac{\frac{a(t_{ls})}{a_0}}{\frac{a(t_{ls})^{3/2}}{a_0^{3/2}}} = \frac{a_0^{1/2}}{a(t_{ls})^{1/2}} = \left(\frac{T_{ls}}{T_0} \right)^{1/2} \quad (58)$$

Tomando $T_{ls} \sim 10^3 K$, $T_0 \sim 1 K$ se puede obtener la comparación de los volúmenes descritos por estas escalas como estas magnitudes al cubo:

$$\frac{\lambda_{R_{p0}}^3}{R_p(t_{ls})^3} \sim \left(\frac{T_{ls}}{T_0} \right)^{3/2} \sim 10^5 \quad (59)$$

Es decir, existen del orden de cientos de miles de regiones del Universo visible que no se encontraban en contacto causal en el *last scattering*.

Problema de la planitud

Otra de las observaciones más contrastadas es la planitud (o casi planitud) del espacio. Al igual que pasaba con las inhomogeneidades, un Universo plano se encontraría en un equilibrio inestable, lo cual significa que, para que el Universo sea tan plano como lo es en la actualidad, debía serlo mucho más en sus inicios.

Considerando la ecuación (40):

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (60)$$

Se observa que $\Omega = 1$ es inestable ante el crecimiento de $(aH)^{-1}$. Efectivamente, para que el Universo sea plano en la época actual (tomando $|\Omega - 1|_0 \sim \mathcal{O}(1)$):

$$\frac{|\Omega - 1|_{pl}}{|\Omega - 1|_0} \sim \left(\frac{a_{pl}}{a_0}\right)^2 \sim \left(\frac{T_0}{T_{pl}}\right)^2 \sim \mathcal{O}(10^{-64}) \quad (61)$$

Siendo la temperatura en la época de Planck $T_{pl} \sim 10^{32}K$ y la actual $T_0 \sim 1K$.

De modo que debieron existir unas condiciones iniciales de Ω (arbitrarias para la teoría convencional) extremadamente bien definidas. Obteniendo la evolución temporal de (40) e introduciendo la ecuación de Friedmann (36):

$$\dot{\Omega} = -\frac{2k}{(aH)^3}(a\dot{H} + \dot{a}H) = \frac{2k}{(aH)^3} \frac{a}{6}(\rho + 3p) \quad (62)$$

Introduciendo, ahora, $\rho_c = 3H$, (39) y (17):

$$\dot{\Omega} = H\Omega(\Omega - 1)(1 + 3\omega) \quad (63)$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d \ln a} = \Omega|\Omega - 1|(1 + 3\omega) \quad (64)$$

De manera que, en un universo en expansión, el espacio tenderá a curvarse si $1 + 3\omega > 0$ (condición de energía fuerte), que se satisface para materia y radiación.

Problema de los monopolos

Como se ha mencionado, en los primeros instantes tras el Big Bang ocurrieron una serie de transiciones de fase, la de la fuerza electrodébil, la QCD (cromodinámica cuántica) y posiblemente otras a escalas de energía aún mayores (GUT). Estas transiciones de fase generarían rupturas de simetría haciendo aparecer defectos topológicos como los monopolos. Los monopolos se comportarían como objetos puntuales, cuya densidad evoluciona de manera similar a la de la materia, decreciendo con a^{-3} , con lo que deberían haber sobrevivido a la era de dominancia de radiación y observarse en la actualidad.

3 Inflación

En 1981, Alan Guth propuso un mecanismo que permitía un periodo de decrecimiento del radio comóvil de Hubble en las épocas tempranas del universo para solucionar estos problemas. Esto ocurriría en un universo gobernado por energía exótica ($\omega \approx -1$):

$$p \approx -\rho \Rightarrow \rho + 3p < 0 \quad (65)$$

donde se viola la condición de energía fuerte (para fluidos perfectos: $\rho + p \geq 0$, $\rho + 3p \geq 0$).

Utilizando la primera ecuación de Friedmann (36), se observa que esto conlleva a una expansión acelerada:

$$\ddot{a} > 0 \quad (66)$$

que, como se buscaba, reduce el radio de Hubble:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) = \frac{-\ddot{a}}{(aH)^2} < 0 \quad (67)$$

Al mecanismo que impone estas tres condiciones equivalentes se le denomina *inflación*. Durante inflación se tiene un crecimiento exponencial del espaciotiempo $a \propto e^{H_I t}$ con $H_I \approx cte$. Se trata de un espacio muy cercano a de Sitter. Además, inflación permite la aparición de fluctuaciones cuánticas que posteriormente se convertirán en fluctuaciones en la temperatura del CMB e inhomogeneidades en la densidad de materia dando lugar a las actuales estructuras de gran escala o LSS (*large-scale structures*).

3.1 Solución a los problemas del Big Bang

Problema del horizonte

El problema del horizonte queda solucionado al suponer un radio comóvil de Hubble mayor al actual en el periodo previo a inflación. En este caso el horizonte de partículas se encontraría dentro del radio de Hubble, de manera que todas las regiones del Universo observable (como mínimo) estarían en contacto causal, posteriormente saldrían de este radio de Hubble y en la actualidad volverían a encontrarse dentro del él. En la figura 5 se representa gráficamente.

Al menos la esfera de Hubble actual debería encontrarse dentro del horizonte al inicio de inflación. Tomando una longitud física actual $\lambda(t_0) = H_0^{-1}$, se tiene que al inicio de inflación (t_i):

$$\lambda(t_i) \sim H_0^{-1} \frac{a_i}{a_0} = H_0^{-1} \frac{a_f}{a_0} \frac{a_i}{a_f} = H_0^{-1} \frac{T_0}{T_f} e^{-N} < H_I^{-1} \quad (68)$$

donde t_f es el instante en el que termina inflación y $N = \ln(H_I(t_f - t_i))$ es el número de *e-folds*⁶ de este periodo. Durante inflación, el factor de escala creció un factor $a_f = a_i e^N$. Se obtiene que el número de *e-folds* mínimos son:

⁶*e-fold*: periodo en el que el tamaño del Universo se multiplica por un factor e .

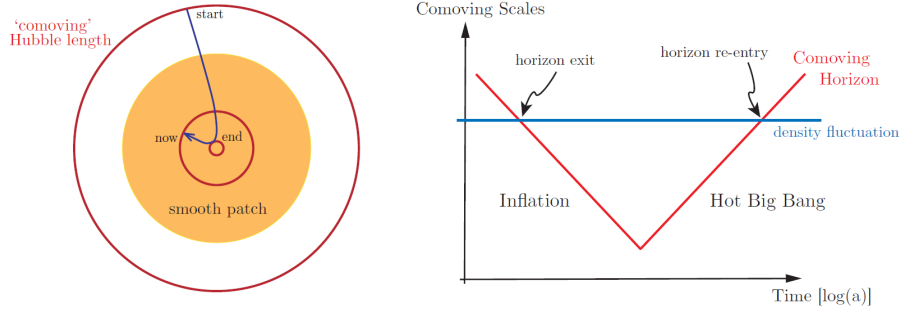


Figure 5: Evolución del radio de Hubble y el horizonte de partículas al suponer un periodo inflacionario. (fuente [2])

$$N > \ln\left(\frac{T_0}{H_0}\right) - \ln\left(\frac{T_f}{H_I}\right) \approx 67 - \ln\left(\frac{T_f}{H_I}\right) \quad (69)$$

Se ha tomado $T_0 = 2.73K$, $H_0 \sim 70(km/s)Mpc^{-1}$

Problema de la planitud

El problema de la planitud se soluciona observando de nuevo la ecuación (40), con un radio de Hubble decreciente el espacio plano es ahora un punto de estabilidad, al que el Universo tiende:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(aH)^2} \propto e^{-2N} \rightarrow 0 \quad (70)$$

donde k y H son aproximadamente constantes, con lo que el conjunto evoluciona como $a^{-2} \propto e^{-2N}$. Por tanto, a partir de (61), se tendrá que para el instante final de inflación (t_f):

$$|\Omega - 1|_{t_f} \lesssim 10^{-64} \quad (71)$$

siendo necesarios, según (70):

$$N \gtrsim 60 - 70 \quad (72)$$

e-folds.

Problema de los monopolos

El problema de los monopolos, por último, queda también resuelto si la transición de fase en la que aparecen los monopolos es previa a inflación, en este caso esta reducirá la densidad de los monopolos a prácticamente cero:

$$n_{mp} \propto \frac{N_{mp}}{a^3} \rightarrow 0 \quad (73)$$

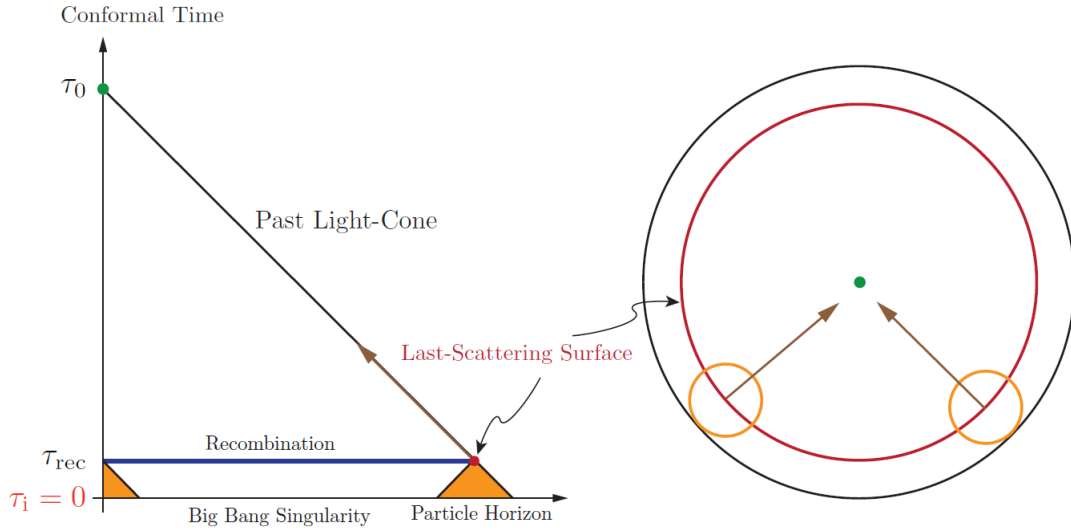


Figure 6: Diagrama conforme de la teoría clásica del Big Bang, tiempo conforme inicial $\tau = 0$. [2]

3.2 Inflación y el inicio del tiempo conforme

Para visualizar inflación es conveniente utilizar un diagrama de Penrose. Se utilizará una métrica FLRW con tiempo conforme de manera que las trayectorias nulas ($ds^2 = 0$) sean líneas rectas de 45°:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + d\mathbf{x}^2] \quad (74)$$

Durante las etapas en las que materia o radiación son dominantes, el factor de escala sigue una ley de potencias del tiempo conforme:

$$a(\tau) \propto \begin{cases} \tau & \text{radiación} \\ \tau^2 & \text{materia} \end{cases} \quad (75)$$

De manera que la singularidad ($a = 0$) se encuentra en el instante inicial $\tau_i \equiv 0$. En la figura 6 se observa que en el *last scattering* existen cientos de miles de regiones causalmente desconectadas que actualmente se miden en equilibrio térmico.

Al suponer un proceso inflacionario, en los primeros instantes se tiene el factor de escala:

$$a(\tau) = \frac{-1}{H\tau} \quad (76)$$

De forma que la singularidad se encuentra, ahora, en $\tau_i \rightarrow -\infty$ y $\tau = 0$ corresponde al futuro infinitamente lejano ($t \rightarrow \infty$). En la figura 7 se muestra el diagrama de Penrose correspondiente. Las regiones que aparentemente no se han encontrado en contacto superponen sus conos pasados en un tiempo conforme negativo.

De nuevo, inflación ocurre por un periodo muy breve. La similitud a espacio de Sitter va desapareciendo a medida que parámetros como el de Hubble, casi constantes durante

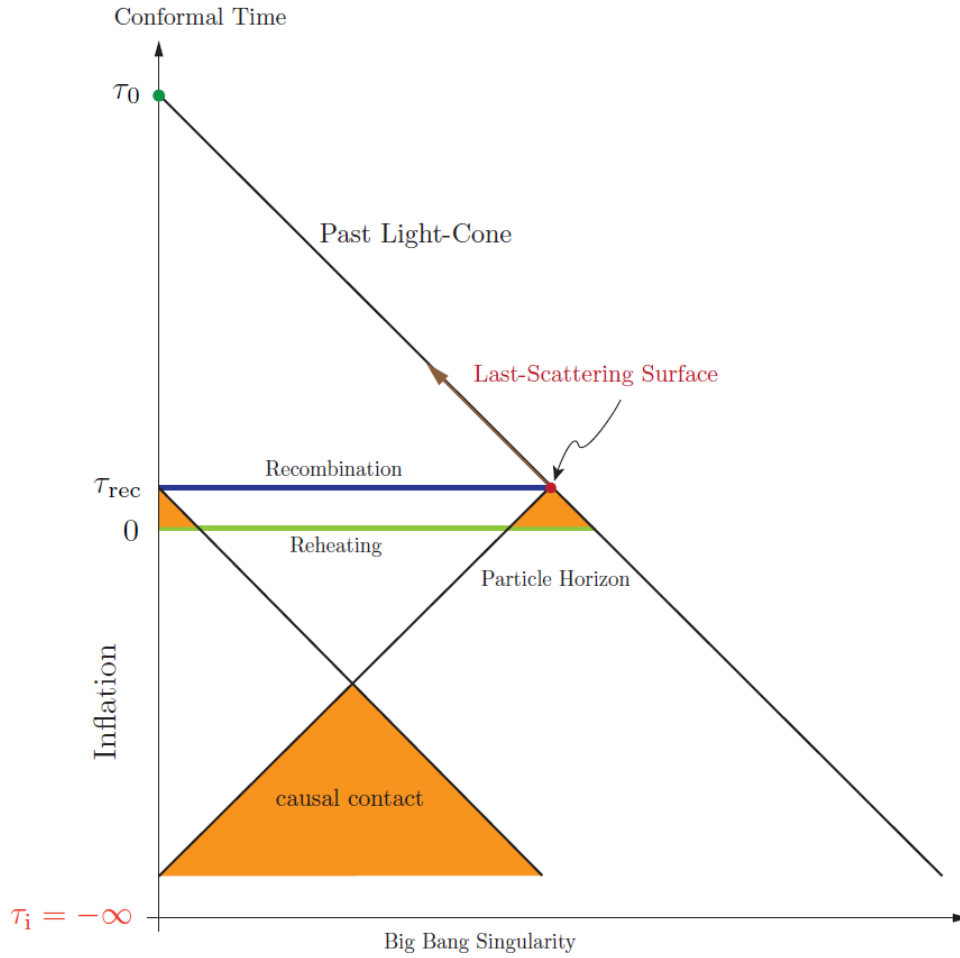


Figure 7: Diagrama conforme de inflación, tiempo conforme inicial para $\tau \rightarrow -\infty$, $\tau = 0$ corresponde al fin de inflación. (fuente [2])

inflación, dejan de serlo. $\tau = 0$ corresponde en realidad al fin de inflación. Es decir, la singularidad del Big Bang ocurre en un tiempo conforme arbitrariamente anterior (al menos 60 – 70 *e-folds*).

