



Universidad de Oviedo  
*Universidá d'Uviéu*  
*University of Oviedo*

Tesis Doctoral

# **Inspección de la planitud de carriles con técnicas basadas en visión por computador**

Presentada por

**Pedro Manso Bernal**

para la obtención del grado de

**Doctor por la Universidad de Oviedo**

(Programa de Doctorado en Ingeniería Informática)

Dirigida por:

**Dr. Daniel Fernando García Martínez**

**Dr. Rubén Usamentiaga Fernández**









## RESUMEN DEL CONTENIDO DE TESIS DOCTORAL

1.- Título de la Tesis	
Español: Inspección de la planitud de carriles con técnicas basadas en visión por computador	Inglés: Rail flatness inspection based on computer vision techniques
2.- Autor	
Nombre: Pedro Manso Bernal	DNI/Pasaporte/NIE:
Programa de Doctorado: Programa de Doctorado en Informática	
Órgano responsable: Centro Internacional de Postgrado de la Universidad de Oviedo	

### RESUMEN (en español)

La industria metalúrgica es cada vez más demandante de productos, en los cuales, la calidad de fabricación no pueda ser puesta en duda. Debido a esta necesidad, cada vez aparecen más organismos dedicados a la creación de normativas reguladoras. La finalidad de estos organismos es fijar unos estándares que garanticen unos mínimos de fiabilidad en la calidad de los productos fabricados.

Los carriles son un claro ejemplo de producto en el cual la calidad debe ser medida de forma rigurosa. Un fallo en la fabricación que no haya sido encontrado durante el proceso de control de la calidad puede poner en riesgo no solo la circulación, sino también la vida de las personas.

El control de la calidad no es fácil de realizar, puesto que implica llevar a cabo mediciones complejas con aparatos manuales. Los operarios encargados de realizar este proceso deben haber recibido una formación especializada en el uso de estos dispositivos y en la comprobación de todos los aspectos a medir.

Los criterios de calidad que debe cumplir un carril son muy exhaustivos y pasan, entre otros, por la comprobación de la forma del carril a lo largo de toda su longitud, defectos de planitud, defectos superficiales, etc. Debido a esto han aparecido multitud de sistemas automáticos basados, entre otras tecnologías, en visión por computador para comprobar y asegurar la calidad de los carriles. Estos sistemas, además de llevar a cabo la medición de la calidad del carril de forma eficiente y rápida, proporcionan una gran fiabilidad y evitan errores humanos durante el proceso.

En esta tesis se presenta una técnica novedosa, para medir la planitud de un carril de ferrocarril con gran precisión y en tiempo real mientras el carril está avanzando por la línea de fabricación.

El sistema propuesto permite medir, analizar y catalogar los carriles fabricados en base a su planitud, de tal forma que, si un carril no cumple con una normativa, como por ejemplo la europea, pueda ser sometido a un proceso para corregir la planitud. De igual forma, si un carril se clasifica como no apto, puede ser utilizado en casos donde no se requiera una planitud tan estricta o ser descartado.

Para ello se propone una arquitectura basada en el uso de múltiples sensores de triangulación láser distribuidos de manera que formen múltiples planos láser proyectados sobre el carril. La finalidad de esta arquitectura es mitigar los efectos de las vibraciones del carril y los ruidos de medición que afectan a las mediciones. Con todas estas medidas, se extraerá un perfil longitudinal de alturas para cada una de las dimensiones que una norma, como la EN-13674, describe como necesarias para llevar a cabo el control de la planitud del carril. La extracción de este perfil longitudinal se lleva a cabo mediante uno de los métodos descritos en esta tesis.

Posteriormente, utilizando los perfiles longitudinales de alturas se propone un método que utiliza reglas virtuales para medir la planitud del carril. Los operarios a la hora de realizar el control de la calidad de la planitud del carril, hacían uso de reglas físicas que iban apoyando



sobre toda la longitud de éste. El método propuesto simula esta operación manual. Una vez, se ha aplicado el método sobre el carril, se clasifica la planitud de éste acorde a la norma antes mencionada.

De este modo, esta tesis aporta el diseño y la evaluación de los diferentes métodos de medición y posterior clasificación de la planitud de los carriles, todo ello de acuerdo con una norma internacional, como la EN-13674. Las contribuciones presentes en esta tesis pueden ser utilizadas para mejorar y optimizar la detección de problemas de planitud de los carriles fabricados en una línea de producción.

### **RESUMEN (en inglés)**

The metallurgical industry is increasingly demanding products whose manufacturing quality cannot be questioned. Due to this need, more and more organizations dedicated to the creation of regulatory standards are appearing. The purpose of these organizations is to set standards that guarantee a minimum of reliability in the quality of manufactured products.

Rails are a good example of a product in which quality must be rigorously measured. A manufacturing flaw that has not been found during the quality assurance process can endanger not only railway infrastructure but also people's lives.

Quality assurance is not easy to perform since it involves carrying out complex measurements with manual devices. The operators in charge of performing this process must have received rigorous training in the use of these devices and in checking all aspects to be measured.

The quality criteria that each rail must fulfil are very exhaustive and include checking the rail shape along its entire length, looking for flatness defects, surface defects, etc. Therefore, a multitude of automatic systems based on computer vision, have been developed to check and ensure the quality of the rails. These systems, besides carrying out the rail quality measurement in an efficient and faster way, provide high reliability and can avoid human errors during the process.

This thesis presents a novel technique for measuring the rail flatness with a high accuracy and in real time while the rail is passing through the manufacturing system.

The proposed system allows measuring, analysing, and cataloguing the manufactured rails based on their flatness, so that if a rail does not comply with, for example European standards, it can be subjected to a process to correct its flatness. Similarly, if a rail is classified as non-compliant, it can be used in cases where it does not require such a strict flatness or be discarded.

For this purpose, a methodology based on the use of multiple laser triangulation sensors distributed in such a way that they form multiple laser planes projected on the rail is proposed. The purpose of this methodology is to mitigate the effects of rail vibrations and measurement noise affecting the measurements. With all these measurements, a longitudinal profile of heights will be extracted for each of the dimensions that a standard, such as EN-13674, describes as necessary to carry out the control of the flatness of the rail. The extraction of this longitudinal profile is carried out by one of the methods described in this thesis.

Subsequently, a method that uses the longitudinal profiles of heights generates virtual rulers. These rules are used then to measure the flatness of the rail. The operators involved in rail quality assurance, use physical rulers to assess the rail flatness in its entire length. The proposed method simulates this manual operation. Once the method has been applied on the rail, its flatness is classified according to the above-mentioned standard.

Thus, this thesis provides the design and evaluation of the different methods of measurement and subsequent classification of the flatness of the rails, all according to an international standard, like EN-13674. The contributions present in this thesis can be used to improve and optimize the flatness assessment of manufactured rails.



Universidad de Oviedo  
*Universidá d'Uviéu*  
*University of Oviedo*

**SR. PRESIDENTE DE LA COMISIÓN ACADÉMICA DEL PROGRAMA DE DOCTORADO  
EN INFORMÁTICA**



*Para mi pequeño vikingo  
Te quiero mucho Erik.*

*My mother told me, someday I would buy  
Galleys with good oars, sail to distant shores  
Stand up on the prow, noble barque I steer  
Steady course to the haven, hew many foe-men  
Hew many foe-men...*

EGIL'S SAGA - OLD VIKING CHANT

*Þat mælti mín móðir, at mér skyldi kaupa  
Fley ok fagnar árar, fara á brott með víkingum  
Standa upp í stafni, stýra dýrum knerri  
Halda svá til hafnar hoggva mann ok annan  
Hoggva mann ok annan...*

EGIL'S SAGA - OLD VIKING CHANT - ORIGINAL



# Agradecimientos

Hace ya tiempo que empecé el largo camino que concluye hoy con la escritura de estos agradecimientos, que pese a estar puestos al principio de la tesis, son lo último de ella que escribo. Desde que me matriculé en el doctorado muchas personas, en mayor o menor medida, me han ayudado a llegar a donde estoy ahora, bien fuese con diferentes puntos de vista, consejos o con palabra de ánimo. Por lo tanto, ahora con la tesis terminada me gustaría dar las gracias a todas las personas que han contribuido a que mi tesis haya llegado a buen puerto.

En primer lugar quiero dar las gracias a los incansables directores de esta tesis, como no podía ser de otra forma. Muchas gracias a Daniel F. García y Rubén Usamentiaga, sin ninguna duda, sin vosotros este trabajo hubiese sido imposible de llevar a cabo. Muchas gracias por todas las horas que me habéis dedicado, incluyendo fines de semana en más de una ocasión, muchas gracias por esas correcciones en tiempo récord y por toda la cantidad de paciencia que habéis demostrado tener para conmigo.

Siempre creí que publicar el agradecimiento hacia la mujer del autor era una cortesía debida, algo que debía hacerse, pero desde luego este no es mi caso. Vivir con una persona que esta cursando el doctorado no debe ser nada fácil, aguantar sermones sobre un tema que no conoces, levantar el ánimo cuando las cosas no salen como están previstas, etc. Sin embargo siempre has estado ahí, aguantando carros y carretas, como suele decirse. Tal y como solían decir los vikingos *Tu eres mi valquiria, y te seguiré a través de los nueve reinos y hasta la eternidad*. Muchas gracias Paloma Acuña.

Erik Manso, eres el mayor regalo que me ha dado la vida y la razón principal por la que dar las gracias a mi mujer. Aunque aun eres muy pequeño y no sabes por que tu padre no puede pasar tanto tiempo contigo como a el le gustaría, siempre que me ves me regalas una sonrisa que hace que todos los problemas se me olviden. Siempre me han dicho que hacer la tesis teniendo un hijo es muy difícil, yo no lo diría así, si no todo lo contrario. Sin tu cariño, llevar a cabo este trabajo no hubiera sido posible. Muchas gracias hijo.

En siguiente lugar, y no por ello menos importante, debo dar las gracias a mis padres, que desde pequeño siempre trataron de inculcarme un hábito de estudio, y que desde siempre son mi modelo a seguir, solo espero llegar a ser algún día

---

tan buenos padres y tan buenas personas como lo son ellos. Muchas gracias a mi hermana Laura Manso por ser la mejor hermana del mundo. Gracias también a Adrián Blanco, por cuidar tan bien de ella. A todos vosotros, muchas gracias por estar siempre ahí, de forma tan incondicional. Doy las gracias también al resto de mi familia, y en especial, a mis abuelos que aunque ya no estén entre nosotros, les hubiera gustado mucho ver este momento pero desgraciadamente no han podido, nunca os olvidaré. A todos, os quiero muchísimo.

Muchas gracias también a mi familia política, a Carlos Acuña y a Nieves Liste, por haber criado a la mujer excepcional que hoy es mi mujer, por ser tan buena familia como lo son mis padres. Gracias también a Alicia Acuña y Nieves Álvarez y al resto de mi familia política por haberme aceptado como uno más de vuestra familia.

Gracias también por todo el inestimable cariño y toda la ayuda que siempre recibo de ti Áurea García, no solo eres mi mejor amiga, si no que eres parte de mi familia. Siempre me has ayudado mucho en todo, no solo con temas de la tesis o con el inglés en las publicaciones. Gracias de corazón por todos esos paseos, esos tés... Se te echa muchísimo de menos.

Gracias a mis compañeros de universidad, Francisco G. Bulnes, Álvaro F. Millara y Pelayo Nuño, por esos momentos en el café en el aula norte y por toda vuestra ayuda.

Gracias a Juan Díez, que no solo es familia si no que también es un gran amigo y un muy buen compañero de trabajo, gracias por toda esa ayuda que me has dado en todos los aspectos, sin esperar nada a cambio. Como olvidar esas tardes de consola tan necesarias junto a Pablo Bernal y Carlos García, que tanto me han ayudado a despejar. Muchas gracias al resto de mis grandísimos amigos, Iván Enríquez, Carlos de la Calle, Iñigo Llaneza, Diego Sanfeliz, Ismael Iglesias, Victoria Rubio y Laila Farhang por ser tan geniales siempre.

Muchas gracias a mis compañeros y excompañeros de batalla en el trabajo, Juan Díez, Héctor González, Agustín Fernández, Jesús Vaquero, David Sánchez y Gumersindo Álvarez. Sin vosotros el día a día en el trabajo hubiera sido infinitamente más duro y sin duda muchísimo más aburrido.

No puedo olvidarme de dar las gracias por último, pero ni de lejos menos importante, a mis vecinos Antzane Cortázar y Roberto Cabrero, por esas conversaciones de escalera y por compartir esos momentos tan divertidos día a día, sin olvidarse de esas fotos de carriles que figuran en esta tesis.

De todo corazón, muchísimas gracias a todos.

# Tabla de contenido

<b>Listado de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Listado de tablas</b>	<b>XVII</b>
<b>Listado de algoritmos</b>	<b>1</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Análisis del estado del arte</b>	<b>5</b>
2.1 Historia y fabricación del carril . . . . .	5
2.1.1 Líneas de alta velocidad . . . . .	9
2.2 Normativa internacional . . . . .	13
2.2.1 Estándar europeo EN-13674 . . . . .	14
2.2.1.1 Definición de planitud según el estándar europeo	16
2.3 Revisión de tecnologías para la medición de planitud basadas en	
visión artificial . . . . .	21
2.4 Tecnologías para la medición de la calidad en productos de acero	
laminado . . . . .	22
2.5 Introducción al problema de la vibración . . . . .	24
2.6 Tecnologías existentes para la medición de la calidad en carriles .	26
2.7 Resumen y líneas de investigación pendientes . . . . .	30
<b>3 Arquitectura</b>	<b>33</b>
3.1 Introducción . . . . .	33
3.2 Arquitectura hardware simple. Un único plano láser. . . . .	33
3.2.1 Errores en la medición debidos a las vibraciones . . . . .	37
3.2.2 Errores en la medición debidos al ruido del sensor . . . . .	38
3.3 Arquitectura hardware propuesta. Múltiples planos láser . . . . .	41
3.4 Arquitectura software propuesta . . . . .	43
<b>4 Extracción de perfiles longitudinales de los carriles</b>	<b>47</b>
4.1 Introducción . . . . .	47
4.2 Extracción de los puntos $V$ y $H$ . . . . .	51
4.2.1 División del perfil del carril en primitivas del modelo . . . . .	51
4.2.2 Alineación de la nube de puntos al modelo del carril . . . . .	54
4.2.3 Extracción de las primitivas ajustadas de la cabeza del carril	56

4.2.4	Cálculo de $V$ en la primitiva ajustada $AHT$ . . . . .	57
4.2.5	Cálculo de $H$ en la primitiva ajustada $SHR$ . . . . .	58
4.3	Extracción de los perfiles longitudinales de alturas . . . . .	62
4.3.1	Definición del método . . . . .	62
4.3.1.1	Ejemplos sobre el método . . . . .	64
4.3.2	Constantes y variables del método . . . . .	66
4.3.2.1	Constantes y variables del método para el <i>Ejemplo de arquitectura equiespaciada</i> . . . . .	69
4.3.2.1.1	Matrices $M$ y $P$ en el periodo 1 . . . . .	70
4.3.2.1.2	Matrices $M$ y $P$ en el periodo 10 . . . . .	71
4.3.2.2	Constantes y variables del método para el <i>Ejemplo de arquitectura no equiespaciada</i> . . . . .	72
4.3.2.2.1	Matrices $M$ y $P$ en el periodo 1 . . . . .	74
4.3.2.2.2	Matrices $M$ y $P$ en el periodo 17 . . . . .	74
4.3.3	Planteamiento y resolución del problema . . . . .	75
4.3.3.1	Resolución del problema para el <i>Ejemplo de arquitectura equiespaciada</i> . . . . .	78
4.3.3.1.1	Periodo cuatro . . . . .	79
4.3.3.1.2	Periodo igual a siete . . . . .	80
4.3.3.2	Resolución del problema para el <i>Ejemplo de arquitectura no equiespaciada</i> . . . . .	82
4.3.3.3	Resolución del problema. Sistema de ecuaciones lineales . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Medición de planitud basada en reglas virtuales</b>	<b>85</b>
5.1	Introducción . . . . .	85
5.2	División de la longitud del carril en partes según el estándar <i>EN-13674</i> . . . . .	88
5.3	Posicionado de reglas virtuales . . . . .	90
5.3.1	Algoritmo de posicionado de reglas virtuales . . . . .	91
5.3.2	Filtrado de reglas virtuales . . . . .	95
5.3.2.1	Filtros que afectan a una sola regla virtual . . . . .	95
5.3.2.2	Filtros que afectan a una dos reglas virtuales . . . . .	96
5.3.3	Ejemplo de generación y filtrado de reglas virtuales . . . . .	97
5.4	Aplicación del método de acuerdo al estándar <i>EN-13674</i> . . . . .	107
5.5	Clasificación de acuerdo al estándar <i>EN-13674</i> . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>113</b>
6.1	Resultados de la generación de perfiles longitudinales de los carriles	113
6.1.1	Introducción . . . . .	113
6.1.2	Pruebas sobre la arquitectura con un único plano láser . . . . .	114

6.1.3	Comparación de las arquitecturas con único plano láser y con múltiples planos láser . . . . .	115
6.1.4	Pruebas realizadas sobre la arquitectura con múltiples planos láser . . . . .	118
6.1.4.1	Parámetros de la experimentación . . . . .	118
6.1.4.1.1	Número de sensores a utilizar . . . . .	118
6.1.4.1.2	Posición de los sensores en el sistema . . . . .	118
6.1.4.1.3	Carriles de prueba . . . . .	122
6.1.4.1.4	Tipo y nivel de las vibraciones que afectarán al carril de prueba . . . . .	122
6.1.4.1.5	Tipo y nivel de las vibraciones que afectarán al carril de prueba . . . . .	124
6.1.4.2	Resultados de la experimentación . . . . .	125
6.1.4.3	Desarrollo de la experimentación . . . . .	127
6.1.4.4	Obtención de la mejor posición de los cuatro sensores . . . . .	130
6.1.4.5	Obtención de la mejor posición de los tres sensores . . . . .	133
6.1.4.6	Pruebas sobre la distribución de cuatro sensores que menor error produce . . . . .	135
6.1.5	Tiempo de resolución del sistema de ecuaciones . . . . .	136
6.2	Resultados de generación de reglas virtuales para la medición de la planitud . . . . .	141
6.2.1	Introducción . . . . .	141
6.2.2	Comparación contra un carril de prueba con defecto senoidal en el que se varía el periodo . . . . .	141
6.2.2.1	Resultados de la prueba 1 . . . . .	145
6.2.2.2	Resultados de la prueba 2 . . . . .	145
6.2.3	Comparación contra un sistema de referencia industrial . . . . .	145
6.2.3.1	Definición del conjunto de prueba . . . . .	148
6.2.3.2	Comparación de reglas virtuales en el cuerpo del carril . . . . .	148
6.2.3.3	Comparación de la clasificación del cuerpo y los solapes del carril . . . . .	149
6.2.3.4	Comparación de la clasificación de los solapes del carril . . . . .	150
6.2.3.5	Comparación de la clasificación de los extremos del carril . . . . .	150
6.2.3.6	Diferencias entre el método propuesto y el método de referencia . . . . .	151
6.2.4	El tiempo de ejecución de las pruebas . . . . .	154

<b>7</b>	<b>Conclusión</b>	<b>157</b>
7.1	Objetivos alcanzados y aportación realizada . . . . .	157
7.2	Difusión de las aportaciones . . . . .	159
7.3	Líneas de investigación futuras . . . . .	160
<b>8</b>	<b>Anexos</b>	<b>163</b>
8.1	Evolución de las matrices $M$ y $P$ para el <i>Ejemplo de arquitectura equiespaciada</i> . . . . .	163
8.1.1	Periodo 1 . . . . .	163
8.1.2	Periodo 2 . . . . .	164
8.1.3	Periodo 3 . . . . .	165
8.1.4	Periodo 4 . . . . .	166
8.1.5	Periodo 5 . . . . .	167
8.1.6	Periodo 6 . . . . .	168
8.1.7	Periodo 7 . . . . .	169
8.1.8	Periodo 8 . . . . .	170
8.1.9	Periodo 9 . . . . .	171
8.1.10	Periodo 10 . . . . .	172
8.2	Evolución de las matrices $M$ y $P$ para el <i>Ejemplo de arquitectura no equiespaciada</i> . . . . .	173
8.2.1	Periodo 1 . . . . .	173
8.2.2	Periodo 2 . . . . .	174
8.2.3	Periodo 3 . . . . .	175
8.2.4	Periodo 4 . . . . .	176
8.2.5	Periodo 5 . . . . .	176
8.2.6	Periodo 6 . . . . .	177
8.2.7	Periodo 7 . . . . .	179
8.2.8	Periodo 8 . . . . .	180
8.2.9	Periodo 9 . . . . .	180
8.2.10	Periodo 10 . . . . .	182
8.2.11	Periodo 11 . . . . .	184
8.2.12	Periodo 12 . . . . .	185
8.2.13	Periodo 13 . . . . .	186
8.2.14	Periodo 14 . . . . .	186
8.2.15	Periodo 15 . . . . .	187
8.2.16	Periodo 16 . . . . .	189
8.2.17	Periodo 17 . . . . .	190
8.3	Resolución del problema para el <i>Ejemplo de arquitectura equiespaciada</i>	192
8.3.1	Periodo 4 . . . . .	193
8.3.1.1	Primera combinación . . . . .	193
8.3.1.2	Segunda combinación . . . . .	194
8.3.1.3	Tercera combinación . . . . .	194

8.3.1.4	Cuarta combinación . . . . .	195
8.3.2	Periodo 5 . . . . .	196
8.3.2.1	Primera combinación . . . . .	196
8.3.2.2	Segunda combinación . . . . .	197
8.3.2.3	Tercera combinación . . . . .	198
8.3.2.4	Cuarta combinación . . . . .	198
8.3.3	Periodo 6 . . . . .	199
8.3.3.1	Primera combinación . . . . .	199
8.3.3.2	Segunda combinación . . . . .	200
8.3.3.3	Tercera combinación . . . . .	201
8.3.3.4	Cuarta combinación . . . . .	202
8.3.4	Periodo 7 . . . . .	202
8.3.4.1	Primera combinación . . . . .	203
8.3.4.2	Segunda combinación . . . . .	203
8.3.4.3	Tercera combinación . . . . .	204
8.3.4.4	Cuarta combinación . . . . .	205
8.3.5	Matrices $A$ , $x$ y $B$ . . . . .	206
8.4	Resolución del problema para el <i>Ejemplo de arquitectura no equies-</i> <i>paciada</i> . . . . .	207
8.4.1	Periodo 7 . . . . .	208
8.4.1.1	Primera combinación . . . . .	208
8.4.1.2	Segunda combinación . . . . .	209
8.4.1.3	Tercera combinación . . . . .	210
8.4.1.4	Cuarta combinación . . . . .	211
8.4.2	Periodo 8 . . . . .	212
8.4.2.1	Primera combinación . . . . .	212
8.4.2.2	Segunda combinación . . . . .	213
8.4.2.3	Tercera combinación . . . . .	214
8.4.2.4	Cuarta combinación . . . . .	215
8.4.3	Periodo 9 . . . . .	216
8.4.3.1	Primera combinación . . . . .	216
8.4.3.2	Segunda combinación . . . . .	217
8.4.3.3	Tercera combinación . . . . .	218
8.4.3.4	Cuarta combinación . . . . .	219
8.4.4	Periodo 10 . . . . .	220
8.4.4.1	Primera combinación . . . . .	220
8.4.4.2	Segunda combinación . . . . .	221
8.4.4.3	Tercera combinación . . . . .	222
8.4.4.4	Cuarta combinación . . . . .	223
8.4.5	Periodo 11 . . . . .	224
8.4.5.1	Primera combinación . . . . .	224
8.4.5.2	Segunda combinación . . . . .	225

*Tabla de contenido*

---

8.4.5.3	Tercera combinación . . . . .	226
8.4.5.4	Cuarta combinación . . . . .	227
8.4.6	Matrices $A$ , $x$ y $B$ . . . . .	228
<b>Bibliografía</b>		<b>233</b>

## Listado de figuras

2.1	Composición de la vía férrea donde se puede observar los carriles, las traviesas y el balasto. . . . .	7
2.2	Diferentes tipos de perfiles de carril. . . . .	8
2.3	Tipos de perfiles de carril para tren. . . . .	8
2.4	Máquina bateadora compactando el balasto debajo en las traviesas de la vía férrea . . . . .	10
2.5	Fotografía del tren <i>ElettroTreno ETR 200</i> en el depósito de <i>Pistoia</i> en Italia. Imagen extraída de [7]. . . . .	11
2.6	Ranking internacional de alta velocidad en 2019, vistos en forma de gráfico. Datos extraídos de [8]. . . . .	12
2.7	Carril tipo <i>Vignole</i> . . . . .	15
2.8	Ejemplos de los tipos de carril dentro de su uso en un cruce. . . . .	16
2.9	Partes del carril según se indica en la norma EN-13674. Imagen extraída de [10]. . . . .	17
2.10	Puntos donde se debe medir la planitud según la norma EN-13674. Imagen extraída de [10]. . . . .	17
2.11	Extracción de los perfiles de planitud . . . . .	18
2.12	Medición de planitud en el cuerpo del carril según la norma EN-13674. . . . .	19
2.13	Medición de planitud vertical en el extremo del carril según la norma EN-13674. . . . .	20
2.14	Medición de planitud horizontal en el extremo del carril según la norma EN-13674. . . . .	20
2.15	Problema de planitud en un carril. . . . .	23
2.16	Diferentes tipos de defectos por desgaste del carril. Imágenes extraídas de [35]. ©2017, IEEE. . . . .	27
2.17	Método de medición de planitud propuesto en [55]. Figura extraída de dicho artículo. ©2011, IEEE. . . . .	29
3.1	Arquitectura al inicio de la tesis . . . . .	34
3.2	Selección de la nube de puntos del perfil central . . . . .	35
3.3	Alineación completa de la nube de puntos con el modelo del carril . . . . .	36
3.4	Alineación respecto a la base y lateral derecho del patín del modelo del carril . . . . .	36

3.5	Representación de una vibración en un carril plano. (a), (c), (e) y (g) Vibración capturada por el sistema. (b), (d), (f) y (h) Extracción de $V$ y $H$ . . . . .	39
3.6	Representación gráfica de una vibración interpretada como un problema de planitud . . . . .	40
3.7	Ruido de medición. (a) Ruido de medición alto. (b) Ruido de medición bajo. . . . .	41
3.8	Diagrama de la arquitectura hardware del sistema. . . . .	42
3.9	Efecto de la vibración . . . . .	42
3.10	Diagrama de la arquitectura software del sistema. . . . .	44
4.1	Puntos a medir. $H$ y $V$ . . . . .	47
4.2	Puntos medidos a lo largo del carril . . . . .	48
4.3	Raíl, sensores y distancias . . . . .	48
4.4	Esquema de trabajo del sistema . . . . .	50
4.5	Perfil $60E1$ de carril definido en el estándar EN-13674. (a) Definición del perfil en el estándar, imagen extraída de [9]. (b) Representación del perfil del carril en el sistema. . . . .	51
4.6	Primitivas del modelo del perfil del carril $60E1$ . . . . .	52
4.7	Alineación de un perfil del carril . . . . .	55
4.8	<i>Envoltorio</i> de una primitiva del modelo . . . . .	56
4.9	Ajuste de nubes de puntos a primitivas del modelo. (a) Muestra todas las primitivas que se deben extraer de la nube de puntos. (b) Muestra una circunferencia y una línea con sus respectivas nubes puntos. . . . .	59
4.10	Cálculo de la línea de la caché del carril para el cálculo de $V$ . . . . .	60
4.11	Cálculo de $V$ . . . . .	60
4.12	Cálculo de la línea de la caché del carril para el cálculo de $H$ . . . . .	61
4.13	Cálculo de $H$ . . . . .	61
4.14	Ejemplo de cuatro sensores cogidos de tres en tres con sus pesos o ratios. . . . .	63
4.15	Diagrama del <i>Ejemplo de arquitectura equiespaciada</i> . . . . .	65
4.16	Diagrama del <i>Ejemplo de arquitectura no equiespaciada</i> . . . . .	65
4.17	Representación de la matriz de <i>medidas</i> , $M$ . . . . .	68
4.18	Evolución del sistema y del carril. Periodo = 1 . . . . .	70
4.19	Evolución del sistema y del carril. Periodo = 10 . . . . .	72
4.20	Evolución del sistema y del carril. Periodo = 1 . . . . .	74
4.21	Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 17 . . . . .	74
4.22	Medición del carril en dos periodos de tiempo diferentes cuando todos los sensores miden a la vez una parte diferente del carril. (a) Periodo 4. (b) Periodo 5. . . . .	77

5.1	Perfiles de planitud longitudinales del carril. . . . .	85
5.2	Medición de la planitud utilizando reglas físicas. . . . .	86
5.3	Operarios llevando a cabo medición de la planitud. Imagen extraída de [32]. ©2014, IEEE. . . . .	87
5.4	Esquema de trabajo del sistema . . . . .	88
5.5	Partes del carril según se indica en la norma EN-13674. . . . .	89
5.6	Nombrado de las diferentes partes del carril. . . . .	89
5.7	Medición de la planitud utilizando reglas virtuales. . . . .	90
5.8	Algoritmo de reglas virtuales. . . . .	99
5.9	Regla virtual inválida. . . . .	100
5.10	Algoritmo de reglas virtuales. Parámetros de entrada. . . . .	100
5.11	Algoritmo de reglas virtuales. Extracción del subconjunto de puntos de apoyo posibles. . . . .	100
5.12	Algoritmo de reglas virtuales. Primer método de posicionamiento. Movimiento de puntos de apoyo al centro del subconjunto. . . . .	101
5.13	Algoritmo de reglas virtuales. Primer método de posicionamiento. Búsqueda del punto $P0$ de apoyo más favorable. . . . .	101
5.14	Algoritmo de reglas virtuales. Primer método de posicionamiento. Búsqueda del punto $P1$ de apoyo más favorable. . . . .	102
5.15	Algoritmo de reglas virtuales. Primer método de posicionamiento. Obtención de la regla virtual. . . . .	102
5.16	Algoritmo de reglas virtuales. Segundo método de posicionamiento. Obtención del punto $P1$ . . . . .	103
5.17	Algoritmo de reglas virtuales. Obtención de $d$ para la regla virtual generada. . . . .	103
5.18	Algoritmo de reglas virtuales. Perfil que no genera reglas virtuales válidas. . . . .	104
5.19	Algoritmo de reglas virtuales. Siguiente iteración del algoritmo. . . . .	104
5.20	Algoritmo de reglas virtuales. Reglas virtuales generadas. . . . .	104
5.21	Filtro de una regla. Valle poco profundo. . . . .	105
5.22	Filtro de una regla. Valle estrecho. . . . .	105
5.23	Filtro de dos reglas. Poca separación en $P0$ . . . . .	105
5.24	Filtro de dos reglas. Poca separación en $P1$ . . . . .	106
5.25	Filtro de dos reglas. Poca separación en $PM$ . . . . .	106
5.26	Ejemplo amplio de generación de reglas virtuales de $1.5 m$ . . . . .	106
5.27	Filtrado de las reglas virtuales generadas. . . . .	106
5.28	Medición de los extremos del carril para la dimensión vertical. Parámetros $e$ y $F$ . . . . .	107
6.1	Resultado de aplicar el método con un único plano de medición para eliminar la vibración . . . . .	114

6.2	Gráfica de barras de error absoluto medio generado con la arquitectura inicial . . . . .	116
6.3	Vibración frente al problema de planitud cuando se capturan imágenes con múltiple sensores formando un único plano láser . . . .	116
6.4	Posibilidad de mitigación de las vibraciones con los sensores dispuestos sobre la longitud del carril . . . . .	117
6.5	Vibración de tipo senoidal . . . . .	123
6.6	Vibración de tipo rebotes . . . . .	123
6.7	Vibración de tipo escalonado . . . . .	124
6.8	Vibración de tipo escalonado . . . . .	125
6.9	Gráfica de las pruebas sobre las posiciones de los sensores descritas en la sección 6.1.4.1.2 con el ruido de medición <i>Gaussiano 1</i> . . . .	128
6.10	Gráfica de las pruebas sobre las posiciones de los sensores descritas en la sección 6.1.4.1.2 con el ruido de medición <i>Gaussiano 2</i> . . . .	129
6.11	Diagrama de calor para la distribución de cuatro sensores a lo largo del sistema. . . . .	131
6.12	Diagrama de calor para la distribución de cuatro sensores a lo largo del sistema cuando el último sensor está situado en la posición 29. . . . .	133
6.13	Diagrama de barras para la distribución de tres sensores a lo largo del sistema cuando el último sensor está situado en la posición 29. . . . .	134
6.14	Error absoluto medio para cada una de las ejecuciones sobre el raíl de prueba. . . . .	137
6.15	Tiempo de resolución del sistema de ecuaciones lineales para un carril de 70 metros, usando diferentes tecnologías. . . . .	138
6.16	Modulación del periodo del seno para la modificación del valle generado. . . . .	142
6.17	Alteración del periodo de la función seno. . . . .	144
6.18	. . . . .	145
6.19	Representación gráfica de la ecuación 6.6. . . . .	145
6.20	Diferencias debidas a problemas tangenciales. . . . .	152
6.21	Diferencias por existir dos reglas midiendo un valle largo en diferentes puntos. . . . .	153
6.22	Diferencias debidas a no poder calcular $e$ en el extremo del carril. . . . .	153
6.23	Carril con defecto en el último punto de medición. . . . .	154
6.24	Diagrama de frecuencia acumulada en el tiempo de medición de la planitud de cada carril. . . . .	155
8.1	Evolución del sistema y del carril. Periodo = 1 . . . . .	163
8.2	Evolución del sistema y del carril. Periodo = 2 . . . . .	164
8.3	Evolución del sistema y del carril. Periodo = 3 . . . . .	165
8.4	Evolución del sistema y del carril. Periodo = 4 . . . . .	166
8.5	Evolución del sistema y del carril. Periodo = 5 . . . . .	167

8.6 Evolución del sistema y del carril. Periodo = 6 . . . . .	168
8.7 Evolución del sistema y del carril. Periodo = 7 . . . . .	169
8.8 Evolución del sistema y del carril. Periodo = 8 . . . . .	170
8.9 Evolución del sistema y del carril. Periodo = 9 . . . . .	171
8.10 Evolución del sistema y del carril. Periodo = 10 . . . . .	172
8.11 Evolución del sistema y del carril. Periodo = 1 . . . . .	173
8.12 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 2 . . . . .	174
8.13 Evolución del sistema y del carril. Periodo = 3 . . . . .	176
8.14 Evolución del sistema y del carril. Periodo = 4 . . . . .	176
8.15 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 5 . . . . .	178
8.16 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 6 . . . . .	178
8.17 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 7 . . . . .	180
8.18 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 8 . . . . .	181
8.19 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 9 . . . . .	182
8.20 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 10 . . . . .	183
8.21 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 11 . . . . .	184
8.22 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 12 . . . . .	186
8.23 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 13 . . . . .	186
8.24 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 14 . . . . .	188
8.25 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 15 . . . . .	188
8.26 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 16 . . . . .	190
8.27 Evolución de la matriz $M$ . Periodo = 17 . . . . .	191



## Listado de tablas

2.1	Ranking internacional de alta velocidad en 2019. Datos extraídos de [8]. . . . .	11
2.2	Tabla para clasificar la calidad de la planitud de los carriles de tren según la norma EN-13674. . . . .	19
4.1	Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 1 . . . . .	71
4.2	Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 1 . . . . .	71
4.3	Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 10 . . . . .	72
4.4	Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 10 . . . . .	72
4.5	Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 1 . . . . .	74
4.6	Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 1 . . . . .	75
4.7	Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 17 . . . . .	75
4.8	Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 17 . . . . .	76
5.1	Relación de parámetros de la norma EN-13674 . . . . .	108
5.2	Clasificación de la calidad de la planitud según el estándar EN-13674. . . . .	110
5.3	Clasificación de la planitud de un carril . . . . .	111
6.1	Error absoluto medio generado con la arquitectura inicial . . . . .	115
6.2	Posiciones de los sensores a utilizar durante la experimentación del método descrito en el capítulo 4 . . . . .	121
6.3	Carriles de prueba a utilizar durante la experimentación del método descrito en el capítulo 4 . . . . .	121
6.4	Vibraciones y ruidos de medición a utilizar durante la experimentación del método descrito en el capítulo 4 . . . . .	126
6.5	Pruebas sobre las posiciones de los sensores descritas en la sección 6.1.4.1.2 con el ruido de medición <i>Gaussiano 1</i> . . . . .	139
6.6	Pruebas sobre las posiciones de los sensores descritas en la sección 6.1.4.1.2 con el ruido de medición <i>Gaussiano 2</i> . . . . .	140
6.7	Pruebas sobre el método visto en el capítulo 5. . . . .	145
6.8	Resultados de la prueba 1 comparados contra los valores obtenidos mediante (6.6). . . . .	146
6.9	Resultados de la prueba 2 comparados contra los valores obtenidos mediante (6.6). . . . .	147

6.10 Comparación de las reglas virtuales del cuerpo de los carriles de prueba generadas con ambos métodos . . . . .	149
6.11 Resultado de la clasificación de los cuerpos en los carriles de prueba	150
6.12 Resultado de la clasificación de los solapes en los carriles de prueba	150
6.13 Resultado de la clasificación de los extremos en los carriles de prueba	151
8.1 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 1 . . . . .	163
8.2 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 1 . . . . .	164
8.3 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 2 . . . . .	164
8.4 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 2 . . . . .	165
8.5 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 3 . . . . .	165
8.6 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 3 . . . . .	166
8.7 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 4 . . . . .	166
8.8 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 4 . . . . .	167
8.9 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 5 . . . . .	167
8.10 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 5 . . . . .	168
8.11 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 6 . . . . .	168
8.12 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 6 . . . . .	169
8.13 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 7 . . . . .	169
8.14 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 7 . . . . .	170
8.15 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 8 . . . . .	170
8.16 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 8 . . . . .	171
8.17 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 9 . . . . .	171
8.18 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 9 . . . . .	172
8.19 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 10 . . . . .	172
8.20 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 10 . . . . .	173
8.21 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 1 . . . . .	173
8.22 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 1 . . . . .	174
8.23 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 2 . . . . .	175
8.24 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 2 . . . . .	175
8.25 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 3 . . . . .	176
8.26 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 3 . . . . .	177
8.27 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 4 . . . . .	177
8.28 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 4 . . . . .	178
8.29 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 5 . . . . .	178
8.30 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 5 . . . . .	179
8.31 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 6 . . . . .	179
8.32 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 6 . . . . .	180
8.33 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 7 . . . . .	181
8.34 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 7 . . . . .	181
8.35 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 8 . . . . .	181
8.36 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 8 . . . . .	182

8.37 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 9 . . . . .	183
8.38 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 9 . . . . .	183
8.39 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 10 . . . . .	183
8.40 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 10 . . . . .	184
8.41 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 11 . . . . .	185
8.42 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 11 . . . . .	185
8.43 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 12 . . . . .	186
8.44 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 12 . . . . .	187
8.45 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 13 . . . . .	187
8.46 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 13 . . . . .	188
8.47 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 14 . . . . .	188
8.48 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 14 . . . . .	189
8.49 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 15 . . . . .	189
8.50 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 15 . . . . .	190
8.51 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 16 . . . . .	191
8.52 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 16 . . . . .	191
8.53 Evolución de la matriz $M$ . <i>Periodo</i> = 17 . . . . .	191
8.54 Evolución de la matriz $P$ . <i>Periodo</i> = 17 . . . . .	192



# Capítulo 1

## Introducción

La industria en la actualidad es cada vez más demandante de productos en los cuales la calidad de fabricación no pueda ser puesta en duda. Debido a esta necesidad cada vez aparecen más organismos dedicados a la creación de normativa reguladora. Estos organismos no son otros que las entidades de estandarización, tanto nacionales como internacionales. La finalidad de estas organizaciones es asegurar la calidad de todos los productos que así lo deseen.

Las organizaciones encargadas de realizar los estándares para los productos deben analizar el uso que se les va a dar a estos y definir una serie de aspectos que, posteriormente, las empresas deben asegurarse de cumplir si desean obtener el certificado de calidad pertinente. Estos requisitos deben fijar niveles de calidad para cada uno de los aspectos fundamentales de uso del producto.

La necesidad de las empresas de cumplir con los estándares creados por estas organizaciones puede clasificarse en dos tipos: cumplir con una calidad requerida para que dichos productos puedan ser usados sin peligro para actividades críticas; o hacer ver al consumidor que el producto fabricado posee una gran calidad para destacar así frente a posibles competidores.

La industria metalúrgica es uno de los muchos ejemplos de industria que necesita cumplir estos estándares de calidad para que sus productos puedan ser usados en actividades críticas, o de lo contrario una empresa que no siguiera estas directrices de calidad, no sería capaz de competir contra las que sí lo hacen. El caso de carriles de tren es un claro ejemplo de producto en el cual la calidad debe ser medida de forma rigurosa, puesto que un fallo en la fabricación y que no haya sido encontrado durante la medición de calidad puede poner en riesgo, no solo la circulación sino la vida de las personas. Con esta finalidad multitud de estándares internacionales han aparecido, como son, por ejemplo: La Euro Norma *EN-13674*, que estandariza los carriles usados en todos los países de la Unión Europea; la norma *AREMA* americana que estandariza los carriles en América; la norma rusa *GOST R 51685-2000* que hace lo propio para el uso de carriles en Rusia; o la norma generalista *UIC-860* que pro-

porciona un conjunto de especificaciones sobre calidad de construcción de los carriles.

El control de la calidad no es fácil de realizar, puesto que implica llevar a cabo mediciones complejas con aparatos manuales. Los operarios encargados de realizar este proceso deben haber recibido una formación especializada en el uso de estos dispositivos y en la comprobación de todos los aspectos a medir.

Los criterios de calidad que debe cumplir un carril son muy exhaustivos y pasan, entre otros, por la comprobación de la forma del carril a lo largo de toda su longitud, defectos de planitud, defectos superficiales, etc. El trabajo [1] describe en profundidad todos los defectos a buscar durante el análisis de la calidad de los carriles.

Debido a esto han aparecido multitud de sistemas automáticos basados, entre otras tecnologías, en visión por computador para comprobar y asegurar la calidad de los carriles. Estos sistemas, además de llevar a cabo la medición de la calidad del carril de forma más eficiente y rápida, proporcionan una gran fiabilidad y evitan errores humanos durante el proceso. Un ejemplo de comprobación automática de la forma del carril, mediante el uso de un sistema de visión artificial que mide la forma del carril durante toda su longitud se puede ver en [2].

Generalmente, la medición de la calidad de los productos fabricados se comprueba al final de la línea de producción de los mismos, lo cual permite que dichos productos no lleguen sin ser comprobados a los clientes finales. Además, la medición debe realizarse en entornos de fabricación que son hostiles, en los cuales los sistemas de visión por computador sufren problemas de vibraciones, suciedad, etc. Por otra parte, existe también la necesidad de realizar todas las mediciones oportunas antes de que el siguiente carril de la producción en cadena llegue al sistema para ser medido, es decir, se debe realizar las mediciones necesarias en tiempo real.

En esta tesis se describe un sistema novedoso capaz de medir la planitud de un carril de tren con gran precisión y en tiempo real, es decir, mientras el carril está avanzando por el tren de fabricación del mismo. Este sistema permite medir, analizar y catalogar los carriles de tren fabricados en base a la planitud de los mismos, de tal forma que si un carril no cumple con la normativa europea pueda ser sometido a un proceso para corregir su planitud, enviado para un uso que no requiera una planitud tan estricta o, si no se dan ninguna de las dos condiciones anteriores, descartado.

Otro de los problemas fundamentales que se afrontan en esta tesis, más allá del comentado anteriormente, es la mitigación de las vibraciones que se producen durante la circulación del carril por el tren de fabricación y que, de no eliminarse, falsearían las mediciones de planitud del mismo. Esto se logra usando un sistema de cámaras y láseres redundantes, que permiten reducir el efecto de las vibraciones.

---

En este documento se analizará el estado del arte actual, evaluando tecnologías y algoritmos que realicen procesos similares a los descritos, bien sea sobre carriles u otros productos largos, como pueden ser las planchas de acero. Esto se puede ver en el capítulo 2. Posteriormente se describirá la arquitectura, tanto física como lógica, del sistema que se va a estudiar, así como las posibles variaciones del mismo. Esto se describe en el capítulo 3. A continuación, se describen las partes fundamentales del método, en los capítulos 4 y 5. En el capítulo 6 se muestran resultados exhaustivos de llevar a cabo una serie de pruebas en los métodos propuestos en los capítulos anteriores. En último lugar, en el capítulo 7, se exponen las conclusiones.



# Capítulo 2

## Análisis del estado del arte

Las técnicas basadas en visión por computador son utilizadas hoy en día en multitud de aspectos relacionados con la comprobación de la calidad de los productos fabricados. En este capítulo se analiza en profundidad el estado del arte de estas técnicas. Con la finalidad de poner en contexto este trabajo, este capítulo se compone de los siguientes apartados:

- Historia y fabricación del carril.
- Normativa internacional.
- Revisión de tecnologías para la medición de planitud basadas en visión artificial.
- Tecnologías para la medición de la calidad en productos de acero laminado.
- Introducción al problema de la vibración.
- Tecnologías existentes para la medición de la calidad en carriles
- Conclusiones.

En estas secciones se irá adentrando poco a poco desde la historia de los carriles de tren, hasta la medición de la planitud y otros factores que componen la comprobación de la calidad de los carriles tren, pasando por productos de acero y productos largos, que son dos características fundamentales de los carriles.

### 2.1. Historia y fabricación del carril

La historia de los carriles de tren comienza muchos siglos atrás, cuando todavía no eran fabricados en acero como hoy en día, y desde luego no eran necesarios todos los controles de calidad que existen en la actualidad.

Los primeros carriles que sirvieron de guía para el transporte de mercancías datan del siglo VI a.c, y constituía una línea de transporte de tres kilómetros de largo que seguía el camino de Diolkos (camino en la antigua Grecia que unía el golfo Corinto

y el golfo Sarónico). Estos carriles estaban hechos de madera y servían para el transporte de botes sobre plataformas móviles de un mar a otro y la tracción de estas plataformas era el empuje de esclavos. Esta línea se mantuvo activa durante 600 años.

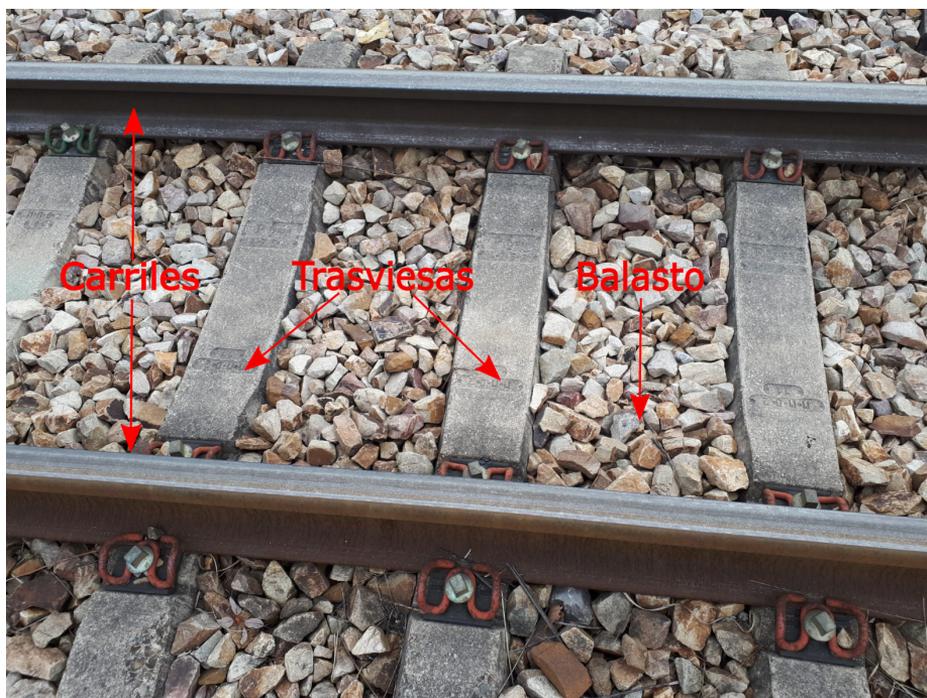
Varios siglos después, concretamente en el año 1515, se mandó construir un funicular en el castillo de Hohensalzburg en Austria, llamado *Reisszug*. Aquí se utilizaban de nuevo carriles de madera, pero esta vez impulsados por un sistema de poleas y cuerda de cáñamo que eran accionados por fuerza humana o animal. Este funicular sigue activo hoy en día, aunque obviamente ya no está accionado por fuerza animal o humana, sino por maquinaria moderna, y está hecho con carriles de acero.

Es a partir del siglo XVI cuando las líneas de vía estrecha empiezan a utilizarse en minas para la extracción del mineral de las mismas. Estas líneas iban desde las minas hasta los puntos donde el mineral se transportaba, o bien en carros, o bien en barcos. La necesidad de hacer que estas líneas de transporte de materias primas desde minas hasta el punto de distribución final fuera más durable, es decir, construida con un material que soportase mejor las inclemencias meteorológicas como el paso del tiempo y el peso que soportaban, hizo que se empezaran a utilizar carriles de hierro [3].

La necesidad de carriles con una mejor calidad de fabricación se incrementa en el año 1769 cuando James Watt patenta la primera máquina a vapor, y es por esto por lo que en el año 1768 se construye el primer ferrocarril propiamente dicho, que circulaba por carriles hechos de cuerpo de madera pero cubiertos por una chapa. Finalmente es en el año 1790 cuando se construye el primer carril entero de acero, pero no es hasta el año 1850 cuando se deja la madera como componente principal de los carriles para pasar a ser de acero.

Los carriles que conforman la vía férrea están separados una distancia fija, que además es muy importante que sea siempre igual durante toda su longitud. Para garantizar esto y para evitar que los carriles se muevan con el paso de los ferrocarriles o cualquier otro elemento que use estas vías, se utilizan las traviesas. Las traviesas son los elementos fundamentales que no solo mantienen unidos a los carriles sino que también transmiten el peso al balasto donde están colocadas. Los materiales de construcción de estas traviesas son variados, y pueden ser de madera, hormigón, acero, plásticos o caucho. En la figura 2.1 se puede observar una vía férrea compuesta por dos carriles de acero, traviesas de madera y el balasto que lo soporta todo, al que se le transmite el peso de toda la instalación así como del tráfico que circula por esta vía.

Por otra parte, los ferrocarriles no es la única tecnología donde se utilizan los carriles. Estos se pueden usar también en tranvías para transporte interurbano o como soporte para grúas. Dependiendo de la finalidad que se le va a dar al carril de

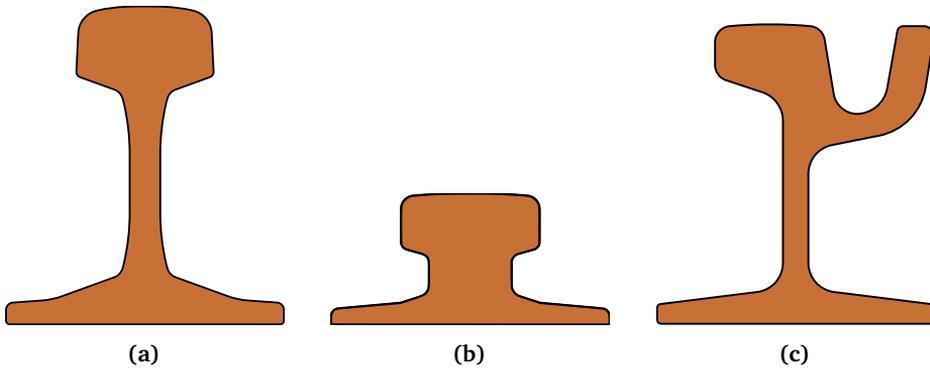


**Figura 2.1:** Composición de la vía férrea donde se puede observar los carriles, las traviesas y el balasto.

tren se usa un tipo de perfil u otro, siendo un perfil la forma de carril a lo largo de toda su longitud.

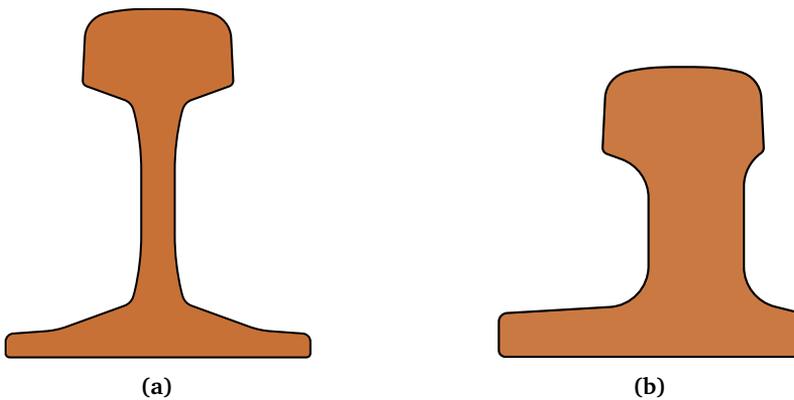
En la figura 2.2 se pueden observar distintos carriles dependiendo del uso que se les vaya a dar. El perfil del carril que se puede ver en la subfigura 6.16a, llamado *60 E1*, es un carril simétrico muy utilizado en la industria ferroviaria. El perfil del carril que se puede ver en la subfigura 6.16b, llamado *A 100*, es un perfil similar al anterior pero más achatado, que se suele utilizar para grúas. Por último, el perfil del carril que se puede ver en la subfigura 6.16d, llamado *35 GP*, es un perfil ranurado, comúnmente utilizado como carril para tranvías.

Por otra parte, los carriles de tren se pueden dividir en dos grandes grupos, dependiendo de si estos son o no simétricos respecto a su eje vertical. En la figura 2.3 se puede observar un carril simétrico (2.3a) y un carril asimétrico (2.3b). Los carriles simétricos se utilizan durante el trazado de la vía férrea y los carriles



**Figura 2.2:** Diferentes tipos de perfiles de carril.

asimétricos se utilizan sobre todo en los desvíos hacia otras vías, lo que se conoce como cambio de agujas.



**Figura 2.3:** Tipos de perfiles de carril para tren.

La medición de la calidad es un punto clave que se debe realizar al final del proceso de fabricación de los mismos. Esto se debe a que un carril con un problema de fabricación no detectado en este momento, instalado en una línea que necesite grandes prestaciones, como puede ser una línea de alta velocidad, puede ocasionar un descarrilamiento del tren. Este descarrilamiento, además del obvio problema circulatorio, puede ocasionar un elevado coste en vidas humanas.

La necesidad de mejora en la calidad del producto final en los carriles de tren

ha liderado multitud de investigaciones. En el caso de la industria ferroviaria japonesa, en [4] se detallan una serie de mejoras que se han ido realizando para mejorar la seguridad de los trenes de alta velocidad. Estas mejoras pasan por comprobar aspectos como la precisión dimensional, la planitud, la resistencia al desgaste, la resistencia a la fatiga por contacto, etc. Tanto es así que en [5] se estudia el incremento de la fatiga que sufren los carriles debido al aumento de densidad del tráfico ferroviario, el aumento de la carga de los trenes y la prolongación de la vida útil de los carriles, y propone métodos para mejorar los programas de inspección de la calidad de los carriles instalados en las vías férreas.

La calidad en la construcción de los carriles de tren es una parte fundamental para la seguridad del tráfico ferroviario, pero no es el único aspecto. El artículo [6] estudia e identifica los parámetros necesarios para medir la calidad de las traviesas utilizadas y su sujeción en el balasto. El proceso de añadir balasto debajo de las traviesas para que queden bien sujetas y no genere problemas en la sujeción del carril se conoce como *bateo*. En este artículo se estudia de forma teórica la calidad del bateo realizado por distinta maquinaria, y mediante estos resultados se desarrolla una metodología de garantía y control de calidad para las operaciones de reparación y mantenimiento de vías férreas. La figura 2.4 muestra una máquina bateadora haciendo mantenimiento del balasto en las traviesas de la vía férrea. Este proceso puede realizarse de forma automática, mediante la máquina vista en la figura 2.4 o de forma manual usando herramientas llamadas *bates*.

### 2.1.1. Líneas de alta velocidad

Las exigencias a los carriles de tren no hacen más que aumentar, cuando en el año 1939 se presenta el primer ferrocarril de alta velocidad, cerca de Milán, Italia. Este ferrocarril era capaz de alcanzar velocidades de 204 km/h, récord hasta la fecha. Este tren era el conocido como *ElettroTreno ETR 200*. Una imagen de este tren se puede ver en la figura 2.5. En la actualidad la alta velocidad está presente en la mayor parte de los países del mundo.

Los trenes de alta velocidad son aquellos que circulan a una velocidad igual o superior a los 200 km/h. El país del mundo con más kilómetros de red ferroviaria de alta velocidad es China, que en 2019 poseía 31043 km, seguido por Japón con 3041 km y España con 2852 km. En cuanto a velocidades se refiere, el *CR400BF*, tren de alta velocidad chino, alcanza una velocidad de 350 km/h. El *Shinkansen*, tren de alta velocidad japonés, alcanza velocidades de 320 km/h y el *AVE*, tren de alta velocidad español, alcanza los 310 km/h.

La tabla 2.1 muestra un ranking internacional de los 10 países con más kilómetros



**Figura 2.4:** Máquina bateadora compactando el balasto debajo en las traviesas de la vía férrea

construidos de vías aptas para la alta velocidad. En esta tabla se puede ver junto al nombre del país, el nombre del tren o trenes que son capaz de alcanzar la alta velocidad, el número de kilómetros construidos, la velocidad máxima (km/h) durante un viaje con pasajeros y la velocidad récord (km/h) durante viajes de prueba sin pasajeros.

Los datos de la tabla anterior se pueden ver en una gráfica en la figura 2.6. La información, los gráficos y la tabla sobre las líneas de alta velocidad en 2019 han sido extraídas parcialmente de [8].

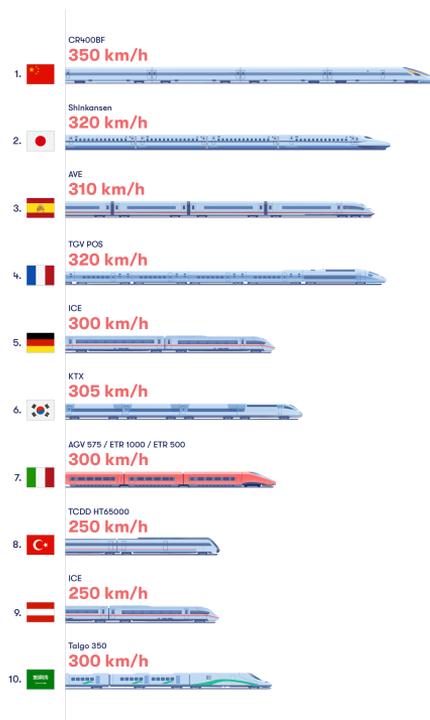
Debido al incremento de las prestaciones han aparecido multitud de organizaciones para estandarizar y regular el uso y la calidad de los carriles de tren. Esto se detalla con mayor profundidad en la sección 2.2.



**Figura 2.5:** Fotografía del tren *Elettrotreno ETR 200* en el depósito de *Pistoia* en Italia. Imagen extraída de [7].

País	Nombre del tren	Km Construidos	Velocidad (km/h)	
			Operacional	Récord
China	CR400BF	31043	350	420
Japón	Shinkansen	3041	320	400
España	AVE	2852	310	404
Francia	TGV POS	2734	320	575
Alemania	ICE	1571	300	368
Corea del Sur	KTX	887	305	421
Italia	AGV 575 / ETR 100 / ETR 500 / Frecciarossa	1000	300	400
Turquía	TCDD HT65000	594	250	250
Austria	ICE	263	250	275
Arabia Saudi	Talgo 350	453	300	365

**Tabla 2.1:** Ranking internacional de alta velocidad en 2019. Datos extraídos de [8].



**Figura 2.6:** Ranking internacional de alta velocidad en 2019, vistos en forma de gráfico. Datos extraídos de [8].

## 2.2. Normativa internacional

Multitud de estándares nacionales e internacionales surgen a raíz de la estandarización de los carriles, y otros muchos que ya existían redactan estándares con esta finalidad. Dependiendo del país donde se va a utilizar el carril, o para la finalidad que se va a utilizar, aplica una normativa u otra. Algunos de estos estándares son los siguientes:

- EN<sup>1</sup>-13674, *Railway applications - Track - Rail*, [9]. Esta normativa se aplica a todos los carriles que se vayan a utilizar en territorio de la Unión Europea. Posteriormente a la publicación de dicha norma, multitud de países de la Unión Europea adaptaron esta norma para sus respectivos territorios, algunos ejemplos son:
  - UNE<sup>2</sup>-EN-13674, *Aplicaciones ferroviarias. Vía. Carriles*, [10]. Esta normativa se aplica a todos los carriles que se vayan a utilizar en territorio español.
  - DIN<sup>3</sup>-EN-13674, *Bahnwendungen - Oberbau - Schienen*, [11]. Esta normativa se aplica a todos los carriles que se vayan a utilizar en territorio alemán.

Esta normativa europea consta de varias partes, en ellas se definen desde los tipos de perfiles a utilizar, hasta los requisitos de calidad que se deben cumplir.

- GOST<sup>4</sup> R 51685, *Railway rails. General specifications*, [12]. Esta normativa se aplica a todos los carriles que se vayan a utilizar en territorio ruso.
- AREMA<sup>5</sup> Chapter 4: Rails, [13]. Es una norma creada por una organización americana que se dedica exclusivamente a la estandarización de vías ferras y ferrocarriles. Se aplica a todos aquellos carriles que vayan a ser utilizados en Norte América.
- UIC<sup>6</sup> Code 860, *Technical specification for the supply of rails*, [14]. Esta norma creada en Francia por una asociación propia es una norma generalista que se puede aplicar en cualquier país, bien sea por algún uso en particular y definido en esta norma, o porque el país donde se aplica no tiene normativa propia.

Las pruebas a realizar para la comprobación del carril fabricado se podrían catalogar en dos grandes grupos: pruebas que se realizan durante la fabricación del carril

---

<sup>1</sup>EN: Abreviatura del inglés *European Norm*.

<sup>2</sup>UNE: Abreviatura del español *Una Norma Española*.

<sup>3</sup>DIN: Abreviatura del alemán *Deutsches Institut für Normung*.

<sup>4</sup>GOST: Abreviatura del ruso, *Gosudarstvenny Standart*.

<sup>5</sup>AREMA: Abreviatura del inglés, *American Railway Engineering and Maintenance of way Association*.

<sup>6</sup>UIC: Abreviatura del francés, *Union Internationale des Chemins de fer*.

y pruebas que se realizan de forma periódica, una vez el carril está instalado y en uso.

Las pruebas que se realizan durante el proceso de fabricación del carril a su vez se pueden dividir en dos subgrupos, pruebas con contacto o pruebas destructivas en las que, por ejemplo, se comprueba la elasticidad del material o la composición del mismo. Por otro lado, están las pruebas sin contacto o no destructivas, que pueden comprobar aspectos como la planitud del carril y que además es el objeto de estudio del presente documento, la inspección en busca de defectos superficiales o la comprobación de la forma a lo largo de todo el carril.

Las pruebas que se realizan una vez el carril ha sido instalado y se está utilizando tienen que ser, por necesidad, pruebas no destructivas y sin contacto.

El trabajo que se describe en esta tesis se ha realizado para cumplir con la normativa española *EN-13674* [9]. Una descripción de las especificaciones de esta norma se puede ver en la sección 2.2.1.

### **2.2.1. Estándar europeo EN-13674**

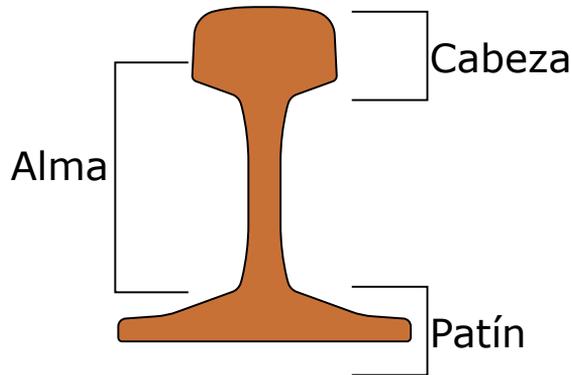
Como se comentó anteriormente, el estándar europeo se debe aplicar cuando se fabrica un carril que se va a utilizar en suelo de la Unión Europea. En esta tesis siempre que se hable del estándar europeo se referirá a la traducción que *AENOR* ha realizado del mismo, es decir el *UNE-EN-13674* que se puede ver en [10].

Esta norma habla en su mayor parte de carriles tipo *Vignole*. Los carriles *Vignole* son aquellos carriles con perfil similar al que se puede ver en la figura 2.7. Este tipo de carriles fueron creados por *Charles Blacker Vignoles* para el uso en ferrocarriles en Gran Bretaña. El primer uso de este tipo de carriles data del año 1836 en la línea que unía Londres con Croydon.

En los cruces de carriles se utilizan diferentes variantes de estos. Carriles *Vignole* estándar para antes de la llegada al cruce, carriles para desvíos y cruzamientos mientras se está realizando el paso de un carril a otro y contracarriles, que son utilizados para evitar que el eje del tren salga de la vía. Una imagen de esto se puede observar en la figura 2.8.

Este estándar se divide en varios documentos:

- *UNE-EN-13674-1, Parte 1: Carriles Vignole de masa mayor o igual a 46 kg/m*, [15]. En esta primera parte de la norma, se describe la forma de fabricación, los materiales a utilizar y las pruebas a realizar sobre carriles tipo *vignole*



**Figura 2.7:** Carril tipo Vignole.

pesados, aquellos de masa superior a los 46 kg/m. Se describen también de forma dimensional todos los tipos de carriles vignole pesados.

- UNE-EN-13674-2, *Parte 2: Carriles para desvíos y cruzamientos utilizados con carriles Vignole de masa mayor o igual a 46 kg/m*, [16]. En esta segunda parte de la norma, se describe la forma de fabricación, los materiales a utilizar y las pruebas a realizar sobre carriles tipo vignole diseñados para desvíos y cruzamientos entre carriles. De igual forma que en la parte anterior de la norma, se describen también de forma dimensional todos los tipos de carriles que se pueden utilizar.
- UNE-EN-13674-3, *Parte 3: Contracarriles*, [17]. Esta parte de la norma describe dimensionalmente los diferentes contracarriles que se pueden utilizar.
- UNE-EN-13674-4, *Parte 4: Carriles Vignole de masa comprendida entre 27 kg/m y 46 kg/m, excluyendo 46 kg/m*, [18]. En esta última parte de la norma, se describe la forma de fabricación, los materiales a utilizar y las pruebas a realizar sobre carriles tipo vignole ligeros, aquellos de masa inferior a los 46 kg/m. Se describen también de forma dimensional todos los tipos de carriles que se pueden utilizar.

En esta norma se describen las siguientes pruebas a realizar sobre los carriles para considerar que son válidos para su uso:

- Identificación del grado de acero. De esta forma se describe la dureza del mismo, que debe concordar con los indicados en la norma.
- Propiedades del material utilizado. Se medirán aspectos como:
  - La propagación de las grietas por fatiga.