3.3 Inflatón

En su teoría, Guth decidió que la manera más sencilla de obtener una forma de energía exótica es mediante un campo escalar ϕ que interactúa consigo mismo mediante el potencial $V(\phi)$ y describe la densidad de energía de inflación. Este campo recibe el nombre de inflatón y tiene una acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (77)$$

que se compone de la acción gravitacional Einstein-Hilbert y una acción del campo escalar con término cinético canónico. Se tiene la ecuación de movimiento:

$$\frac{\delta S_\phi}{\delta \phi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) - V_\phi = 0 \quad (78)$$

donde $V_\phi = \frac{dV}{d\phi}$. En la métrica FLRW $\sqrt{-g} = a^3$, el determinante solo depende de la coordenada temporal y puede reescribirse la ecuación (78) como:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2}{a^2}\phi + V_\phi = 0 \quad (79)$$

Por otro lado, el tensor energía-momento canónico del campo es:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g_{\mu\nu}} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi + V(\phi) \right) \quad (80)$$

De manera que, considerando un fluido perfecto:

$$\rho_\phi \equiv T^{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + \frac{1}{2}\frac{(\nabla\phi)^2}{a^2} \quad (81)$$

$$p_\phi \equiv T^{ii} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V - \frac{1}{6}\frac{(\nabla\phi)^2}{a^2} \quad (82)$$

siendo la ecuación de estado:

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V - \frac{1}{6}\frac{(\nabla\phi)^2}{a^2}}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + \frac{1}{6}\frac{(\nabla\phi)^2}{a^2}} \quad (83)$$

Dado que inflación homogeniza rápidamente cualquier fluctuación del espacio puede tomarse $\phi = \phi(t)$ (independiente de la posición espacial) de manera que $\nabla\phi = 0$, con lo que la ecuación de movimiento (79) queda:

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0} \quad (84)$$

y la ecuación de estado (83):

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V} \quad (85)$$

Por otro lado, para que en la actualidad se tengan los valores casi nulos de constante cosmológica observados, se supone que $V(t_0) \approx 0$.

La dinámica del campo escalar homogéneo y la métrica FLRW queda determinada por la ecuación (84) y la ecuación de Friedmann (37) sin curvatura:

$$\boxed{H^2 = \frac{1}{3}\rho = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right)} \quad (86)$$

La segunda ecuación de Friedmann (36) para inflación queda:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\dot{\phi}^2 - V) \quad (87)$$

3.4 Inflación *slow-roll*

Para que el campo inflatón se comporte tal y como se busca pueden realizarse ciertas aproximaciones de manera que se tenga una inflación de tipo *slow-roll*.

La aproximación de *slow-roll* implica, en primer lugar, que el potencial que afecta al campo sea mucho mayor a su energía cinética:

$$\boxed{\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V} \quad (88)$$

de manera que, según (85):

$$\omega_\phi \approx -1 \quad (89)$$

Con el Universo gobernado por esta forma de energía se confirman las condiciones de Universo inflacionario: $\omega \approx \omega_\phi$ y un factor de escala $a(t)$ de comportamiento prácticamente exponencial (espacio de Sitter), siendo H aproximadamente constante durante inflación. Aproximando (86):

$$H^2 \approx \frac{1}{3}V \quad (90)$$

Por otro lado, la aceleración del campo escalar debe ser muy pequeña comparada con su evolución temporal:

$$\boxed{\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}} \quad (91)$$

Esto permite despreciar el término $\ddot{\phi}$ en la ecuación de movimiento (84):

$$3H\dot{\phi} \approx -V_\phi \quad (92)$$

A partir de la definición de H , puede escribirse:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \quad (93)$$

de forma que:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon) \quad (94)$$

donde aparece el primer parámetro de *slow-roll*:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (95)$$

Derivando (90):

$$2H\dot{H} \approx \frac{1}{3}\dot{V} = \frac{1}{3}V_\phi\dot{\phi} \quad (96)$$

dividiendo por $2H^3$ y utilizando (92) y (90):

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \frac{1}{6} \frac{V_\phi \dot{\phi}}{H^3} \approx \frac{-1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \approx 3 \frac{-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2}{V} \quad (97)$$

con lo que:

$$\frac{-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2}{V} \approx \frac{\epsilon}{3} \quad (98)$$

De manera que para que se cumpla la primera condición de *slow-roll* (88):

$$\epsilon \ll 1 \quad (99)$$

Para la segunda condición puede definirse un segundo parámetro de *slow-roll*:

$$\eta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \quad (100)$$

La aproximación (90) se cumple para $|\eta| \ll 1$.

Estos son los parámetros de *slow-roll* de Hubble, aunque son más didácticos, es mucho más útil para lo que nos atañe definir unos parámetros de *slow-roll* en función del potencial. El primero se obtiene partiendo de la primera igualdad de (97) y utilizando de nuevo (90) y (92):

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \approx -\frac{1}{6} \frac{V_\phi \dot{\phi}}{H^3} \approx \frac{1}{2} \frac{V_\phi^2}{9H^4} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 \quad (101)$$

El segundo se define haciendo:

$$\eta + \epsilon = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (102)$$

Obteniendo la derivada temporal de (92):

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \approx -V_{\phi\phi}\dot{\phi} \Rightarrow \ddot{\phi} \approx -\frac{\dot{\phi}}{3H}(V_{\phi\phi} + 3\dot{H}) \quad (103)$$

e introduciéndolo en (102):

$$\eta + \epsilon \approx \frac{V_{\phi\phi}}{3H^2} + \frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\dot{H}}{H^2} \approx \frac{V_{\phi\phi}}{V} \quad (104)$$

Los parámetros de *slow-roll* del potencial son:

$$\boxed{\epsilon_V \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 \approx \epsilon} \quad (105)$$

$$\boxed{\eta_V \equiv \frac{V_{\phi\phi}}{V} \approx \epsilon + \eta} \quad (106)$$

El periodo de expansión acelerada termina cuando estos parámetros se acercan a 1. Mientras tanto ($\epsilon_V, |\eta_V| \ll 1$), la evolución queda descrita por:

$$H^2 = \frac{1}{3}V \approx cte \Rightarrow a(t) \sim e^{Ht} \quad (107)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{V_\phi}{3H} \quad (108)$$

El número de *e-folds* desde un instante con factor de escala a hasta el fin de inflación (t_f) se calcula como:

$$N(\phi) \equiv \ln \frac{a_f}{a} = \int_t^{t_f} H dt = \int_\phi^{\phi_f} H \frac{d\phi}{\dot{\phi}} \approx \int_{\phi_f}^\phi \frac{V}{V_\phi} d\phi = \int_{\phi_f}^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_V}} \quad (109)$$

donde se ha utilizado las aproximaciones (90) y (92) y posteriormente la definición del primer parámetro de *slow-roll* (105). Se ha obtenido una relación directa entre el crecimiento del Universo (N) y la excursión del inflatón ($\Delta\phi$). Como se ha estimado, el problema del horizonte requiere, al menos, unos 60 *e-folds* inflacionarios (dependiendo el verdadero valor de las características del posterior recalentamiento y la historia térmica que lo sigue).

3.5 Ejemplo de inflación: $m^2\phi^2$

El caso más sencillo posible de potencial inflacionario es⁷:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (110)$$

Siendo sus derivadas:

$$V_\phi = m^2\phi \quad (111)$$

$$V_{\phi\phi} = m^2 \quad (112)$$

Y, por tanto, los parámetros de *slow-roll* del potencial:

$$\epsilon_V = \eta_V = \frac{2}{\phi^2} \quad (113)$$

De modo que inflación termina cuando $\epsilon(\phi_f) = 1$, luego el valor del inflatón al finalizar inflación es $\phi_f = \sqrt{2}$ ($\phi \gg 1$). El número de *e-folds* antes del fin de inflación está dado por (109):

$$N(\phi) = \int_{\phi_f}^\phi \frac{\phi}{2} = \frac{1}{4}(\phi^2 - \phi_f^2) = \frac{\phi^2}{4} - \frac{1}{2} \quad (114)$$

⁷Inflación caótica, propuesta por Andrei Linde en 1983, se incidirá en este tema en la sección 6 sobre modelos de inflación.

Exigiendo unos 60-70 *e-folds* (necesarios para solucionar los problemas clásicos) se tiene que, al inicio, el valor del campo sería, al menos:

$$\phi = (4N + 2)^{1/2} \approx 16 - 17 \quad (115)$$

Con lo que el campo varía del orden de 10 veces la masa de Planck (inflación de campo grande, los tipos de inflación se discuten en la sección 6).

3.6 Recalentamiento

Cuando el campo inflatón comienza a acelerar su movimiento por el potencial, la expansión acelerada cesa hasta que el campo cae al mínimo en el que se mantiene oscilando. En este momento, el campo comienza a comportarse como materia sin presión, es decir:

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V = 0 \Rightarrow V = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \Rightarrow \rho_\phi = \dot{\phi}^2 \quad (116)$$

Derivando, ahora, la expresión de densidad del inflatón (81) (una vez despreciada la divergencia del campo):

$$\dot{\rho}_\phi = \dot{\phi}\ddot{\phi} + V_\phi\dot{\phi} \quad (117)$$

De forma que, multiplicando (84) por $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi}V_\phi + 3H\dot{\phi}^2 = 0 \quad (118)$$

se llega a la ecuación de movimiento:

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + 3H\rho_\phi = 0 \quad (119)$$

Cuando esto ocurre, toda la energía potencial que tenía el inflatón decae a partículas del modelo estándar (en especial a radiación) elevando de nuevo la temperatura en el proceso conocido como *recalentamiento*, que inicia la presunta era de la radiación:

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + (3H + \Gamma_\phi)\rho_\phi = 0 \quad (120)$$

Aquí, Γ_ϕ es la tasa de decaimiento del campo escalar en radiación y posiblemente otras partículas del EM (Modelo Estándar).

4 De fluctuaciones cuánticas a perturbaciones cosmológicas

Esta sección y la que sigue se basan esencialmente en la *review* de D. Baumann [2], y se toman apoyo de [3], [6], [10].

Como se ha mencionado, inflación es capaz de explicar cómo fluctuaciones cuánticas del inflatón podrían haber quedado congeladas debido a la expansión y la reducción del radio comóvil de Hubble por debajo de su longitud de onda convirtiéndose en inhomogeneidades en la densidad de energía.

Un fluido de partículas autogravitantes es inestable ante la aparición de pequeñas inhomogeneidades (inestabilidad de Jeans), una densidad de materia mayor en alguna región producirá una atracción de materia que a su vez generará más atracción en un proceso exponencial, solo frenado por la expansión, que ofrece un término de fricción de manera que las inestabilidades se mantienen en una ley de potencias.

Cuando estas perturbaciones entran de nuevo en el horizonte en una época dominada por radiación o materia, se manifiestan en inhomogeneidades en la materia y energía del Universo convirtiéndose, en un principio, en las anisotropías del CMB y posteriormente en las estructuras cosmológicas de gran escala que se observan hoy en día.

4.1 Elección de gauge

Cuando se trabaja en un espacio que no es homogéneo ni isótropo no se tiene realmente una métrica FLRW, sino una perturbación de esta (figura 8). Este espaciotiempo perturbado no tiene una elección de coordenadas (o gauge) preferente. Cuando se fija un gauge se definen implícitamente las perturbaciones de la métrica. Esto lleva a problemas con cantidades que no son invariantes gauge, es decir, no se conservan tras un cambio de coordenadas (o transformación gauge). Una transformación de las coordenadas introduciría muy fácilmente perturbaciones ficticias no deseadas.

Para lidiar con este problema existen dos opciones: fijar un gauge y computar con él todas las perturbaciones o definir y trabajar con cantidades invariantes gauge.

4.2 Perturbaciones cosmológicas

En un Universo gobernado por el campo inflatón (espaciotiempo de Sitter) perturbaciones en este campo escalar producirán alteraciones en el tensor energía-momento:

$$\delta\phi \Rightarrow \delta T_{\mu\nu} \quad (121)$$

lo que lleva a perturbaciones de la métrica a través de las ecuaciones de Einstein perturbadas:

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta(g_{\mu\nu}R) = \delta T_{\mu\nu} \quad (122)$$

Los cambios en la métrica actuarán también sobre el campo escalar a través de la ecuación de Klein-Gordon perturbada:

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k + V_{\phi\phi}\delta\phi_k = 0 \quad (123)$$

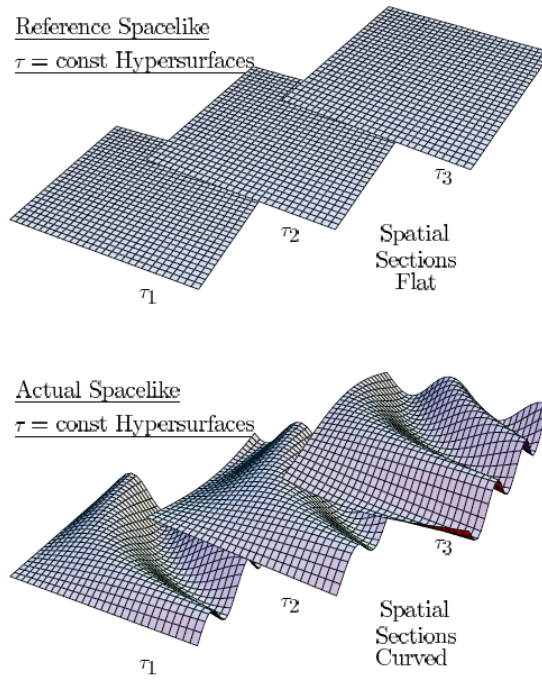


Figure 8: Representación de hipersuperficies de tiempo conforme constante en un universo con 2 dimensiones espaciales, se compara un espacio plano (FLRW) y otro perturbado (real). (Imagen de [6])

con lo que se tiene un sistema en el que campo escalar y curvatura del espacio-tiempo están completamente acopladas y deben estudiarse en conjunto.

Dado el pequeño tamaño de las perturbaciones (en el CMB $\frac{\delta\phi}{\phi} \sim 10^{-5}$) un análisis lineal de las ecuaciones de Einstein y Klein-Gordon perturbadas es suficiente. Además, no es necesario introducir una gravedad cuántica, a pesar de que se cuantice el campo escalar, la métrica sigue considerándose clásica.

Cualquier cantidad X ($g_{\mu\nu}, \rho, \dots$) en un Universo con base FLRW puede escribirse como una suma del fondo espacialmente homogéneo más una perturbación:

$$X(t, \mathbf{x}) = \bar{X}(t) + \delta X(t, \mathbf{x}) \quad (124)$$

Además, las perturbaciones pueden descomponerse en modos de Fourier:

$$\delta X(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta X_{\mathbf{k}}(t) \quad (125)$$

Gracias a la simetría de un espaciotiempo espacialmente plano, homogéneo e isótropo, estos modos son completamente independientes y pueden estudiarse de manera separada simplificando significativamente los cálculos. Además, pueden descomponerse las perturbaciones de la métrica y el tensor energía momento en sus componentes escalares (S), vectoriales (V) y tensoriales (T) (descomposición SVT) para conseguir que estas también sean independientes entre sí (la demostración de esto se encuentra en el apéndice A en D. Baumann [2]).

La descomposición SVT se realiza en escalares, vectores y tensores de helicidad, se definen como autofunciones del operador laplaciano $\nabla^2 Q^{\pm m} = -k^2 Q^{\pm m}$ (m es entero). Esto es, tomando en cuenta rotaciones en torno a un vector de onda \mathbf{k} con ángulo ψ , la cantidad multiplica su amplitud por $e^{im\psi}$. De esta manera:

$$\begin{cases} m = 0 & \text{escalar} \\ m = \pm 1 & \text{vector} \\ m = \pm 2 & \text{tensor} \end{cases} \quad (126)$$

4.2.1 Descomposición SVT en espacio real

Un 3-escalar es un escalar de helicidad, tiene 1 grado de libertad (g.l.):

$$\alpha = \alpha^S \quad (127)$$

Un 3-vector puede descomponerse en una parte escalar y una vectorial de helicidad:

$$\beta_i = \beta_i^S + \beta_i^V \quad (128)$$

De los 3 grados de libertad de un 3-vector, uno de ellos se encuentra en la parte escalar y los otros dos en la vectorial, a la que se impone condición de divergencia nula ($1 + (3 - 1) = 3$ g.l.):

$$\beta_i^S = \nabla_i \beta \quad (129)$$

$$\nabla^i \beta_i^V = 0 \quad (130)$$

Un 3-tensor simétrico puede descomponerse en una parte escalar, una vectorial y una tensorial también simétrica:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^S + \gamma_{ij}^V + \gamma_{ij}^T \quad (131)$$

Los 6 grados de libertad de un 3-tensor simétrico ($\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$) se descomponen en 1 para la parte escalar, 2 para la vectorial (con la condición de divergencia nula) y 3 para la tensorial simétrica, a la que se impone la condición de divergencia nula ($1 + (3 - 1) + (6 - 3) = 6$ g.l.):

$$\gamma_{ij}^S = (\nabla_i \nabla_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \gamma \quad (132)$$

$$\gamma_{ij}^V = \frac{1}{2} (\nabla_i \gamma_j + \nabla_j \gamma_i) \quad (133)$$

$$\nabla^i \gamma_i^V = 0 \quad (134)$$

$$\nabla^i \gamma_{ij}^T = 0 \quad (135)$$

4.2.2 Perturbaciones de la métrica

Siguiendo las ecuaciones de Einstein, las fluctuaciones en la densidad de energía (analizadas en el siguiente apartado) generan perturbaciones en el espaciotiempo de manera que la homogeneidad de la métrica se ve afectada.

La métrica FLRW ($g_{\mu\nu}^{(0)}$) puede perturbarse a primer orden:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)}(t) + \delta g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \quad (136)$$

La métrica FLRW perturbada más general tiene $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ grados de libertad (4-tensor simétrico). Puede escribirse:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2aB_idtdx^i + a^2[(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + E_{ij}]dx^i dx^j \quad (137)$$

Aquí aparecen 2 perturbaciones escalares Φ y Ψ , el 3-vector B_i y el 3-tensor simétrico sin traza E_{ij} ($1 + 1 + 3 + 5 = 10$ g.l.). En el espacio real, se descomponen estas dos últimas como:

$$B_i = \partial_i B - S_i \quad \partial^i S_i = 0 \quad (138)$$

$$E_{ij} = 2\partial_i \partial_j E + 2\partial_{(i} F_{j)} + h_{ij} \quad \partial^i F_i = 0 \quad \partial^i h_{ij} = 0 \quad h_i^i = 0 \quad (139)$$

De manera que se tienen 4 grados de libertad escalares (Φ , Ψ , B , E), 4 vectoriales (B_i , F_i con divergencia nula) y 2 tensoriales (h_{ij} simétrico, y con las 4 condiciones de divergencia y traza nulas). $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 4 = 10$ grados de libertad en total.

Dada la ausencia de campos de velocidad rotacionales, inflación no es capaz de producir perturbaciones vectoriales. Además, la expansión las hace decaer. Por estos motivos es más que aceptable despreciar S_i y F_i . El estudio se centrará, por tanto, en las 4 perturbaciones escalares Φ , B , E y Ψ ; y en las tensoriales, que corresponden a ondas gravitacionales en el Universo posterior.

Imponiendo una transformación gauge general:

$$t \rightarrow t + \alpha \quad x^i \rightarrow x^i + \partial^i \beta \quad (140)$$

e introduciéndola en la métrica, se observa que las perturbaciones escalares de la métrica se transforman como:

$$\Phi \rightarrow \Phi - \dot{\alpha} \quad (141)$$

$$B \rightarrow B + a^{-1}\alpha - \alpha\dot{\beta} \quad (142)$$

$$E \rightarrow E - \beta \quad (143)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi + H\alpha \quad (144)$$

mientras que las perturbaciones tensoriales son, por construcción, invariantes gauge.

Para trabajar con estas perturbaciones escalares se fija un gauge tal que:

$$E = B = 0 \quad (145)$$

En este gauge, la ausencia de perturbaciones anisotrópicas en el tensor energía momento implican que las componentes espaciales no diagonales del tensor energía-momento son nulas:

$$\delta T_j^i = 0 \quad (146)$$

De manera que, siguiendo las ecuaciones de Einstein:

$$\Phi = \Psi \quad (147)$$

Con esto, no queda más que una perturbación escalar independiente en la métrica, la cual se relaciona directamente con la perturbación del campo escalar a través de la ecuaciones de Einstein.

4.2.3 Perturbaciones de curvatura e invariantes gauge

Como ya se ha comentado, siempre es buena opción disponer de cantidades invariantes bajo transformaciones gauge. En este caso se crean combinaciones de las perturbaciones escalares de la métrica y el tensor energía-momento.

La perturbación de curvatura Ψ , que aparece explícitamente en la métrica perturbada, define la curvatura de las hipersuperficies de tiempo conforme constante:

$$R^{(3)} = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \Psi \quad (148)$$

Sin embargo, no es invariante gauge. Ante una transformación temporal:

$$t \rightarrow t + \alpha \Rightarrow \Psi \rightarrow \Psi + H\alpha \quad (149)$$

Se consideran un gauge con hipersuperficies ortogonales a las líneas de universo de un observador comóvil (en caída libre y en expansión isotrópica). Estos observadores no miden flujo de energía (gauge comóvil), de manera que:

$$T_{0i} = 0 \Rightarrow \delta\phi_{com} = 0 \quad (150)$$

ya que $T_{0i} \propto \partial_i \delta\phi(t, \mathbf{x}) \dot{\phi}(t)$.

Bajo la transformación (149) la perturbación del inflatón se transforma como:

$$\delta\phi \rightarrow \delta\phi_{com} = \delta\phi - \dot{\phi}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \quad (151)$$

La transformación de la perturbación de curvatura es, en el gauge comóvil:

$$\Psi \rightarrow \Psi_{com} = \Psi + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \quad (152)$$

De este modo se define la *perturbación de curvatura comóvil*:

$$\boxed{\mathcal{R} = \Psi + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}} \quad (153)$$

Invariante gauge por construcción y que cumple $\mathcal{R} = \Psi|_{\delta\phi=0}$. Es el potencial gravitatorio en hipersuperficies comóviles.

De manera general (fuera de inflación)⁸ puede escribirse:

$$\mathcal{R} \equiv \Psi - \frac{H}{\bar{\rho} + \bar{p}} \delta q \quad (154)$$

Más cantidades invariantes gauge pueden ser obtenidas por este método (fijando un gauge de hipersuperficies de alguna cantidad constante) pero esta es la más útil en el tema tratado.

4.3 Estadística de las perturbaciones cosmológicas: espectro de potencia

La manera de relacionar los cálculos y especulaciones realizados con los datos recogidos a partir del CMB (los cuales se tratarán en la siguiente sección sobre el CMB (5)) es a partir del espectro de potencia de las perturbaciones analizadas. Para una cierta magnitud $X(t, \mathbf{x})$, se descompone la parte perturbada (a partir de 124) en sus modos de Fourier:

$$\delta X(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta X_{\mathbf{k}}(t) \quad (155)$$

A menudo, se define el espectro de potencia de esta magnitud como:

$$\langle X_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_X(k) \quad (156)$$

donde $P_X(k)$ es la transformada de Fourier de la función de correlación de 2 puntos $\xi_X(r)$ ⁹:

$$\xi_X(r) \equiv \langle X(\mathbf{x}) X(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (157)$$

\mathbf{r} es el vector que une estos dos puntos. De esta manera:

$$P_X(k) \equiv \int d^3 r \xi_X(r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (158)$$

Frecuentemente se utiliza la cantidad adimensional:

$$\Delta_X^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_X(k) \quad (159)$$

⁸Durante inflación $T_i^0 = \partial_i \delta q = -\dot{\phi} \partial_i \delta \phi$

⁹La función de correlación de 2 puntos describe como varía una cantidad entre ellos. En un Universo isotrópico no es relevante la dirección del vector que los une, únicamente su magnitud.

4.3.1 Espectro de potencia de las perturbaciones de curvatura

Dado que la perturbación que se utilizan es este análisis es constante fuera del horizonte (como se demostrará a continuación), bastará con analizar el espectro al atravesar el horizonte para tener la información necesaria.

Con la definición (156) anterior se escribe el espectro de potencia de la perturbación de curvatura comóvil:

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k) \quad (160)$$

así como el espectro adimensional escalar:

$$\Delta_s^2 \equiv \Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) \quad (161)$$

El índice escalar espectral n_s (*tilt*) da una idea de la dependencia de escala del espectro de potencia:

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k} \quad (162)$$

Aquí, $n_s = 1$ representa la invariancia de escala. Puede definirse, también, la variación (*running*) de este índice:

$$\alpha_s \equiv \frac{dn_s}{d \ln k} \quad (163)$$

4.3.2 Espectro de potencia de las ondas gravitacionales

Se escribe el espectro de potencia de los dos estados de polarización de la perturbación tensorial h_{ij} (iguales):

$$\langle h_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_h(k) \quad (164)$$

Así como el espectro adimensional de las perturbaciones tensoriales, definido como la suma de ambas polarizaciones, esto es:

$$\Delta_t^2 \equiv 2\Delta_h^2 = \frac{k^3}{\pi^2} P_h(k) \quad (165)$$

La dependencia de escala es similar a la del espectro escalar (sin el -1 , por convenio):

$$n_t \equiv \frac{d \ln \Delta_t^2}{d \ln k} \quad (166)$$

4.3.3 Perturbaciones no gaussianas

El análisis realizado en este trabajo se limita a la inflación slow-roll de un solo campo. En este caso, las perturbaciones deberían ser prácticamente gaussianas (con una contribución no gaussiana despreciable), con lo que es suficiente con utilizar funciones de

correlación de 2 puntos. En casos de inflación de más de un campo o en la que se violan las condiciones *slow-roll* las perturbaciones pueden alejarse de la forma gaussiana siendo necesario un análisis más complejo.

4.4 Fluctuaciones cuánticas de un campo escalar durante inflación

Falta, ahora, analizar la aparición de las fluctuaciones cuánticas en el campo inflatón, así como su evolución. El inflatón es un campo cuya homogeneidad espacial solo se ve alterada por fluctuaciones del estado de vacío en el que se encuentra.

4.4.1 Modelo de espaciotiempo rígido

Se comienza, por simplicidad, considerando un campo escalar en un espaciotiempo rígido, de manera que sus fluctuaciones cuánticas no afectan a la métrica. De esta forma puede utilizarse la ecuación de Klein-Gordon perturbada en un espaciotiempo inalterado.

Se comienza por escribir el campo escalar como la suma de un campo homogéneo más una fluctuación:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t) \quad (167)$$

Esta última puede expandirse en modos de Fourier:

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\phi_k(t) \quad (168)$$

donde \mathbf{x} y \mathbf{k} son distancias y momentos comóviles. Las funciones de los modos dependen solo de $k = |\mathbf{k}|$ debido a la isotropía.

Introduciendo las funciones de cada modo en la ecuación de Klein-Gordon perturbada (como ya se ha dicho, son independientes):

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k + V_{\phi\phi}\delta\phi_k = 0 \quad (169)$$

De manera que aplicando las condiciones de *slow-roll*:

$$\eta_V \equiv \frac{V_{\phi\phi}}{V} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad V_{\phi\phi} \ll V \approx 3H^2 \quad (170)$$

puede despreciarse el último término. Se pasa a tiempo conforme para trabajar con la métrica conforme al elemento de línea de Minkowski:

$$ds^2 = a^2(\tau)(-d\tau^2 + d\mathbf{x}^2) \quad (171)$$

Se trabajará en una fase inflacionaria, con un espacio de de Sitter en el que el parámetro de Hubble es constante $a = e^{Ht}$:

$$\tau = \int dt e^{-Ht} = -\frac{1}{Ha} \quad (\tau < 0) \quad (172)$$

donde se ha tomado una constante de integración tal que el inicio de inflación corresponde a un tiempo inicial $\tau_i \ll 0$. Se define una variable:

$$v_k = a\delta\phi_k \quad (173)$$

Con todo esto, la ecuación (169) se puede reescribir haciendo, para cada modo k :

$$\dot{\delta\phi} = \frac{d\delta\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v}{a} \right) = \frac{v'}{a^2} - \frac{a'v}{a^3} \quad (174)$$

$$\ddot{\delta\phi} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v'}{a^2} - \frac{a'v}{a^3} \right) = -\frac{2a'v'}{a^4} + \frac{v''}{a^3} + \frac{a''v}{a^4} + \frac{3a'^2v}{a^5} - \frac{a'v'}{a^3} \quad (175)$$

$$H = \frac{a'}{a^2} \quad (176)$$

donde (...) simboliza la derivada respecto al tiempo conforme $(\frac{d}{d\tau})$ y $\frac{d\tau}{dt} = a^{-1}$. Introduciendo esto en (169) se obtiene:

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0 \quad (177)$$

Esta ecuación describe un conjunto de osciladores armónicos (uno por cada k) desacoplados con frecuencia dependiente del tiempo. Otro medio para obtenerla es utilizar la acción obtenida al aplicar una perturbación de segundo orden a la acción original del campo (77), con lo que se obtiene, además, la normalización adecuada:

$$S^{(2)} = \int d\tau d\mathbf{x}^3 \frac{1}{2} \left[v^2 - (\nabla v)^2 + \frac{a''}{a} v^2 \right] = \int d\eta d\mathbf{x}^3 \mathcal{L}^{(2)} \quad (178)$$

Esta es la acción de un campo libre canónicamente normalizada con una masa efectiva a''/a dependiente del tiempo. Puede cuantizarse el sistema de manera canónica.