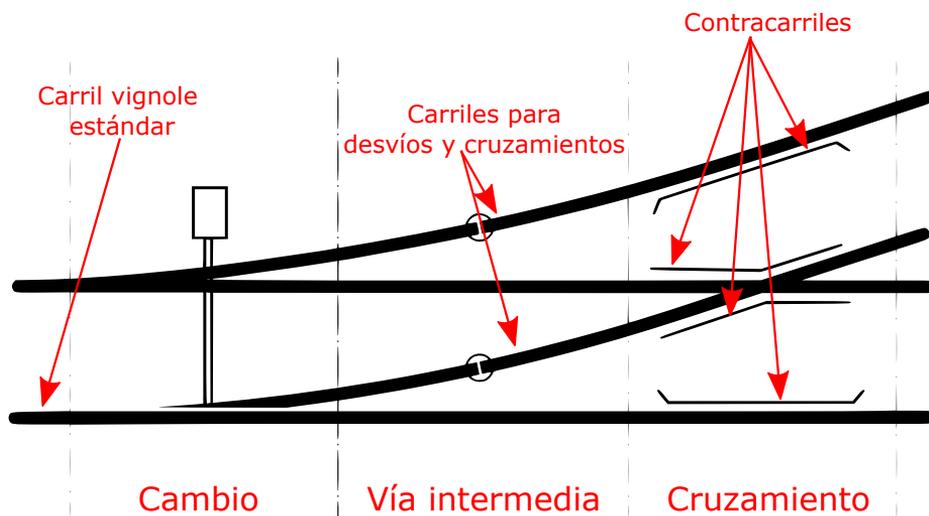


Figura 2.8: Ejemplos de los tipos de carril dentro de su uso en un cruce.

- Tensiones residuales en el patín del carril.
- Variación de la dureza en el eje de la superficie de rodadura en carril con tratamiento térmico.
- Resistencia a la tracción y al alargamiento.
- Marcado de los carriles. Tamaño y posición del marcado en los carriles.
- Comprobación de la forma del perfil del carril. Debe concordar con alguno de los tipos indicados en la norma.
- Comprobación de la planitud del carril. La medición y comprobación de esta característica es el objeto de esta tesis.

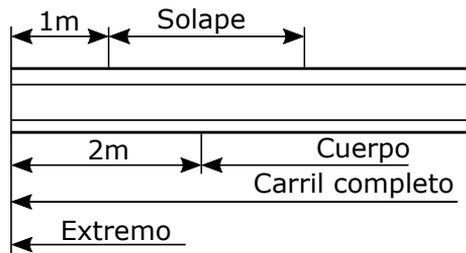
#### 2.2.1.1. Definición de planitud según el estándar europeo

Antes de indicar las tolerancias que describe la norma para las mediciones de la planitud, se deben explicar todas las particularidades utilizadas para ello. Una de ellas es la división del carril en partes. Para ello la norma divide el carril en tres grandes partes:

- Cuerpo del carril, es aquello que está comprendido a partir de dos metros desde el inicio del carril y dos metros antes de su finalización.
- Extremos del carril, los dos primeros y últimos metros del carril.

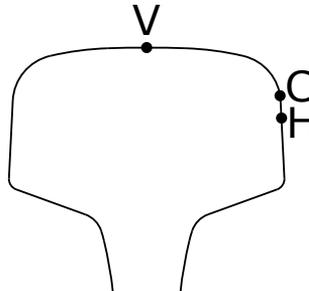
- Solape. Es una parte del carril que, como su nombre propiamente indica, se solapa con los extremos y el cuerpo, haciendo que estos dos se unan. Esta parte empieza a un metro del principio y del final y tiene dos metros de longitud.

En la figura 2.9 se muestra la división del carril en partes según se indica en la norma.



**Figura 2.9:** Partes del carril según se indica en la norma EN-13674. Imagen extraída de [10].

Por otra parte, la norma también indica que la planitud se debe medir en las dos dimensiones (horizontal y vertical) del carril. Para extraer los puntos donde la planitud debe ser medida en cada una de las dimensiones, la norma indica dos: el punto *V* para la dimensión vertical y el punto *H* para la dimensión horizontal. Estos dos puntos se pueden observar en la figura 2.10.



**Figura 2.10:** Puntos donde se debe medir la planitud según la norma EN-13674. Imagen extraída de [10].

El punto que se tomará de referencia para medir la planitud vertical (*V*) se encuentra en el punto medio de la cabeza del carril. El punto que se tomará de referencia para medir la planitud horizontal (*H*) no es tan sencillo de calcular. La norma indica que este punto se encuentra nominalmente de 5 a 10 mm por debajo de la esquina de la

cabeza del carril, indicada en la figura 2.10 como C.

Estos puntos, tanto para la componente vertical como para la horizontal se deben coger a lo largo de toda la longitud del carril. De esta forma se generarán dos secuencias de puntos, una para cada dimensión, que en adelante se conocerán como *perfiles de planitud*. La extracción de estos dos perfiles de planitud se puede ver en la figura 2.11.

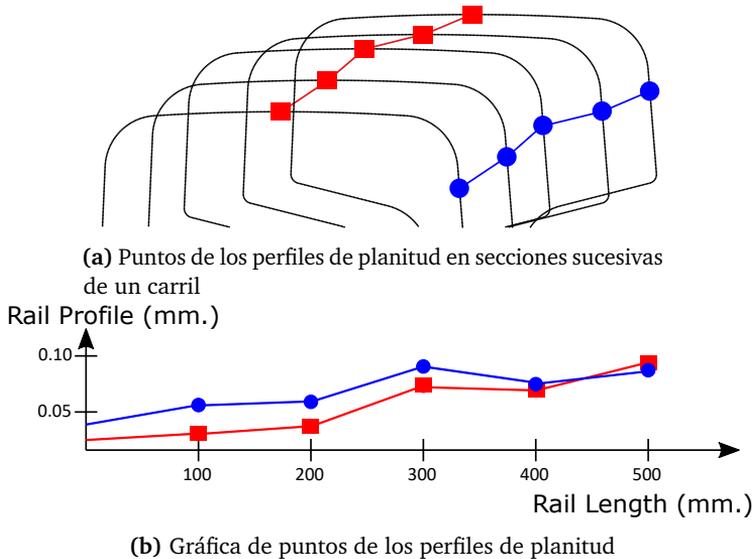


Figura 2.11: Extracción de los perfiles de planitud

Una vez extraídos ambos perfiles de planitud, como se ve en la figura 2.11a, se puede dibujar una gráfica de puntos con los puntos extraídos. Esto es lo que se muestra en la figura 2.11b.

Por último, la norma indica que para medir la planitud se deben utilizar reglas físicas, que los operarios deben colocar a lo largo de todo el carril para buscar problemas de planitud. Las longitudes de regla a utilizar variarán dependiendo de la dimensión que se esté midiendo y de la parte del carril. Se utilizan reglas de 1, 1.5, 2 y 3 metros. El uso de reglas se detalla con mayor profundidad en el capítulo 5.

Tal y como se puede ver en la figura 2.2, las longitudes de regla a utilizar son las siguientes para cada parte del carril:

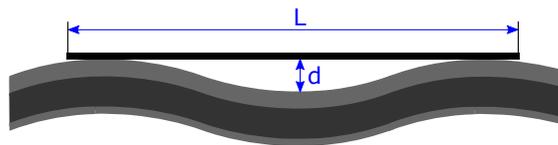
- Cuerpo

- Dimensión horizontal: Regla de 1.5 metros.
- Dimensión vertical: Reglas de 1 metro y 3 metros.
- Extremos
  - Dimensión horizontal: Reglas de 1 metro, 1.5 metros y 2 metros.
  - Dimensión vertical: Reglas de 1 metro, 1.5 metros y 2 metros.

Una vez se han definido tanto las partes del carril, como los perfiles de planitud vertical y horizontal, y el uso de reglas, se puede mostrar lo que la norma indica para cada uno de estos aspectos en cuanto a la planitud. Para detallar la medición de la planitud la norma contiene la tabla 2.2.

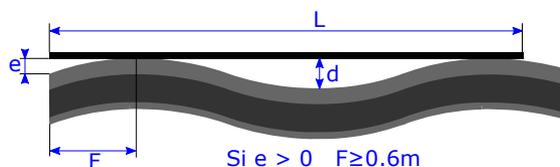
Ubicación / Propiedades dimensionales		Clase B		Clase A	
		d	L	d	L
Cuerpo	Alineación recta vertical V	< 0.4 mm	3 m	< 0.3 mm	3 m
		y		y	
	< 0.3 mm	1 m	0.2 mm	1 m	
	Alineación recta horizontal H	< 0.6 mm	1.5 m	< 0.45 mm	1.5 m
Extremos	Extremo "E"	1.5 m		2 m	
	Regularidad en la superficie vertical V	y		y	
				< 0.3 mm	1 m
		e < 0.2 mm		e < 0.2 mm	
	Regularidad en la superficie horizontal H	< 0.7 mm	1.5	< 0.6 mm	2 m
				y	
		< 0.4 mm	1 m		
Solapes	Regularidad en la superficie vertical V	< 0.4 mm	1.5 m	< 0.3 mm	2 m
		< 0.6 mm	1.5 m	< 0.6 mm	2 m

**Tabla 2.2:** Tabla para clasificar la calidad de la planitud de los carriles de tren según la norma EN-13674.

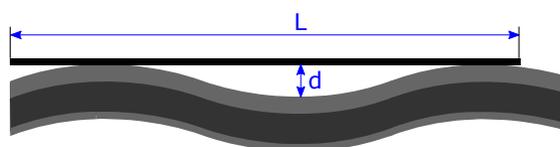


**Figura 2.12:** Medición de planitud en el cuerpo del carril según la norma EN-13674.

En la imagen 2.2 se puede observar que la norma utiliza dos clases diferentes, denominadas *Clase A* y *Clase B*. Se puede observar que la clase A admite menores niveles de defecto que la clase B. Esto da lugar a las siguientes clasificaciones:



**Figura 2.13:** Medición de planitud vertical en el extremo del carril según la norma EN-13674.



**Figura 2.14:** Medición de planitud horizontal en el extremo del carril según la norma EN-13674.

- El carril en todas sus partes cumple con la planitud descrita en la clase A y por lo tanto en la clase B. El carril se considera, debido a su buen grado de planitud de clase A.
- El carril en todas sus partes cumple con la planitud descrita en la clase B pero falla en todas o en alguna de la clase A. El carril se considera, debido a su grado medio de planitud de clase B.
- El carril no cumple con ninguna o falla en alguna parte de la clase B. El carril se considera que tiene un grado pobre de planitud y debe ser descartado o sometido a un proceso de mejora de su planitud. El artículo [19] describe un procedimiento de mejora de la planitud en barras de acero, que será similar a lo que se aplique sobre el carril.

Una explicación con mayor profundidad sobre la interpretación de la planitud de la norma se lleva a cabo en el capítulo 5. Ahí se detalla la forma de calcular la planitud tanto en los extremos como en el cuerpo del carril y la posterior clasificación del carril en las clases que se indican en la norma.

El estado del arte de todas las tecnologías que se utilizan para comprobar la calidad de los carriles se describe con más detalle en la sección 2.6.

## 2.3. Revisión de tecnologías para la medición de planitud basadas en visión artificial

En la actualidad la visión artificial es usada por multitud de sistemas para resolver problemas del día a día, que de otra forma deberían ser resueltos mediante procesos humanos, haciéndose entonces más sensible a fallos debidos a esta interacción humana, además de ser más tediosos y complejos de resolver.

Debido a la criticidad de ciertos sistemas de producción y a la necesidad de que estos cumplan ciertos aspectos de calidad, bien sea por normativa internacional como se vio en la sección anterior o por competitividad industrial, se han ido creando multitud de sistemas de visión artificial, que poco a poco han ido sustituyendo otros sistemas que usan tecnologías de contacto o incluso mediciones manuales.

El trabajo que se describe en [20] trata del control de planitud sobre listones de madera utilizando tecnología de visión artificial. En este artículo se detalla el uso varios conjuntos de cámaras y diodos láser para la medición de deformación, que pueda producir problemas de planitud, durante el proceso de producción de listones de madera.

El trabajo descrito en [21] trata el problema de la planitud de espejos mediante la reconstrucción 3D de su superficie. Esta medición de planitud se basa en un sistema de visión artificial que utiliza puntos de luz estructurada proyectados sobre el espejo para así poder llevar a cabo la reconstrucción 3D y a partir de esto, el cálculo de la planitud. Tal y como se indica en este trabajo, la planitud de los espejos es muy importante en sistemas que se van a instalar en telescopios, ya que un mínimo error de planitud daría lugar a grandes fallos de medida durante el uso de estos sistemas. Según se indica, la necesidad de este trabajo se debe a que los sistemas previos no eran capaces de lograr las capacidades técnicas necesarias requeridas por organismos internacionales tan importantes como la NASA<sup>7</sup>, la ASO<sup>8</sup>, la SEU<sup>9</sup> o la SEC<sup>10</sup>.

De forma más general, el problema de planitud se trata en [22]. En este artículo se describe como utilizar un sistema de visión artificial basado en la utilización de dos sensores láser, colocados sobre el objeto que se desea medir. Es necesario que el objeto en cuestión se encuentre en reposo, ya que si no otros aspectos como vibraciones, etc, podrían afectar a la medición. Estos sensores proyectan puntos sobre el objeto y de esta forma calculan la planitud del mismo, mediante los métodos

---

<sup>7</sup>NASA: Abreviatura del inglés, *National Aeronautics and Space Administration*.

<sup>8</sup>ASO: Abreviatura del inglés, *Astronomical Search for Origins*.

<sup>9</sup>SEU: Abreviatura del inglés, *Structure and Evolution of the Universe*.

<sup>10</sup>SEC: Abreviatura del inglés, *Sun Earth Connection*.

aplicados en este trabajo se consigue una precisión de  $1.4\mu\text{m}$ .

Enfocado más en el problema actual de la tesis, es decir los carriles, se puede ver en [23] la forma de reconocer las vías de tren mediante un sistema de visión artificial y reconstrucción 3D. Mediante un sistema montado a bordo de un tren, escanea en busca de los carriles que conforman la vía para hacer posible en un futuro el análisis de la información recogida por este sistema. Este sistema es capaz de reconocer los componentes que componen la vía tales como los carriles, los cruces entre carriles, etc.

En esta sección se han visto un conjunto de tecnologías que permiten medir la planitud en diferentes tipos de objetos, bien sea durante la producción de los mismos o durante su uso. Estos métodos son muy precisos a la hora de la comprobación de la planitud debido a que los objetos que están midiendo no están en movimiento y por lo tanto no existe ninguna fuente de vibraciones que altere los resultados. Para llevar a cabo estas mediciones se han visto diferentes tecnologías, todas ellas basadas en visión artificial, que van desde la medición usando cámaras y láseres [20] y [22]; luz estructurada [21]; y reconstrucción 3D [21] y [23].

## **2.4. Tecnologías para la medición de la calidad en productos de acero laminado**

Debido a que los carriles de tren son una particularización de productos laminados, es decir, aquellos productos que se producen en una caja de laminación, en esta sección se tratarán trabajos que controlan la calidad sobre los productos de acero laminado.

La fabricación de productos de acero laminado, al igual que los carriles de tren, deben pasar una serie de controles de calidad, ya que estos productos son la base otros muchos sistemas. El trabajo que se describe en [24] muestra un estado del arte, basado en el análisis de 120 publicaciones de la última década, sobre el control de defectos basados en técnicas de visión artificial para la inspección de productos de acero laminado.

La comprobación dimensional de los productos fabricados también tiene que ser medida cuando se trata de productos laminados, para ello en los trabajos [25] y [26] se utilizan dos técnicas diferentes basadas en visión por computador.

La medición de la planitud en productos planos, como es el acero laminado se lleva a cabo midiendo la elongación de las fibras del mismo. Una fibra es la parte de la

banda de acero que comparte la misma sección transversal de anchura infinitesimal dentro de dicha banda. En el caso de las bandas de acero, los problemas de planitud se producen debido a la elongación de estas fibras.

En los carriles de tren no sucede de esta forma, sino que se producen por diversos problemas, como por ejemplo por problemas durante la fabricación del mismo, debido al enfriado no uniforme del mismo, etc. Un problema de planitud en un carril se puede observar en la figura 2.15.



**Figura 2.15:** Problema de planitud en un carril.

La medición de la planitud que es objeto de esta tesis pero sobre productos de acero laminado, se trata en los trabajos [27], [28], [29] y [30], estos sistemas utilizan diferentes tecnologías de visión por computador y diferentes técnicas para la medición de la planitud.

En [27] se propone un método de triangulación óptica basado en dispositivos láser que proyectan luz sobre el producto que se debe analizar y mediante una cámara matricial miden la planitud del mismo. Además se indica que este método propuesto es robusto, preciso y puede ser aplicado en tiempo real.

El artículo descrito en [28] analiza en profundidad el estado del arte de las diferentes tecnologías y métodos que se pueden utilizar hoy en día para medir la planitud, desde sensores mecánicos para comprobar la tensión de tracción del producto durante su fabricación y así calcular la planitud, hasta sensores ópticos que comprueban la planitud mediante la proyección de luz láser sobre el producto.

Tal y como se describe en [29] se propone un método, que además de medir la planitud, calcula los parámetros necesarios para la correcta calibración de la cámara del sistema. Además se incluye un sistema de detección con un dispositivo integrador para facilitar el cálculo y el uso repetido, haciendo que este sistema sea utilizable en entornos hostiles como son las fábricas.

Siguiendo con el cálculo de la planitud y la calibración de las cámaras para llevar a cabo esta medición de forma correcta, el trabajo descrito en [30] propone el uso de un sistema de visión artificial que utiliza un sensor de desplazamiento láser *CCD*, este método propuesto se puede utilizar cuando el objeto aún está caliente.

Por otra parte, el trabajo descrito en [31], también trata el problema de planitud sobre este tipo de productos, pero al contrario que en los casos anteriores, este no utiliza tecnologías de visión por computador, sino que utiliza un sensor que se apoya sobre la lámina que se desea medir para comprobar su planitud, es decir, utiliza una tecnología de contacto, en contraposición al resto de tecnologías que se han visto en esta sección que son tecnologías sin contacto.

## 2.5. Introducción al problema de la vibración

La comprobación de la calidad de los productos durante su fabricación, incluso en la etapa final de producción, tiene importantes ventajas frente a hacerlo una vez se ha terminado la fabricación de los mismos, y una de ellas, la más importante, es la pronta detección de problemas y la posibilidad de su subsanación lo antes posible. Pero al igual que tiene ventajas, también tiene un importante problema: el entorno. Siempre que se trata de medir la calidad de un producto en una línea de fabricación se debe lidiar con los problemas del entorno donde encuentra, es decir un entorno industrial, que siempre resulta más hostil que un almacén, lugar donde se almacenan los productos una vez fabricados.

Algunos de los problemas principales de los entornos industriales son los siguientes:

- Ruido electromagnético, producido por los sistemas de producción. Puede afectar a cables o sistemas informáticos.
- Suciedad, producida también por los sistemas de producción. Puede afectar por ejemplo a los sensores del sistema de visión artificial.
- Temperatura extrema, bien sea por calor o por frío. Hará que los sistemas colocados en estos puntos tengan que estar muy bien aislados.
- Riesgo de colisiones, debido al fallo de algún componente intermedio.
- Vibraciones, que pueden ser producidas por muchos aspectos, desde la excentricidad de rodillos del tren por el que circula el producto hasta por la aparición de un nuevo producto en el propio tren.

Los sistemas que se van a instalar en entornos industriales, para paliar algunos de los problemas anteriores, deben estar ruguerizados<sup>11</sup> y totalmente aislados para asegurar que el funcionamiento del sistema es el correcto.

---

<sup>11</sup>*Ruguerizado*: Adjetivo castellanizado del inglés, del verbo *to ruggedize*, del que se ha tomado prestado su significado: Fortalecer para una mayor resistencia al desgaste y la tensión.

Es este último problema, las vibraciones, el que más afecta a la medición de planitud objeto de esta tesis. Si se utiliza un único sensor para la medición de la planitud mediante visión artificial se está muy expuesto a que las vibraciones sean un foco muy importante de ruido, es por esto por lo que se deben utilizar sensores redundantes o algún otro tipo de sistema para la eliminación o compensación de las vibraciones.

En [32] se describe el problema de las vibraciones durante la reconstrucción 3D para la medición de la planitud de bandas de acero y expone un método basado en el uso de un filtro de paso bajo que con el uso de diversas transformaciones geométricas mitigan el efecto que genera el problema de las vibraciones.

El trabajo descrito en [33] se lleva a cabo una tarea similar pero a la hora de la mitigación del efecto de las vibraciones durante la medición de la planitud sobre bandas de acero, en lugar de utilizar filtros se propone un método basado en el uso de un segundo par de dispositivos láser y cámara, para así tener información redundante y así poder eliminar las vibraciones. Este método se basa en el mismo principio que el de esta tesis, el uso de información redundante para la eliminación de vibraciones y otras fuentes de ruido.

En [34] se describe de nuevo un método basado en información redundante, usando dos pares de dispositivos láser y cámaras que, mediante un filtrado basado en el filtro de *Kalman*, consigue una mitigación de las vibraciones que hace posible una medición mucho más exacta de la planitud de las bandas de acero en caliente.

Por lo tanto, se ha descrito tal y como se puede ver en los artículos [32], [33] y [34], diversas formas de tratar el problema de la medición de planitud de productos de acero laminado cuando estos están sometidos a problemas de vibraciones, todo ello mediante el uso de diferentes técnicas basadas en visión artificial.

En los trabajos descritos en [33] y [34], se utilizan más de un haz de luz láser al igual que en el trabajo descrito en la presente tesis, para medir la planitud en los productos de acero laminado, eliminando así las vibraciones que se puedan producir durante este proceso.

Sin embargo, en estos trabajos solo utilizan una cámara, y en el caso de esta tesis se utilizan tantas cámaras como dispositivos láser. La cámara que se utiliza en estos trabajos captura las dos líneas láser proyectadas sobre el producto, con la finalidad de eliminar las vibraciones. Esto es debido a que las vibraciones que se producen durante estas mediciones son *cortas*, es decir, afectan a una parte pequeña de la longitud del producto.

Al contrario pasa en el trabajo descrito en esta tesis, que las vibraciones afectan

a una parte longitudinal del producto sustancialmente más grande que en los trabajos anteriores. Debido a esto, para capturar la luz proyectada por los láseres se debe utilizar más de una cámara, ya que estos dispositivos láser están mucho más separados, para abarcar así una longitud del carril mucho más amplia.

El problema de la medición de planitud de productos largos de acero, que están sometidos a vibraciones durante esta medición, se tratará más en profundidad en el capítulo 4.

## 2.6. Tecnologías existentes para la medición de la calidad en carriles

La comprobación de la calidad del carril se compone de multitud de aspectos, pero la más estudiada a día de hoy es el desgaste sufrido del carril durante su uso. Este desgaste que el carril sufre por su uso puede generar defectos en la banda de rodadura de la cabeza del carril, o en cualquier otra parte del mismo y producir accidentes si no se subsanan de una forma adecuada.

Algunos de los defectos del carril son los siguientes:

- Corrugación (ondulación), es decir, ondulaciones del metal debido al estrés sufrido por el desgaste. Esto se puede ver en la figura 2.16a.
- Roturas. Esto se puede ver en la figura 2.16b.
- Marcas en la cabeza del carril. Pueden indicar el inicio de una rotura. Esto se puede ver en la figura 2.16c.
- Abrasiones. Esto se puede ver en la figura 2.16d.

Debido a la importancia de este problema de desgaste superficial se han creado multitud de trabajos para controlar estos defectos. Todos esos se basan en un sistema que debe estar montado abordo de un tren o del cualquier otro vehículo que circule a través de las vías que se desean estudiar en busca de defectos.

Los trabajos [36], [37], [38], [39], [40] y [41] se basan en sistemas de visión artificial que utilizan cámaras y dispositivos láser para buscar defectos en el carril. Estos trabajos utilizan sistemas que durante el recorrido a través de las vías buscan defectos como los vistos en la figura 2.16 en uno o en ambos carriles de forma simultánea, mediante la emisión de un haz de luz láser que posteriormente es recogido con una cámara.



**Figura 2.16:** Diferentes tipos de defectos por desgaste del carril. Imágenes extraídas de [35]. ©2017, IEEE.

Por su parte, en el trabajo [35] se utilizan también cámaras y dispositivos láser para crear un modelo 3D y así encontrar y catalogar los defectos del carril.

Los trabajos descritos en [42], [43] y en la patente [44] se describen sistemas de visión artificial basados en emisiones de luz estructurada sobre el carril para encontrar los defectos superficiales del carril. Lo mismo se lleva a cabo, pero en este caso emitiendo luz simple sobre el carril en el trabajo [45].

Otra técnica para encontrar defectos superficiales en el carril, esta vez no basada en cámaras que capturan imágenes, sino mediante la emisión de ultrasonidos sobre el carril que se quiere analizar se describe en [46]. La supresión de estos defectos superficiales es básica para la correcta interacción (o apoyo) de las ruedas del tren en la banda de rodadura de la cabeza del carril, este aspecto se estudia en mayor profundidad en [47].

A diferencia del resto de trabajos vistos hasta ahora, que analizan el carril una vez que está en uso para buscar problemas producidos por el desgaste, el trabajo [48] busca problemas superficiales durante la fabricación del carril, antes de que sea instalado en una vía.

Otro de los aspectos que se pueden dar debido al uso del carril es la pérdida de los pernos que anclan el carril a cada una de las traviesas de la vía, y es otro punto importante de estudio mediante técnicas de visión artificial, utilizado en [49] y [50]. Incluso en el caso de [51] se puede dar la situación conjunta, es decir, un sistema que no solo estudia el desgaste del carril sino que también comprueba si existe algún problema con alguno de los pernos.

La medición de la forma del carril es otro aspecto muy importante a tener en cuenta durante la fabricación y uso del carril, ya que si la forma del mismo no es constante y no sigue los parámetros y tolerancias descritas en los estándares se pueden llegar a producir problemas como roturas, problemas durante la rodadura, etc. Es por esto por lo que los trabajos descritos en [2], [52] y [53], analizan en profundidad este aspecto durante la fabricación del carril. En el caso de los dos primeros trabajos se utiliza visión artificial basada en sensores y emisión de luz láser y en el último caso sensores y emisión de luz estructurada.

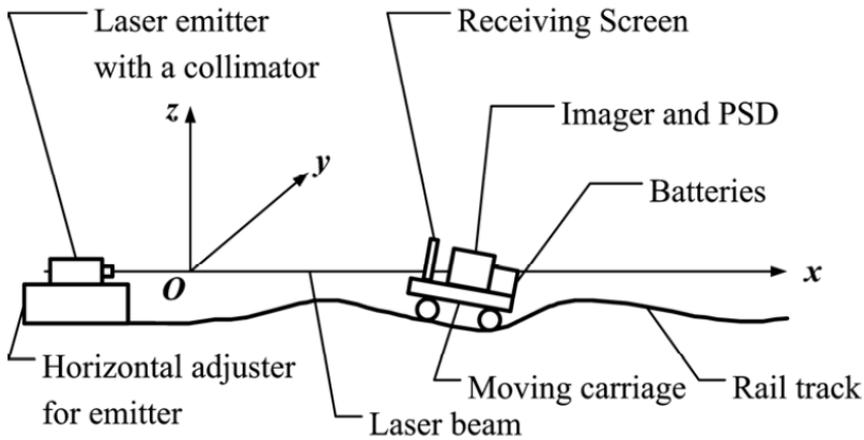
Para continuar con el estado del arte sobre la comprobación de calidad de carriles, se tiene el trabajo descrito en [54], donde al igual que en esta tesis se mide la planitud del carril, pero a diferencia de esta, se realiza mediante un sistema montado a bordo de un tren en lugar de durante la fabricación del carril. En este trabajo se estudia la planitud de los carriles de tren entre dos estaciones A y B cualesquiera, para comprobar el estado de la vía, y así si fuese necesario, corregir los problemas encontrados. En este estudio de la planitud, en lugar de llevarse a cabo mediante el uso de un sistema basado en visión artificial, se utilizan un conjunto de sensores, que abarcan: acelerómetros, magnetómetros, giroscopios, sensores de presión de aire y un dispositivo GPS, todo ello integrado en un único sistema embebido, cuya información recogida es analizada posteriormente para llevar a cabo el estudio de la planitud entre esos dos puntos.

El artículo [55] controla la planitud de un carril de grúa mediante el uso de un dispositivo que se va moviendo a lo largo de todo el carril. Este dispositivo utiliza visión artificial que mediante un sensor láser mide la planitud de dicho carril. El emisor del haz de luz láser se encuentra fijo y proyecta la luz sobre el dispositivo que se va moviendo a lo largo de todo el carril, tal y como se puede observar en la figura 2.17.

El dispositivo que se va moviendo a lo largo de todo el carril para medir la planitud se denomina *dispositivo sensible a la posición* o *PSD*<sup>12</sup>. Este dispositivo básicamente es capaz de detectar en que posición del carril se encuentra y, mediante una cámara 2D, recibir y medir el haz de luz láser enviado por el emisor.

---

<sup>12</sup>PSD: del inglés, *Position Sensitive Device*.



**Figura 2.17:** Método de medición de planitud propuesto en [55]. Figura extraída de dicho artículo. ©2011, IEEE.

En [56] se extrae información sobre irregularidades longitudinales, es decir en la dimensión vertical del carril, que causan problemas durante el uso del carril. Las irregularidades que se buscan son, problemas superficiales, problemas geométricos del carril o problemas de planitud, y para ello se utiliza un dispositivo que se debe ir moviendo a lo largo de toda la longitud del carril para extraer estas mediciones, del cual no indica la tecnología usada para llevar a cabo dichas mediciones.

Posteriormente el trabajo [57] utiliza las mediciones llevadas a cabo en el trabajo anterior [56] para analizar dichas mediciones en busca de problemas de planitud. Además en este artículo explica también la forma de llevar a cabo la clasificación de la planitud de acuerdo al estándar europeo *EN-13674*. En este artículo se indica también como eliminar el ruido de medición introducido por la herramienta utilizada para medir la información de carril, esto se lleva a cabo utilizando la *transformada de Fourier y la densidad espectral de potencia o PSD*<sup>13</sup>.

En el trabajo [58], analizan los perfiles de planitud una vez se han extraído. El análisis de estos perfiles de planitud se lleva a cabo mediante el uso de reglas virtuales, de una forma muy similar a la que se explica en esta tesis. Este trabajo no tiene en cuenta las vibraciones que se producen durante la medición del carril. Por otra parte, el método descrito en este artículo parece basarse en los métodos

<sup>13</sup>PSD: del inglés *Power Spectral Density*.

propuestos en los artículos presentados y publicados durante la escritura de la presente tesis.

El artículo descrito en [59] indica que se utilizan diversos sensores, incluyendo sensores láser para medir la planitud de un carril, cuya información es tratada en paralelo en un conjunto de computadores. En este artículo no se indica la forma en que se lleva a cabo dicha medición.

Existen también diversas soluciones comerciales que miden la planitud en carriles de tren, de las cuales debido al índole comercial de las mismas no se conoce su método de funcionamiento. Una de ellas es desarrollada por la empresa *Hexagon* la cual ha implementado un producto llamado *FMG* que es capaz de medir la planitud de un carril durante el proceso de fabricación del mismo mediante el uso de sensores de triangulación láser, tal y como se puede ver en [60].

De igual forma la empresa australiana *LMATS* ha desarrollado un producto que además de medir la planitud de un carril mide también la corrugación en la cabeza del mismo [61] (un ejemplo de corrugación se puede ver en la figura 2.16a). En este caso no se indica la tecnología que se utiliza para llevar a cabo esta medición ni tampoco si esta medición puede llevarse a cabo durante la producción del carril o una vez haya terminado.

## 2.7. Resumen y líneas de investigación pendientes

Como se ha podido comprobar con el análisis del estado del arte, existen tecnologías que miden la planitud y otros aspectos sobre productos de acero laminado y carriles, tanto durante su producción como una vez están fabricados. Existen también tecnologías que eliminan las vibraciones para poder llevar a cabo mediciones de planitud con exactitud.

También existen diversas tecnologías que controlan la calidad de un producto de acero laminado concreto, como son los carriles de ferrocarril, bien sea durante su fabricación o una vez están siendo utilizados para el soporte de la industria ferroviaria. Si lo que se quiere es controlar la planitud de carriles se ha mostrado una tecnología existente que mide la planitud del carril mediante un sistema de abordado en un vagón, para medir esta entre dos estaciones.

Sin embargo, si lo que se quiere es medir la planitud del carril durante la fabricación

del mismo, no existe a día de hoy tecnología publicada que lo permita. Esta tesis aborda este problema, proponiendo además una técnica para mitigar el problema de vibraciones que se producen durante el tránsito de carril a través del sistema que lo transporta a través del sistema donde se debe medir la planitud del mismo.



# Capítulo 3

## Arquitectura

### 3.1. Introducción

La arquitectura del sistema de medición de planitud que se estudia se puede dividir en dos grandes partes, hardware y software.

El componente hardware que se propone en esta tesis es un sistema que posee un conjunto redundante de sensores<sup>1</sup> que capturan imágenes del carril del cual se desea conocer la planitud. Estos sensores láser deberán estar calibrados para que las coordenadas en las imágenes capturadas se correspondan a las coordenadas del mundo real. Además esta calibración se debe llevar a cabo de forma conjunta en todas las cámaras para que el sistema de coordenadas del mundo real sea igual en todas ellas.

Por otra parte, el componente software a su vez se puede dividir a su vez en varias partes. La adquisición de imágenes, que cae fuera del ámbito de esta tesis. El procesamiento de estas imágenes tomadas por cada una de las cámaras para extraer los puntos relevantes donde se debe medir la planitud. Con estos puntos de cada una de las cámaras unificarlos en un único perfil de planitud para cada una de las dimensiones a medir (vertical y horizontal), y utilizar estos perfiles para la medición de planitud mediante el posicionado de reglas virtuales y finalmente, la clasificación de la planitud del carril de acuerdo al estándar internacional *EN-13674*.

### 3.2. Arquitectura hardware simple. Un único plano láser.

Como punto de partida se propone una solución basada en el uso de un único plano de triangulación láser que medirá la planitud del carril, para ello se plantea utilizar

---

<sup>1</sup>Sensor: Conjunto de cámara y láser utilizados para medir el carril.

la arquitectura de una solución de medición de la forma del carril que se había construido previamente, y cuyo desarrollo, implementación y pruebas se detallan en [2].

Este sistema previo, al igual que el resto de los sistemas que están instalados en una línea de producción está influido por una serie de vibraciones producida por el carril circulando por el tren de rodillos que lo transporta bajo el sistema de medición.