La solución a la ecuación (177) puede obtenerse de manera sencilla para los límites inferior y superior al horizonte. Para una longitud de onda comóvil λ de la perturbación, de tamaño mucho menor al horizonte causal:

$$a\lambda \ll H^{-1} \Rightarrow k \gg aH = \frac{-1}{\tau} \Rightarrow k^2 \gg \frac{a''}{a} = \frac{2}{\tau^2} \quad (179)$$

la ecuación (177) se reduce a la de un oscilador armónico con frecuencia independiente del tiempo:

$$v_k'' + k^2 v_k = 0 \quad (180)$$

En este límite, la longitud de onda será mucho menor a radio de curvatura de de Sitter, de manera que se puede hablar de un espacio prácticamente de Minkowski, en el que hay una única solución (vacío en el autoestado de mínima energía), una onda plana:

$$\boxed{v_k^{sub} = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}} \quad (181)$$

Este se conoce como vacío de Bunch-Davies, los modos oscilan dentro del horizonte con frecuencia $\omega_k^2 = k^2$ ($\omega_k > 0$).

Por otro lado, cuando la longitud de onda de la perturbación es superior al tamaño del horizonte:

$$a\lambda \gg H^{-1} \Rightarrow k \ll aH = \frac{-1}{\tau} \quad (182)$$

En este caso, la ecuación (177) queda:

$$v_k'' - \frac{a''}{a}v_k = 0 \quad (183)$$

con una solución creciente:

$$\boxed{v_k^{sup} = B_k a} \quad (184)$$

donde B_k es una constante de integración. De manera que, como se ha mencionado en varias ocasiones, las perturbaciones son constante al superar su longitud de onda el tamaño del horizonte causal, quedan "congeladas":

$$\delta\phi_k = B_k \quad (185)$$

El valor de la constante puede conseguirse igualando las dos soluciones en el horizonte $k = aH \Rightarrow -k\tau = 1$ ($v_k^{sub}(k = aH) \approx v_k^{sup}(k = aH)$):

$$a|B_k| = \frac{k}{H}|B_k| \approx \frac{1}{\sqrt{2k}} \Rightarrow |\delta\phi_k| = |B_k| \approx \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \quad (186)$$

La ecuación (177) tiene, de hecho, solución exacta (modos de Bunch-Davies):

$$\boxed{v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right)} \quad (187)$$

donde se ha utilizado como condición de contorno la reducción a un resultado Minkowski para el límite sub-horizonte.

En este caso es posible obtener el espectro de potencia de la perturbación escalar de inflatón para escalas superiores al horizonte:

$$\begin{aligned} \lim_{|k\tau| \ll 1} \langle \delta\phi_{\mathbf{k}}(\tau) \delta\phi'_{\mathbf{k}'}(\tau) \rangle &= \lim_{|k\tau| \ll 1} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{|v_k(\tau)|^2}{a^2} \\ &= \lim_{|k\tau| \ll 1} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{H^2}{2k^3} (1 + k^2\tau^2) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{H^2}{2k^3} \end{aligned} \quad (188)$$

Se ha tomado la solución (187). De forma que:

$$\Delta_{\delta\phi}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{H^2}{2k^3} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \quad (189)$$

4.4.2 Transición a comportamiento clásico

Cuando las perturbaciones salen del horizonte, pueden pasar a considerarse como clásicas. Esto puede observarse estimando el número de partículas por momento n_k en escalas superiores al radio de Hubble. En el caso de que este número sea alto, en el Hamiltoniano cuántico:

$$H_k = \omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \quad (190)$$

Puede despreciarse el término $1/2$ teniéndose, efectivamente, un régimen clásico. Con esto:

$$n_k \approx \frac{(v'_k)^2}{\omega_k} \sim \left(\frac{H}{\sqrt{k^3}} \right)^2 \frac{(a')^2}{k} \sim \left(\frac{k}{aH} \right)^{-4} \gg 1 \quad (191)$$

4.4.3 Espaciotiempo real

Se toma, ahora, que las perturbaciones del campo escalar sí modifican la métrica, con lo que es necesario perturbar la acción (77) a segundo orden:

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = S^{(0)}[g_{\mu\nu}^{(0)}, \phi^{(0)}] + S^{(2)}[\delta g_{\mu\nu}, \delta\phi; g_{\mu\nu}^{(0)}, \phi^{(0)}] \quad (192)$$

Aquí, $S^{(0)}$ es la parte homogénea, $S^{(1)}$ es nula dado que el campo extremiza la acción y $S^{(2)}$ da la ecuación para las perturbaciones y permite cuantizar y normalizar las perturbaciones lineales.

Realizando los cambios pertinentes se obtiene que esta acción puede escribirse en términos de la variable v :

$$v = a \left(\delta\phi + \frac{\phi'}{a'/a} \Psi \right) = z\mathcal{R} \quad (193)$$

donde se ha definido la variable de Mukhanov:

$$z = a \frac{\delta\phi'}{a'/a} = a \frac{\dot{\phi}}{H} \quad (194)$$

de forma que se tiene la acción de Mukhanov:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[v'^2 - (\nabla v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right] \quad (195)$$

Puede observarse que esta acción es análoga a la estudiada en el modelo de juguete con spaciotiempo rígido (178) pero cambiando el factor de escala a por z .

De esta manera se tiene un espectro de potencia para la perturbación de curvatura comóvil a la salida del horizonte casi idéntico al obtenido antes:

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}}(\tau) \mathcal{R}'_{\mathbf{k}'}(\tau) \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{|v_{\mathbf{k}}(\tau)|^2}{z^2} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{|v_{\mathbf{k}}(\tau)|^2}{a^2} \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)_{k=aH}^2 \quad (196)$$

De modo que:

$$\Delta_s^2 = \Delta_{\mathcal{R}}^2 = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)_{k=aH}^2 \quad (197)$$

4.5 Perturbaciones tensoriales: ondas gravitacionales

Las perturbaciones tensoriales son automáticamente invariantes gauge a orden lineal. La parte tensorial de la métrica perturbada tiene la forma:

$$ds^2 = a^2(t)[-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j] \quad (198)$$

con $h_{ij,i} = 0$ y $h_i^i = 0$. Aquí $h_{ij} \ll 1$.

Las perturbaciones tensoriales suelen descomponerse en autoestados del Laplaciano espacial:

$$\nabla^2 e_{ij} = -k^2 e_{ij} \quad (199)$$

siendo k el número de onda comóvil. e_{ij} son los tensores de polarización. De modo que:

$$h_{ij} = h_+ e_{ij}^{(+)} + h_\times e_{ij}^{(\times)} \quad (200)$$

donde "+" y "×" representan las dos posibles polarizaciones de la misma (los 2 grados de libertad).

Se tiene una ecuación de Einstein:

$$\ddot{h} + 3H\dot{h} + \frac{k^2}{a^2}h = 0 \quad (201)$$

que describe la evolución de ondas gravitacionales en un universo en expansión. Estas ondas gravitacionales son creadas por inflación y se atenúan debido a la expansión.

Puede escribirse el término de segundo orden de la acción para fluctuaciones tensoriales:

$$S^{(2)} = \frac{M_{pl}^2}{8} \int d\tau d^3x a^2 [(h'_{ij})^2 - (\nabla h_{ij})^2] \quad (202)$$

Se ha reintroducido la masa de Planck $M_{pl}^2 = \frac{1}{16\pi G}$ para mostrar la adimensionalidad de h_{ij} . Definiendo la expansión de Fourier para la perturbación tensorial:

$$h_{ij} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda=+,\times} \epsilon_{ij}^\lambda(k) h_{\mathbf{k}}^\lambda(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (203)$$

y la amplitud tensorial invariante gauge canónicamente normalizada de estos modos:

$$v_{\mathbf{k}}^\lambda \equiv \frac{aM_{pl}}{2} h_{\mathbf{k}}^\lambda \quad (204)$$

la acción queda:

$$S^{(2)} = \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \int d\tau d\mathbf{k} \left[((v_{\mathbf{k}}^{\lambda})')^2 - \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) ((v_{\mathbf{k}}^{\lambda})')^2 \right] \quad (205)$$

de nuevo, análoga a (178), con lo que la nueva variable satisface la ecuación (177) y resultados son similares:

$$\Delta_t^2 = 2\Delta_h^2 = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{H}{M_{pl}} \right)_{k=aH}^2 \quad (206)$$

4.6 El ratio tensor-escalar

Se define el ratio tensor-escalar como la normalización del espectro de potencia adimensional tensorial a partir del escalar:

$$r \equiv \frac{\Delta_t^2}{\Delta_s^2} \quad (207)$$

Dado que Δ_s^2 está medido y $\Delta_t^2 \propto H^2 \approx V$, el ratio tensor escalar es una medida directa de la escala de energía de inflación:

$$V^{1/4} \sim \left(\frac{r}{0.01} \right)^{1/4} 10^{16} GeV \quad (208)$$

Utilizando los resultados obtenidos para los espectros (197) y (206) se tiene:

$$r = \frac{8}{M_{pl}^2} \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 \quad (209)$$

donde se ha utilizado, también: $dN = H dt$ ($H \approx cte$). De esta forma puede evaluarse el cambio en el cambio desde el momento en el que las fluctuaciones salieron del horizonte (en este caso las del CMB) N_{CMB} y el fin de inflación $N_{end} = 0$:

$$\frac{\Delta\phi}{M_{pl}} = \int_0^{N_{CMB}} dN \sqrt{\frac{r}{8}} \quad (210)$$

Aproximando r como una constante (no varía mucho durante inflación):

$$\frac{\Delta\phi}{M_{pl}} \approx N_{CMB} \left(\frac{r}{8} \right)^{1/2} \quad (211)$$

Es decir, para $N_{cmb} \sim 60$, si $r \gtrsim 0.01$ (las perturbaciones tensoriales son medibles) se tendrá un cambio en el inflatón superior a la masa de Planck, con lo que se tratará de una inflación de campo grande (como se verá en la sección de modelos de inflación). Se conoce esta cota como *Lyth bound*.

5 Inflación y el fondo cósmico de microondas

Una vez obtenidos todos los resultados teóricos, es momento de tratar de relacionarlos con observaciones experimentales. Se busca conectar los espectros de potencia de \mathcal{R} y h (a su salida del horizonte $\tau = \tau_*$) con el fondo cósmico de microondas (CMB). El CMB es la foto más antigua del Universo, se trata de los primeros fotones que quedaron libres de los átomos en la recombinación, adquiriendo un recorrido libre que les permitió vagar indefinidamente por el espacio (llegando así hasta los telescopios humanos). La figura 9 muestra una imagen de microondas del cielo tomada por el satélite Planck, el telescopio más avanzado en la investigación del CMB. Es sucesor de experimentos como el WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) y COBE (Cosmic Background Explorer).

La obtención de estas medidas no es sencilla, ya que se está tratando de analizar la superficie más lejana del Universo observable. A gran escala la varianza cósmica supone una gran fuente sistemática de incertidumbre. A escalas pequeñas, por otro lado, aparece el ruido cósmico de fondo y degeneración de parámetros.

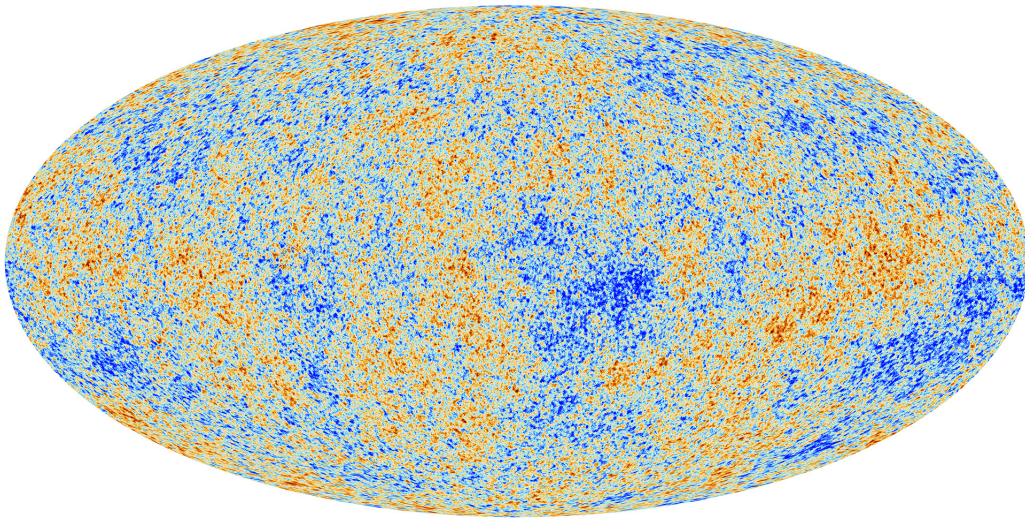


Figure 9: Mapa del CMB del satélite Planck. Las zonas de colores fríos (azul) indican menor temperatura de los fotones recibidos, las cálidas (naranja) mayor. [https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2013/03/Planck_CMB]

5.1 Análisis del CMB

El esquema de la figura 10 muestra la evolución de una perturbación (\mathcal{R}, h) . Como se vio, abandonan el horizonte y quedan congeladas durante el resto de inflación. Cuando el radio de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$ vuelve a crecer, las perturbaciones vuelven a entrar y a oscilar. Dependiendo de la escala (k^{-1}), la perturbación entrará en un instante determinado: cuanto más pequeña la escala de la perturbación antes cabrá dentro del horizonte y "vivirá" durante más etapas del Universo primigenio, sufriendo en su camino mayores cambios.

Las escalas que vuelven al horizonte antes de la recombinación se encuentran un plasma de bariones y fotones que se concentra sobre las inhomogeneidades de mayor densidad pero es rechazado por la presión de radiación, de manera que comienza a oscilar en las

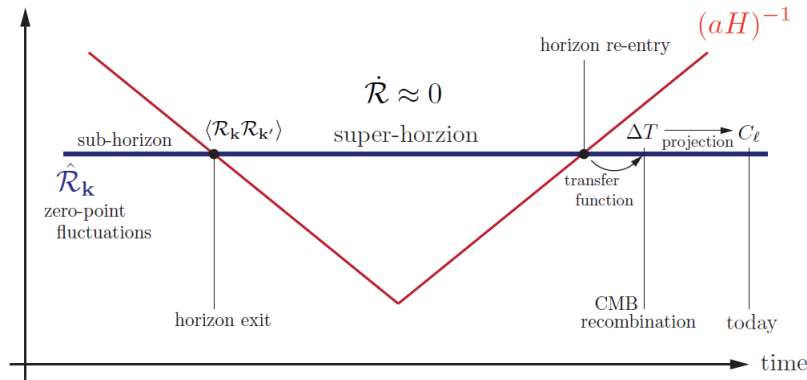


Figure 10: Evolución del radio comóvil de Hubble durante y tras inflación. Puede observarse el instante en el que cierta fluctuación ($k^{-1} = cte$) sale del horizonte quedando congelada y posteriormente vuelve a entrar en algún momento del Universo post-inflacionario. (fuente: [2])

denominadas oscilaciones acústicas de bariones o BAO (Baryon Acoustic Oscillations). De esta forma, las escalas más pequeñas tendrían tiempo de oscilar libremente.

La variación de la temperatura es la principal fuente de información del CMB, sin embargo, no es la única. La dispersión Thomson ocurrida durante el *last scattering* produce polarización E, que puede relacionarse con las anisotropías de temperatura para reducir la degeneración de parámetros. Por otro lado, las perturbaciones tensoriales generan polarización B (que se espera muy débil). Solo se estudiarán las anisotropías de temperatura (para leer más sobre los modos de polarización puede verse [2])

Convencionalmente se utiliza un espectro de potencia angular C_l , donde l es el multipolo ($l = 0$ monopolo, $l = 1$ dipolo, $l = 2$ cuadrupolo...). En la figura 11 se muestra dicho espectro angular: fluctuación de la temperatura en función del multipolo así como la escala angular a la que corresponde.

Los picos del espectro angular corresponden a modos que se encontraban en un máximo de compresión o descompresión de las BAO. El primer pico corresponde al modo que solo ha tenido tiempo de comprimirse, el segundo de comprimirse y descomprimirse, etc...

5.2 Anisotropías de temperatura

El análisis del mapa del satélite Planck se realiza a partir de las fluctuaciones de temperatura:

$$\Theta(\hat{n}) \equiv \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \quad (212)$$

donde $\Delta T(\hat{n})$ es la diferencia entre la temperatura del punto del cielo apuntado por el vector director \hat{n} y la temperatura de fondo $T_0 = 2.73K$.

Se realiza una expansión en armónicos esféricos (imagen en una 2-esfera):

$$\Theta(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}) \quad (213)$$

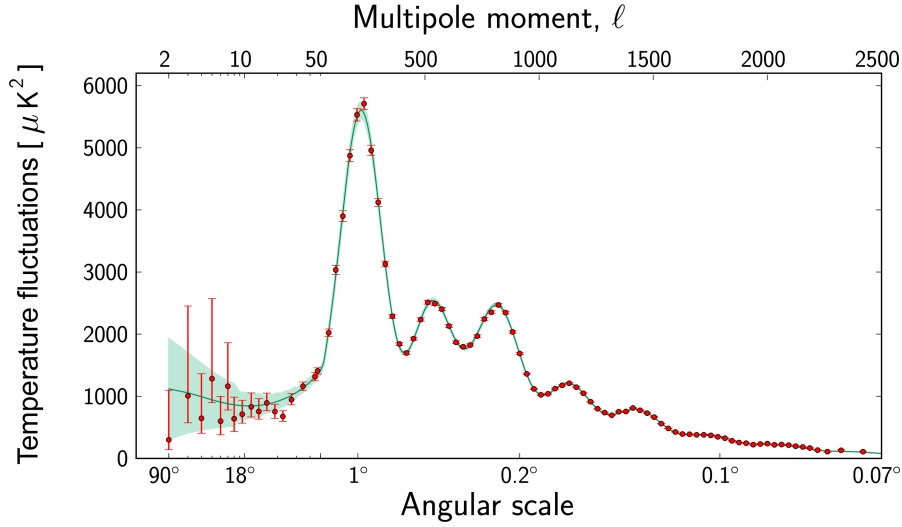


Figure 11: Espectro angular del CMB. Se muestran los datos experimentales del satélite Planck (puntos rojos) junto a estimación teórica (sombreado y curva verde). [https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2013/03/Planck_Power_Spectrum]

donde el multipolo l (entero) va de 0 a ∞ y el número cuántico magnético m va de $-l$ a $+l$. Se conocen los coeficientes a_{lm} como momentos multipolares y pueden combinarse en el espectro de potencia angular C_l^{TT} (invariante rotacional):

$$C_l^{TT} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle \quad (214)$$

ó

$$\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = C_l^{TT} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (215)$$

Hasta el momento se sabe que el ratio tensor-escalar se encuentra en $r < 0.16$ (95% de incertidumbre) [12]. En este régimen las anisotropías de temperatura están dominadas por los modos escalares $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$. Las anisotropías y las fluctuaciones tienen una relación lineal mediada por funciones de transferencia Δ_{Tl} . Estas suelen ser computadas numéricamente y dependen de la cosmología de fondo¹⁰. De modo que:

$$a_{lm} = 4\pi(-i)^l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_{Tl}(k) \mathcal{R}_{\mathbf{k}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (216)$$

sustituyendo en la fórmula anterior (215) y utilizando la identidad:

$$\sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \quad (217)$$

¹⁰Cuando se analizan señales lejanas (en este caso las más lejanas que existen) deben tomarse en cuenta los efectos que estas señales se han encontrado en su camino, ya sea por la presencia de nubes de gas y polvo, la deformación por efecto de lentes gravitacionales...

se llega a:

$$C_l^{TT} = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P_{\mathcal{R}}(k) \Delta_{Tl}(k) \Delta_{Tl}(k) \quad (218)$$

El espectro angular de las perturbaciones es una composición entre el espectro primordial y el camino que recorren hasta ser observadas (que depende de la cosmología de fondo).

5.3 Perturbaciones de gran escala

Las perturbaciones más sencillas de estudiar son las de gran escala, volvieron al horizonte una vez ocurrida la recombinación, con lo que las observaciones son proyecciones geométricas de los propios espectros primordiales (Δ_s^2) desde la recombinación (τ_{rec}) hasta hoy (τ_0).

Para este caso los fotones del CMB tienen temperatura tal que $\rho_\gamma \propto T^4$ (ley de Steffan-Boltzmann). Sin embargo, esta ley compite con el efecto Sachs-Wolfe, por el que los fotones sufren redshift gravitacional perdiendo mayor energía en las zonas de más densidad. A esta escala el segundo domina completamente, de manera que en las zonas frías del CMB tienen, de hecho, mayor densidad y viceversa.

Las funciones de transferencia en el régimen Sachs-Wolfe son funciones de Bessel:

$$\Delta_{Tl} = \frac{1}{3} j_l(k[\tau_0 - \tau_{rec}]) \quad (219)$$

De modo que, para l bajo (k^{-1} alto, grandes escalas):

$$C_l^{TT} = \frac{2}{9\pi} \int dk k^2 P_{\mathcal{R}}(k) j_l^2(k[\tau_0 - \tau_{rec}]) \quad (220)$$

Esta función de Bessel contiene un pico en $k[\tau_0 - \tau_{rec}] \approx l$ y actúa aproximadamente como una función delta. Así:

$$C_l^{TT} \propto k^3 P_{\mathcal{R}}|_{k \approx \frac{l}{\tau_0 - \tau_{rec}}} \int d \ln x j_l^2(x) \quad (221)$$

donde $\int d \ln x j_l^2(x) \propto l(l+1)$. Con esto:

$$l(l+1)C_l^{TT} \propto \Delta_s^2(k)|_{k \approx \frac{l}{\tau_0 - \tau_{rec}}} \propto l^{n_s-1} \quad (222)$$

Generalmente, en lugar de C_l^{TT} , se representa el espectro mediante la cantidad:

$$\mathcal{C}_l \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l^{TT} \quad (223)$$

que es independiente de l para espectros invariantes de escala $n_s = 1$ (excepto a escalas demasiado grandes, para las que el efecto Sachs-Wolfe potenciado por la expansión acelerada de la energía oscura de los últimos tiempos afecta a esta invariancia).

5.4 Predicción inflacionaria del CMB

Es necesario, ahora, relacionar las cantidades utilizadas en el análisis teórico con cantidades medibles.

Se observa que, utilizando la definición del primer parámetro de *slow-roll* (98) y la aproximación (107), el espectro de potencia escalar puede escribirse:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^4}{\frac{1}{2}\dot{\phi}} \Big|_{k=aH} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{3H^4}{\epsilon V} \Big|_{k=aH} \approx \frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{\epsilon} \Big|_{k=aH} \equiv A_s \quad (224)$$

Con esto, el espectro de potencia puede ser aproximado mediante una ley de potencia:

$$\Delta_s^2(k) = A_s(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s(k_*)-1+(\frac{1}{2}\alpha_s(k_*)\ln(k/k_*)+\dots)} \quad (225)$$

siendo k_* una escala de referencia, en este caso, k se evalúa para $N \sim 60$ *e-folds* antes del fin de inflación, cuando las perturbaciones del CMB abandonaron el horizonte. Todos los parámetros se evalúan a esa escala.

De modo que, con la definición del índice espectral (162):

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k} = \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln aH} \approx \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln a} = -\frac{d \ln \Delta_s^2}{dN} = \frac{\dot{\phi}}{H} \frac{d \ln \Delta_s^2}{d\phi} = -\frac{V_\phi}{V} \frac{d \ln \Delta_s^2}{d\phi} \quad (226)$$

En la primera igualdad se ha utilizado $k = aH$, en la aproximación se ha tomado $H \approx cte$, después $a \sim e^{-N}$ y $dN = Hdt = H\frac{d\phi}{\dot{\phi}}$. Para la penúltima igualdad se han utilizado las aproximaciones de *slow-roll* (107) y (92) de forma que $\frac{\dot{\phi}}{H} = -\frac{V_\phi}{3H^2} = -\frac{V_\phi}{V}$.

Finalmente, introduciendo la expresión del espectro de potencia escalar (224):

$$\begin{aligned} n_s - 1 &= -\frac{V_\phi}{V} \frac{d}{d\phi} \left[\ln \left(\frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{\epsilon} \right) \right] = -\frac{V_\phi}{V} \frac{d}{d\phi} [\ln V^3 - \ln V_\phi^2] \\ &= 2\frac{V_{\phi\phi}}{V} - 3\frac{V_\phi^2}{V^2} \Rightarrow n_s - 1 = 2\eta_V - 6\epsilon_V \end{aligned} \quad (227)$$

En un proceso similar:

$$\alpha_s \equiv \frac{dn_s}{d \ln k} = -16\epsilon_V\eta_V + 24\epsilon_V^2 + 2\xi_V^2 \quad (228)$$

donde $\xi_V = \frac{V_\phi V_{\phi\phi\phi}}{V^2}$.

Pasando al índice espectral tensorial se tendrá:

$$\Delta_t^2 = \frac{2H^2}{\pi^2} \Big|_{k=aH} = \frac{2V}{2\pi^3} \Big|_{k=aH} \equiv A_t \quad (229)$$

El espectro de potencia tensorial puede aproximarse:

$$\Delta_t^2(k) = A_t(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_t(k_*)} \quad (230)$$

Se obtiene un valor de índice espectral:

$$n_t \approx -2\epsilon_V \quad (231)$$

y el ratio tensor-escalar:

$$r \approx 16\epsilon_V \approx -8n_t \quad (232)$$

Para un índice espectral tensorial suficientemente alto, se tendrá inflación de campo grande, tal como se vio al definir el *Lyth bound* (211).

Finalmente, se tienen los parámetros teóricos relacionados con los medibles. Esto permite descartar modelos que se introducirán en la siguiente sección del trabajo (6. Modelos de inflación).

6 Modelos de inflación

Para esta sección se ha seguido el artículo de M. Pieroni [13] sobre modelos de inflación apoyado por [2], [3], [6], [14].

Conocido el comportamiento teórico y utilizando los datos experimentales disponibles (que se presentarán en la última sección del trabajo), solo queda fijar, para la acción (77), el potencial del campo escalar. Cuando se propone un modelo de inflación, se aporta un potencial del que se derivan los parámetros de *slow roll* y de estos, las magnitudes medibles experimentalmente.

Los modelos de inflación *slow-roll* pueden dividirse en 3 clases principales diferenciados por el cambio en el campo inflatón $\Delta\phi$ del inicio al fin de inflación:

- Campo grande (*large-field models*). Se caracteriza por tener una variación del inflatón superior a la masa de Planck:

$$\Delta\phi \gtrsim m_{pl} \quad (233)$$

Para que se cumplan las condiciones de *slow-roll*: $\phi > m_{pl}$. El campo empieza en valores de campo muy altos y arbitrarios y cae hasta un mínimo en $\phi = 0$. Las perturbaciones tensoriales (ondas gravitacionales) deberían ser observables.

- Campo pequeño (*small-field models*). Variación del valor del inflatón mucho menor a la masa de Planck:

$$\Delta\phi \ll m_{pl} \quad (234)$$

Surgen usualmente de mecanismos de ruptura espontánea de simetría, en los que el campo cae lentamente de un equilibrio inestable a un vacío desplazado. No sería posible medir las ondas gravitacionales (*Lyth Bound*).

- Modelos híbridos. Son el resultado de modelos de varios campos en los que todos excepto uno son muy pesados y se encuentran congelados. Como consecuencia, actúan como modelos efectivos de un solo campo.

6.1 La inflación de campo grande

El modelo de campo grande más sencillo es la inflación caótica, se utilizó como ejemplo en la sección 3 para probar la inflación de tipo *slow-roll*. Parte del potencial cuadrático:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (235)$$

Como se vio, el primer parámetro de *slow-roll* del potencial es¹¹:

$$\epsilon_V \equiv \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 = 2 \left(\frac{m_{pl}}{\phi} \right)^2 \quad (236)$$

¹¹Se añade la masa de Planck reducida $m_{pl}^2 = 8\pi G$ para explicitar la dimensionalidad.

con lo que se tiene régimen *slow-roll* para $\phi > \sqrt{2}m_{pl}$.

Debe quedar claro que la presencia de un campo super-planckiano no significa que sea necesaria la introducción de una gravedad cuántica (QG). Para que la QG sea necesaria la densidad de energía debe ser superior a la masa de Planck, es decir $\rho \gtrsim m_{pl}^4$. Esto no es lo común incluso en modelos de campo grande. En inflación caótica:

$$\rho \approx V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (237)$$

La gravedad cuántica se requiere para $\frac{1}{2}m^2\phi^2 > m_{pl}^4$, esto es:

$$\frac{\phi}{m_{pl}} > \frac{\sqrt{2}m_{pl}}{m} \quad (238)$$

Sin embargo, la existencia del campo super-planckiano da lugar a otros problemas.

6.1.1 El problema η

Dado que no es posible aún incluir inflación en el Modelo Estándar (SM), suele desarrollarse la definición de modelos inflacionarios mediante teorías de campo efectivo (EFTs). En las EFTs se tiene una escala de energía máxima a la que la teoría funciona (típicamente llamada Λ), mientras que a energías mayores se utilizan operadores de dimensión superior (no renormalizables). Estos operadores no afectan a bajas energías.

Cuando se consideran modelos de campo grande se tienen energías superiores a la masa de Planck, una buena escala de corte sería esta magnitud. Como consecuencia, a no ser que la teoría se encuentre protegida por simetrías, operadores de dimensión superior podrían aparecer introduciendo correcciones radiativas de orden uno en el segundo parámetro de *slow-roll* de manera que la condición $\eta \ll 1$ no se cumple.

Existen varias soluciones a este problema en las que el objetivo es mantener las correcciones poco importantes y que no impidan el desarrollo de inflación:

- Modelos de campo pequeño. Si la energía del inflatón es mucho menor a la escala de corte de la teoría no aparecen estos problemas.
- Introducción de una teoría con completitud UV (capaz de explicar altas energías) que permita la aparición de simetrías que protejan al potencial de correcciones radiativas grandes.
- Ir más allá de inflación *slow-roll*. Se presentarán algunos ejemplos más adelante.