Debido a que este sistema previo no comprueba ningún aspecto durante toda la longitud del mismo, si no que mide cada cierta distancia la forma del carril, la influencia de las vibraciones no es un problema que deba ser resuelto. La arquitectura de este sistema se puede observar en la figura 3.1.

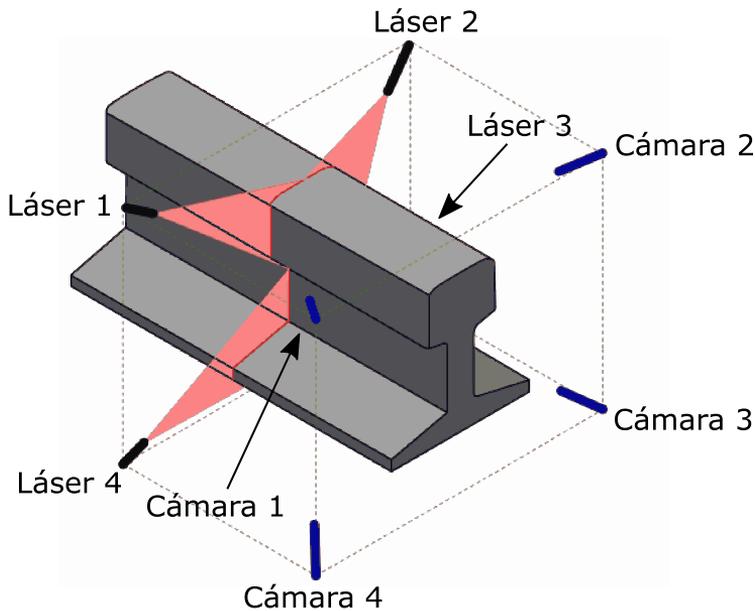


Figura 3.1: Arquitectura al inicio de la tesis

Tal y como se puede apreciar en la figura 3.1 se dispone de cuatro cámaras y cuatro láseres. Estos sensores en lugar de estar dispuestos a lo largo de la superficial del carril están distribuidos de tal forma que conforman una cortina láser que posteriormente es capturada por las cámaras.

A través de esta cortina circula el carril que va a ser medido. Con esta arquitectura

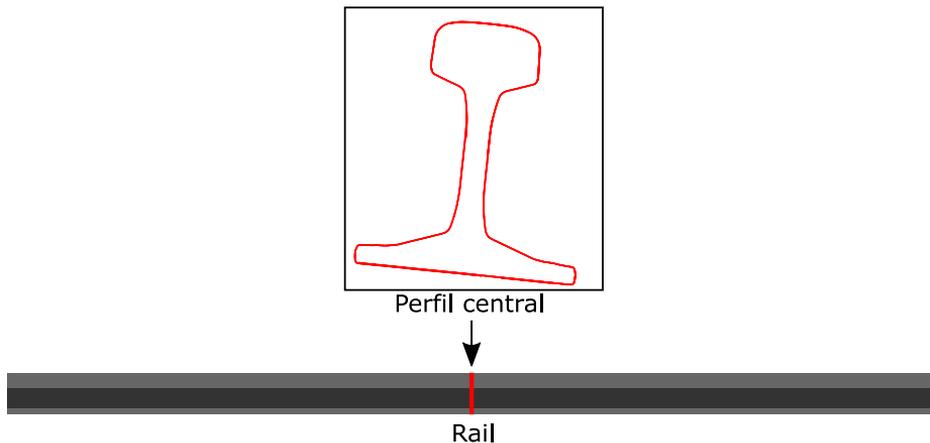
realmente para medir los puntos  $V$  y  $H$  tan solo tenemos un sensor que es capaz de obtenerlos en un momento determinado del tiempo, frente a la arquitectura que se detalla en la sección 3.3, en la que se tienen  $n$  sensores que obtienen estos valores, debido a que estos están distribuidos por la superficie del carril en lugar de en único plano.

Con la finalidad de llevar a cabo la medición mediante la arquitectura descrita y vista en la figura 3.1, se hace que cada uno de los sensores capture a la vez una imagen, posteriormente de estas imágenes se extrae la nube de puntos correspondiente al haz de luz láser y se juntan las cuatro imágenes que conformarán el perfil completo del carril.

Se obtienen todos y cada uno de los perfiles del carril mediante este método, obteniéndose de esta forma  $m$  nubes de puntos una vez el carril ha terminado de circular bajo el sistema.

En este momento y con la finalidad de comprobar si es posible la mitigación de los ruidos de medición y de las vibraciones usando un único plano láser, se llevan a cabo las siguientes operaciones:

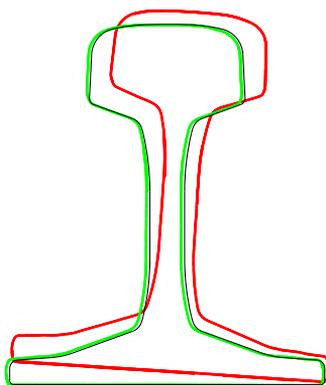
1. Se obtiene la alineación para la sección central del carril, para ello:
  - a) Se selecciona la nube de puntos central del carril. Tal y como se puede ver en la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Selección de la nube de puntos del perfil central

- b) Se lleva a cabo una primera alineación de dicha nube de puntos con el modelo geométrico y previamente conocido del carril. Esto se puede

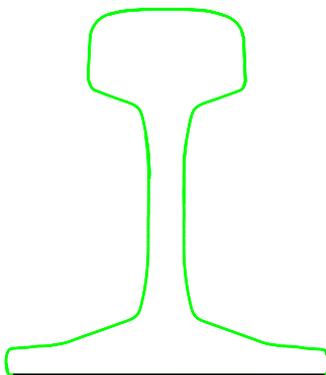
observar en la figura 3.3.



**Figura 3.3:** Alineación completa de la nube de puntos con el modelo del carril

En la figura 3.3 se muestra en color rojo la nube de puntos obtenida por los sensores, en color negro el modelo del carril y en color verde la nube de puntos ajustada al modelo del carril.

- c) Se lleva a cabo una segunda alineación contra la base del patín del carril. Esto se puede observar en la figura 3.4.



**Figura 3.4:** Alineación respecto a la base y lateral derecho del patín del modelo del carril

En la figura 3.4 se muestra en color verde la nube de puntos alineada

respecto a la parte del patín del modelo del carril dibujado en color negro.

2. Con estas dos transformaciones geométricas obtenidas en cada una de las alineaciones, se aplican al resto de nubes de puntos del carril.
3. Se aplica la transformación geométrica a la primera sección del carril.
4. Sobre esta sección una vez transformada, se calculan los puntos  $V$  y  $H$  y se almacena para ser usado posteriormente.
5. Una vez se ha aplicado las dos transformaciones geométricas a todas las nubes de puntos de los perfiles del carril se extraen los puntos  $V$  y  $H$ , ahora ya si como se ha visto en la sección 4.2 del capítulo 4, restándoles el valor obtenido para la primera sección, respectivamente para cada dimensión.

Esta arquitectura presenta una serie de problemas que se verán descritos a continuación, en las secciones 3.2.1 y 3.2.2.

### 3.2.1. Errores en la medición debidos a las vibraciones

Las vibraciones son fenómenos físicos que se producen al mover el carril, un objeto rígido, bajo el sistema de medición de la planitud. Eliminar los efectos de las vibraciones, es necesario para poder medir la planitud del carril con la mayor precisión posible.

El mecanismo que hace avanzar el carril bajo el sistema de medición de planitud, al ser mecánico genera una serie de vibraciones. La técnica usada para la eliminación de estas vibraciones se basa en que lo que se va a medir es un objeto largo rígido, por lo que una vibración que afecte a una parte del carril afectará también al resto del mismo, en mayor o menor medida.

Si el sistema en lugar de utilizar un conjunto redundante de sensores utilizase tan solo uno, una vibración no se podría distinguir de un problema real de planitud, dando lugar a un error en la interpretación de los resultados.

En la figura 3.5 se muestra una medición del sistema con una cámara. El sistema está midiendo un carril plano, es decir, sin problemas de planitud. Este carril está sometido a una vibración que afecta a las dos dimensiones  $V$  y  $H$ , que el sistema interpreta como un problema de planitud, cuando sin embargo no lo es.

En los periodos 1, 2 y 3 que dan lugar a las tres primeras capturas del carril, este se ve afectado por una vibración, tal y como se ve en las subfiguras 3.5a, 3.5c y

3.5e respectivamente, del cual las imágenes capturadas son 3.5b, 3.5d y 3.5f. Sin embargo la vibración acaba antes de la captura de la cuarta imagen del carril, tal y como se ve en 3.5g y 3.5h.

De todo lo que se ve reflejado en la figura 3.5, se pueden extraer los perfiles longitudinales de planitud, representado en la figura 3.6. En estos perfiles se observan dos problemas de planitud representados en color azul debido al uso de un solo sensor que captura imágenes durante una vibración.

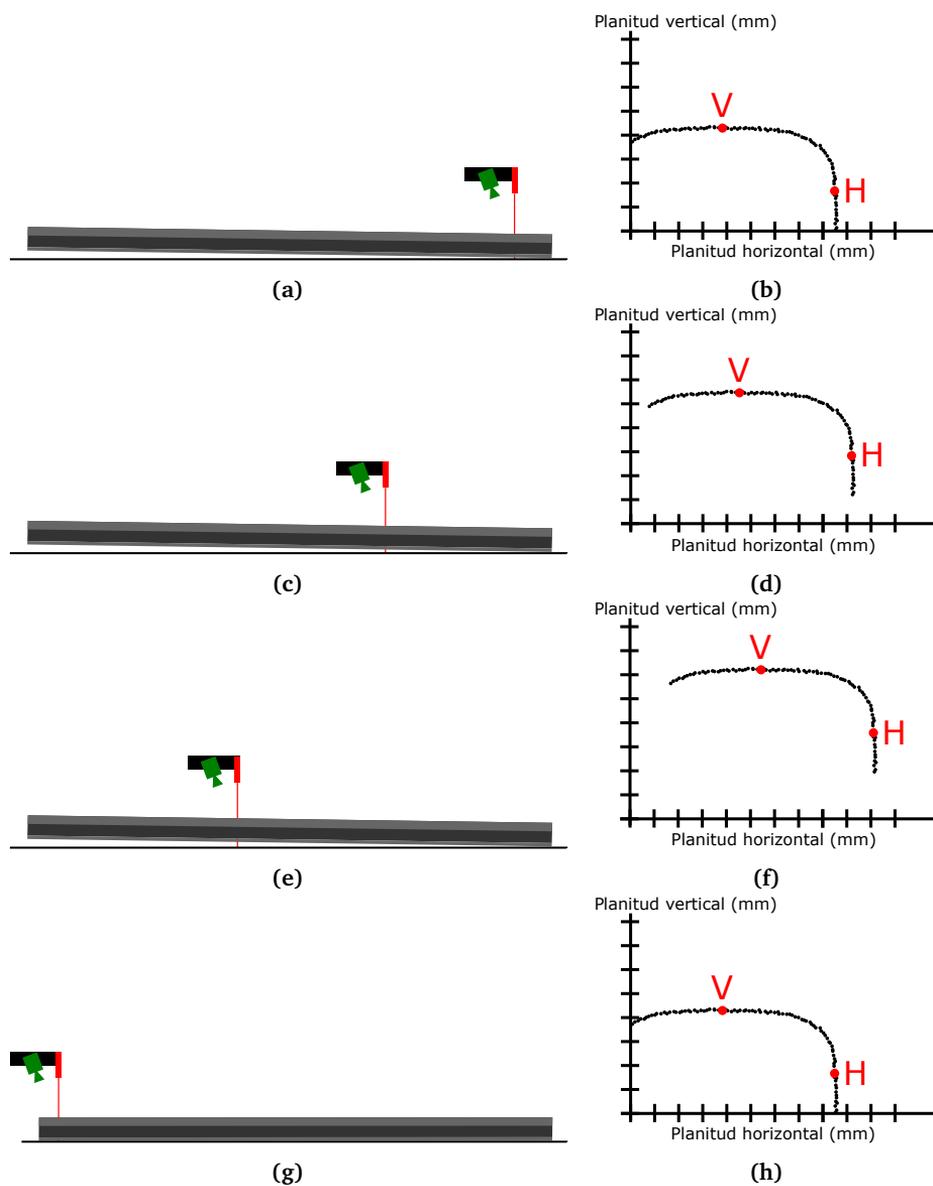
Los perfiles de la figura 3.6, al estar midiendo un carril completamente plano, deberían ser planos, pero al utilizarse un único sensor no es posible la eliminación de vibraciones, dando lugar a un falso problema de planitud.

### **3.2.2. Errores en la medición debidos al ruido del sensor**

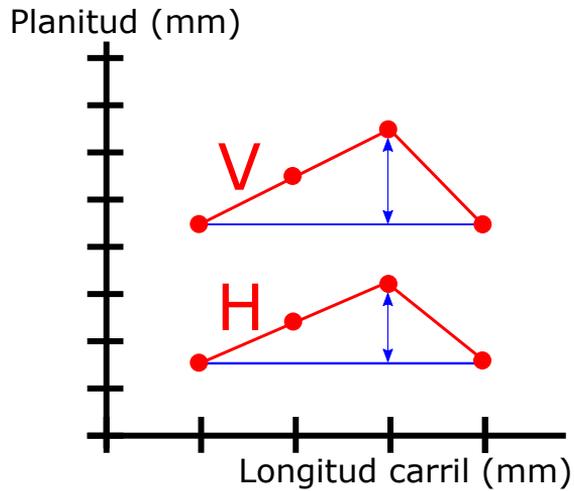
El ruido de medición es otro de los grandes focos de error a la hora de llevar a cabo las mediciones, y el sistema debe de ser capaz de paliar sus efectos al igual que sucede con el ruido debido a las vibraciones visto en la sección anterior.

Existen multitud de factores que pueden inducir a los sensores a introducir errores en las mediciones, algunos de los más comunes son los siguientes:

- Suciedad en la cámara del sensor. Impidiendo que la cámara vea con claridad el láser proyectado sobre el carril.
- Suciedad en el láser del sensor. Impidiendo que la luz láser se proyecte de forma adecuada sobre el carril y por lo tanto haciendo que la cámara del sensor no la recoja de forma adecuada.
- Problema de calibración de los sensores. Esto podría hacer que el haz de luz láser proyectado sobre el carril apareciese desenfocado.
- Vibraciones externas que también afecten al sensor. Si una vibración afectase al sensor durante la captura de una imagen, la imagen se podría capturar borrosa dificultando la extracción del haz láser proyectado sobre el carril.
- Luz externa al sistema que incida sobre el carril en el momento de captura de una imagen.
- Baja calidad del sensor. De esta forma si el sensor no tiene la calidad adecuada se podrían capturar imágenes incorrectas del láser proyectado en el carril.



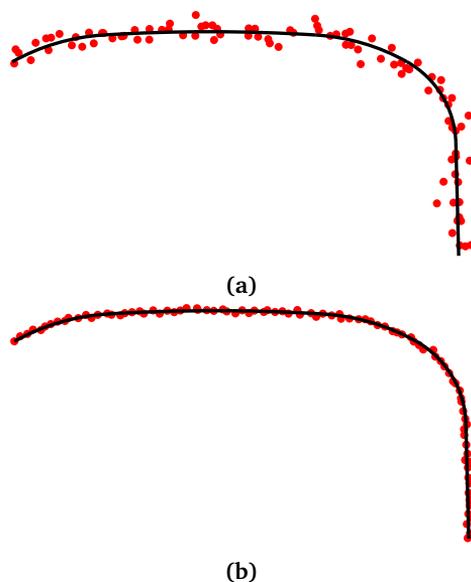
**Figura 3.5:** Representación de una vibración en un carril plano. (a), (c), (e) y (g) Vibración capturada por el sistema. (b), (d), (f) y (h) Extracción de V y H.



**Figura 3.6:** Representación gráfica de una vibración interpretada como un problema de planitud

En la figura 3.7 se muestra el haz de luz láser capturado por la cámara del sensor. En la subfigura 3.7a se muestra la imagen con un mayor ruido de medición que en la subfigura 3.7b. Por lo tanto el error que se introducirá a la hora de calcular los puntos *V* y *H* será mayor en el caso de la subfigura 3.7a que en el caso de la subfigura 3.7b en el que casi no existiría error.

La eliminación de los ruidos introducidos por las vibraciones vistas en la sección 3.2.1 y por el ruido de medición visto en esta sección son las razones que justifican la utilización de un sistema redundante de sensores.



**Figura 3.7:** Ruido de medición. (a) Ruido de medición alto. (b) Ruido de medición bajo.

### **3.3. Arquitectura hardware propuesta. Múltiples planos láser**

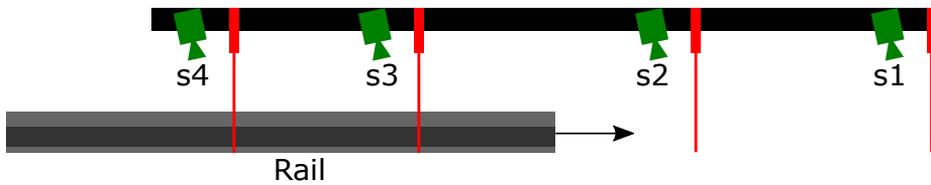
Debido a diversas fuentes de ruido que aparecen durante la medición del carril, se debe utilizar un sistema que sea capaz de evitar que este ruido afecte al cálculo de planitud que se debe llevar a cabo.

Para ello se utiliza un conjunto de sensores que tomarán secciones transversales del carril. De tal forma que la misma sección del carril será vista por todos los sensores, haciendo así redundante la información tomada de dicha sección y haciendo que el sistema sea resistente a las fuentes de ruido externas.

Un esquema de este sistema con 4 sensores se puede ver en la figura 3.8.

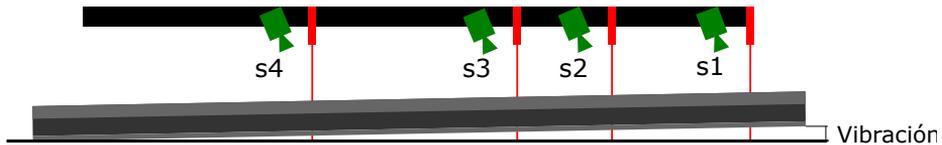
Si se utilizase un único sensor para medir la planitud del carril, no se podría distinguir entre un problema de planitud real y una distorsión debido a un ruido en las imágenes.

Estos ruidos se verán como perturbaciones o errores en las mediciones tomadas en



**Figura 3.8:** Diagrama de la arquitectura hardware del sistema.

cualquiera de las dos dimensiones a medir, de tal forma que aumentará o disminuirá el valor medido. Para eliminar estos ruidos se tomarán las imágenes capturadas por los sensores en conjuntos de tres en tres, como se explicará más adelante. La figura 3.9 muestra el efecto de un tipo de ruido, una vibración, del carril y como lo captarían los diferentes sensores.



**Figura 3.9:** Efecto de la vibración

Esta imagen representa una vibración en el eje vertical, pero se debe tener en cuenta que una vibración puede afectar a cualquiera de los ejes, siendo posible que incluso afecte a más de uno. Estas vibraciones deben ser eliminadas ya que en caso contrario, podrían ser interpretadas como un error de planitud, cuando en realidad, no es así, induciendo a error al sistema de medición.

Por lo tanto se propone un sistema de sensores redundantes para medir la planitud del carril. El sistema debe constar de al menos 3 sensores, debido a restricciones que se comentan en el capítulo 4. A partir de 3 sensores, el sistema será más resistente a mediciones cuantos más sensores se utilicen, siendo el sistema propuesto en esta tesis compuesto por 4 sensores, ya que a partir de este número el incremento del coste de introducir nuevos sensores no es asumible para la baja ganancia de calidad de las mediciones.

Las distancias entre los sensores deben ser las óptimas para garantizar que la eliminación de vibraciones se lleva a cabo con éxito, para ello, en el capítulo 4, se explica cómo obtener estas distancias.

En la figura 3.8 se puede ver que el carril entra en el sistema por la parte de la

cámara del sensor etiquetada como  $s4$  y sale del mismo por la cámara del sensor  $s1$ , de forma que el carril se mueve de izquierda a derecha. Donde cada una de las cámaras tomarán el mismo número de imágenes del carril, es decir, la primera imagen que toma la cámara del sensor  $s4$  será idéntica a la primera imagen que tomen las cámaras de los sensores  $s3$ ,  $s2$  o  $s1$ , con la única diferencia del ruido externo que haya podido ser introducido durante la captura de estas imágenes. Debido a este principio, se hace posible la eliminación de vibraciones durante la captura de imágenes.

Se capturarán imágenes a lo largo de todo el carril y por todos los sensores desde que el carril entra en el sistema hasta que sale. Posteriormente estas imágenes serán tratadas por los procesos que se describen en la arquitectura software hasta conseguir una clasificación del carril de acuerdo al estándar *EN-13674*.

## 3.4. Arquitectura software propuesta

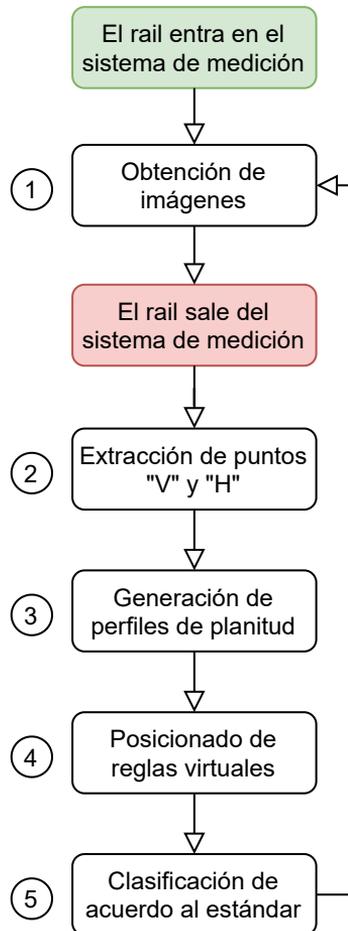
La arquitectura software del sistema propuesto en esta tesis se puede dividir en las partes que se muestran en la figura 3.10.

La primera parte es la obtención de imágenes del carril, que se lleva a cabo desde que el carril entra en el sistema físico hasta que sale de él. Esta parte no se analizará en esta tesis, sino que se dará por hecho y servirá de entrada para el resto de los componentes. En esta parte se obtienen imágenes de la cabeza del carril que serán, posteriormente utilizadas para la extracción de puntos en los que se debe medir la planitud.

La segunda parte de esta arquitectura es la extracción de los puntos  $H$  y  $V$  de cada uno de los perfiles de la cabeza que ha capturado cada uno de los sensores. Esto extraerá, de la nube de puntos que ha sido capturada por cada sensor en los puntos donde se debe comprobar la planitud. Esto se comentará con mayor profundidad en el capítulo 4 en la sección 4.2.

La tercera parte es la extracción de perfiles longitudinales de planitud mediante el procesamiento de las imágenes adquiridas en la primera parte. La tarea que se lleva a cabo en esta parte no es otra que la extracción de los perfiles longitudinales de planitud vertical y horizontal del carril mediante el uso de cada uno de los puntos  $V$  y  $H$  extraídos de cada uno de los sensores en el proceso anterior. Esta parte se comenta en profundidad en el capítulo 4 en la sección 4.3.

La cuarta parte de esta arquitectura software consiste en utilizar los perfiles



**Figura 3.10:** Diagrama de la arquitectura software del sistema.

longitudinales de planitud extraídos en el proceso anterior y posicionar reglas virtuales para la medición de la planitud. En qué consiste una regla virtual y el posicionamiento de estas para la medición de la planitud se explica con detalle en el capítulo 5 en la sección 5.3.

Por último, la quinta parte de esta arquitectura se trata de, una vez posicionadas las reglas virtuales para medir la planitud del carril, clasificar este de acuerdo con la norma *EN-13674*, en clase *A* si posee una muy buena planitud, en clase *B* si su planitud no es tan buena, o descartarlo si no cumple con ninguna de las dos

clases anteriores. La clasificación de acuerdo a este estándar se explica con mayor profundidad en el capítulo 5 en la sección 5.5.



## Capítulo 4

# Extracción de perfiles longitudinales de los carriles

### 4.1. Introducción

La medición de la planitud del carril comienza con la extracción de una serie de puntos en toda la longitud del mismo, estos puntos son los  $V$  y  $H$  definidos anteriormente y que se pueden ver en la figura 4.1.

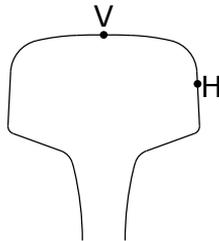


Figura 4.1: Puntos a medir.  $H$  y  $V$

Estos dos puntos se deben medir periódicamente durante toda la longitud del carril para lograr una curva de valores para cada una de las dimensiones que se quieren medir. De esta forma, se obtiene el perfil longitudinal superior (rojo) y el perfil longitudinal lateral (azul) tal y como se puede ver en la figura 4.2.

Para medir los perfiles del carril, tanto de la curva de puntos  $H$  como la de puntos  $V$ , se hace que este circule bajo una estructura donde están colocados una serie de sensores, que permiten extraer así los puntos necesarios para llevar a cabo la medición de los perfiles.

En este capítulo se describirá la forma de medir los perfiles del carril usando  $n$  sensores, separados entre ellos a una distancia fija pero preferentemente no igual

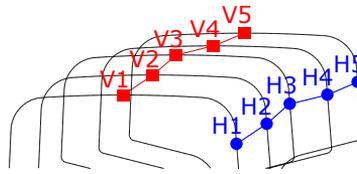


Figura 4.2: Puntos medidos a lo largo del carril

entre los sensores. Esto se puede observar en la figura 4.3.

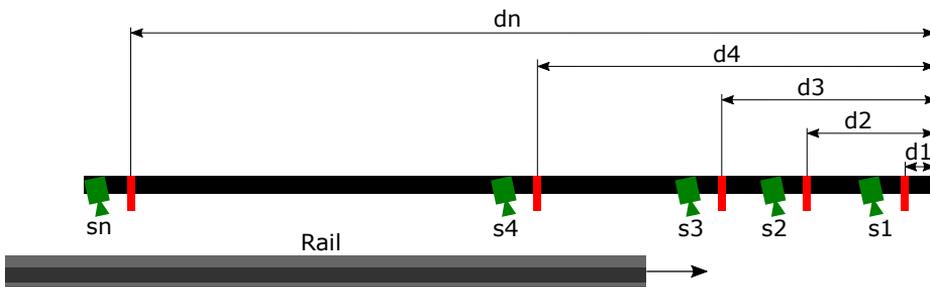


Figura 4.3: Raíl, sensores y distancias

La distancia a la que se coloca un sensor se define siempre desde el principio del sistema, incrementándose cada vez más cuanto más alto es el número del mismo. Siendo la distancia  $d1$  la existente entre el inicio del sistema y el primer sensor ( $S1$ ),  $d2$  la distancia entre el inicio y el segundo sensor ( $S2$ ) y así sucesivamente hasta el último sensor ( $SN$ ) cuya distancia desde el principio del sistema es  $dn$ .

La forma de trabajo de este sistema es repetir el proceso que se explicará en este capítulo, para cada una de las dimensiones,  $V$  y  $H$ , que se desea calcular. Hay que tener en cuenta, que una vez termine el carril de circular bajo este sistema, se tendrán  $n$  mediciones de este carril, una por cada sensor del sistema. Esto ayudará a eliminar cualquier posible vibración del carril que se produzca al pasar bajo el sistema.

La figura 4.4 muestra un diagrama de todas y cada una de las fases de trabajo del sistema propuesto para facilitar la comprensión de los pasos a realizar. Este esquema define los siguientes puntos:

1. Obtención del modelo del carril: Se debe obtener el modelo del perfil de la sección del carril que se va a medir, que será uno de los definidos en alguno de los estándares como son la *EN-13674*, *UIC-860*, *AREMA*, etc.

2. División en primitivas del perfil del modelo: El modelo obtenido en el punto anterior se debe dividir en primitivas geométricas. Esto se explicará con detalle en la sección 4.2.1.
3. Obtención de imágenes: Para cada una de las secciones longitudinales del carril, cada uno de los sensores capturará una imagen.
4. Obtención de la nube de puntos: Para cada una de las imágenes capturada por los sensores, se debe transformar a una nube de puntos. Tanto esta fase como la anterior, no entran dentro del ámbito de esta tesis, sino que se presupone que viene dada. Esta nube de puntos es extraída por mediante el uso de los sensores de los *perfilómetros láser*.
5. Alineación de la nube de puntos al modelo. Las nubes de puntos se deben ajustar al modelo para el posterior análisis de las mismas, haciendo que se sitúen *encima* del modelo del perfil del carril. Esto se explicará con detalle en la sección 4.2.2.
6. Ajuste de la nube de puntos a primitivas del modelo: Una vez se han alineado el modelo del carril y las nubes de puntos, se deben dividir los puntos de las nubes de tal forma que cada primitiva del carril tenga los que se corresponden con ella. Ahora que cada primitiva del modelo tiene los puntos de la nube de puntos capturada por los sensores, se hace que una nueva primitiva, que se denominará *primitiva ajustada*, pase por dichos puntos. Esto se detalla en la sección 4.2.3.
7. Cálculo de  $V$  y  $H$ : Una vez se tienen las primitivas ajustadas del modelo del perfil del carril se deben calcular los puntos  $V$  y  $H$  vistos en la figura 4.1. Esto se detalla en las secciones 4.2.4 y 4.2.5, donde se ve la extracción de  $V$  y  $H$  respectivamente.
8. Generación de perfiles longitudinales de alturas: Esta última fase del esquema de trabajo del sistema se encarga de hacer que todos los puntos  $V$  y  $H$  obtenidos a través de los pasos anteriores se conformen en un único perfil longitudinal de alturas. En cada sección longitudinal del carril se extrae la altura para cada una de las dimensiones  $V$  y  $H$  a medir. Este perfil longitudinal de alturas ya no estará influido por el efecto de las vibraciones y del ruido de medición que afectan al sistema. Esto es posible debido a la medición redundante de cada una de las secciones longitudinales del carril. Todo esto se explica con mayor detalle en la sección 4.3.

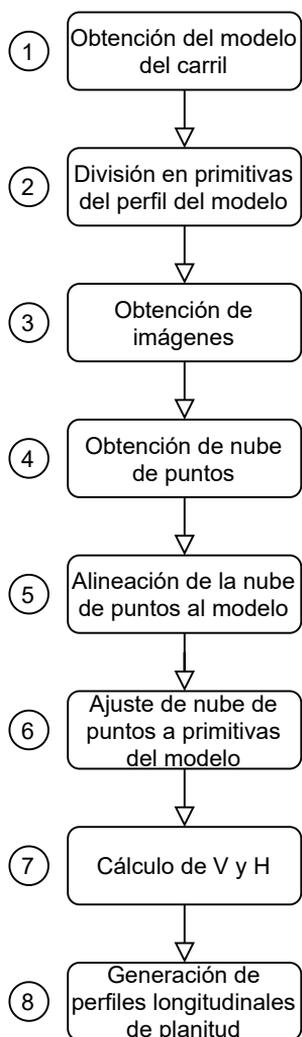
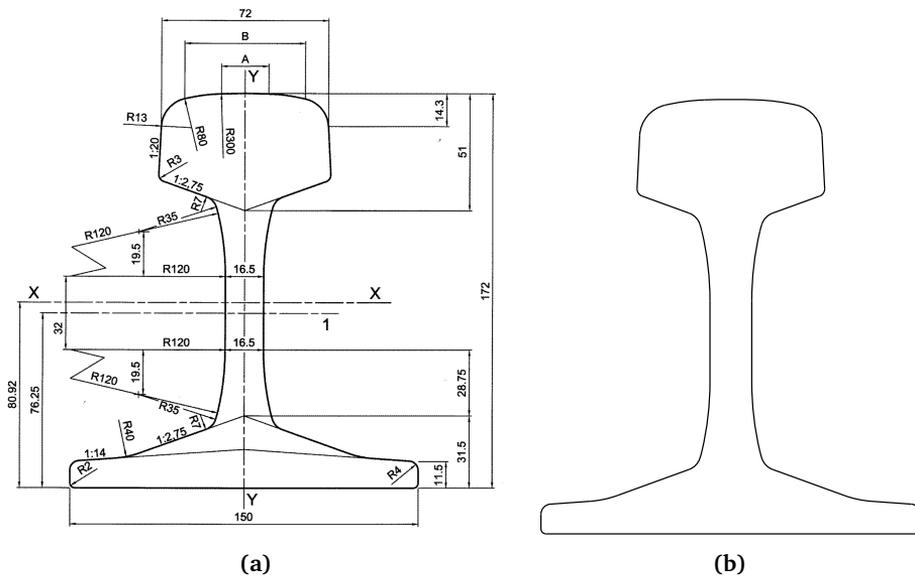


Figura 4.4: Esquema de trabajo del sistema

## 4.2. Extracción de los puntos $V$ y $H$

La extracción de puntos  $V$  y  $H$  se debe llevar a cabo para la generación de los perfiles longitudinales de alturas. La extracción de estos puntos es posible debido a que el modelo del carril que se está midiendo se conoce con anterioridad.

El modelo del carril es el tipo de perfil de la sección que sigue el carril durante toda su longitud y está definido dimensionalmente en un estándar, como el *EN-13674*. De esta forma, las nubes de puntos recogidas por los sensores se pueden aproximar al modelo conocido del carril y a partir de ahí, extraer los puntos necesarios. La figura 4.5 muestra un modelo de carril llamado *60 E1* que se describe en el estándar [9].



**Figura 4.5:** Perfil *60E1* de carril definido en el estándar *EN-13674*. (a) Definición del perfil en el estándar, imagen extraída de [9]. (b) Representación del perfil del carril en el sistema.

### 4.2.1. División del perfil del carril en primitivas del modelo

El perfil del carril se divide en primitivas geométricas, que no son otra cosa que todos los arcos y segmentos que conforman el perfil del carril, y cuyas características

geométricas se definen en el estándar.

La descripción del perfil es necesaria, ya que la imagen extraída de los sensores se debe aproximar al perfil del carril que se sabe que se está midiendo, para poder extraer cada una de las primitivas ajustadas del perfil del carril.

Un perfil de carril se define en el sistema como un conjunto de arcos y segmentos de unas características determinadas, estos arcos y segmentos siguen un nombrado propio dependiendo de la zona del carril en la que se encuentren. La figura 4.6 muestra las primitivas del modelo y sus nombres del perfil del carril 60E1.

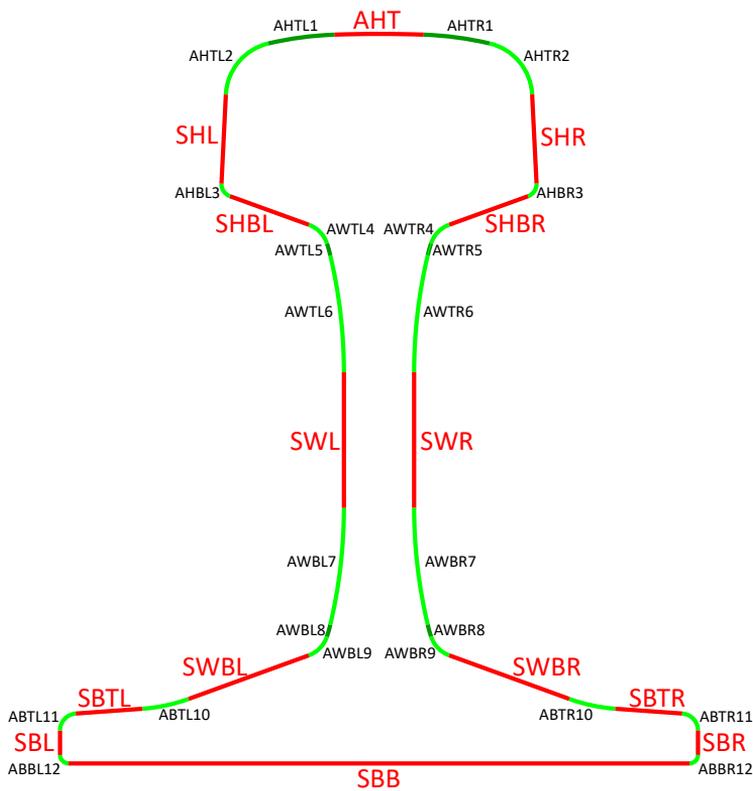


Figura 4.6: Primitivas del modelo del perfil del carril 60E1

Las primitivas del carril se pueden dividir, según su importancia a la hora de definir el modelo en dos grandes categorías, primitivas principales y primitivas secundarias. Las primitivas principales son aquellas que determinan la forma del

carril de forma inequívoca. Estas primitivas se muestran en color rojo en la figura 4.6.

Cada una de las primitivas del carril tiene un nombre, que sigue las reglas:

- El primer carácter del nombre es  $A$  si se trata de un arco o  $S$  si se trata de un segmento.
- El segundo carácter del nombre es:
  - Una  $H^1$  si se trata de una primitiva de la cabeza del carril.
  - Una  $W^2$  si se trata de una primitiva del alma del carril.
  - Una  $B^3$  si se trata de una primitiva del patín del carril.
- El tercer carácter del nombre es:
  - Una  $T^4$  si se encuentra en la parte superior de la región a la que pertenece.
  - Una  $B^5$  si se encuentra en la parte inferior de la región a la que pertenece.
  - Ninguna letra en el caso de encontrarse en la parte central de la región a la que pertenece.
- La siguiente letra se trata de una  $L^6$  o  $R^7$  dependiendo de si la primitiva se encuentra a la izquierda o a la derecha del carril.
- Por último un número, que consta de uno o dos dígitos. Este número se pone en las primitivas secundarias y se numeran de forma secuencial de la parte superior del carril a la inferior. La numeración empieza en la cabeza del carril y sigue hacia la derecha y la izquierda, siendo los números de estos dos lados independientes entre sí.

Las primitivas principales del carril son las siguientes, en orden de arriba a abajo:

- AHT: Arco central de la cabeza.
- SHL y SHR: Segmentos laterales de la cabeza.
- SHBL y SHBR: Segmentos en la base de la cabeza. Estos segmentos no tienen por qué existir en todos los modelos. Por ejemplo, en los perfiles de carril asimétricos, el segmento SHBR no existe.

---

<sup>1</sup>La  $H$  viene del inglés *Head*.

<sup>2</sup>La  $W$  viene del inglés *Web*, forma en la que se denomina el alma del perfil del carril en inglés.

<sup>3</sup>La  $B$  viene del inglés *Base*, forma en la que se denomina el patín del perfil del carril en inglés.

<sup>4</sup>La  $T$  viene del inglés *Top*, superior.

<sup>5</sup>La  $B$  viene del inglés *Bottom*, inferior.

<sup>6</sup>La  $L$  viene del inglés *Left*, izquierda.

<sup>7</sup>La  $R$  viene del inglés *Right*, derecha.

- SWL y SWR: Segmentos centrales del alma. La parte central del alma puede estar formada por arcos en lugar de segmentos para algunos perfiles de carril, en este caso, su nombre sería AWL y AWR.
- SWBL y SWBR: Segmentos en la base del alma.
- SBTL y SBTR: Segmentos en la parte superior del patín del carril. Al igual que sucede con SHBR, el segmento SBTR no tiene por qué existir en el mismo caso de antes.
- SBL y SBR: Segmentos en los laterales del patín.
- SBB: Segmento en la base del patín.

#### 4.2.2. Alineación de la nube de puntos al modelo del carril

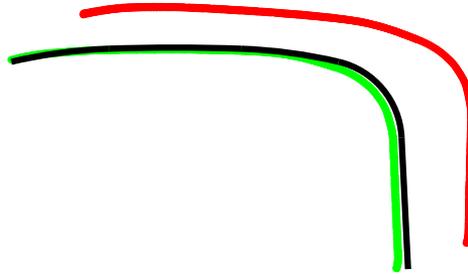
La información obtenida de los sensores consta de una nube de puntos que se asemeja al modelo del carril. Esta nube de puntos contiene la parte del carril que es iluminada por el haz de luz láser que se proyecta sobre el carril, y contiene la cabeza del carril, parte necesaria para la extracción de los puntos donde se debe medir la planitud.

La nube de puntos obtenida por el sensor no tiene por qué superponerse inicialmente con el modelo, y puede ir moviéndose en cualquier dirección, debido a las vibraciones que se producen durante la adquisición de imágenes y que se han visto en la sección 3.2.1. Debido a esto y para continuar con la extracción de los puntos donde se debe medir la planitud del carril, la nube de puntos medida por el sensor debe alinearse con el modelo hasta conseguir la mejor superposición posible. La alineación de la nube de puntos al modelo se puede observar en la figura 4.7.

En la figura 4.7 se ve en color rojo la nube de puntos extraída por un sensor, en color verde la misma nube de punto alineada encima del modelo, y en color negro se muestra el modelo.

Para llevar a cabo el alineado del perfil del carril con el modelo del mismo se lleva a cabo una transformación geométrica sobre la nube de puntos obtenida por el sensor. Esta transformación geométrica está compuesta de dos partes fundamentales:

- Traslación, los puntos originales se mueven en los dos ejes del plano.
- Rotación, los puntos originales rotan entorno alrededor de un punto central, el cual no tiene por qué pertenecer a dicha nube de puntos.



**Figura 4.7:** Alineación de un perfil del carril

La figura 4.7 muestra un ejemplo de una pequeña rotación y una pequeña traslación de la nube de puntos original hasta ajustarse al modelo.

Para obtener esta transformación se utiliza un método llamado ICP<sup>8</sup>, este algoritmo lleva a cabo las siguientes acciones:

1. Para cada punto de la nube de puntos medida busca el punto más cercano de la nube de puntos del modelo.
2. Se calcula una transformación desde la nube de puntos medida hasta la nube de puntos del modelo. Dicha transformación minimiza la distancia entre los puntos de ambas nubes, para ello se utiliza la distancia basada en mínimos cuadrados.
3. Se aplica la transformación obtenida a la nube de puntos obtenida.
4. Se repiten los pasos anteriores hasta que el algoritmo converja. Se considera que el algoritmo converge cuando:
  - Se han alcanzado cierto número de iteraciones, valor pasado al algoritmo.
  - Si la distancia media entre los puntos es menor que un valor pasado al algoritmo.
  - La diferencia entre la última transformación y la transformación actual es menor que el valor que se le pasa algoritmo.

Una vez se ha obtenido la transformación mediante el algoritmo anterior, ésta se aplica a la nube de puntos de entrada para ajustarla con el modelo.

---

<sup>8</sup>ICP: Abreviatura del inglés, *Iterative Closest Point*.

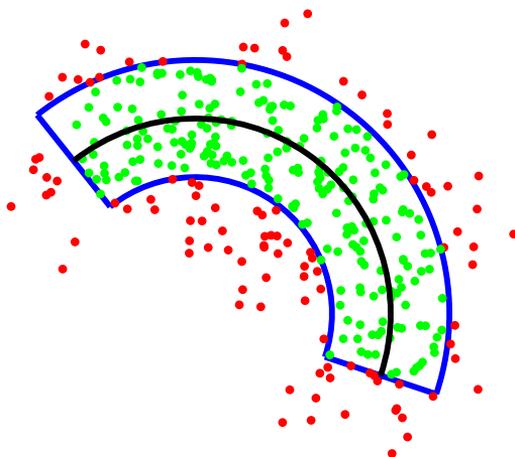
### 4.2.3. Extracción de las primitivas ajustadas de la cabeza del carril

Una vez la nube de puntos extraída se ha alineado con el modelo del perfil del carril, se debe ajustar mediante un conjunto de primitivas ajustadas las cuales se corresponderán con los segmentos y arcos del modelo del carril.

Este proceso se debe llevar a cabo primitiva a primitiva, seleccionando la nube de puntos que se ajusta correctamente a cada primitiva. Para llevar a cabo esta selección de puntos de la nube, se crea alrededor de cada primitiva del modelo del carril una región dentro de la cual los puntos que se encuentren en ella se asocian a dicha primitiva del modelo.

Esta región alrededor de una primitiva del modelo se conoce como *envoltorio*, un ejemplo de esto se puede ver en la figura 4.8.

En la figura 4.8 se puede ver un envoltorio de un arco en color azul, el arco se muestra en color negro. En color verde se pueden ver los puntos de la nube de puntos que se asocian con dicho arco y en color rojo los puntos que no.



**Figura 4.8:** *Envoltorio* de una primitiva del modelo

Este proceso se debe realizar para cada una de las primitivas del modelo de las que se deba llevar a cabo la extracción, en este caso y debido a que los puntos que se van a extraer, tan solo se debe hacer esa extracción para las primitivas de la cabeza del carril.

Debido a que aproximar las nubes de puntos de cada primitiva del modelo con arcos y segmentos podría generar más error, las primitivas se ajustan con círculos y líneas respectivamente. La subfigura 4.9a muestra en color verde la nube de puntos que ha sido alineada con el modelo, dibujado en color negro. Las primitivas de la cabeza del carril ajustadas a la nube de puntos se pueden ver en color rojo y azul.

En la subfigura se puede 4.9b se puede ver un ejemplo de dos nubes de puntos a partir de las cuales se aproxima una línea, la correspondiente a la primitiva  $SHR$ , en caso de la línea y la correspondiente al arco  $AHTL1$ . Las primitivas aproximadas se muestran en color morado, las nubes de puntos a partir de las cuales se han extraído dichas primitivas se muestran también en color morado y el modelo del carril en color verde.

### 4.2.4. Cálculo de $V$ en la primitiva ajustada $AHT$

Para llevar a cabo el cálculo de las dimensiones del carril de una forma más eficiente, se utiliza una caché que contendrá un conjunto de líneas que apoyarán el cálculo de los puntos  $V$  y  $H$ . Este conjunto de líneas se calculará antes de que el carril empiece a ser medido por el sistema.

Se utiliza una línea vertical como apoyo al cálculo del punto  $V$ , el cálculo de esta línea se puede ver en la figura 4.10 y se lleva a cabo de la siguiente forma:

- Se extrae la primitiva del arco  $AHT$  de la cabeza del carril del modelo.
- Se calcula el punto medio de dicho arco, que se muestra en color rojo en la figura 4.10.
- Se hace que una línea vertical pase por dicho punto, que se puede ver en la figura 4.10 de color verde.

Una vez se ha calculado dicha línea antes del inicio de la medición de la planitud del carril, se procede al cálculo de  $V$ , que se puede ver en la figura 4.11 y se lleva a cabo de la siguiente forma.

- A partir de la nube de puntos tomada por el sensor, se calcula el ajuste a la circunferencia  $AHT$  que en la figura 4.11 se puede ver en color rojo.
- Con la ayuda de la línea calculada antes y almacenada en la cache (en la figura 4.11 se puede ver en color verde), se buscan los puntos de corte entre la circunferencia  $AHT$  ajustada y esta línea.
- El punto de corte superior será  $V$  que en la figura 4.11 se muestra en color rojo.

El uso de la caché del carril, más allá de aportar eficiencia hace posible el cálculo de los puntos. Esto se debe a que al hacer el ajuste de la nube de puntos extraída de un sensor a primitivas, como se comentó anteriormente no se ajusta a arcos y segmentos, sino a circunferencias y líneas.

Como es el caso de la línea de ayuda para el cálculo de  $V$ , se trata de una línea que pasa por el punto medio del arco de la cabeza del carril, que cuando se aproxime desde la nube de puntos obtenida del sensor, será una circunferencia y no un arco, y por lo tanto, no tendrá punto central. Debido a esto, es necesario el uso de líneas auxiliares. Algo similar sucede en el caso del cálculo de  $H$  que se verá a continuación.

#### 4.2.5. Cálculo de $H$ en la primitiva ajustada $SHR$

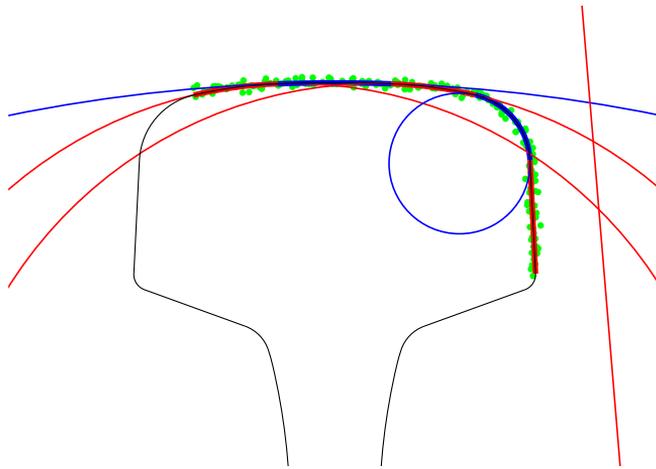
El cálculo del punto  $H$  para la medición de planitud horizontal, al igual que en el caso del punto vertical, se basa en el uso de la caché del carril precalculada sobre el modelo antes de empezar la medición.

En este caso se utiliza una línea horizontal para conocer la altura a la que se debe cortar el segmento  $SHR$ . La extracción de esta línea se puede observar en la figura 4.12 y se lleva a cabo de la siguiente forma:

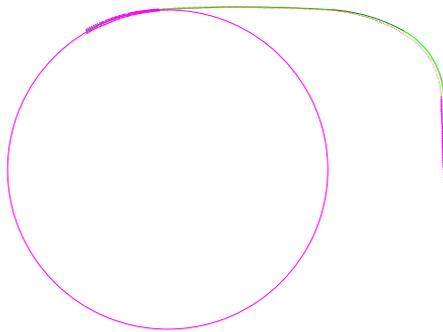
1. Sobre el modelo se extrae el segmento  $SHR$  del lateral de la cabeza del carril. Se puede ver en la figura 4.12 de color rojo.
2. Una vez se ha extraído este segmento, se selecciona el extremo inicial (superior) del mismo y se traza una circunferencia de 5 mm de radio. Esto es así ya que según la EN-13674 el punto  $H$  debe estar entre 5 mm y 10 mm por debajo de la esquina de la cabeza del carril.
3. Se hace que una línea pase por el segmento  $SHR$ .
4. Se buscan los puntos de corte entre la línea y la circunferencia, una vez se tienen, se selecciona el que esté dentro del segmento.
5. Se hace pasar una línea paralela al eje horizontal por dicho punto. Esta línea se muestra de color verde en la figura 4.12.

Una vez se ha calculado la línea necesaria, el cálculo del punto  $H$  se muestra en la figura 4.13, y se lleva a cabo de la siguiente forma:

- Se estima la línea  $SHR$  a partir de la nube de puntos tomada por el sensor.
- Utilizando la línea calculada anteriormente y almacenada en la caché (dibujada en la figura 4.13 en color verde), se calcula el punto de corte con la línea de  $SHR$  y éste será el punto  $H$ .



(a)



(b)

**Figura 4.9:** Ajuste de nubes de puntos a primitivas del modelo. (a) Muestra todas las primitivas que se deben extraer de la nube de puntos. (b) Muestra una circunferencia y una línea con sus respectivas nubes puntos.

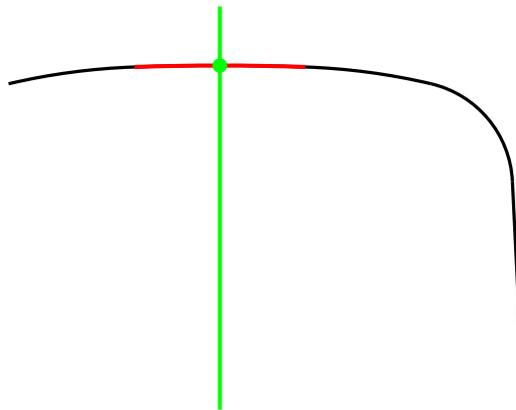


Figura 4.10: Cálculo de la línea de la caché del carril para el cálculo de V.

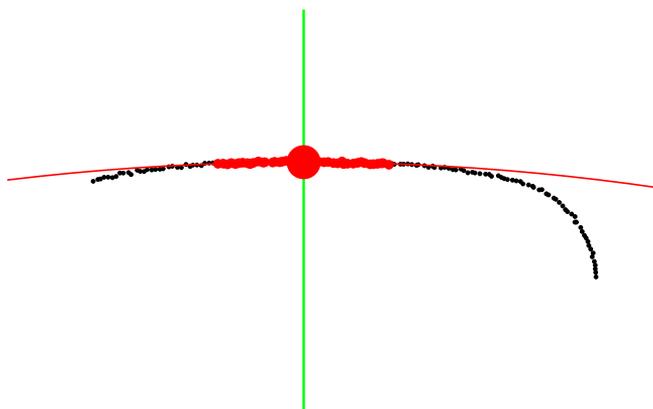
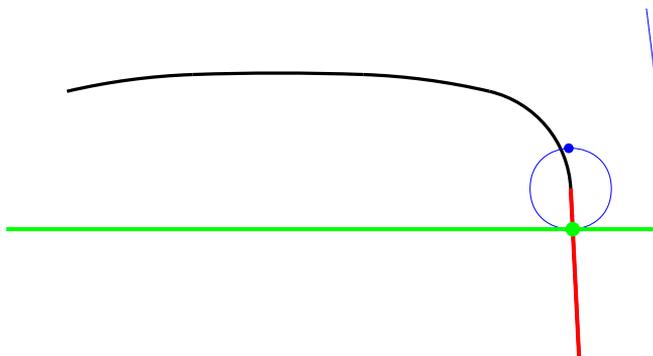
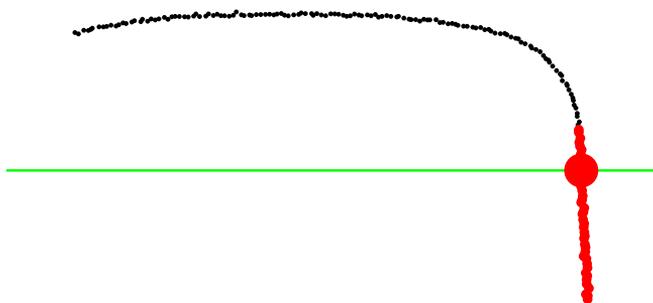


Figura 4.11: Cálculo de V.



**Figura 4.12:** Cálculo de la línea de la caché del carril para el cálculo de  $H$ .



**Figura 4.13:** Cálculo de  $H$ .

### 4.3. Extracción de los perfiles longitudinales de alturas

Una vez se ha visto como es la extracción de los puntos  $V$  y  $H$  para cada una de las imágenes tomadas por los sensores del sistema, ahora se debe con estas mediciones, crear los perfiles longitudinales de alturas para las dos dimensiones  $V$  y  $H$  a analizar.

Con la finalidad de eliminar los ruidos que se introducen debido a las vibraciones, vistas en la sección 3.2.1 y al ruido de medición visto en la sección 3.2.2 del capítulo 3, el carril que circula bajo un sistema con múltiples sensores de triangulación láser, los cuales capturarán tantas imágenes de cada una de las secciones del carril como sensores haya en dicho sistema.

#### 4.3.1. Definición del método

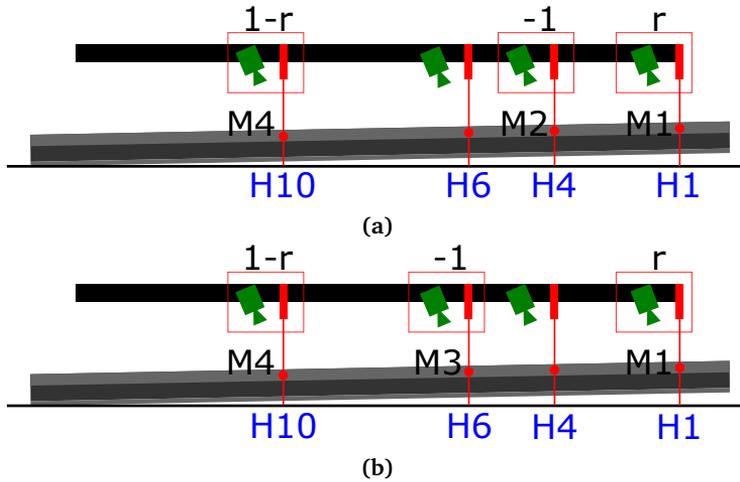
Cuando el carril termine de pasar a través de este sistema, se tendrán  $n$  imágenes para cada una de las secciones del carril, siendo  $n$  el número de sensores del sistema. De estas imágenes y usando el método descrito en la sección 4.2, se deben extraer los puntos  $V$  y  $H$  para todas ellas, con lo que se tendrán  $n$  medidas del punto  $V$  y  $n$  medidas del punto  $H$  para cada posición longitudinal del carril.

Por tanto, para poder extraer un único perfil longitudinal para cada una de las dimensiones, se deben convertir esas  $n$  mediciones en una única medición, con la particularidad de que esta medición para cada posición longitudinal del carril no se debe ver afectada por los ruidos a los que el carril está expuesto durante su medición. Para ello se agruparán los sensores en grupos de 3, asignándole a cada sensor un peso dentro de este grupo. De esta forma, se compara en un mismo instante, como afecta una vibración (en el caso de existir) al conjunto de los tres sensores, y así poder compensar ésta.

La figura 4.14 muestra el peso que se les otorga a dos ejemplos de sensores en el mismo instante de medición. Que es en cada caso:

- Sensor izquierdo: Se le otorga el valor  $1 - r$ , siendo  $r$  el ratio o peso.
- Sensor central: Se le otorga el valor  $-1$ .
- Sensor derecho: Se le otorga el valor  $r$ , siendo  $r$  el ratio o peso.

El cálculo del valor del ratio o peso  $r$ , se lleva a cabo en relación a la distancia de cada sensor con el sensor central, el cálculo de este ratio se explicará con detalle en



**Figura 4.14:** Ejemplo de cuatro sensores cogidos de tres en tres con sus pesos o ratios.

la sección 4.3.2.

De esta forma, debido a que la vibración no afecta por igual a todas las imágenes tomadas por todos los sensores pero sin embargo puede llegar a apreciarse en todos de mayor o menor medida es posible la compensación de dicha vibración, dado que lo que se está midiendo es un objeto rígido, el cual, al verse afectado por una vibración lo hace en una extensión muy amplia de su longitud.

De acuerdo con la subfigura 4.14a en el primer conjunto de tres sensores se tiene que:

- El primer sensor del grupo de tres, con peso  $r$ , obtiene el valor  $M1$  para un valor de altura (en este caso horizontal) desconocido, que se desea obtener, pero que se denomina  $H1$ , que será el valor de la planitud horizontal del carril en su longitud 1.
- El segundo sensor del grupo de tres, con peso  $-1$ , obtiene el valor  $M2$  para un valor de altura desconocido denominado  $H4$ , que será el valor de la planitud horizontal del carril en su longitud 4.
- El tercer sensor del grupo de tres, con peso  $1-r$ , obtiene el valor  $M4$  para un valor de altura desconocido denominado  $H10$ , que será el valor de la planitud horizontal del carril en su longitud 10.

De tal forma que la combinación ponderada de las incógnitas es igual a la media ponderada de las ecuaciones (4.1).

$$(1-r)H10 - 1H4 + rH1 = (1-r)M4 - 1M2 + rM1 \quad (4.1)$$

De forma similar sucede con la subfigura 4.14b en el primer conjunto de tres sensores se tiene que:

- El primer sensor del grupo de tres, con peso  $r$ , obtiene el valor  $M1$  para un valor de altura (en este caso horizontal) desconocido, que se desea obtener, pero que se denomina  $H1$ , que será el valor de la planitud horizontal del carril en su longitud 1.
- El segundo sensor del grupo de tres, con peso  $-1$ , obtiene el valor  $M3$  para un valor de altura desconocido denominado  $H6$ , que será el valor de la planitud horizontal del carril en su longitud 6.
- El tercer sensor del grupo de tres, con peso  $1-r$ , obtiene el valor  $M4$  para un valor de altura desconocido denominado  $H10$ , que será el valor de la planitud horizontal del carril en su longitud 10.

De igual forma que en el caso anterior, todo lo visto da lugar a (4.2).

$$(1-r)H10 - 1H6 + rH1 = (1-r)M4 - 1M3 + rM1 \quad (4.2)$$

Durante el movimiento del carril bajo este sistema se van capturando imágenes con todos los sensores para así, de forma similar a lo que se ha ilustrado en la figura 4.14 para un momento del tiempo y para un determinado grupo de sensores, se obtiene un sistema de ecuaciones con tantas incógnitas como valores de alturas se deban obtener, la resolución de este sistema de ecuaciones proporciona los perfiles longitudinales de alturas cuando se realiza para ambas dimensiones a medir. Estos perfiles longitudinales de alturas no estarán influidos por las vibraciones.

Este sistema de ecuaciones tendrá más ecuaciones que incógnitas, por lo que la solución del mismo pasa por aplicar mínimos cuadrados para su resolución.

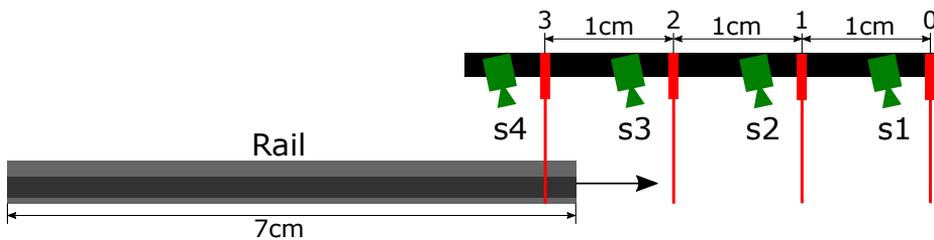
La forma de construir este sistema de ecuaciones se ve con mayor detalle en la sección 4.3.2, donde se explican las variables y constantes que se van a utilizar, y en la sección 4.3.3 donde se explica el método de resolución.

#### 4.3.1.1. Ejemplos sobre el método

Con la finalidad de facilitar la comprensión del método se utilizarán dos ejemplos. En ambos ejemplos se utilizarán cuatro sensores para llevar a cabo la

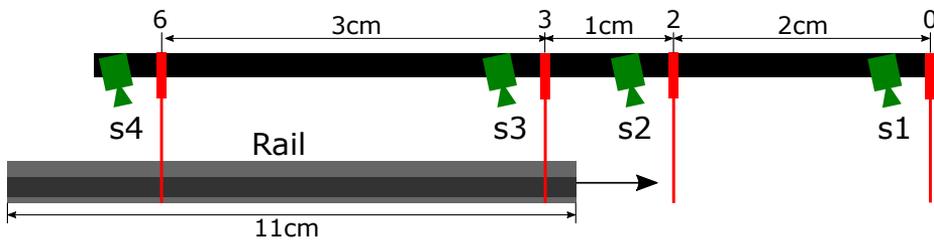
medición de planitud del carril. Se explicará con mayor detalle las particularidades de estos ejemplos durante la descripción de las variables y constantes del sistema.

El primer ejemplo consta de un sistema donde los cuatro sensores están equiespaciados a 1 cm cada uno, estando el primer sensor en la posición 0 cm y el segundo sensor en la posición 1 y así sucesivamente. Se medirá un carril de 7 centímetros, que será medido cada centímetro por los sensores. Una figura de este sistema se puede observar en 4.15. En adelante a este ejemplo se le denominará *Ejemplo de arquitectura equiespaciada*.



**Figura 4.15:** Diagrama del *Ejemplo de arquitectura equiespaciada*

El segundo ejemplo al igual que el anterior consta de cuatro sensores, pero en este caso no equiespaciados. El primer sensor estará en la posición 0 cm, el segundo en la posición 2 cm, el tercero en la posición 3 cm y el cuarto en la posición 6 cm. Se medirá un carril de 11 centímetros, que será medido centímetro a centímetro por los sensores. La figura 4.16 muestra un diagrama de este sistema. En adelante a este ejemplo se le denominará *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada*.



**Figura 4.16:** Diagrama del *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada*

Estos ejemplos se utilizarán durante las secciones 4.3.2, y 4.3.3.

### 4.3.2. Constantes y variables del método

El método utiliza una serie de variables y constantes para su desarrollo. Las cuales son detalladas a continuación, y se ejemplificarán utilizando los ejemplos A y B descritos anteriormente. Estas variables serán utilizadas durante toda la definición del método:

- $s$ : Esta constante indica cada cuantos centímetros de avance del carril se captura una imagen del carril por cada uno de los sensores.
- $L$ : Esta constante que indica el tamaño del carril expresado en centímetros.
- $l$ : Esta variable contiene la longitud del carril expresada en secciones. Una sección es cada una de las imágenes tomadas del carril. Teniendo en cuenta que se toma una imagen cada  $s$  centímetros. En caso de no ser un resultado exacto, se deberá redondear siempre al alza (4.3).

$$l = \frac{L}{s} \quad (4.3)$$

- $n$ : Número de sensores que se van a utilizar.
- $c$ : Todas las combinaciones posibles del número del sensor tomados de tres en tres (4.4).

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & n \\ 1 & 3 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & n \\ \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-1 & n \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

- $d$ : Igual que la matriz de combinaciones anterior,  $c$ , pero en lugar de con el número del sensor, con la posición que ocupa el mismo (4.5).

$$d = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_1 & d_2 & d_4 \\ \dots & \dots & \dots \\ d_1 & d_2 & d_n \\ d_1 & d_3 & d_4 \\ \dots & \dots & \dots \\ d_1 & d_3 & d_n \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n-2} & d_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

- $C$ : Número total de las combinaciones ( $c$  o  $d$ ) de los sensores. El número total de combinaciones viene dado por la ecuación (4.6).

$$C = \frac{n!}{3!(n-3)!} \quad (4.6)$$

- $r$ : Este vector contendrá el ratio de distancias del sensor central respecto al sensor de la izquierda y del sensor derecho respecto al sensor de la izquierda. Habrá un valor para cada una de las combinaciones de  $d$ . La fórmula para extraer el valor de cada una de las filas de este valor es (4.7).

$$r[i] = \frac{d[i][1] - d[i][0]}{d[i][2] - d[i][0]} \quad (4.7)$$

Que visto en forma de vector queda 4.8

$$r = \begin{pmatrix} \frac{d_2-d_1}{d_3-d_1} \\ \frac{d_2-d_1}{d_4-d_1} \\ \dots \\ \frac{d_2-d_1}{d_n-d_1} \\ \frac{d_3-d_1}{d_4-d_1} \\ \dots \\ \frac{d_3-d_1}{d_n-d_1} \\ \dots \\ \frac{d_{n-1}-d_{n-2}}{d_n-d_{n-2}} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

- **M:** Matriz de medidas. Es una matriz donde se recoge toda la información obtenida de los sensores del sistema. Se explicará con más detalle a continuación.
- **P:** Matriz de posiciones. Esta matriz indica la posición o sección de carril que se está midiendo en cada momento en concreto. Se explicará con más detalle a continuación.

Quedan por definir dos variables, que son la matriz  $M$  de medidas y la matriz  $P$  de posiciones.

La matriz  $M$  de medidas será otra de las variables y contendrá una matriz que en cada fila contendrá el valor recogido por los  $n$  sensores o en su lugar, un valor inválido  $NaN^9$ , en caso de que dicho sensor no tuviera nada que medir, bien sea por que el carril no había llegado hasta dicho sensor o bien, porque no ha sido capaz de obtener una medición válida por cualquier otra razón.

En la matriz  $M$  de *medidas* se tendrán tantas columnas como mediciones se hayan tomado dentro del sistema, teniendo en cuenta que las mediciones se van introduciendo de forma escalonada, ya que los sensores están separados entre ellos a lo largo de todo el sistema.

La matriz de *medidas*,  $M$ , se puede ver en la figura 4.17.