6.2 Algunos modelos característicos

6.2.1 Inflación caótica

De nuevo aparece el modelo introducido por A. Linde con potencial (235). Puede generalizarse este potencial tal que (figura 12):

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{m_{pl}} \right)^p \quad (239)$$

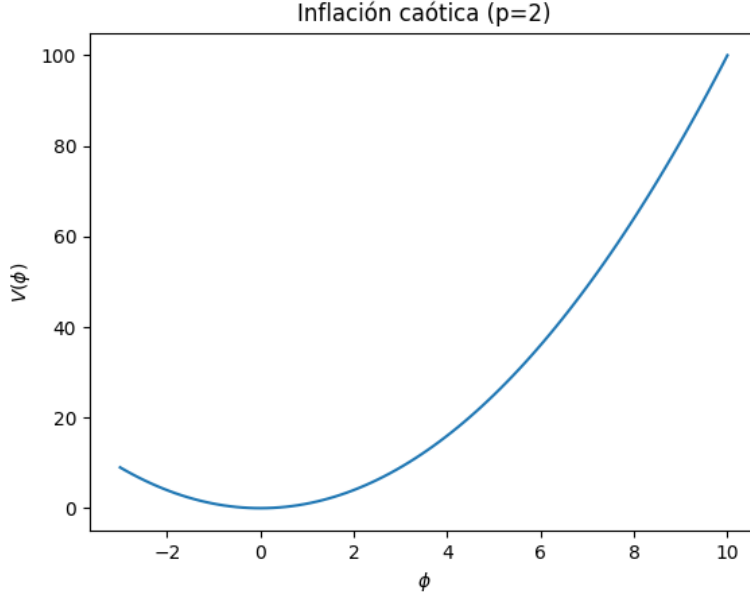


Figure 12: Potencial de inflación caótica con $p = 2$. El campo cae por el potencial frenado por un término de fricción hasta llegar al mínimo en el que queda oscilando finalizando inflación (recalentamiento). (fuente: original)

Aquí Λ es una escala de masa que corresponde a la masa del inflatón para $p = 2$ y que se normaliza a partir de datos experimentales. Con lo que se tiene un modelo dependiente de un parámetro p real positivo.

A partir del potencial se calculan los parámetros de *slow-roll* de las expresiones (105) y (106):

$$\epsilon_V \equiv \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 = \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{p}{\phi} \right)^2 \quad (240)$$

$$\eta_V \equiv m_{pl}^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V} = m_{pl}^2 \frac{p(p-1)}{\phi^2} \quad (241)$$

Se tiene que el número de *e-folds* de inflación es (109):

$$N(\phi) \approx \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V}{V_\phi} \frac{d\phi}{m_{pl}} = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_V} m_{pl}} = \frac{\phi^2}{2pm_{pl}^2} \quad (242)$$

con lo que pueden calcularse n_s (227), α_s (228), n_t (231) y r (232):

$$n_s = 1 - p(p+2) \frac{m_{pl}^2}{\phi^2} = 1 - \frac{p+2}{2N} \quad (243)$$

$$\alpha_s = -\frac{p+2}{2N^2} \quad (244)$$

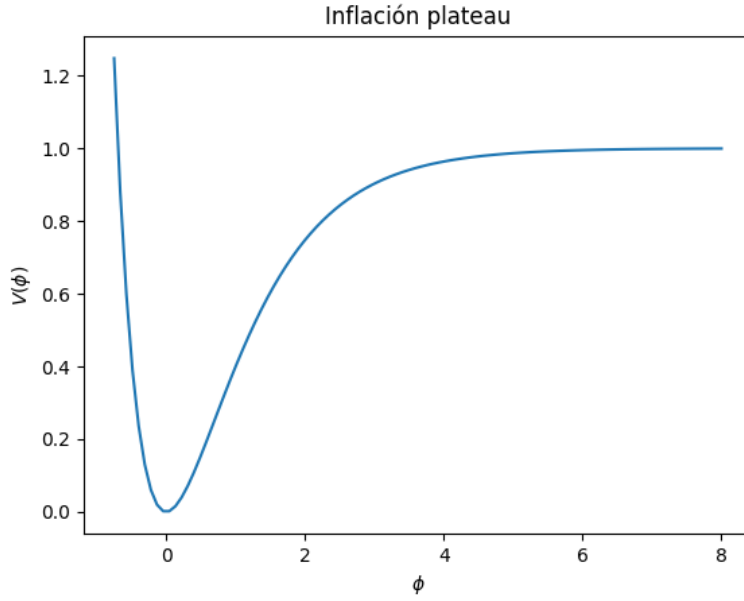


Figure 13: Inflación tipo *plateau*. El potencial rueda lentamente por la zona plana hasta llegar al borde en el que cae al mínimo rápidamente e inflación acaba.

$$n_t = -\frac{p}{2N} \quad (245)$$

$$r = -8n_t = \frac{4p}{N} \quad (246)$$

Se ha visto que generalizaciones de estos modelos, como añadir acople fuerte entre gravedad e inflatón, podrían ser viables.

6.2.2 Inflación *plateau* (tipo meseta)

Tienen la forma (figura 13):

$$V(\phi) = \Lambda^4 [1 - e^{-\gamma\phi/m_{pl}}]^2 \quad (247)$$

De nuevo se trata de un modelo con un parámetro γ . Inflación ocurre cerca del máximo inestable (exponencial nula), con lo que puede aproximarse en torno a este punto:

$$V(\phi) = \Lambda^4 [1 - 2e^{-\gamma\phi/m_{pl}}] \quad (248)$$

de manera que:

$$N \approx \frac{e^{\gamma\phi/m_{pl}}}{2\gamma^2} \quad (249)$$

y:

$$n_s = 1 - \frac{2}{N} \quad (250)$$

$$\alpha_s = -\frac{2}{N^2} \quad (251)$$

$$r = \frac{8}{\gamma^2 N^2} \quad (252)$$

Este potencial surge de 2 modelos que modifican la acción (77) más allá del propio potencial:

- **Inflación de Higgs.** Para este modelo, la acción se incluye un término de acople no mínimo de la gravedad y el campo inflatón $\frac{1}{2}\xi R\phi^2$ (ξ representa la fuerza de la interacción entre R y ϕ). A través de algunas modificaciones, puede escribirse como un potencial efectivo de tipo *plateau*.
- **Modelo de Starobinsky.** En este caso la modificación se realiza en el propio término de Einstein-Hilbert. Se trata de una teoría de *modified gravity* (gravedad modificada), en las que el escalar de Ricci R se sustituye por una función del mismo $f(R)$. En este caso, $f(R) = R + \alpha R^2$ (con $\alpha > 0$). De nuevo, manipulando esta nueva acción puede expresarse en forma de un campo escalar con este tipo de potencial.

Además, este tipo de potencial aparece de manera natural en modelos derivados a partir de teoría de cuerdas.

6.2.3 Inflación *hilltop* (cima de colina)

Se trata de modelos de campo pequeño, inflación ocurre en la vecindad de una máximo y cae lentamente hacia el mínimo (figura 14):

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 - \left(\frac{\phi}{v} \right)^p \right]^2 \quad (253)$$

Aquí, v es un parámetro con unidades de masa tal que inflación puede ocurrir para $0 < \phi < v$. Tomando los casos concretos $\phi/v \ll 1$ puede aproximarse:

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 - 2 \left(\frac{\phi}{v} \right)^p \right] \quad (254)$$

Para $p \neq 2$:

$$N \approx \frac{v^2}{2p(p-2)m_{pl}^2} \left(\frac{\phi}{v} \right)^{2-p} \quad (255)$$

Se puede demostrar que tomando solo el primer orden de la aproximación para $1/N$:

$$n_s \approx 1 - \frac{2(p-1)}{N(p-2)} \quad (256)$$

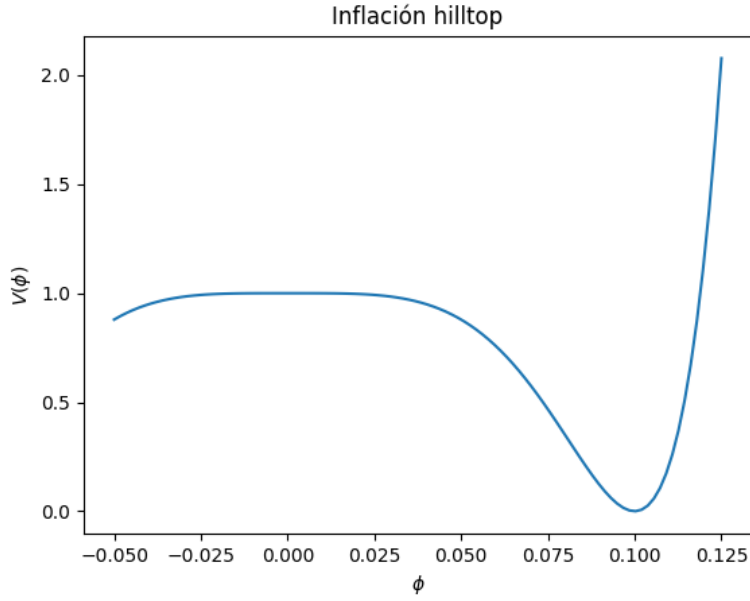


Figure 14: Inflación *hilltop*. Proceso similar a la inflación *plateau*. El campo cae lentamente desde su máximo en 0

$$\alpha_s \approx -\frac{2(p-1)}{N^2(p-2)} \quad (257)$$

$$r \approx \frac{32p^2 m_{pl}^2}{v^2} \left[\frac{2p(p-2)m_{pl}^2}{v^2} N \right]^{\frac{2p-2}{2-p}} \quad (258)$$

En estos modelos puede reducirse el valor de r manteniendo n_s fijo y haciendo $v \ll m_{pl}$ (campo pequeño).

El caso con $p = 2$ es especial, el número de *e-folds* es:

$$N \approx -\frac{v^2}{4m_{pl}^2} \ln \left(\frac{\phi}{\phi_f} \right) \quad (259)$$

y, a menor orden:

$$n_s \approx 1 - \frac{8m_{pl}^2}{v^2} \quad (260)$$

$$\alpha_s \approx -\frac{1024m_{pl}^4}{v^4} \left(\frac{\phi_f}{v} \right)^2 e^{-\frac{8Nm_{pl}^2}{v^2}} \quad (261)$$

$$r \approx \frac{256m_{pl}^2}{v^2} \left(\frac{\phi_f}{v} \right)^2 e^{-\frac{8Nm_{pl}^2}{v^2}} \quad (262)$$

donde n_s es independiente del número de *e-folds*.

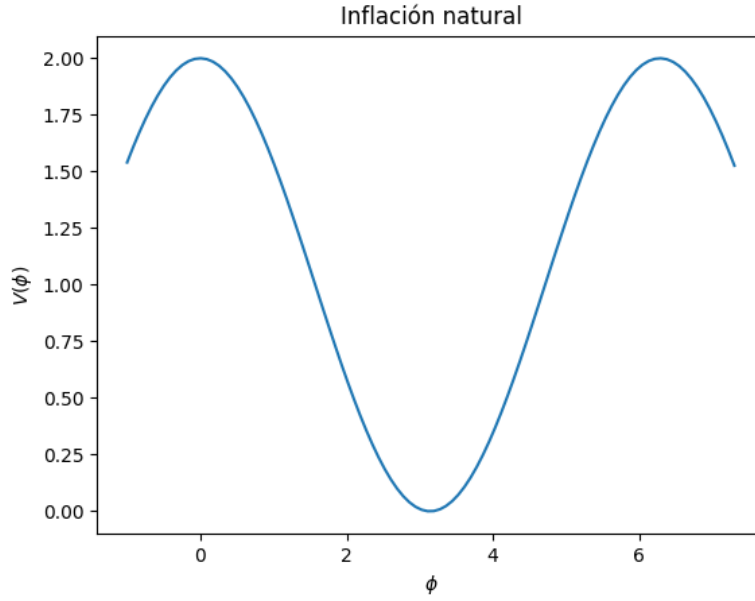


Figure 15: Inflation natural. El potencial es periódico. Recorrido del campo similar al de la inflación caótica.

6.2.4 Inflation natural

Estos modelos suponen que el inflatón es un bosón de Nambu-Goldstone (NGB) (nacido de una ruptura de una simetría global), de esta manera se impone una simetría de desplazamiento (*shift*) $\phi \rightarrow \phi + cte$ quedando el potencial protegido contra correcciones radiativas. Sin embargo, el potencial de estos bosones es completamente plano, con lo que no permitiría de manera directa un final para inflación. Considerando, por otro lado, un pseudo-NGB (la simetría de desplazamiento continua se rompe en un subconjunto discreto), se tendrá un potencial periódico (figura 15):

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{v}\right) \right] \quad (263)$$

Puede tomarse un periodo π sin pérdida de generalidad. Entonces:

$$N \approx -\frac{v^2}{m_{pl}^2} \ln \left[\sin\left(\frac{\phi}{2V}\right) \right] \quad (264)$$

Se tienen los parámetros de *slow-roll*:

$$\epsilon_V \approx \frac{m_{pl}^2}{2v^2} \left[e^{\frac{Nm_{pl}^2}{v^2}} - 1 \right] \quad (265)$$

$$\eta_V \approx -\frac{m_{pl}^2}{2v^2} \frac{e^{\frac{Nm_{pl}^2}{v^2}} - 2}{e^{\frac{Nm_{pl}^2}{v^2}} - 1} \quad (266)$$

$$\xi_V \approx -\eta_V \frac{\sqrt{2\epsilon_V} m_{pl}}{v} \quad (267)$$

siendo la última expresión la aproximación de primer orden. Con esto:

$$n_s \approx 1 - \frac{m_{pl}^2}{v^2} \frac{e^{\frac{Nm_{pl}^2}{v^2}} + 1}{e^{\frac{Nm_{pl}^2}{v^2}} - 1} \quad (268)$$

$$r \approx \frac{8m_{pl}^2}{v^2} \left[e^{\frac{Nm_{pl}^2}{v^2}} - 1 \right]^{-1} \quad (269)$$

α_s se obtiene de la expresión (228).

Es interesante evaluar los límites de v :

$$\frac{Nm_{pl}^2}{v^2} \gg 1 \Rightarrow n_s = 1 - \frac{m_{pl}^2}{v^2} \quad r = \frac{8m_{pl}^2}{v^2} e^{-\frac{Nm_{pl}^2}{v^2}} \quad (270)$$

Redefiniendo el parámetro v pueden hacerse coincidir los resultados con los de un modelo *hilltop* con $p = 2$.

$$\frac{Nm_{pl}^2}{v^2} \ll 1 \Rightarrow n_s = 1 - \frac{2}{N} \quad r = \frac{8}{N} \quad (271)$$

que coincide con los resultados de un potencial caótico con $p = 2$.