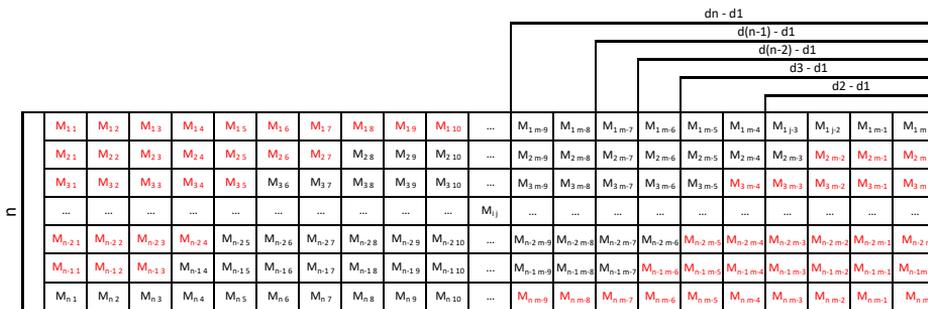


Figura 4.17: Representación de la matriz de *medidas*,  $M$

Esta matriz tiene  $n$  filas, una por cada uno de los sensores del sistema y  $j$  columnas, una por cada imagen que se toma del carril desde que entra al sistema hasta que sale.

<sup>9</sup>NaN: Proviene del acrónimo en inglés, *Not A Number* (no es un número)

Hay que tener en cuenta que el carril entra en el sistema por la parte más cercana al último sensor, el  $n$ , y sale del mismo por el primero, circulando éste de izquierda a derecha. De forma inversa, pasa a la hora de que el carril salga del sistema, los primeros sensores en dejar de obtener capturas válidas de este carril serán los primeros que empezaron a medirlo, e irán obteniendo medidas inválidas de forma gradual. De esta forma, en la matriz anterior, se puede observar que alguna de las medidas se muestran en color *rojo*, esas medidas son aquellas que debido a que el carril aún no ha llegado a ellas, o ya ha terminado de pasar, en el momento de captura de esta imagen, no poseen información relativa al mismo, y por lo tanto tendrán valores inválidos o *NaNs*.

La nomenclatura de cada una de estas capturas que toma cada uno de estos sensores, es como sigue:

- $M_{i,j}$ : Indicará que es la medición del sensor con número  $i$  en el instante  $j$ , como se puede observar en la figura 4.17.

La matriz  $P$  de posiciones es una matriz donde se almacenará la posición del carril que está siendo medida en cada momento. Esta matriz tendrá el mismo número de filas que la matriz  $M$  de columnas, debido a que se tendrá una fila por cada medición tomada, y el mismo número de columnas que  $M$  de filas, puesto que dispone de una columna por sensor del sistema.

#### 4.3.2.1. Constantes y variables del método para el *Ejemplo de arquitectura equiespaciada*

Las variables y constantes para el *Ejemplo de arquitectura equiespaciada* son las siguientes:

- El valor de  $s$  es (4.9).

$$s = 1 \quad (4.9)$$

- El valor de  $L$  es (4.10).

$$L = 7 \quad (4.10)$$

- El valor de  $l$  es (4.11).

$$l = \frac{7}{1} = 7 \quad (4.11)$$

- El valor de  $n$  es (4.12).

$$n = 4 \quad (4.12)$$

- El valor de  $c$  es (4.13).

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

- El valor de  $d$  es (4.14).

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

- El valor de  $C$  es (4.15).

$$C = 4 \quad (4.15)$$

- El valor de  $r$  es (4.16).

$$r = \begin{pmatrix} \frac{1-0}{2-0} \\ \frac{1-0}{3-0} \\ \frac{2-0}{3-0} \\ \frac{2-1}{3-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

- Debido a que la matriz  $M$  es una matriz que se va construyendo en el tiempo. En las secciones 4.3.2.1.1 y 4.3.2.1.2 se muestran el primer y último periodo, el ejemplo completo se muestra en la sección 8.1 del anexo.
- Debido a que la matriz  $P$  es una matriz que se va construyendo en el tiempo. En las secciones 4.3.2.1.1 y 4.3.2.1.2 se muestran el primer y último periodo, el ejemplo completo se muestra en la sección 8.1 del anexo.

#### 4.3.2.1.1. Matrices $M$ y $P$ en el periodo 1

La figura 4.18 muestra el sistema al inicio del mismo, justo cuando el carril acaba de entrar en él.

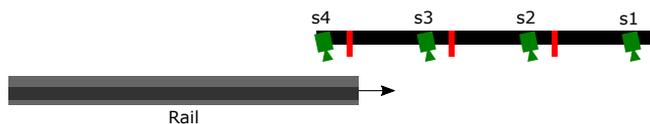


Figura 4.18: Evolución del sistema y del carril. Periodo = 1

### 4.3 Extracción de los perfiles longitudinales de alturas

Se puede observar que la única medición realizada por el sistema es la que representa en la tabla 4.1 como  $M_{41}$  y el resto, pintadas de color rojo, contendrán valores nulos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$									
$M_{21}$									
$M_{31}$									
$M_{41}$									

**Tabla 4.1:** Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo = 1*

Por otra parte, la matriz  $P$  contendrá un único valor y este será  $H1$  ya que será el primero de los valores de los que se desea conocer el valor de la planitud. Este valor estará en la columna  $S4$  puesto que es el sensor que ha *capturado* dicho valor. Esto se ve representado en la tabla 4.2.

	<b>S4</b>	<b>S3</b>	<b>S2</b>	<b>S1</b>
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

**Tabla 4.2:** Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo = 1*

#### 4.3.2.1.2. Matrices $M$ y $P$ en el periodo 10

Este es el último periodo de captura de imágenes del sistema, ya que la última sección del carril está a punto de pasar el sensor ( $S1$ ), tal y como se observa en la figura 8.10.

Todos los valores insertados en este momento son inválidos excepto el tomado por el sensor  $S1$ , tal y como se aprecia en la tabla 4.3.

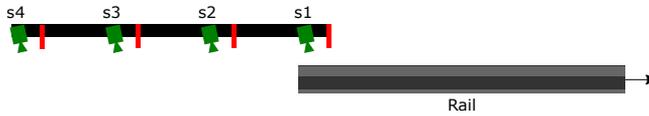


Figura 4.19: Evolución del sistema y del carril. Periodo = 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{13}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$

Tabla 4.3: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 10

El último valor que resta por medir, es decir  $H7$ , se captura ahora en el sensor  $S1$ , como se puede observar en la tabla 4.4.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3	H3 ( $M_{43}$ )	H2 ( $M_{33}$ )	H1 ( $M_{23}$ )	
4	H4 ( $M_{44}$ )	H3 ( $M_{34}$ )	H2 ( $M_{24}$ )	H1 ( $M_{14}$ )
5	H5 ( $M_{45}$ )	H4 ( $M_{35}$ )	H3 ( $M_{25}$ )	H2 ( $M_{15}$ )
6	H6 ( $M_{46}$ )	H5 ( $M_{36}$ )	H4 ( $M_{26}$ )	H3 ( $M_{16}$ )
7	H7 ( $M_{47}$ )	H6 ( $M_{37}$ )	H5 ( $M_{27}$ )	H4 ( $M_{17}$ )
8		H7 ( $M_{38}$ )	H6 ( $M_{28}$ )	H5 ( $M_{18}$ )
9			H7 ( $M_{29}$ )	H6 ( $M_{19}$ )
10				H7 ( $M_{110}$ )

Tabla 4.4: Evolución de la matriz  $P$ . Periodo = 10

#### 4.3.2.2. Constantes y variables del método para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

Las variables y constantes para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada son las siguientes:

- El valor de  $s$  es (4.17).

$$s = 1 \tag{4.17}$$

- El valor de  $L$  es (4.18).

$$L = 11 \quad (4.18)$$

- El valor de  $l$  es (4.19).

$$l = \frac{11}{1} = 11 \quad (4.19)$$

- El valor de  $n$  es (4.20).

$$n = 4 \quad (4.20)$$

- El valor de  $c$  es (4.21).

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

- El valor de  $d$  es (4.22).

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

- El valor de  $C$  es (4.23).

$$C = 4 \quad (4.23)$$

- El valor de  $r$  es (4.24).

$$r = \begin{pmatrix} \frac{2-0}{3-0} \\ \frac{2-0}{6-0} \\ \frac{3-0}{6-0} \\ \frac{3-2}{6-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{6} \\ \frac{3}{6} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

- Debido a que la matriz  $M$  es una matriz que se va construyendo en el tiempo. En las secciones 4.3.2.2.1 y 4.3.2.2.2 se ven el primer y último periodo, el ejemplo completo se muestra en la sección 8.2 del anexo.
- Debido a que la matriz  $P$  es una matriz que se va construyendo en el tiempo se representa. En las secciones 4.3.2.2.1 y 4.3.2.2.2 se ven el primer y último periodo, el ejemplo completo se muestra en la sección 8.2 del anexo.

**4.3.2.2.1. Matrices  $M$  y  $P$  en el periodo 1**

La figura 8.11 muestra el sistema al inicio del mismo, justo cuando el carril acaba de entrar en él.



**Figura 4.20:** Evolución del sistema y del carril. Periodo = 1

Se puede observar que la única medición realizada por el sistema es la que representa en la tabla 4.5 como  $M_{41}$  y el resto, pintadas de color rojo, contendrán valores nulos.

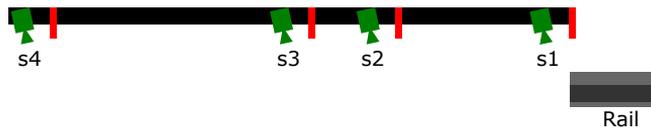
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$																
$M_{21}$																
$M_{31}$																
$M_{41}$																

**Tabla 4.5:** Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 1

Por otra parte, la matriz  $P$  contendrá un único valor y este será  $H1$  ya que será el primero de los valores de los que se desea conocer el valor de la planitud. Este valor estará en la columna  $S4$  puesto que es el sensor que ha *capturado* dicho valor. Esto se ve representado en la tabla 4.6.

**4.3.2.2.2. Matrices  $M$  y  $P$  en el periodo 17**

Este es el último periodo de captura de imágenes del sistema, ya que la última sección del carril está a punto de pasar por bajo el último de los sensores, es decir  $S1$ . Esto se puede observar en la figura 4.21.



**Figura 4.21:** Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 17

### 4.3 Extracción de los perfiles longitudinales de alturas

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

**Tabla 4.6:** Evolución de la matriz  $P$ .  $Periodo = 1$

Todos los valores insertados en este momento son inválidos excepto el tomado por el último sensor, tal y como se aprecia en la tabla 4.7.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$	$M_{111}$	$M_{112}$	$M_{113}$	$M_{114}$	$M_{115}$	$M_{116}$	$M_{117}$
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$	$M_{211}$	$M_{212}$	$M_{213}$	$M_{214}$	$M_{215}$	$M_{216}$	$M_{217}$
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$	$M_{311}$	$M_{312}$	$M_{313}$	$M_{314}$	$M_{315}$	$M_{316}$	$M_{317}$
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$	$M_{411}$	$M_{412}$	$M_{413}$	$M_{414}$	$M_{415}$	$M_{416}$	$M_{417}$

**Tabla 4.7:** Evolución de la matriz  $M$ .  $Periodo = 17$

El último valor que resta por medir, es decir  $H11$  por el sensor  $S1$ , es medido por este, como se puede observar en la tabla 4.8.

#### 4.3.3. Planteamiento y resolución del problema

Una vez han sido descritas todas las variables necesarias para la correcta definición del sistema, se debe definir el mismo.

	<b>S4</b>	<b>S3</b>	<b>S2</b>	<b>S1</b>
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10	H10 ( $M_{410}$ )	H7 ( $M_{310}$ )	H6 ( $M_{210}$ )	H4 ( $M_{110}$ )
11	H11 ( $M_{411}$ )	H8 ( $M_{311}$ )	H7 ( $M_{211}$ )	H5 ( $M_{111}$ )
12		H9 ( $M_{312}$ )	H8 ( $M_{212}$ )	H6 ( $M_{112}$ )
13		H10 ( $M_{313}$ )	H9 ( $M_{213}$ )	H7 ( $M_{113}$ )
14		H11 ( $M_{314}$ )	H10 ( $M_{214}$ )	H8 ( $M_{114}$ )
15			H11 ( $M_{215}$ )	H9 ( $M_{115}$ )
16				H10 ( $M_{116}$ )
17				H11 ( $M_{117}$ )

**Tabla 4.8:** Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo = 17*

Como se ha visto anteriormente, se parte de la base de que se dispone de una matriz  $M$  de medidas, donde cada sensor ha capturado la dimensión  $V$  o  $H$  que se esté midiendo en cada momento. Por lo que se dispondrá de  $n$  medidas para cada una de las secciones del carril, realizadas por cada uno de los sensores del sistema, lo que ayudará al sistema a evitar la influencia de las vibraciones sobre el resultado final de la medición de la planitud.

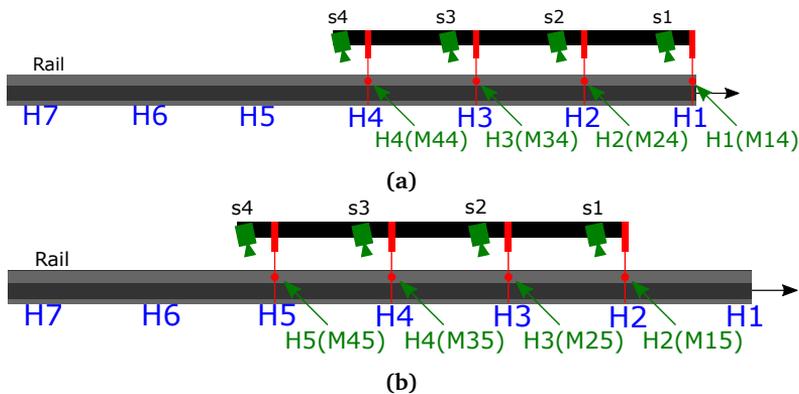
En el *Ejemplo de arquitectura equiespaciada* descrito anteriormente, había cuatro periodos de tiempo en los que los cuatro sensores obtuvieron valores válidos del carril de forma simultánea. De la misma forma que en el *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada* había cinco periodos de tiempo en los cuales las cuatro sensores del sistema obtenían valores válidos de planitud.

Es en estas cuatro y cinco secciones para los *Ejemplo de arquitectura equiespaciada* y *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada* respectivamente, donde se va a realizar la extracción de las mediciones de planitud. Volviendo al caso anterior del sistema de ecuaciones, las incógnitas que se quieren resolver de este sistema son aquellas representadas en la matriz  $P$  de medidas, y son las que comprenden desde  $H1$  a  $H7$  para el caso del *Ejemplo de arquitectura equiespaciada*, y las que comprenden desde

$H1$  hasta  $H11$  para el caso del *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada*.

Se tiene una incógnita por cada una de las secciones del carril medido. Estas ecuaciones se pueden ver planteadas a continuación en las secciones del anexo 8.3.1 hasta 8.3.4 para el *Ejemplo de arquitectura equiespaciada*. Por otra parte para el *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada* se pueden ver en el anexo desde la sección 8.4.1 hasta 8.4.5. En este capítulo se verá una pequeña parte de la resolución de cada uno de estos ejemplos, con la finalidad de no hacer muy densa la lectura de este capítulo.

En la figura 4.22 se puede ver un carril en dos periodos de tiempo diferentes, cuando todas los sensores del sistema están midiendo una sección del carril diferente.



**Figura 4.22:** Medición del carril en dos periodos de tiempo diferentes cuando todos los sensores miden a la vez una parte diferente del carril. (a) Periodo 4. (b) Periodo 5.

En la subfigura 4.22a se ve el periodo de tiempo cuatro:

- El sensor  $s1$  está midiendo la sección  $H1$  del carril, obteniendo el valor  $H1$  ( $M_{14}$ ).
- El sensor  $s2$  está midiendo la sección  $H2$  del carril, obteniendo el valor  $H2$  ( $M_{24}$ ).
- El sensor  $s3$  está midiendo la sección  $H3$  del carril, obteniendo el valor  $H3$  ( $M_{34}$ ).
- El sensor  $s4$  está midiendo la sección  $H4$  del carril, obteniendo el valor  $H4$  ( $M_{44}$ ).

El carril ahora ha avanzado y en la subfigura 4.22a se ve el periodo de tiempo cinco:

- El sensor  $s1$  está midiendo la sección  $H2$  del carril, obteniendo el valor  $H2$  ( $M_{15}$ ), esta sección había sido medida en el periodo anterior por el sensor  $s2$ , por lo tanto ya se tiene una medida redundante.
- El sensor  $s2$  está midiendo la sección  $H3$  del carril, obteniendo el valor  $H3$  ( $M_{25}$ ), esta sección había sido medida en el periodo anterior por el sensor  $s3$ , por lo tanto ya se tiene una medida redundante.
- El sensor  $s3$  está midiendo la sección  $H4$  del carril, obteniendo el valor  $H4$  ( $M_{35}$ ), esta sección había sido medida en el periodo anterior por el sensor  $s4$ , por lo tanto ya se tiene una medida redundante.
- El sensor  $s4$  está midiendo la sección  $H5$  del carril, obteniendo el valor  $H5$  ( $M_{45}$ ).

De la misma forma sucede para el resto de los periodos de tiempo en los que el sistema mide el carril.

Para resolver el problema de la eliminación de las vibraciones y el ruido de medición, se cogerán los sensores en grupos de tres en tres, la variable  $c$  contiene una matriz donde cada fila es una combinación de cada uno de los cuatro sensores del sistema y la variable  $d$  es similar a la variable anterior, solo que en su lugar, se almacenan las distancias de cada sensor respecto al inicio del sistema.

A partir de estas dos variables  $c$  y  $d$ , se construye una nueva variable  $r$  que contendrá una fila por cada una de las combinaciones. El valor almacenado representará el peso o *ratio* que se le otorga al sensor central respecto al sensor de la izquierda y de la derecha, y como se construye a partir de la matriz  $d$ , está estrechamente ligado a la distancia entre los sensores.

Una vez se han obtenido estos valores y almacenado en la matriz  $r$ , a cada sensor del trío que compone cada una de las combinaciones del sistema, se le otorga un peso respecto al central.

A continuación en las secciones 4.3.3.1 y 4.3.3.2 se resuelve el problema para el *Ejemplo de arquitectura equiespaciada* y para el *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada* respectivamente.

#### **4.3.3.1. Resolución del problema para el *Ejemplo de arquitectura equiespaciada***

La resolución de este problema se lleva a cabo en los periodos donde los cuatro sensores estaban midiendo de forma simultánea. La resolución para estos periodos

es:

- Para el periodo cuatro, que se pudo ver en la sección 8.1.4, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.3.1 del anexo y se verá parte en esta sección.
- Para el periodo cinco, que se pudo ver en la sección 8.1.5 del anexo, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.3.2 del anexo.
- Para el periodo seis, que se pudo ver en la sección 8.1.6 del anexo, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.3.3 del anexo.
- Para el periodo siete, que se pudo ver en la sección 8.1.7, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.3.4 del anexo y se verá parte en esta sección.

#### 4.3.3.1.1. Periodo cuatro

Para el periodo cuatro, las variables son (4.25).

$$Periodo = 4 \quad P[4] = \begin{matrix} & s4 & s3 & s2 & s1 \\ \begin{pmatrix} H4 & H3 & H2 & H1 \end{pmatrix} & & & & \end{matrix} \quad M_{.4} = \begin{pmatrix} M_{14} \\ M_{24} \\ M_{34} \\ M_{44} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

#### Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (4.26).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 1 \quad 2) \quad r[1] = \frac{1}{2} \quad (4.26)$$

La ecuación resultante es (4.27).

$$(1 - r) \cdot H3 - 1 \cdot H2 + r \cdot H1 = (1 - r) \cdot M_{34} - 1 \cdot M_{24} + r \cdot M_{14} \quad (4.27)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (4.28).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H3 - H2 + \frac{1}{2} \cdot H1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{34} - M_{24} + \frac{1}{2} \cdot M_{14} \quad (4.28)$$

Donde sí se añaden el resto de variables aunque en este momento no son calculadas queda como (4.29):

$$0 \cdot H7 + 0 \cdot H6 + 0 \cdot H5 + 0 \cdot H4 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H3 - H2 + \frac{1}{2} \cdot H1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{34} - M_{24} + \frac{1}{2} \cdot M_{14} \quad (4.29)$$

Donde los valores  $M_{34}$ ,  $M_{24}$  y  $M_{14}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

### Segunda combinación

Para el caso de la segunda combinación, las variables son (4.30).

$$c[2] = (1 \quad 2 \quad 4) \quad d[2] = (0 \quad 1 \quad 3) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (4.30)$$

La ecuación resultante es (4.31).

$$(1 - r) \cdot H4 - 1 \cdot H2 + r \cdot H1 = (1 - r) \cdot M_{44} - 1 \cdot M_{24} + r \cdot M_{14} \quad (4.31)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (4.32).

$$(1 - \frac{1}{3}) \cdot H4 - H2 + \frac{1}{3} \cdot H1 = (1 - \frac{1}{3}) \cdot M_{44} - M_{24} + \frac{1}{3} \cdot M_{14} \quad (4.32)$$

Donde de igual forma, si se añaden las incógnitas restantes, queda como (4.33):

$$\begin{aligned} 0 \cdot H7 + 0 \cdot H6 + 0 \cdot H5 + (1 - \frac{1}{3}) \cdot H4 + 0 \cdot H3 - H2 + \frac{1}{3} \cdot H1 = \\ (1 - \frac{1}{3}) \cdot M_{44} - M_{24} + \frac{1}{3} \cdot M_{14} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Donde los valores  $M_{44}$ ,  $M_{24}$  y  $M_{14}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### Tercera combinación y cuarta combinación

En este caso el procedimiento es similar al visto en las secciones anteriores. El ejemplo completo se puede ver en la sección 8.3 del *Anexo 1*.

#### 4.3.3.1.2. Periodo igual a siete

Con la finalidad de mostrar el final de este ejemplo, a continuación se pueden ver, para el periodo igual a siete, sus variables, que son (4.34).

$$\text{Periodo} = 7 \quad P[7] = \begin{pmatrix} s4 & s3 & s2 & s1 \\ H7 & H6 & H5 & H4 \end{pmatrix} \quad M_{,7} = \begin{pmatrix} M_{17} \\ M_{27} \\ M_{37} \\ M_{47} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

### Primera y segunda combinación

En este último periodo se muestra en detalle tan solo las dos últimas combinaciones,

el ejemplo completo se puede ver en la sección 8.3 del Anexo 1.

### Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (4.35).

$$c[3] = (1 \ 3 \ 4) \quad d[3] = (0 \ 2 \ 3) \quad r[3] = \frac{2}{3} \quad (4.35)$$

La ecuación resultante es (4.36).

$$(1 - r) \cdot H7 - 1 \cdot H6 + r \cdot H4 = (1 - r) \cdot M_{47} - 1 \cdot M_{37} + r \cdot M_{17} \quad (4.36)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (4.37).

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H7 - H6 + \frac{2}{3} \cdot H4 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{2}{3} \cdot M_{17} \quad (4.37)$$

Donde, si se añaden las incógnitas restantes, queda como (4.38):

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H7 - H6 + 0 \cdot H5 + \frac{2}{3} \cdot H4 + 0 \cdot H3 + 0 \cdot H2 + 0 \cdot H1 = \\ \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{2}{3} \cdot M_{17} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Donde los valores  $M_{47}$ ,  $M_{37}$  y  $M_{17}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### Cuarta combinación

De igual forma, las variables de esta cuarta combinación son (4.39).

$$c[4] = (2 \ 3 \ 4) \quad d[4] = (1 \ 2 \ 3) \quad r[4] = \frac{2}{3} \quad (4.39)$$

La ecuación resultante es (4.40).

$$(1 - r) \cdot H7 - 1 \cdot H6 + r \cdot H5 = (1 - r) \cdot M_{47} - 1 \cdot M_{37} + r \cdot M_{27} \quad (4.40)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (4.41).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H7 - H6 + \frac{1}{2} \cdot H5 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{27} \quad (4.41)$$

Si se añaden las incógnitas restantes, queda como (4.42)

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{2}) \cdot H7 - H6 + \frac{1}{2} \cdot H5 + 0 \cdot H4 + 0 \cdot H3 + 0 \cdot H2 + 0 \cdot H1 = \\ (1 - \frac{1}{2}) \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{27} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Donde los valores  $M_{47}$ ,  $M_{37}$  y  $M_{27}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

#### 4.3.3.2. Resolución del problema para el *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada*

La resolución de este problema se lleva a cabo en los periodos donde los cuatro sensores estaban midiendo de forma simultánea. Con la finalidad de hacer más legible esta parte, la resolución para estos periodos se pueden ver en el anexo, en las secciones:

- Para el periodo siete, que se pudo ver en la sección 8.2.7, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.1 del anexo.
- Para el periodo ocho, que se pudo ver en la sección 8.2.8 del anexo, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.2 del anexo.
- Para el periodo nueve, que se pudo ver en la sección 8.2.9 del anexo, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.3 del anexo.
- Para el periodo diez, que se pudo ver en la sección 8.2.10 del anexo, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.4 del anexo.
- Para el periodo once, que se pudo ver en la sección 8.2.11, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.5 del anexo.

#### 4.3.3.3. Resolución del problema. Sistema de ecuaciones lineales

Como se ha visto en la sección 4.3.3.1 donde se detalla parte de la resolución del *Ejemplo de arquitectura equiespaciada*, se obtiene una ecuación para cada una de las combinaciones que se pueden dar en cada uno de los periodos donde todos los sensores están obteniendo resultados válidos de forma conjunta.

Estas ecuaciones pueden ser representadas de forma matricial en (4.43).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot M_{34} - M_{24} + \frac{1}{2} \cdot M_{14} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{44} - M_{24} + \frac{1}{3} \cdot M_{14} \\ \dots \\ \frac{1}{3} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{2}{3} \cdot M_{15} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{1}{2} \cdot M_{25} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Este sistema de ecuaciones visto se ajusta a un sistema de ecuaciones lineales del tipo:

$$Ax = B \quad (4.44)$$

Este sistema relacionará los datos tomados por los sensores del sistema con los valores que se desean obtener para cada una de las secciones del carril. De tal forma que se realiza una media ponderada de las incógnitas con la media ponderada de los valores obtenidos por los sensores, eliminando en este proceso la influencia del ruido de medición y de las vibraciones.

Además para incrementar la estabilidad de este sistema de ecuaciones sobredeterminado, se añaden dos ecuaciones adicionales, haciendo que el sistema quede como se ve en (4.45).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot M_{34} - M_{24} + \frac{1}{2} \cdot M_{14} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{44} - M_{24} + \frac{1}{3} \cdot M_{14} \\ \dots \\ \frac{1}{3} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{2}{3} \cdot M_{15} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{1}{2} \cdot M_{25} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Los ejemplos completos se pueden ver en el anexo, concretamente en:

- El sistema de ecuaciones lineales y su resolución, para el *Ejemplo de arquitectura equiespaciada*, se puede ver en la sección 8.3.5.
- El sistema de ecuaciones lineales y su resolución, para el *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada*, se puede ver en la sección 8.4.6.

Para obtener el perfil longitudinal de alturas se debe resolver este sistema. En el caso de los ejemplos antes vistos, esto se ha hecho para el perfil de longitudinales de alturas horizontal, pero sería idéntico para el caso del perfil vertical. En estos perfiles se habrá paliado el efecto tanto del ruido de medición como de las vibraciones.

Para llevar a cabo la resolución de un sistema de ecuaciones sobredeterminado, como es este, se debe utilizar, por ejemplo una solución basada en mínimos cuadrados.

El enfoque de mínimos cuadrados se basa en la minimización del error cuadrático, (4.46).

$$E = (Ax - b)^2 = (Ax - b)^T(Ax - b) \quad (4.46)$$

Haciendo la derivada respecto de  $x$ , (4.47).

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 2A^T(Ax - b) = 0 \quad (4.47)$$

Por lo que se tiene (4.48).

$$A^T Ax = A^T b \quad (4.48)$$

Finalmente, la minimización del error se logra mediante una proyección ortogonal, (4.49) y (4.50).

$$(A^T A)^{-1}(A^T A)x = (A^T A)^{-1}A^T b \quad (4.49)$$

$$x = (A^T A)^{-1}A^T b \quad (4.50)$$

Debido a que el método que se describe, al hacer inversa, es numéricamente inestable se puede llevar a cabo la resolución de este sistema de ecuaciones lineales mediante la descomposición de valores singulares [62].

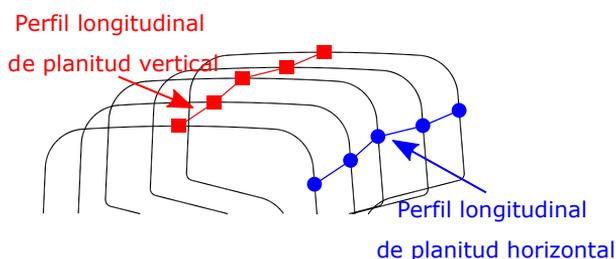
La elección de un método u otro dependerá del software utilizado para la resolución del sistema.

# Capítulo 5

## Medición de planitud basada en reglas virtuales

### 5.1. Introducción

Una vez se han extraído los perfiles longitudinales de alturas, tanto horizontales como verticales, mediante el uso de todas y cada una de las imágenes obtenidas por los sensores del sistema, tal y como se puede ver en la figura 5.1, se debe proceder al cálculo de los errores de planitud del carril a comprobar.

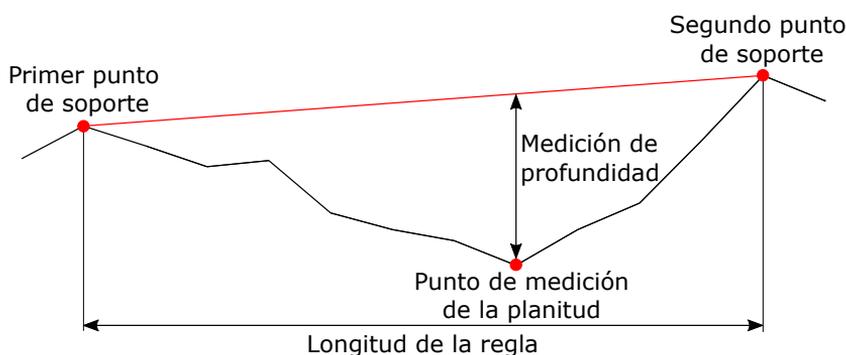


**Figura 5.1:** Perfiles de planitud longitudinales del carril.

En estos perfiles longitudinales de alturas se ha paliado el problema de la vibración y el ruido de medición usando el método visto en el capítulo 4. En este momento, y utilizando estos perfiles se debe llevar a cabo la comprobación de la planitud del carril para sus dos dimensiones.

Para ello se debe seguir la misma metodología que se utilizaría en caso de tener que hacer la medición de la planitud de forma manual, es decir, situando una regla física en los puntos *V* y *H* que se indican en el estándar *EN-13674* a lo largo de toda la longitud del carril.

La figura 5.2 muestra un esquema de medición de la planitud sobre el perfil de un carril con una regla física.



**Figura 5.2:** Medición de la planitud utilizando reglas físicas.

El método de medición de la planitud mostrado en la figura 5.2 muestra la regla física, dibujada de color rojo, que es apoyada en dos puntos de soporte dibujados también en color rojo. Debajo de dicha regla se genera un *valle* en el cual el punto de mayor profundidad es donde se debe medir planitud, denominado en la figura 5.2 como *punto de medición de la planitud*.

La técnica de medición de la planitud con una regla física se basa en la repetición de lo mostrado en la figura 5.2 durante toda la longitud del carril para ambas dimensiones  $V$  y  $H$  donde se debe medir el carril.

Debido a que este proceso es muy tedioso, muy lento y al tener que ser realizado de forma manual por un ser humano, es propenso a errores, es necesario automatizarlo ya que así además de ser más preciso y menos problemático, también es sustancialmente más rápido. En la fotografía mostrada en la figura 5.3 se puede observar a dos operarios midiendo de forma manual la planitud de una chapa de acero. El proceso en caso de los carriles sería análogo durante toda la longitud del mismo.

La forma de trabajo de este sistema es repetir el proceso de posicionado, filtrado y clasificación que se explicará en este capítulo, para cada una de las dimensiones,  $V$  y  $H$ , que se desea calcular. El punto de entrada de este capítulo son los perfiles longitudinales de alturas obtenidos mediante el método visto en el capítulo 4.

La figura 5.4 muestra un diagrama de todas y cada una de las fases de trabajo del método que se propone en este capítulo, para facilitar la comprensión de los pasos a



**Figura 5.3:** Operarios llevando a cabo medición de la planitud. Imagen extraída de [32]. ©2014, IEEE.

realizar. El cual tiene los siguientes puntos:

1. Obtención de los perfiles longitudinales de alturas. Se deben obtener, aplicando el método visto en el capítulo 4, los perfiles longitudinales de altura para las dos dimensiones  $V$  y  $H$  de un carril.
2. Posteriormente, se procederá a dividir el carril en las diferentes partes que indica en el estándar *EN-13674*. Esto se puede ver con detalle en la sección 5.2.
3. Una vez el carril ha sido dividido en partes, se deben extraer las reglas virtuales para cada una de estas partes siguiendo el algoritmo que se propone en la sección 5.3.1. Este proceso se debe realizar para cada una de las dimensiones del carril.
4. Se ha generado un número muy elevado de reglas virtuales, y ahora hay que filtrar aquellas que no aportan información relevante sobre los problemas de

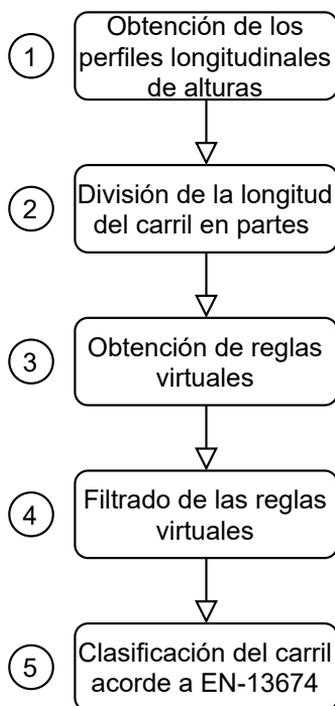


Figura 5.4: Esquema de trabajo del sistema

planitud del carril de las que sí, para ello se debe llevar a cabo el proceso de filtrado que se describe en la sección 5.3.2.