6.2.5 Inflación *power law* (ley de potencias)

Se trata de un modelo que difiere del resto en el comportamiento del factor de escala. En lugar de crecer exponencialmente, el potencial sigue una relación (figura 16):

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{\lambda^2}} \quad (272)$$

donde λ es una constante adimensional que sustituye a los *e-folds* para esta forma de inflación. El potencial es:

$$V(\phi) = \Lambda^4 e^{-\lambda \frac{\phi}{m_{pl}}} \quad (273)$$

De manera que:

$$n_s = 1 - \lambda^2 \quad (274)$$

$$\alpha_s = 0 \quad (275)$$

$$r = 8\lambda^2 \quad (276)$$

Uno de los problemas de este modelo es la ausencia de un final natural para inflación.

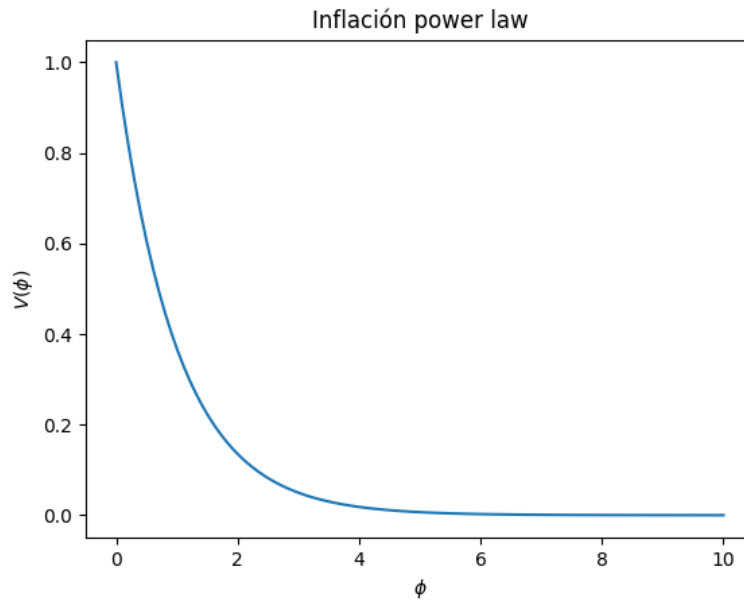


Figure 16: Potencial en modelos *power law*. Dado que no existe un mínimo, inflación no termina de manera natural.

6.3 Generalizaciones

Como ya se ha dicho, los modelos citados corresponden a la forma de inflación más "sencilla". Sin embargo, es obvio que esto es solo una pequeña porción de las posibilidades que el mecanismo ofrece. Algunas generalizaciones de las condiciones tomadas a lo largo de este trabajo son:

- Inflación de varios campos. La asunción de que solo un campo actuó durante inflación (ya sea por ser el único presente o por el comportamiento estático del resto) no debería tomarse en un estudio general.
- Gravedad modificada. En este tipo de teorías se supone que la Relatividad General está incompleta. Puede considerarse que a altas energías la gravedad sea descrita no por el propio escalar de Ricci R sino con una función de este $f(R)$ (teorías $f(R)$ de gravedad modificada). Un ejemplo importante es el modelo de Starobinsky antes mencionado, en el que $f(R) = R + \alpha R^2$ con $\alpha > 0$.
- Modelos con términos cinéticos no estandarizados. El término cinético adoptaría una forma general: $F(\phi, X)$, donde $X \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$. Suelen aparecer en teorías con dimensiones extra como la teoría de cuerdas.
- Modelos con acople no mínimo entre el inflatón y la gravedad. Por ejemplo la inflación de Higgs también mencionada en los modelos de tipo *plateau*.

7 Contacto teoría-observaciones

Planitud

Como se ha visto, puede calcularse la curvatura espacial del espaciotiempo mediante la ecuación de Friedmann (40) si se conocen las densidades de los constituyentes del Universo.

Los resultados varían dependiendo de la cosmología de fondo y los experimentos, sin embargo, de manera aproximada se tiene [15]:

$$\Omega_b \approx 0.05 \quad \Omega_{dm} \approx 0.25 \quad \Omega_{de} \approx 0.70 \quad (277)$$

De manera que, en total (medidas de lentes gravitacionales del satélite Planck, asumiendo energía oscura consecuencia de una constante cosmológica y medidas de BAO, 68% de confianza):

$$\Omega = \Omega_b + \Omega_{dm} + \Omega_{de} = 0.9993 \pm 0.0019 \quad (278)$$

y por tanto $k \approx 0$. Basándose en el Universo observable, vivimos en un espaciotiempo geoméricamente plano. Esto concuerda con los resultados teóricos de inflación, en los que:

$$\Omega = 1 \pm 10^{-5} \quad (279)$$

En la figura 17 se muestra un diagrama que constriñe los posibles valores de estos parámetros a partir de diversos experimentos.

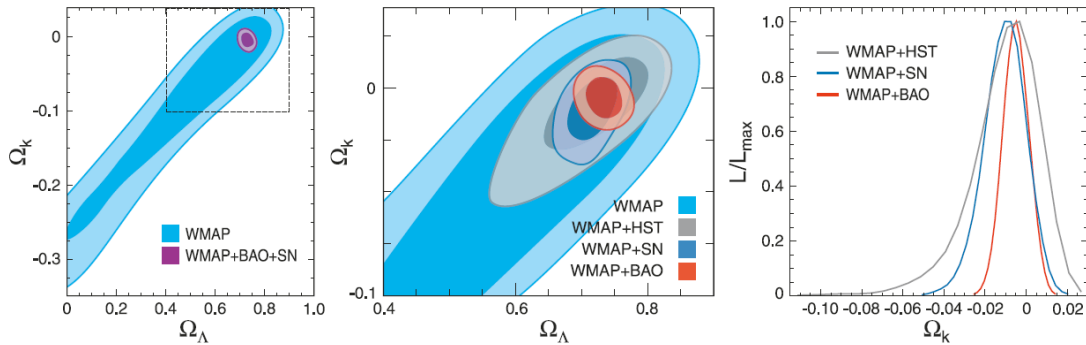


Figure 17: Constricciones de los parámetros de densidad de energía oscura y curvatura determinados por el WMAP y otros experimentos que sondan el CMB y la LSS. En el primer gráfico se evalúan los posibles valores de densidad de energía oscura y "densidad de energía de curvatura". En el segundo una visión más precisa que compara diferentes experimentos. En el último se representa el valor de la curvatura. (Fuente [2]).

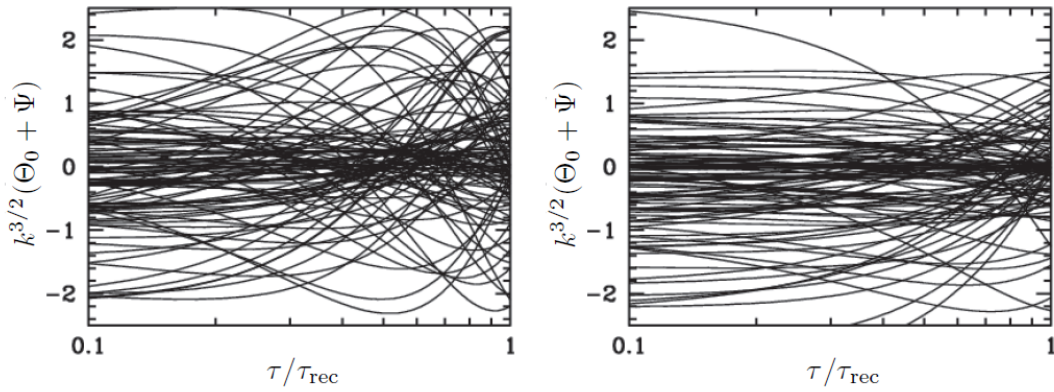


Figure 18: Evolución de los modos correspondientes al primer pico y el primer valle del espectro angular de temperatura del CMB sin un mecanismo que los sincroniza (fases iniciales arbitrarias).

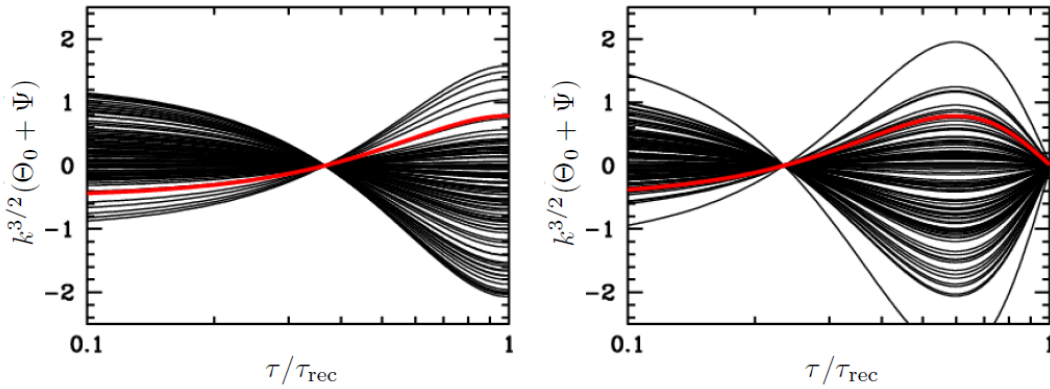


Figure 19: Evolución de los mismos modos con mecanismo de sincronización (la reentrada al horizonte tras inflación) (Fuente [2]).

Coherencia de fase

La medida del espectro escalar y el obtenido a partir de la teoría inflacionaria coinciden. Sin embargo esto no es lo más llamativo de estas observaciones.

El hecho de que el espectro angular del CMB (figura 11) forme picos y valles es consecuencia de una igualdad en las fases de cada modo de Fourier de las perturbaciones. Esto no sería posible sin un mecanismo de "sincronización" de estas fases. Inflación proporciona este mecanismo mediante la salida progresiva a través del horizonte de los modos de diferente escala. Cuando un modo reentra en el horizonte, todas las perturbaciones con esa longitud de onda lo hacen a la vez, con lo que se encuentran en fase. En la figura 18 se muestra la evolución de modos con fase aleatoria, en la figura 19 se impone la entrada al horizonte que sincroniza las fases.

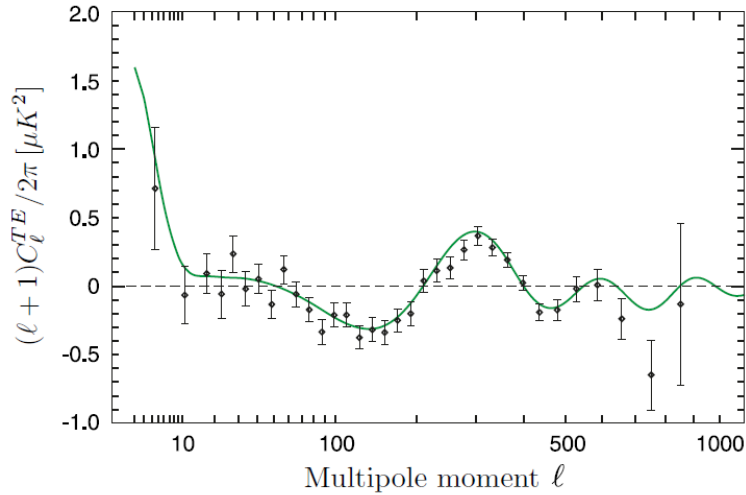


Figure 20: Espectro de la correlación entre las anisotropías en la temperatura y la polarización E. (Fuente [2])

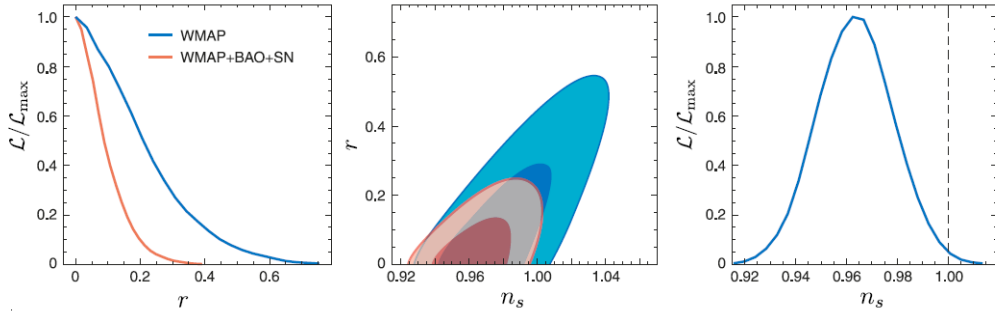


Figure 21: Constricciones del índice espectral n_s y el ratio tensor-escalar r obtenidas por WMAP (azul) y otros experimentos sobre las BAO y supernovas (naranja) (Fuente [2]).

Espectro TE

A pesar de que no se ha tratado el marco teórico para analizar el espectro de la correlación cruzada de fluctuaciones en la polarización E y la temperatura, se debe mencionar otra de las coherencias teoría-experimento. Se muestra este espectro en la figura 20.

El pico negativo en $100 < l < 200$ se debe también a una coherencia de fase, sin embargo, esta vez las escalas involucradas entraron en el horizonte después de la recombinación, con lo que no existe un mecanismo causal posterior al fin de inflación que haya podido producirlo. Recurrir a un fenómeno como inflación se vuelve casi necesario.

Invariancia de escala

Constricciones entre el índice espectral y el ratio tensor-escalar permiten saber acerca de la invariancia de escala de las perturbaciones. En la figura 21 se representan estas relaciones.

De esta forma, comparando los diferentes experimentos (Planck, lentes gravitacionales,

BAO...) se tiene [15]:

$$n_s = 0.966 \pm 0.004 \qquad r < 0.06 \qquad (280)$$

A partir del índice espectral se observa que existe una cuasi-invariancia de escala ligeramente inclinada al rojo $n_s < 1$, lo que da indicios de la dependencia temporal de inflación. Esta variancia es, de hecho, necesaria para que inflación termine. H debe evolucionar.

Gaussianidad

La naturaleza casi completamente gaussiana de las perturbaciones generadas en la inflación es algo relativamente excepcional (la no gaussianidad es algo mucho más común), el hecho de que experimentalmente se mida una desviación de gaussianidad de menos del 0.1% es un triunfo más de la teoría.

Adiabaticidad

La inflación de un solo campo solo puede producir perturbaciones de densidad en el espacio, pero no puede generar variaciones en la densidad relativa de los diferentes componentes. Esto es análogo a decir que solo es capaz de producir perturbaciones de densidad primordiales adiabáticas:

$$\frac{\delta\rho_m}{\rho_m} = \frac{3}{4} \frac{\delta\rho_r}{\rho_r} \qquad (281)$$

Donde m engloba la materia (especies no relativistas) y r la radiación (especies relativistas).

Mientras esta condición no sea violada se podrá mantener la teoría con un solo campo. De lo contrario sería necesario trabajar con inflación de varios campos.

Aclaración

Ninguna de las anteriores pruebas confirma la existencia de inflación, sin embargo, el hecho de que tampoco contradigan la teoría es prometedor. Toda la información sobre los valores experimentales mostrados se encuentra en O. Lahav [15].