5. Una vez se han obtenido y filtrado las reglas virtuales, la calidad de la planitud del carril debe ser clasificada de acuerdo al estándar *EN-13674*, tal y como se puede ver en la sección 5.5.

## 5.2. División de la longitud del carril en partes según el estándar *EN-13674*

El carril se dividirá en su longitud en un conjunto de partes, definidas en *EN-13674*. Esto permitirá simular la medición que se describe con detalle en la norma y así clasificar acorde a este estándar los carriles según la calidad de la planitud del mismo.

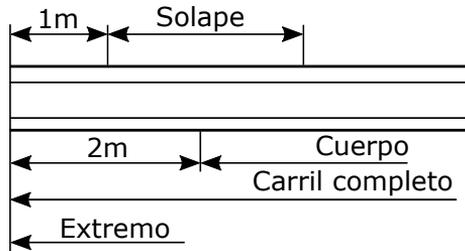
Estas partes en las que la longitud del carril es dividida se definen acorde a la norma

## 5.2 División de la longitud del carril en partes según el estándar EN-13674

EN-13674, y son las siguientes:

- Extremos del carril. Parte del carril en ambos extremos inicial y final del mismo.
- Cuerpo. Parte central del carril.
- Solapes. Parte que une los extremos del carril y abarca parte del extremo y parte del cuerpo, tanto en el principio y al final del mismo.

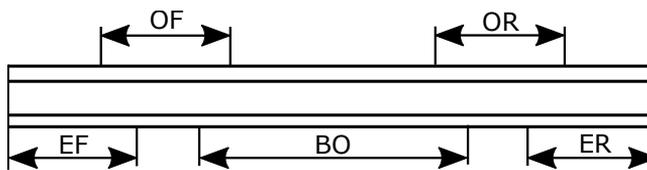
Estas partes del carril se pueden observar en la figura 5.5.



**Figura 5.5:** Partes del carril según se indica en la norma EN-13674.

Tal y como se puede observar el cuerpo del carril empieza y termina a dos metros del inicio y final del carril respectivamente. Por su parte el solape empieza a un metro del inicio y final del carril, y solapa el extremo del carril con el cuerpo del mismo.

Con la finalidad de identificar cada extremo, cada solape y el cuerpo del carril se le otorgan una serie de nombres para distinguirlos entre ellos, tal y como se puede observar en la figura 5.6.



**Figura 5.6:** Nombrado de las diferentes partes del carril.

Los nombres de las diferentes partes del carril son los siguientes:

- Los dos extremos del carril se llaman  $EF^1$ , extremo delantero y  $ER^2$  extremo trasero del carril.

<sup>1</sup>EF: Del inglés *End Front*, extremo delantero.

<sup>2</sup>ER: Del inglés *End Rear*, extremo trasero.

- El cuerpo del carril que se denomina  $BO^3$ , cuerpo del carril.
- Los dos solapes se llaman  $OF^4$ , solape delantero y  $OR^5$  solape trasero del carril.

Según el estándar *EN-13674* los extremos del carril tendrán una longitud variable de entre 1.5 y 2 metros de largo, el uso de una longitud u otra se verá con mayor detalle en la sección 5.5. Los solapes del carril tendrán una longitud de 2 metros y el resto de la longitud del carril será el cuerpo del mismo.

La nomenclatura vista en la figura 5.6 será la utilizada en el resto de la tesis para identificar de forma inequívoca a cada una de las diferentes partes de la longitud del carril.

### 5.3. Posicionamiento de reglas virtuales

Para llevar a cabo la medición de la planitud en los perfiles longitudinales de alturas, tanto horizontales como verticales, extraídos previamente, se utilizarán un conjunto de *reglas virtuales* que simularán el proceso que ocurre a la hora de llevar a cabo las mediciones de forma manual, mediante el uso de reglas físicas.

De igual forma que en el caso del uso de una regla física, una regla virtual también dispondrá de dos puntos de apoyo y medirá la profundidad del valle que se sitúa por debajo de ella. La figura 5.7 muestra un ejemplo de uso de una regla virtual.

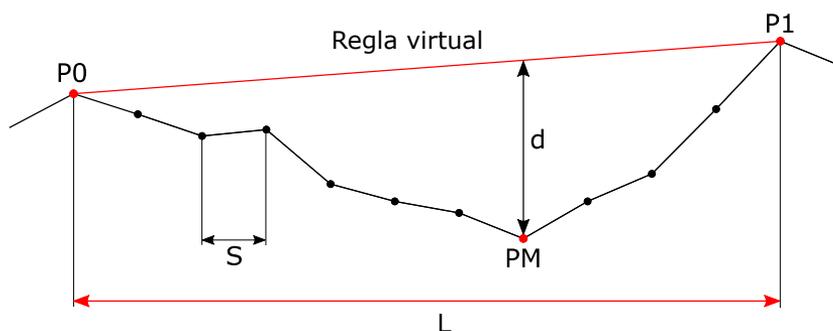


Figura 5.7: Medición de la planitud utilizando reglas virtuales.

El método que se detalla en este capítulo busca simular mediante el uso de *reglas virtuales* el proceso que el operario encargado de llevar a cabo la medición de planitud

<sup>3</sup>BO: Del inglés *Body*, cuerpo.

<sup>4</sup>OF: Del inglés *Overlap Front*, solape delantero.

<sup>5</sup>OR: Del inglés *Overlap Rear*, solape trasero.

de un carril de tren debe realizar usando reglas físicas. Debido a esto, la relación existente entre la figura 5.2, donde se mostraba el uso de una regla física para medir la planitud y la figura 5.7, que muestra el mismo proceso pero mediante el uso de una regla virtual, tienen la siguiente relación:

- $P0$  es el denominado *Primer punto de soporte* para la regla virtual.
- $P1$  es el denominado *Segundo punto de soporte* para la regla virtual.
- $PM$  es el denominado *Punto de medición de la planitud*, punto en el cual se mide la profundidad del valle.
- $d$  es la denominada *Medición de profundidad* medida en el punto  $PM$  anterior, y es la profundidad de la imperfección de planitud en ese valle dado.
- $L$  es la denominada *Longitud de la regla*. Regla utilizada para medir la profundidad de la imperfección de planitud.
- $s$  es la distancia de muestreo que se puede ver en la sección 4.3.2 del capítulo 4.

#### 5.3.1. Algoritmo de posicionado de reglas virtuales

Para posicionar las reglas virtuales sobre la longitud del carril se ha creado y desarrollado un algoritmo, el cual intenta colocar el primer punto de la regla o  $P0$  en todos y cada uno de los puntos del perfil longitudinal de alturas, y posteriormente las reglas que no sean necesarias se filtrarán.

Se denominan reglas innecesarias aquellas reglas que no aportan información relevante sobre la profundidad de un valle. Los métodos de filtrado de reglas virtuales se detallan en la sección 5.3.2.

La figura 5.8 muestra un diagrama del método de posicionado de reglas virtuales.

Tal y como se puede ver en la figura 5.8, se utilizan dos métodos diferentes para la generación de reglas virtuales. El primer método es aplicado sobre la longitud del carril completa, es más rápido que el segundo método pero puede proporcionar reglas inválidas. Si este primer método no proporciona una regla virtual válida se procede a la ejecución del segundo método.

Se denominan reglas inválidas a aquellas que cortan el perfil longitudinal de alturas y se puede ver un ejemplo en la figura 5.9. También se denominan reglas inválidas a aquellas reglas cuyos puntos de apoyo  $P0$  y  $P1$  son consecutivos.

El algoritmo de reglas virtuales de la figura 5.8 se puede ver con mayor detalle a continuación:

1. Se deben fijar los parámetros de entrada del algoritmo, tal y como se puede observar en la figura 5.10. Estos parámetros son:
  - *Perfil longitudinal*: Es uno los perfil longitudinales (vertical u horizontal) extraídos usando el método descrito en el capítulo 4. Este método debe aplicarse sobre ambos perfiles longitudinales, haciéndose primero en uno y luego en otro.
  - *Primer punto del carril*: Será el primero de los puntos del perfil longitudinal seleccionado. También se denomina  $PA_i$  donde  $i = 0$ .
  - *Regla*: Segmento que se apoya en dos puntos y tiene una longitud  $L$  predefinida. En el caso de la figura 5.10 está longitud es de  $1000\text{ mm}$ . La longitud puede ser variable pero nunca mayor a  $L$ . El posicionamiento de esta regla es el objetivo de este algoritmo. Se utilizarán diferentes tamaños de regla de acuerdo al estándar *EN-13674*.
  - *Muestreo (s)*: Distancia entre cada uno de los puntos del perfil longitudinal del alturas. En el caso de la figura 5.10 es de  $100\text{ mm}$ . Este parámetro es utilizado para la generación de estos perfiles tal y como se comenta en la sección 4.3.2 del capítulo 4.
  - *Último punto del carril*: Es el último de los puntos del perfil longitudinal seleccionado.
2. Con el punto  $PA_i$  actual y la longitud  $L$  de la regla virtual, se obtiene el subconjunto de puntos posibles de apoyo para la regla virtual. Este subconjunto de puntos es el formado por  $[PA_i, PA_i + L]$ . La regla virtual se apoyará en dos puntos del subconjunto anterior. Esto puede verse con detalle en la figura 5.11.
3. Ahora se deben buscar los dos puntos de apoyo de la regla virtual, para eso se han creado y desarrollado dos métodos diferentes de posicionamiento para la regla virtual. El primer método es el siguiente:
  - Se selecciona el punto central del subconjunto de puntos visto en el paso 2, es decir,  $[PA_i, PA_i + L]$ . El primer punto de apoyo,  $PO$  se posiciona en este punto central.
  - Se mueve el punto de apoyo  $P1$  al siguiente punto a la derecha del punto de apoyo  $PO$ . De tal forma que si el subconjunto de puntos cuenta con  $n$  puntos, el primer punto de apoyo,  $PO$  se situará en el punto  $n/2$ , y el punto  $P1$  en el punto  $(n/2) + 1$ . Esto se puede ver en la figura 5.12.

- Una vez se han situado los puntos  $P0$  y  $P1$  en sus posiciones iniciales, se selecciona el subintervalo entre el punto inicial y el punto  $P0$  actual, es decir,  $[PA_i, P0]$ . Posteriormente se traza una recta de referencia que une los puntos  $P0$  y  $P1$  actuales. Del intervalo anterior se debe seleccionar el punto más alejado a dicha recta, siempre y cuando esté por encima de dicha recta, y se mueve el punto  $P0$  a dicho punto. En la figura 5.13 se muestra el nuevo punto de apoyo  $P0$  elegido en rojo, la recta de referencia en rojo discontinua. Se muestra en rojo también el punto de apoyo  $P1$  y el punto anterior  $P0$ .

De esta forma el punto  $P0$  se mueve a la izquierda de donde estaba posicionado al inicio de este paso, para situarse en el primer punto del intervalo. Debido a que este punto es el más alejado de la recta de referencia que une el punto  $P0$  antiguo y  $P1$ .

- De una forma similar se lleva a cabo el mismo proceso que antes, pero ahora para el punto de apoyo derecho,  $P1$ . Se selecciona el subintervalo entre el punto  $P1$  actual y el punto final  $PA_i + L$ , es decir,  $[P1, PA_i + L]$ . Posteriormente, y de forma análoga al caso del primer punto de apoyo, se traza una recta de referencia que une los puntos  $P0$  y  $P1$  actuales. Finalmente, del intervalo anterior se selecciona aquel más alejado de esta recta de referencia, siempre y cuando esté por encima de dicha recta y se mueve el punto  $P1$  a este punto. En la figura 5.14 se muestra el nuevo punto de apoyo  $P1$  elegido en color rojo, la recta de referencia en rojo discontinua. En color rojo se muestra también el punto de apoyo  $P0$  y el antiguo punto de apoyo  $P1$ .

De esta forma el punto  $P1$  se mueve a la derecha de donde estaba posicionado inicialmente. El nuevo punto  $P1$  pasa a situarse en el punto más alejado de la recta de referencia.

- Este método termina cuando no se pueden escoger puntos  $P0$  y  $P1$  más favorables aplicando el método de las rectas de referencia visto. La regla elegida es la que une los puntos  $P0$  y  $P1$  finales. Esto puede verse en la figura 5.15.

Si se obtuvo una regla válida el método continúa en el punto 5, en caso contrario, continúa en el punto 4.

4. Si el primer método de posicionamiento de reglas virtuales visto en el paso anterior no ha producido ninguna regla virtual válida, se debe aplicar el segundo método, cuyo funcionamiento es el siguiente:
  - Se posiciona el punto  $P0$  en el primer punto del subconjunto bajo la regla virtual, es decir, en  $[PA_i]$ . Se buscará el segundo punto de apoyo  $P1$  en

el subconjunto mencionado,  $(PA_i, PA_i + L]$ . En este segundo método el punto  $P0$  se considerará un punto estático y no se moverá.

- El punto  $P1$  pertenecerá el subconjunto  $(PA_i, PA_i + L]$ . Este punto será aquel que proporcione un segmento de mayor ángulo entre el eje de abscisas y  $P0 - Px$ , donde  $Px \in (PA_i, PA_i + L]$ . Esto se puede observar en la figura 5.16.

En esta figura 5.16 se pueden observar todas las posibles reglas virtuales en color negro, y la regla que más ángulo respecto al eje de las abscisas en color rojo. También se pueden ver en color rojo los dos puntos de soporte de la regla virtual, es decir  $P0$  y  $P1$ . De nuevo, si este método ha proporcionado una regla virtual válida el algoritmo continúa en el paso 5, si no se ha generado ninguna regla virtual válida, se debe avanzar al paso 7.

5. Si se ha conseguido una regla virtual, bien sea aplicando el primer método o con la aplicación del segundo método, se debe ahora calcular la profundidad del valle bajo la regla virtual. Para ello se calcula la distancia vertical entre todos y cada uno de los puntos situados bajo la regla virtual, es decir, para todos los puntos del subconjunto  $(P0, P1)$ . La mayor distancia será el valor  $d$  de profundidad para esta regla virtual. Esto se puede observar en la figura 5.17. Donde el mayor valor de profundidad o  $d$  se puede ver en color rojo.

Por otra parte, puede suceder que utilizando los métodos descritos en los pasos 3 y 4 no se obtenga ninguna regla virtual válida, como sucedería con un perfil cóncavo, como el que se puede ver en la figura 5.18. En este caso, el algoritmo continuaría en el paso 7.

6. Tras el cálculo de la profundidad, la regla virtual se debe añadir al conjunto de reglas virtuales.
7. Por último  $i$  avanza al siguiente punto del carril, sumándole uno. Esto se puede ver en la figura 5.19.

En este punto se pueden dar dos casos:

- Tras sumar uno a  $PA_i$ , este es el punto marcado como *último punto del carril*, en cuyo caso el algoritmo finaliza y se obtienen todas las reglas virtuales obtenidas durante su ejecución.
- Tras sumar uno a  $PA_i$ , este no sea el punto marcado como *último punto del carril*, en cuyo caso el algoritmo continúa en el paso 1 pero con  $i = i + 1$ .

En el caso de la figura 5.19 la iteración que muestra será la última del algoritmo.

Una vez se ha acabado el algoritmo se tiene un conjunto de reglas virtuales de las cuales se conoce la profundidad del valle sobre el que están colocadas. Continuando con el ejemplo del algoritmo, las reglas virtuales que se obtendrían serían las que se pueden ver en la figura 5.20.

### 5.3.2. Filtrado de reglas virtuales

Una vez se han generado las reglas virtuales usando el algoritmo descrito en la sección anterior se deben filtrar estas.

Esto es necesario ya que como se puede ver en un ejemplo tan corto como el mostrado en la figura 5.20 se obtienen dos reglas virtuales para medir el mismo valle físico en la longitud del carril. Si esto se extrapola a un carril real, donde se pueden tener alrededor de 700 puntos en un perfil longitudinal de alturas, se habrán generado alrededor de 700 reglas virtuales, y no todas ellas tienen por qué aportar necesariamente información relevante sobre problemas de planitud reales en el carril.

Con la finalidad de filtrar las reglas virtuales que no aportan información útil sobre la planitud del carril, se han creado una serie de filtros que, para facilitar la interpretación, eliminarán aquellas reglas virtuales innecesarias.

Los filtros creados se pueden dividir en dos grandes grupos, filtros que afectan a una sola regla y filtros que afectan a dos reglas.

#### 5.3.2.1. Filtros que afectan a una sola regla virtual

Estos filtros buscarán en el conjunto de reglas virtuales generado mediante el algoritmo de la sección 5.3.1, y todos los aspectos que se detallan a continuación serán buscados, con la finalidad de eliminar reglas virtuales innecesarias:

- Reglas que miden valles poco profundos. Se considera que un valle es poco profundo cuando la planitud  $d$  obtenida por esa regla virtual es menor de  $0.05\text{ mm}$ . Un ejemplo de esto se puede ver en la figura 5.21.
- Reglas que miden valles estrechos. Se considera que un valle es estrecho cuando la distancia entre los dos puntos de apoyo  $P0$  y  $P1$  es menor de  $400\text{ mm}$ , independientemente de la profundidad del mismo. Un ejemplo de esto se puede ver en la figura 5.22.

### 5.3.2.2. Filtros que afectan a una dos reglas virtuales

Estos filtros buscarán en el conjunto de reglas virtuales generado e irá comprobando que cada regla con todas las siguientes cumplen los siguientes requisitos, y en caso de no cumplir alguno de ellos se eliminará una de las regla virtuales:

- Los puntos de apoyo iniciales,  $P0$ , de cada una de las reglas virtuales están separados menos de  $400\text{ mm}$ . En ese caso se debe eliminar aquella regla virtual cuyo valor de planitud  $d$  sea menor. En caso contrario, es decir, los puntos  $P0$  están separados a una distancia mayor de  $400\text{ mm}$ , se continua con el resto de los filtros, sin eliminar ninguna regla.

En la figura 5.23 se puede ver un ejemplo de este filtrado de dos reglas, donde los puntos de apoyo iniciales  $P0$  de las reglas virtuales dibujadas en color azul y rojo es menor de  $400\text{ mm}$ . Debido a que en este caso a el valor de planitud  $d$  obtenido por la regla de color azul es menor, se elimina esta regla virtual y permanece en el conjunto la regla virtual roja.

- De igual forma pero para el caso de los puntos de apoyo finales,  $P1$ , de cada una de las reglas virtuales están separados menos de  $400\text{ mm}$ . En ese caso y al igual que en el anterior, se elimina la regla virtual cuyo valor de planitud  $d$  sea menor.

En la figura 5.24 se puede ver un ejemplo de este filtrado de dos reglas, donde los puntos de apoyo finales  $P1$  de las reglas virtuales dibujadas en color azul y rojo es menor de  $400\text{ mm}$ . De igual forma que en el caso anterior, es decir, debido a que el valor de planitud  $d$  obtenido por la regla de color azul es menor, se elimina esta regla virtual y permanece en el conjunto la regla virtual roja.

- Por último, se compara para las dos reglas virtuales, que el punto de medición de la planitud  $PM$  esté separado más de  $400\text{ mm}$ . De igual forma que en los filtros anteriores, se elimina aquella regla virtual cuyo valor de planitud  $d$  sea menor.

Por último, en la figura 5.25 se puede ver un ejemplo de este filtrado de dos reglas, donde los puntos de medición de la planitud  $PM$  de las reglas virtuales dibujadas en color azul y rojo es menor de  $400\text{ mm}$ . De igual forma que en los casos anteriores, es decir, debido a que el valor de planitud  $d$  obtenido por la regla de color azul es menor, se elimina esta regla virtual y permanece en el conjunto la regla virtual roja.

Los valores de filtrado utilizados, como son los  $400\text{ mm}$  y los  $0.05\text{ mm}$  son valores obtenidos de la experimentación llevada a cabo a la hora de la implementación del algoritmo.

Por otra parte, los filtros se deben aplicar en orden en el que se han visto, sin embargo una regla puede ser eliminada por más de un filtro.

### 5.3.3. Ejemplo de generación y filtrado de reglas virtuales

Con la finalidad de ejemplificar lo visto en la sección 5.3.1 donde se explica la generación de reglas virtuales y en la sección 5.3.2 donde se explica la forma de llevar a cabo el filtrado de las mismas, se va a mostrar ahora un ejemplo que ilustrará la forma en que el algoritmo genera las reglas virtuales y como posteriormente son filtradas.

En la figura 5.26 se puede ver un ejemplo de un carril de  $4400\text{ mm}$  en el que se aprecian tres valles de diferente profundidad. El primero de ellos entre el punto  $0$  y el  $1400$ . El segundo entre el  $1500$  y el  $2500$ . Y el tercero entre el  $2600$  y el  $4400$ .

En la figura 5.26 se puede que la mayor parte de los puntos ha generado una regla virtual, dibujadas en color rojo y negro, sin embargo, se puede apreciar también que no todas estas reglas virtuales aportan información relevante sobre los valles presentes en el carril.

Por otra parte, en la figura 5.26 marcadas en color rojo se encuentran las reglas virtuales necesarias para medir de forma correcta cada uno de los valles.

Debido al gran número de reglas virtuales no relevantes generadas en este caso, es necesario llevar a cabo un filtrado. La figura 5.27 muestra el mismo carril del cual se han eliminado de forma manual un conjunto de reglas virtuales para poder llevar a cabo los métodos de filtrado de una forma más sencilla, ya que comentar el filtrado de todas las reglas virtuales generadas en un principio sería innecesariamente extenso.

En el ejemplo de la figura 5.27 se pueden ver dibujadas ocho reglas virtuales, numeradas del 1 al 8. El proceso de filtrado que se lleva a cabo sobre estas reglas virtuales es el siguiente:

- La regla 1 no puede ser filtrada, debido a que no cumple los requisitos de filtros de una regla.
- La regla 2 no es filtrada por los filtros de una regla. Sin embargo, debido a

que la distancia entre los puntos de apoyo iniciales  $P0$  de esta regla y la regla virtual marcada como 1 es menor de  $400\text{ mm}$ , se debe escoger aquella regla que genere un menor valor de  $d$ , y ser eliminada. La regla eliminada debido a esto es la marcada como 2.

- La regla 3 no es filtrada por los filtros de una regla. Sin embargo, debido a que la distancia entre los puntos de apoyo finales  $P1$  de esta regla y la regla 1, es menor de  $400\text{ mm}$ , se debe escoger aquella regla que genere un menor valor de  $d$ , y ser eliminada. La regla eliminada debido a esto es la marcada como 3.
- La regla 4 no es filtrada por los filtros de una regla, ni por los filtros de dos reglas si se compara con la regla 1 existente.
- La regla 5 no es filtrada por los filtros de una regla. Sin embargo, debido a que la distancia entre los puntos de apoyo finales  $P1$  de esta regla y la regla virtual 4 es menor de  $400\text{ mm}$ , se debe escoger y eliminar aquella regla que genere un menor valor de  $d$ . La regla eliminada es la marcada como 5.
- La regla 6 no puede ser eliminada en este momento aplicando los filtros de una y dos reglas.
- De igual forma pasa ahora con la regla virtual 7.
- La regla marcada como 6 es eliminada debido a que la distancia entre los puntos de apoyo iniciales  $P0$  de esta regla con la regla virtual 7 es menor de  $400\text{ mm}$  y el valor de  $d$  es menor en la regla 6.
- La regla marcada como 8 es eliminada debido a que el valle que genera es muy estrecho, y es filtrada utilizando este filtro de una regla.

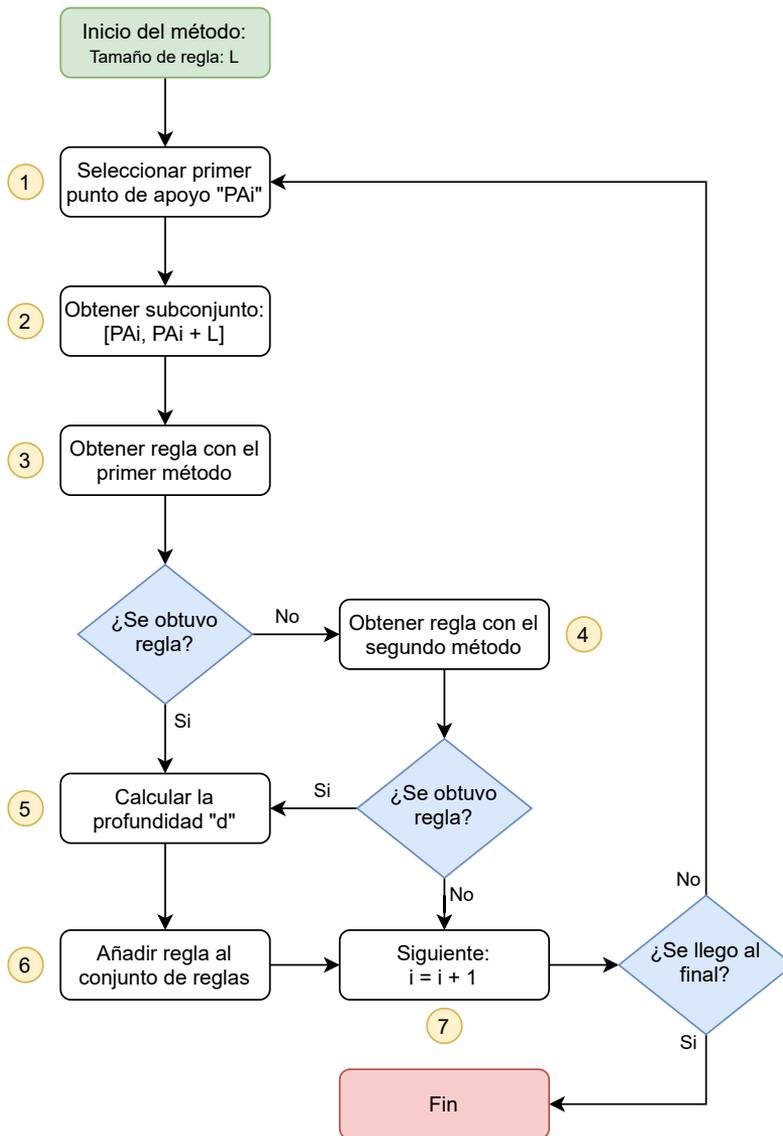


Figura 5.8: Algoritmo de reglas virtuales.

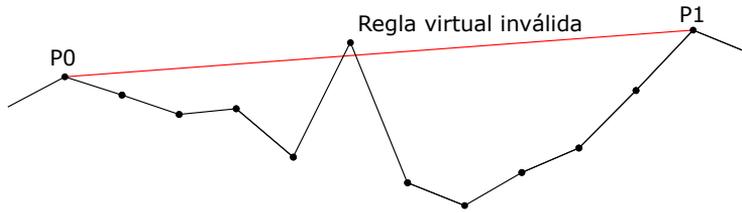


Figura 5.9: Regla virtual inválida.

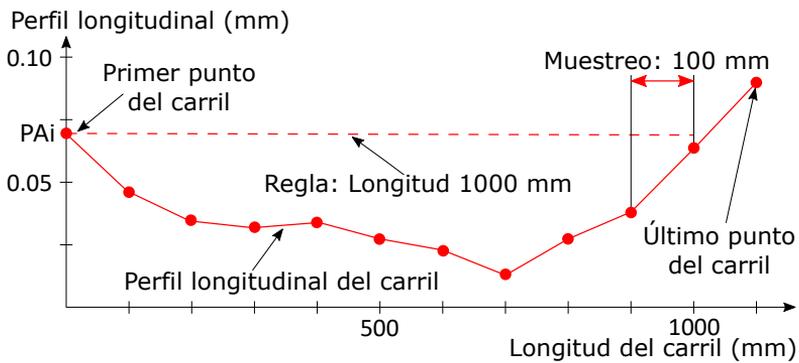


Figura 5.10: Algoritmo de reglas virtuales. Parámetros de entrada.

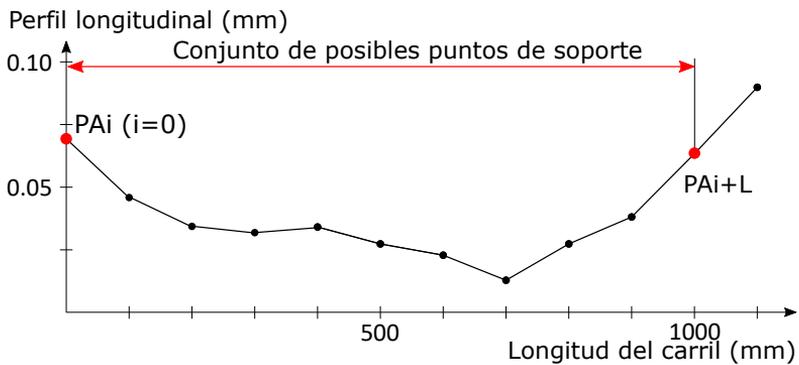
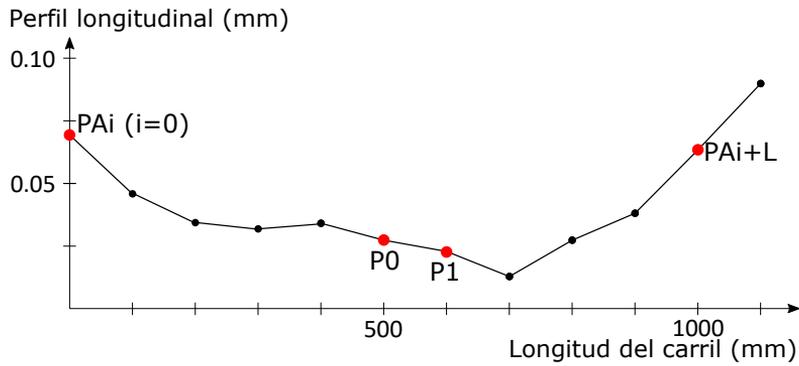
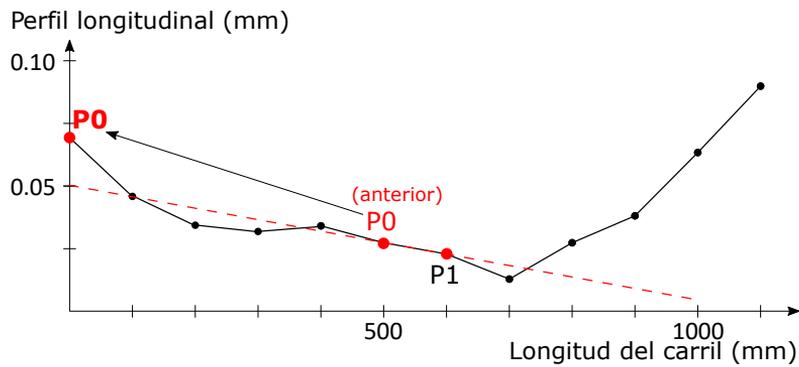


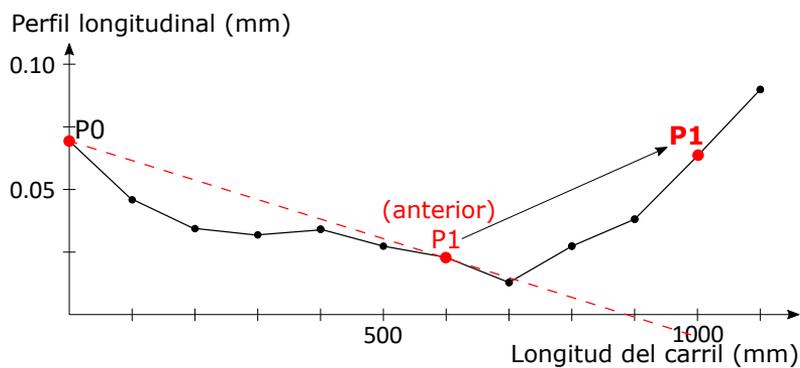
Figura 5.11: Algoritmo de reglas virtuales. Extracción del subconjunto de puntos de apoyo posibles.



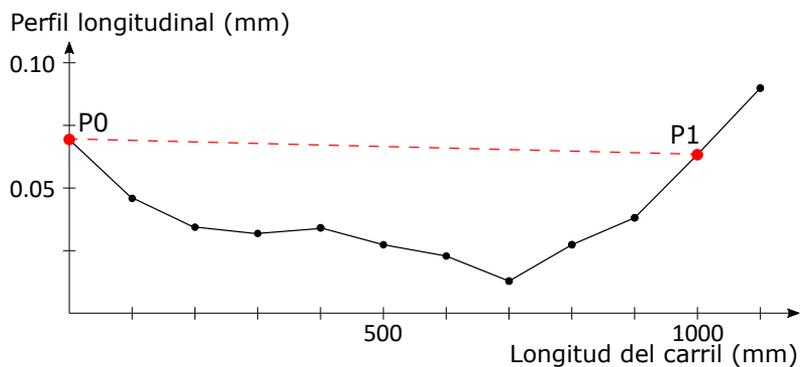
**Figura 5.12:** Algoritmo de reglas virtuales. Primer método de posicionamiento. Movimiento de puntos de apoyo al centro del subconjunto.



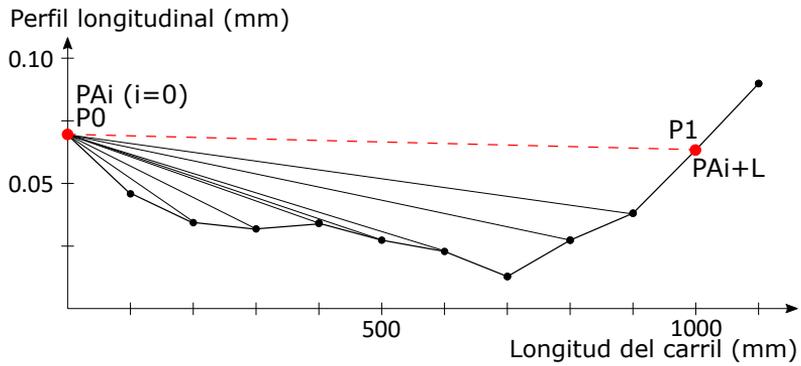
**Figura 5.13:** Algoritmo de reglas virtuales. Primer método de posicionamiento. Búsqueda del punto PO de apoyo más favorable.