7.1 Evaluación de modelos

En la figura 22 se representan las predicciones de varios modelos en el plano $n_s - r$ para ser contrastados con las restricciones impuestas sobre estos parámetros. El valor de r determina si se trata de un modelo de campo grande o de campo pequeño (*Lyth bound*). Una combinación de los dos parámetros determina el valor del segundo parámetro de *slow-roll* η_V que a su vez define, con su signo, la curvatura del potencial cuando el Universo observable atravesó el horizonte.

Es especialmente interesante el modelo de Starobinsky (en el diagrama: R^2 inflation; círculos y línea naranjas). En la actualidad es el modelo más aceptado ya que es el que mejor encaja con las observaciones.

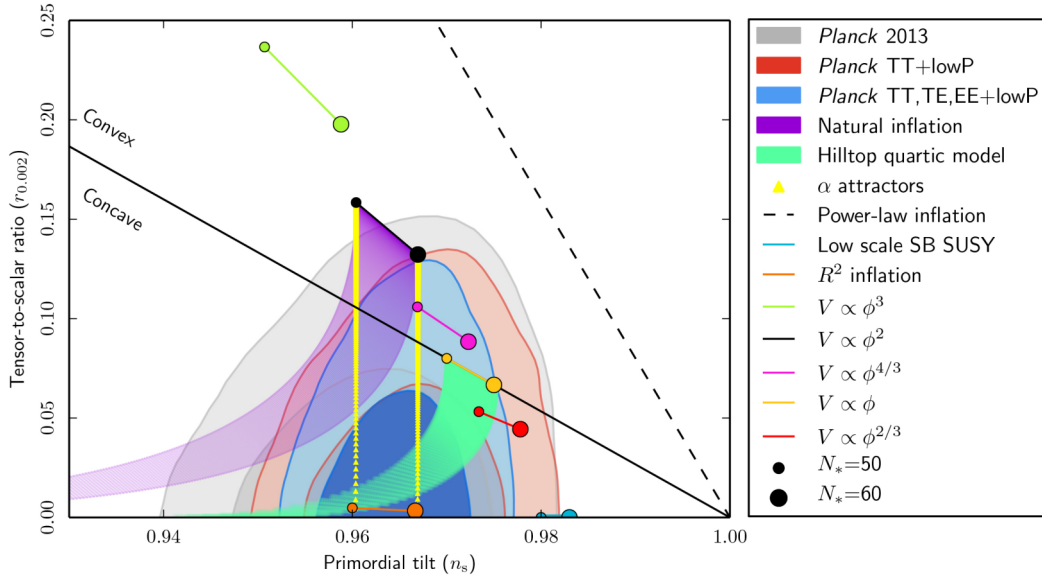


Figure 22: Diagrama que muestra los resultados obtenidos a partir de algunos modelos importantes sobre las constricciones antes mostradas del índice espectral y el ratio tensor-escalar. (Fuente [20])

7.2 Futuros experimentos

A pesar de que todos los experimentos realizados son coherentes con la teoría inflacionaria, no puede afirmarse la existencia de un periodo inflacionario. Sin embargo, la cosmología de precisión no comenzó realmente hasta 2013 con la entrada en funcionamiento del satélite Planck. Queda mucho por explorar. En los próximos años se esperan algunas observaciones aún más importantes que las que se tienen:

- La observación de mayor interés se centra en la detección de modos B de polarización primordiales en el CMB, esto es, una medida de amplitud tensorial. Estas observaciones solo son posibles como consecuencia de ondas gravitacionales inflacionarias, con lo que sería casi indiscutible la existencia de inflación. Además, significaría que se trata de una inflación de campo grande (cota de Lyth).
- La medida de una variación del índice espectral $\alpha_s \equiv \frac{dn_s}{d \ln k}$ grande o una ruptura de la relación de consistencia $r = -8n_t$ supondrían golpes críticos a la teoría.
- La forma de la pequeña parte no gaussiana de las perturbaciones puede contener mucha información acerca de qué modelos son más adecuados.

8 Conclusiones

Hemos partido de un Universo con métrica FLRW (espacio homogéneo e isotrópico) como base para describir la teoría cosmológica clásica del Big Bang, presente hasta finales del siglo pasado. En esta teoría el radio de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$ crece de manera monótona. Este estudio nos ha llevado hasta ciertos problemas relacionados con condiciones iniciales demasiado bien afinadas: la planitud del Universo, así como su homogeneidad, son tan poco probables que solo un principio antrópico¹² es capaz de defender esta "casualidad", lo cual no es muy satisfactorio.

Mediante la introducción de una etapa de crecimiento exponencial en los primeros instantes del Universo, a la que Alan Guth, como primer precursor de la teoría, llamó: inflación, pueden solucionarse estos problemas. Dicha expansión podría estar generada por un campo escalar de energía exótica conocido como inflatón (que cumple ciertas condiciones de "slow-roll"). Esto produciría un decrecimiento el radio de Hubble¹³ durante un tiempo conforme arbitrario. Una vez terminada inflación, el radio de Hubble volvería a crecer como antes se pensaba.

El inflatón era un campo casi homogéneo, solo alterado por las fluctuaciones del vacío cuántico en el que se encontraba. Al reducirse el radio de Hubble por debajo de la longitud de onda de estas perturbaciones, estas salieron del horizonte causal¹⁴ y quedaron congeladas. Una vez inflación termina, el horizonte vuelve a crecer hasta que estas mismas perturbaciones vuelven a entrar en él, volviendo a oscilar en un periodo que somos capaces de explorar. De esta manera, inflación nos aporta una manera de medir experimentalmente el comportamiento de sus propias fluctuaciones y con ellas la naturaleza del campo inflatón y sus características.

La principal fuente de información de estas fluctuaciones se encuentra en el fondo cósmico de microondas (CMB). Analizando el espectro de potencia de las inhomogeneidades del CMB pueden obtenerse una serie de parámetros (n_s, α_s, n_t, r) que se pueden relacionar de manera directa con los espectros de potencia teóricos de las fluctuaciones escalares y tensoriales primordiales que caracterizarían las condiciones del Universo primigenio. Esto permite acotar la verdadera descripción de lo que ocurrió en los primeros instantes del Universo.

Los datos experimentales apuntan, cada vez con más precisión, al modelo de inflación de Starobinsky. Este supone una modificación de la Relatividad General a altas energías de manera que el escalar de Ricci se sustituye por una función del mismo $R \rightarrow f(R) = R + \alpha R^2$, con lo que se sale de la teoría tratada en este trabajo. Sin embargo, mediante manipulaciones es posible obtener una acción efectiva que se ajusta a las canónicas de la Relatividad General para un campo escalar con un potencial tipo *plateau* (sección 6).

Aún queda mucho por hacer. La era de la cosmología de precisión no tiene más de una década y experimentos relacionados, sobre todo, con los modos B de polarización del CMB (relacionados con las ondas gravitacionales inflacionarias) se esperan en los próximos años. La detección de estos modos sería una prueba casi concluyente de la existencia de inflación en el Universo primordial. Obviamente, también se contempla la posibilidad de

¹²Principio antrópico (en cosmología): "Si en el Universo se deben verificar ciertas condiciones para nuestra existencia, dichas condiciones se verifican ya que nosotros existimos" [18].

¹³Se habla del radio de Hubble *comóvil* aunque no se mencione.

¹⁴Llamamos horizonte causal a la superficie que separa del resto del Universo la zona del espacio con la que puede comunicarse un observador. Está determinado por el radio de Hubble.

encontrar algún indicio para desechar la teoría.

Este trabajo es una introducción didáctica al ámbito inflacionario, por lo que se han tratado los principios básicos. Por la profundidad que se busca y por su complejidad no se ha indagado en temas como la no gaussianidad primordial, la inflación de varios campos fuera de un régimen *slow-roll*, el estudio de las estructuras de gran escala (LSS) o de los modos de polarización del CMB.

Por otro lado, a pesar de que solo se ha hablado de inflación y de la manera en que concuerda con las observaciones hasta ahora, existen problemas con la teoría que aún no se han resuelto.

El principal problema surge de las condiciones iniciales de inflación. Se ha supuesto que la velocidad del inflatón es pequeña, de lo contrario, podría atravesar la zona del potencial en la que debería producirse inflación sin generar la expansión exponencial. Por otro lado, cálculos numéricos muestran que, para que inflación comience, se necesita que el campo inflatón sea homogéneo en un parche varias veces mayor al radio de Hubble. De nuevo, un problema de homogeneidad.

De esta forma se vuelve a un problema de condiciones iniciales similar al que buscábamos resolver en un principio con los problemas de planitud y homogeneidad. El Universo se encontraría de nuevo en unas condiciones muy bien afinadas, aunque debido al desconocimiento del Universo primigenio no es tan sencillo estimar como de bien.

En un Universo supuestamente infinito, es obvio que no todo puede haberse encontrado en contacto causal. Una visión popular de inflación se basa en el modelo de inflación eterna, propuesta por primera vez por Paul Steinhardt. La inflación eterna supone que inflación nunca termina de manera global. Cuando las condiciones correctas se dan en cierto punto del espaciotiempo, se generan parches en los que inflación termina y se generan Universos FLRW como el que conocemos. De esta manera el Universo hipotéticamente infinito sería en realidad un multiverso en el que solo una pequeña fracción del volumen ha terminado inflación. La probabilidad de que las condiciones iniciales mencionadas se dieran (y las propias predicciones inflacionarias) dependen de la probabilidad relativa de estos parches. Se conoce esto como el problema de la medida [19].

No sabemos qué deparan las futuras observaciones, pero sí podemos afirmar que, cualesquiera que sean, serán un paso adelante en nuestro entendimiento del Universo, su origen y, probablemente, su destino.

A Obtención de la ecuación de estado de un fluido perfecto

Para un sistema clásico tridimensional de partículas idénticas $N \gg 1$ contenidas en un volumen V , el Hamiltoniano del sistema es:

$$H = \lambda \sum_i |\mathbf{p}_i|^\alpha \quad (282)$$

\mathbf{p}_i es el momento lineal tridimensional de la partícula i (i va de 1 a N) y λ y α son parámetros constantes específicos del Hamiltoniano.

A partir del Hamiltoniano (282) puede obtenerse la función de partición. La función de partición en mecánica clásica (variables continuas) para N partículas, se define como la integral sobre los espacios de posiciones (\mathbf{x}_i) y de momentos (\mathbf{p}_i):

$$Z = \frac{1}{N! h_0^{3N}} \int e^{-\beta H} d^3 p_1 d^3 p_2 \dots d^3 p_N d^3 x_1 d^3 x_2 \dots d^3 x_N \quad (283)$$

donde $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$ y h_0 es una cantidad infinitesimal con dimensiones de acción.

Para el caso en cuestión todas las partículas son equivalentes e independientes, con lo que pueden separarse las integrales de cada una. Además, el Hamiltoniano no depende de la posición (solo el término cinético afecta a la energía), de modo que esta parte de la integral devuelve el volumen V :

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{h_0^3} \int e^{-\beta \lambda p^\alpha} d^3 p \right]^N = \frac{1}{N!} \left[\frac{4\pi V}{h_0^3} \int_0^\infty dp p^2 e^{-\beta \lambda p^\alpha} \right]^N \quad (284)$$

Realizando el cambio de variable $p^\alpha = x^2 \Rightarrow dp = \frac{2}{\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} dx$:

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\frac{4\pi V}{h_0^3} \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty dx x^{\frac{6-\alpha}{\alpha}} e^{-\beta \lambda x^2} \right]^N \quad (285)$$

la integral es ahora una gaussiana:

$$\int_0^\infty dx x^{\frac{6-\alpha}{\alpha}} e^{-\beta \lambda x^2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) (\beta \lambda)^{-\frac{3}{\alpha}} \quad (286)$$

de manera que, finalmente, la función de partición es:

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\frac{4\pi V}{h_0^3} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) (\beta \lambda)^{-\frac{3}{\alpha}} \right] \quad (287)$$

Con esto, puede calcularse la energía del sistema:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = N \frac{3}{\alpha \beta} = \frac{3}{\alpha} N k_B T \quad (288)$$

de forma que la densidad de energía es:

$$\rho = \frac{\bar{E}}{V} = \frac{3}{\alpha} k_B T \frac{N}{V} \quad (289)$$

A OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO DE UN FLUIDO PERFECTO

Por otro lado, la ecuación de estado es:

$$p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = k_B T \frac{N}{V} \quad (290)$$

Se observa que la relación entre la densidad y la presión del fluido es lineal:

$$p = \frac{\alpha}{3} \rho = \omega \rho \quad (291)$$

donde hemos definido la constante $\omega = \frac{\alpha}{3}$.

References

- [1] S. M. Carrol, "Lecture Notes on General Relativity", (1997), [<https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9712019.pdf>]
- [2] D. Baumann, "TASI Lectures on Inflation", (2012), [<https://arxiv.org/pdf/0907.5424.pdf>]
- [3] M. Postma, "Inflation", [<https://www.nikhef.nl/~mpostma/inflation.pdf>]
- [4] A. Guarino, "Lectures: Solutions in GR" [<https://www.adolfoguarino.com/notes.html>]
- [5] J. Heeck, "Introduction to Inflation", (2011)
- [6] A. Riotto. "Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations", (2017) [<https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210162>]
- [7] E.W. Kolb, M.S. Turner, "The Early Universe", Addison Wesley (1994).
- [8] Wikipedia "Inflation (cosmology)", (visitado 8/06/2021) [[https://en.wikipedia.org/wiki/Inflation_\(cosmology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Inflation_(cosmology))]
- [9] Wikipedia "Chronology of the universe" (visitado 14/09/2021) [https://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_the_universe]
- [10] A. Guarino, Apuntes: "Cosmological Perturbations and CMB" [<https://www.adolfoguarino.com/notes.html>]
- [11] W. Hu, "Wayne Hu's Tutorials" (visitado 28/09/2021) [<http://background.uchicago.edu/>]
- [12] Cornell University, "Planck Constraints on the tensor-to-scalar ratio" (visitado 01/10/2021) [<https://arxiv.org/abs/2010.01139>]
- [13] M. Pieroni, "Classification of inflationary models and constraints on fundamental physics", (2016)
- [14] J. Martin, C. Ringeval, V. Vennin, "Enciclopædia Inflationaris" [<https://arxiv.org/abs/1303.3787>] (2013)
- [15] O. Lahav, A.R. Liddle "Cosmological Parameters" [<https://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2019-rev-cosmological-parameters.pdf>] (2019)
- [16] Planck Collaboration "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters" [<https://arxiv.org/abs/1807.06209>] (2021)
- [17] NASA, "What is the Universe Made Of", (visitado 14/10/2021) [https://wmap.gsfc.nasa.gov/universe/uni_matter.html]
- [18] Wikipedia, "Principio antrópico" (visitado 15/10/2021) [https://es.wikipedia.org/wiki/Principio_antr%C3%B3pico]
- [19] A. Linde et. al. "Stationary Measure in the Multiverse" (2008) [<https://arxiv.org/abs/0812.0005>]

REFERENCES

- [20] Planck Collaboration, "*Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation*" (2017) [<https://arxiv.org/abs/1502.02114>]
- [21] Wikipedia "*Eternal inflation*" [https://en.wikipedia.org/wiki/Eternal_inflation] (visitado 10/11/2021)