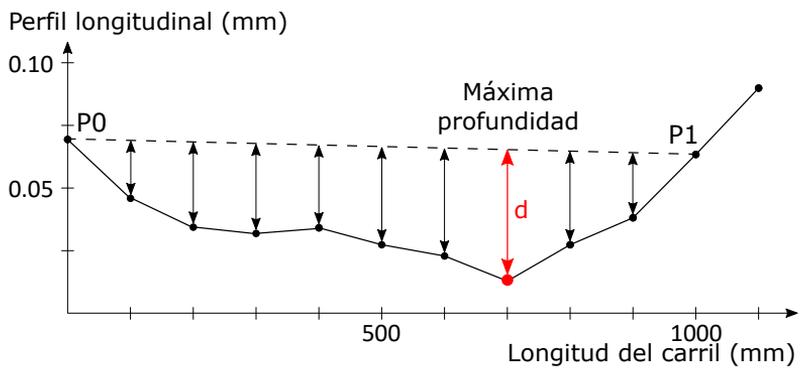
**Figura 5.14:** Algoritmo de reglas virtuales. Primer método de posicionamiento. Búsqueda del punto *P1* de apoyo más favorable.



**Figura 5.15:** Algoritmo de reglas virtuales. Primer método de posicionamiento. Obtención de la regla virtual.



**Figura 5.16:** Algoritmo de reglas virtuales. Segundo método de posicionamiento. Obtención del punto  $P1$ .



**Figura 5.17:** Algoritmo de reglas virtuales. Obtención de  $d$  para la regla virtual generada.

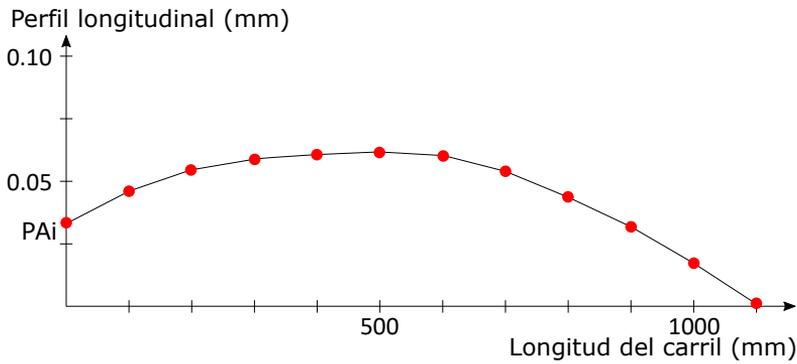


Figura 5.18: Algoritmo de reglas virtuales. Perfil que no genera reglas virtuales válidas.

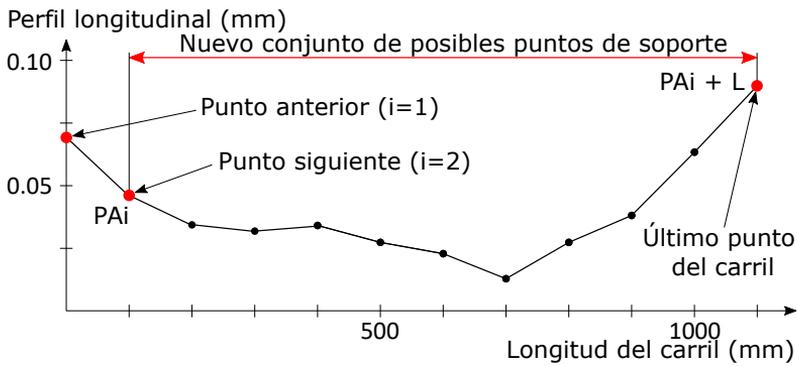


Figura 5.19: Algoritmo de reglas virtuales. Siguiete iteración del algoritmo.

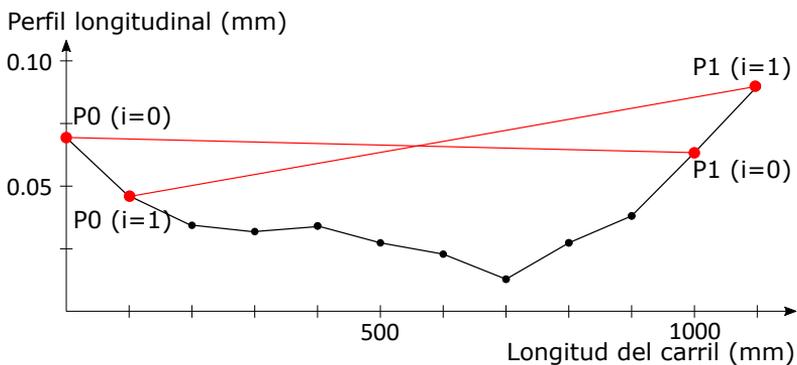


Figura 5.20: Algoritmo de reglas virtuales. Reglas virtuales generadas.

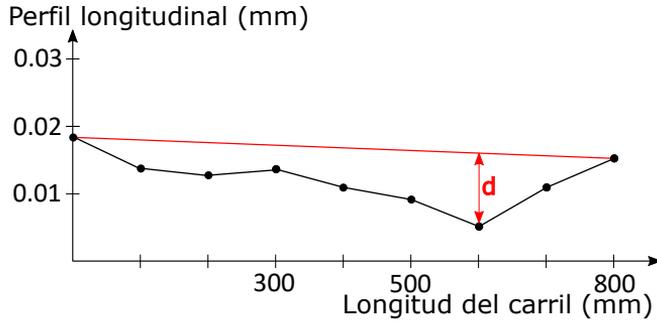


Figura 5.21: Filtro de una regla. Valle poco profundo.

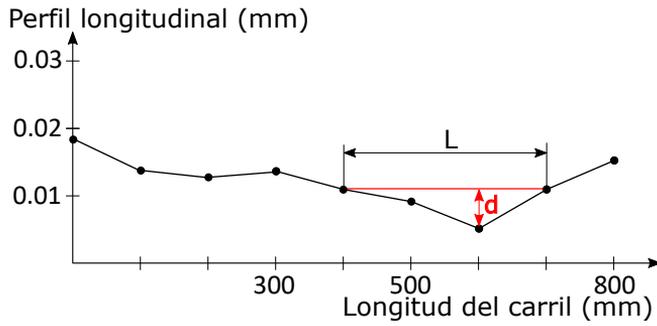


Figura 5.22: Filtro de una regla. Valle estrecho.

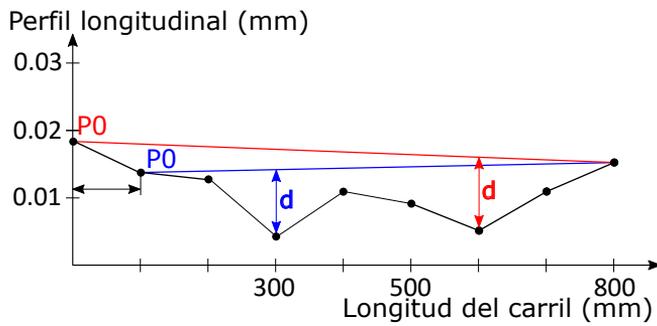


Figura 5.23: Filtro de dos reglas. Poca separación en  $P_0$ .

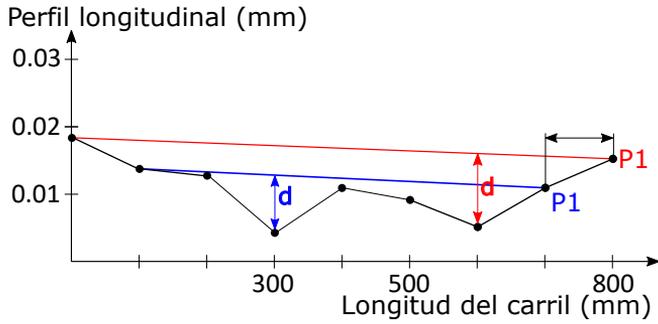


Figura 5.24: Filtro de dos reglas. Poca separación en P1.

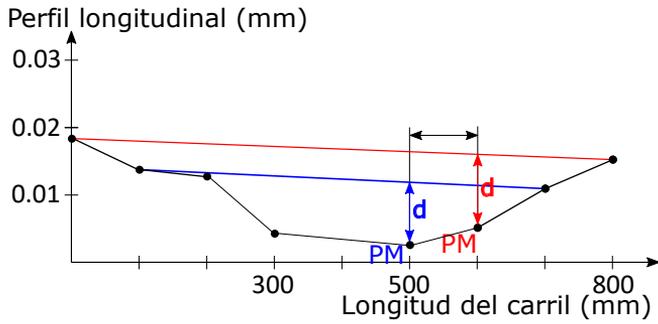


Figura 5.25: Filtro de dos reglas. Poca separación en PM.

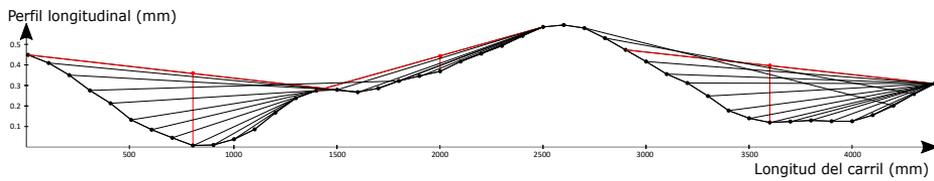


Figura 5.26: Ejemplo amplio de generación de reglas virtuales de 1.5 m.

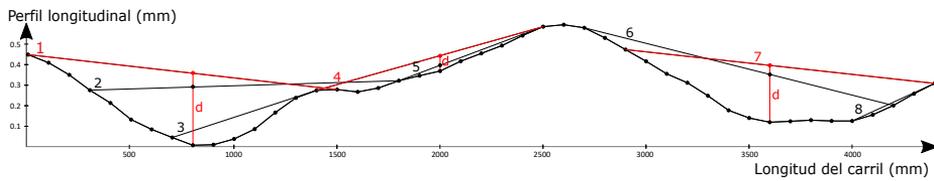


Figura 5.27: Filtrado de las reglas virtuales generadas.

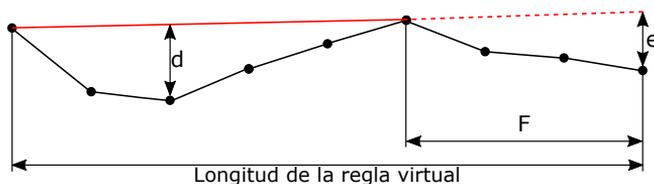
## 5.4. Aplicación del método de acuerdo al estándar EN-13674

Tal y como se vio en la sección 5.2 la longitud del carril es dividida en cinco partes diferentes: dos extremos, dos solapes y un cuerpo. El método para detectar los problemas de planitud se aplica a cada una de estas partes con ligeras variaciones, dependiendo de la parte de la longitud del carril que se está midiendo.

El método tal cual se ha visto en las secciones anteriores es aplicado para medir el cuerpo del carril. Sin embargo para medir los solapes y los extremos del carril, este método se debe realizar con unas variaciones.

Los solapes deben ser medidos por una única regla virtual, y no por más de una como sucede en el cuerpo del carril. Estas dos reglas utilizadas para medir los dos solapes del carril se generan aplicando el método visto antes, sin embargo, de todas las reglas virtuales generadas por el método, solo se escoge aquella regla que aporta información más desfavorable, es decir, aquella con un valor de  $d$  mayor.

Por su parte, el estándar indica que la forma de medir los extremos del carril debe ser diferente a la utilizada tanto en el cuerpo como en los solapes del carril. Debido a esto, se definen dos nuevos parámetros de medición, llamados  $e$  y  $F$ . Estos nuevos parámetros, se pueden observar en la figura 5.28.



**Figura 5.28:** Medición de los extremos del carril para la dimensión vertical. Parámetros  $e$  y  $F$

Estos parámetros  $e$  y  $F$ , tal como se indica en el estándar, solo se deben calcular cuando se está midiendo la planitud en la dimensión vertical.

Por lo tanto, para llevar a cabo la medición de la planitud sobre los extremos del carril en la dimensión horizontal, además de calcular el valor de  $d$  que se ha visto hasta ahora se deben calcular  $e$  y  $F$ . El cálculo de  $e$  y  $F$  se puede ver en la figura 5.28 para el extremo final del carril, siendo análogo para el extremo inicial:

- Se tiene una regla virtual de una longitud predefinida, y se hace apoyar sobre

el perfil de alturas horizontal. El final de dicha regla (o el principio si se está midiendo el extremo inicial del carril) debe terminar justo al final del perfil de alturas.

- Posteriormente se buscan los dos puntos de apoyo de la regla virtual  $P0$  y  $P1$ .
- El valor de  $e$  es la distancia en el eje vertical entre la regla virtual y el último punto del perfil de alturas.
- El valor de  $F$  es la distancia entre el punto de apoyo  $P1$  (en el caso del extremo inicial, será  $P0$ ) y el último punto del perfiles de alturas.
- Los parámetros  $e$  y  $F$  según el estándar *EN-13674* deben cumplir la siguiente condición: si  $e > 0$ ,  $F \geq 0.6 m$ . Esto significa que para calcular el parámetro  $e$  la distancia entre el punto de apoyo final del carril más cercano y el último punto del perfil de planitud debe ser igual o superior a  $0.6 m$ . En caso de que esto no se cumpla el final del carril no debe ser medido.

Por último, el estándar indica que los perfiles de alturas del carril deben ser medidos con reglas virtuales de diferentes tamaños dependiendo de la parte del carril y de la dimensión que se está midiendo. El método se debe aplicar de igual forma independientemente del tamaño de regla que se esté utilizando. El tamaño de las reglas a utilizar, la dimensión y la parte del carril a medir se pueden observar en la tabla 5.1.

Parte del carril	Dimensión	Clase B	Clase A
Cuerpo	V	3 m, 1 m	3 m, 1 m
	H	1.5 m	1.5 m
Solapes	V	1.5 m	2 m
	H	1.5 m	2 m
Extremos	V	1.5 m	2 m, 1 m
	H	1.5 m	2 m, 1 m

**Tabla 5.1:** Relación de parámetros de la norma *EN-13674*

En la tabla 5.1 se puede observar además, que para que el carril sea de *Clase A* o *Clase B* se debe medir con unos tamaños de regla virtual u otros. Por ejemplo, para que la dimensión vertical de los extremos de un carril cumpla con la *Clase A*, estos deben ser medidos primeramente utilizando una regla virtual de  $1.5 m$  y posteriormente usando las reglas virtuales de  $2 m$  y  $1 m$ .

La clasificación en estas dos clases diferentes se verá con mayor detalle en la sección 5.5.

## **5.5. Clasificación de acuerdo al estándar EN-13674**

Los resultados obtenidos aplicando el método de generación de reglas virtuales visto en las secciones anteriores, deben unificarse y organizarse de forma que no solo sea más fácilmente comprensible para un ser humano, sino que además cumpla con todos y cada uno de los requisitos que el estándar *EN-13674* marca para el control de planitud de los carriles. Con esta finalidad los resultados se mostrarán en una tabla.

La entrada para la evaluación de la calidad de cualquier carril con este método es el conjunto de valles seleccionados, cada uno con una profundidad  $d$ , medido con una regla virtual de tamaño  $L$ .

El estándar *EN-13674* define dos clases de calidad, siendo estas las denotadas como  $A$  y  $B$ . Todos y cada uno de los valles obtendrán una de estas clases. De tal forma que a un defecto de planitud pequeño, de por ejemplo ( $d \leq 0.3 \text{ mm}$ ) se le asigna clase  $A$  a la longitud cubierta por la regla virtual. A un defecto de planitud mayor, de por ejemplo ( $d \leq 0.4 \text{ mm}$ ) se le asigna la clase  $B$ . Y si este defecto de planitud es mayor, ( $d > 0.4 \text{ mm}$ ), se le asigna una clase residual, no definida en la norma, y que se denomina  $C$ .

Con la finalidad de ayudar al operador que debe controlar la calidad de la planitud de un carril con la clasificación del mismo, las reglas obtenidas mediante el método visto en las secciones anteriores, todas y cada una de las reglas virtuales que se han generado se clasifican dependiendo de la parte del carril a la que pertenecen.

La clasificación de una parte del carril se obtiene buscando la regla virtual que mide un valle de dicha parte del carril y obtiene la peor clasificación. Por ejemplo, si la medición de la regla virtual para el cuerpo del carril en su dimensión horizontal obtiene cuatro reglas cuyas clasificaciones son  $A$ ,  $B$ ,  $A$  y  $C$ , entonces se puede decir que la clasificación de esta parte del carril es  $C$ .

De esta forma se obtiene una clasificación de tolerancia  $A$ ,  $B$  o la residual  $C$  para cada una de las partes y de las dimensiones del carril. En consecuencia, se obtienen cinco clases de tolerancia para cada dimensión del carril.

La tabla 5.2 se muestra las tolerancias que se deben cumplir para cada una de las dimensiones y parte de la longitud del carril para posteriormente clasificar el carril en Clase A, Clase B.

Ubicación / Propiedades dimensionales		Clase B		Clase A	
		d	L	d	L
Cuerpo	Alineación recta vertical V	< 0.4 mm	3 m	< 0.3 mm	3 m
		y		y	
	< 0.3 mm	1 m	0.2 mm	1 m	
	Alineación recta horizontal H	< 0.6 mm	1.5 m	< 0.45 mm	1.5 m
Extremos	Extremo "E"	1.5 m		2 m	
	Regularidad en la superficie vertical V	y		y	
		< 0.3 mm	1 m	< 0.3 mm	1 m
		e < 0.2 mm		e < 0.2 mm	
	Regularidad en la superficie horizontal H	< 0.7 mm	1.5	< 0.6 mm	2 m
		y		y	
< 0.4 mm		1 m	< 0.4 mm	1 m	
Solapes	Regularidad en la superficie vertical V	< 0.4 mm	1.5 m	< 0.3 mm	2 m
		< 0.6 mm	1.5 m	< 0.6 mm	2 m

**Tabla 5.2:** Clasificación de la calidad de la planitud según el estándar EN-13674.

De la tabla 5.2 se extrae la siguiente información:

- Para que un carril sea considerado de Clase A, debe cumplir:

- En la dimensión horizontal:

El cuerpo del carril debe ser medido con una regla de 1.5 m y el valor máximo de profundidad  $d$  para cada uno de los valles debe ser menor que 0.45 mm.

Los extremos del carril se deben medir con reglas de 2 m y 1 m, y obtener un valor máximo de profundidad  $d$  de 0.6 mm y 0.4 mm respectivamente.

Los solapes del carril se deben medir con regla de 2 m y obtener un valor máximo de 0.6 mm.

- En la dimensión vertical:

El cuerpo del carril debe ser medido con reglas de 3 m y 1 m, y obtener un valor máximo de profundidad  $d$  de 0.3 mm y 0.2 mm respectivamente.

Los extremos del carril se deben medir con reglas de 2 m y 1 m, y obtener un valor máximo de profundidad  $d$  de 0.4 mm y 0.3 mm

respectivamente. En este caso además se debe calcular el valor  $e$ , como se ve en la figura 5.28. Este valor de  $e$  debe ser como máximo de  $0.2\text{ mm}$ .

Los solapes del carril se deben medir con regla de  $2\text{ m}$  y obtener un valor máximo de  $0.3\text{ mm}$ .

- Para que un carril sea considerado de *Clase B*, debe cumplir:

- En la dimensión horizontal:

El cuerpo del carril debe ser medido con una regla de  $1.5\text{ m}$  y el valor máximo de profundidad  $d$  para cada uno de los valles debe ser menor que  $0.6\text{ mm}$ .

Los extremos del carril se deben medir con reglas de  $1.5\text{ m}$ , y obtener un valor máximo de profundidad  $d$  de  $0.7\text{ mm}$ .

Los solapes del carril se deben medir con regla de  $1.5\text{ m}$  y obtener un valor máximo de  $0.6\text{ mm}$ .

- En la dimensión vertical:

El cuerpo del carril debe ser medido con reglas de  $3\text{ m}$  y  $1\text{ m}$ , y obtener un valor máximo de profundidad  $d$  de  $0.4\text{ mm}$  y  $0.3\text{ mm}$  respectivamente.

Los extremos del carril se deben medir con reglas de  $1.5\text{ m}$ , y obtener un valor máximo de profundidad  $d$  de  $0.5\text{ mm}$ . En este caso además se debe calcular el valor  $e$ , como se ve en la figura 5.28. Este valor de  $e$  debe ser como máximo de  $0.2\text{ mm}$ .

Los solapes del carril se deben medir con regla de  $1.5\text{ m}$  y obtener un valor máximo de  $0.4\text{ mm}$ .

La tabla 5.3 muestra un ejemplo de la clasificación de la calidad de la planitud de un carril.

EF	OF	BO	OR	ER	
A	A	B	A	C	Perfil Horizontal
B	B	B	A	B	Perfil Vertical
B	B	B	A	C	Suma de los perfiles
C				Clasificación final del carril	

**Tabla 5.3:** Clasificación de la planitud de un carril

En el ejemplo de la tabla 5.3 la clasificación para la dimensión horizontal que se obtiene es *AABAC* y para la dimensión vertical es *BBBAB*. El siguiente paso que se debe realizar es *sumar* las clases obtenidas eligiendo la clase más desfavorable para cada una de las partes del carril. En el ejemplo de la tabla 5.3 el resultado de dicha suma sería *BBBAC*. Por último y de forma similar, se debe seleccionar la peor clase, obteniendo una clasificación del carril *C*.

Finalmente, los carriles que no cumplan los requisitos de planitud, es decir, aquellos que obtengan la clase residual *C* deben ser sometidos a un proceso de mejora de la planitud del mismo o ser descartados.

# Capítulo 6

## Resultados y discusión

### 6.1. Resultados de la generación de perfiles longitudinales de los carriles

#### 6.1.1. Introducción

La arquitectura que se ha visto en el capítulo 3, es la arquitectura final del sistema, pero la arquitectura que en un principio se diseñó para llevar a cabo la resolución del problema de mitigación del efecto de las vibraciones y ruido de medición, es radicalmente diferente a la que al final se optó por utilizar.

La arquitectura inicial se basa en un sistema previo el cual no entra dentro del ámbito de esta tesis y se diseñó en trabajos anteriores. Este trabajo se describe detalladamente en [2]. Se trata de utilizar el sistema de comprobación de la forma del perfil del carril para llevar a cabo también la comprobación de la planitud.

Las pruebas realizadas sobre esta arquitectura inicial del sistema se verán con mayor detalle en la sección 6.1.2 y se analizarán las razones que posteriormente llevase a descartar el uso de la misma.

Finalmente se presentarán resultados comparando las dos arquitecturas propuestas, esto se puede ver en la sección 6.1.3 así como los resultados con la arquitectura actual con diferente número de sensores, lo cual se puede ver en la sección 6.1.4.

Por último, y debido a que la resolución de este problema se debe llevar a cabo en el menor tiempo posible, debido a que el sistema mide la planitud de los carriles durante su fabricación, se llevará a cabo un estudio sobre el tiempo de ejecución del método utilizando diferentes vías de implementación para este software, esto se puede ver en la sección 6.1.5.

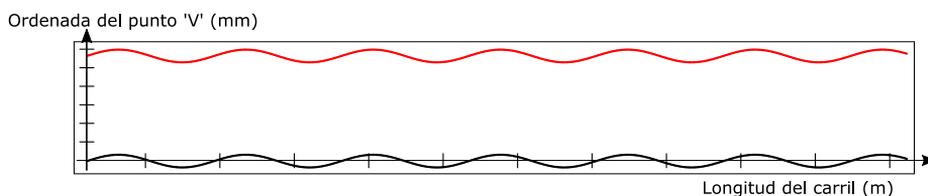
### 6.1.2. Pruebas sobre la arquitectura con un único plano láser

Como punto de partida en esta tesis, se proponía una solución basada en el uso de cuatro sensores de triangulación láser que proyectan el haz de luz láser sobre el mismo plano, tal y como se ha visto en la sección 3.2 del capítulo 3.

Para comprobar la eficacia de este método a la hora de llevar a cabo la mitigación de las vibraciones, se propone medir un carril de 70 metros de longitud, en el que se ha simulado una vibración con forma senoidal de amplitud  $5\text{ mm}$  y periodo  $10\text{ m}$

En este carril de prueba en cada instante de medición el perfil del carril sube o baja de acuerdo a la función seno, de esta forma se consigue simular una vibración senoidal.

Una vez se aplica el método y se extrae el punto  $V$  de cada una de las secciones del carril de la forma vista en la sección 4.2.4 del capítulo 4, se hace lo mismo sobre el carril con la vibración para comparar los resultados. Estos se pueden ver en la figura 6.2.



**Figura 6.1:** Resultado de aplicar el método con un único plano de medición para eliminar la vibración

Tal y como se puede apreciar en la figura 6.2, la vibración a la que se somete el carril sigue estando una vez se ha llevado a cabo el método que pretendía paliar los efectos de la misma. En dicha figura, se muestra en color rojo los puntos  $V$  del carril original y en color negro los puntos  $V$  del carril tras ser sometido al método anterior.

Se puede comprobar que el error introducido por la vibración sigue presente en la misma magnitud que al inicio del método, es decir, en el carril original. Lo único que se aprecia es que ahora el valor  $V$  del carril oscila, mediante una onda senoidal alrededor de  $0$ , esto se debe al paso 4 del método anterior.

Tal y como se puede apreciar en los resultados vistos en la tabla 6.1 por cada

Amplitud del seno (mm)	Error Absoluto Medio (mm)	Incremento del error (mm)
1	0.632	0.632
2	1.263	0.632
3	1.894	0.632
4	2.526	0.632
5	3.158	0.632
6	3.789	0.632
7	4.421	0.632
8	5.053	0.632
9	5.685	0.632
10	6.317	0.632

**Tabla 6.1:** Error absoluto medio generado con la arquitectura inicial

milímetro que se amplía la amplitud del seno que describe la vibración del carril se añaden  $0.632\text{ mm}$  de error, lo cual visto en forma de gráfica se puede ver en la figura 6.2.

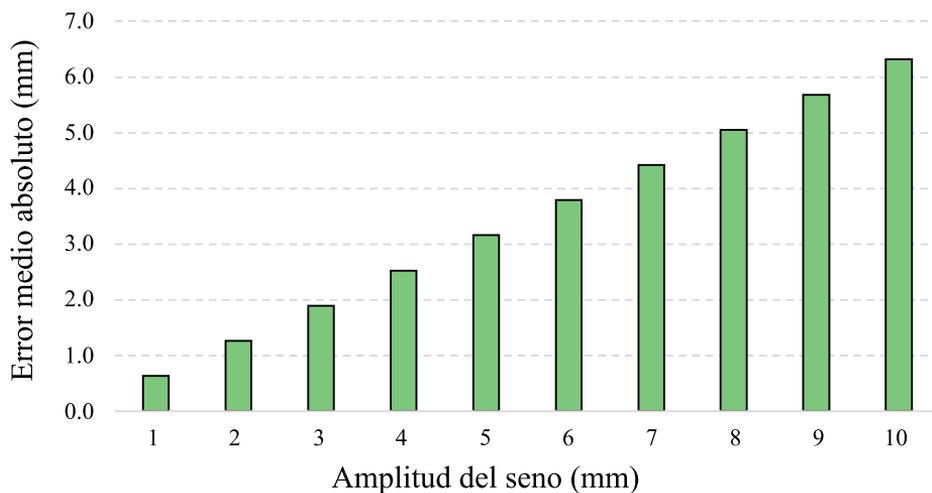
Tal y como se puede apreciar, tanto en la tabla 6.1 como en la gráfica de la figura 6.2, a medida que se aumenta la amplitud del seno aumenta linealmente el error absoluto medio generado. De tal forma que esta arquitectura es dependiente del tipo de vibración que se produzca durante la medición del carril. Este aspecto ha llevado a que esta arquitectura no sea viable para mitigar los efectos de las vibraciones.

### 6.1.3. Comparación de las arquitecturas con único plano láser y con múltiples planos láser

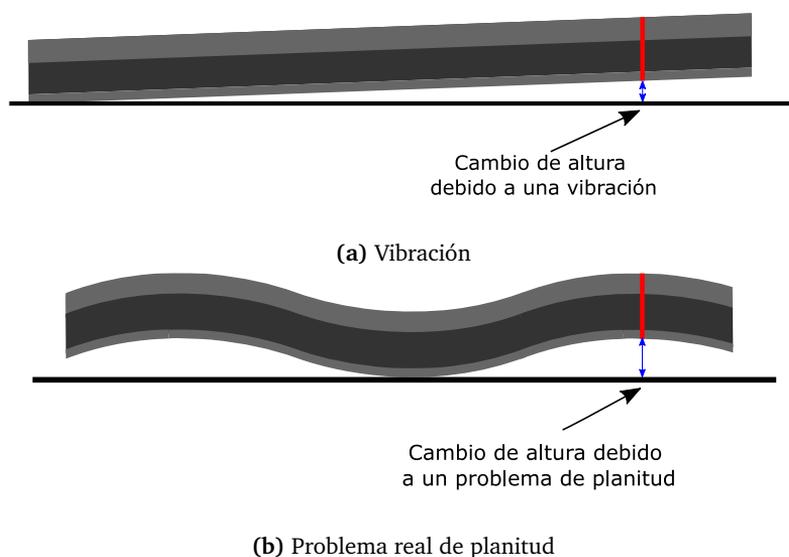
El problema principal de la arquitectura inicial, en la cual los sensores están todos colocados formando un único plano láser sobre la longitud del carril es que hace imposible distinguir entre una vibración y un problema real de planitud. En la figura 6.3 se muestra un ejemplo de vibración frente a un problema real de planitud.

En la subfigura 6.3a se muestra un carril plano que sufre una vibración, pero que sin embargo no presenta ningún problema de planitud. En cambio en la subfigura 6.3b se muestra el caso opuesto, el carril presenta un problema de planitud pero no se ve afectado por ninguna vibración.

El problema principal de la arquitectura inicial es que en el caso de los ejemplos



**Figura 6.2:** Gráfica de barras de error absoluto medio generado con la arquitectura inicial

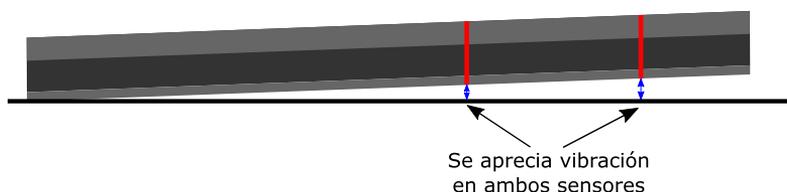


**Figura 6.3:** Vibración frente al problema de planitud cuando se capturan imágenes con múltiple sensores formando un único plano láser

vistos en la figura 6.3 ambos serían vistos como problemas de planitud, debido a que la mitigación de las vibraciones no se puede llevar a cabo cuando los sensores se colocan en un único plano vertical de la longitud del carril.

Para ello estos sensores se deben distribuir a lo largo de la longitud del carril, dando lugar a la arquitectura vista en el capítulo 3.

De esta forma, debido a que cuando un carril que sufra una vibración, esta podrá ser capturada por más de un sensor, y por lo tanto, existe la posibilidad de idea un método que sea capaz de llevar a cabo la mitigación de dicha vibración. La figura 6.4 muestra un ejemplo sobre esto.



**Figura 6.4:** Posibilidad de mitigación de las vibraciones con los sensores dispuestos sobre la longitud del carril

Tal y como se puede observar en la figura 6.4, ambos sensores capturan la vibración y por lo tanto se dispone de dos puntos de referencia a la hora de llevar a cabo la mitigación de vibraciones.

Los aspectos fundamentales a la hora de llevar a cabo la mitigación de las vibraciones son los siguientes:

- Número de sensores a utilizar: En el caso de la arquitectura propuesta en el capítulo 3, se trata de una arquitectura, que debido a los principios del método, debe utilizar al menos tres sensores.
- Posición de los sensores: La posición de los sensores es crítica a la hora de llevar a cabo el método de mitigación de las vibraciones.

Estos dos aspectos serán los que se tendrán en cuenta a la hora de diseñar toda la experimentación sobre la arquitectura descrita en esta tesis. Esto se llevará a cabo en la sección 6.1.4.

#### **6.1.4. Pruebas realizadas sobre la arquitectura con múltiples planos láser**

Con la finalidad de comprobar el rendimiento del método descrito en el capítulo 4 se van a realizar un conjunto de pruebas y se analizará el impacto de estas sobre los resultados obtenidos.

##### **6.1.4.1. Parámetros de la experimentación**

La experimentación que se va a llevar a cabo sobre la arquitectura actual, son los siguientes:

- Número de sensores a utilizar.
- Posición de los sensores en el sistema.
- Carril de prueba que se va a utilizar para comprobar la precisión del sistema.
- Tipo y nivel de las vibraciones que afectarán al carril de prueba.
- Tipo y nivel de ruido de medición que afectarán al carril de prueba.

##### **6.1.4.1.1. Número de sensores a utilizar**

Tal y como se ha visto en el capítulo 4, el número mínimo de sensores a utilizar es de tres, debido al método propuesto, es por esto, que las pruebas se van a realizar sobre un sistema con tres, cuatro y cinco sensores.

##### **6.1.4.1.2. Posición de los sensores en el sistema**

Se debe buscar la posición óptima de los sensores para que el método descrito en el capítulo 4 sea lo más óptimo posible. Para ello para el caso de cuatro y cinco sensores se plantean las siguientes distribuciones:

- Colocación equiespaciada de los sensores a lo largo del sistema. Para ello el primer sensor, es decir, el sensor  $s_1$  se situará siempre en la posición  $0\text{ cm}$ . El resto de los sensores se situarán cada uno a la misma distancia de la anterior, hasta llegar al último sensor. Con esta colocación la variable estará en la distancia a la que se coloca el primer sensor. Para el caso de cuatro sensores, las posiciones de los sensores a utilizar son las siguientes:
  - Debido a que la regla de  $3\text{ m}$  es la más larga utilizada en el estándar *EN-13674*:  
30 cm, 20 cm, 10 cm, 0 cm.

## 6.1 Resultados de la generación de perfiles longitudinales de los carriles

---

- Similar al anterior pero separando los sensores el doble:  
60 cm, 40 cm, 20 cm, 0 cm.
- Similar al primero pero separando los sensores la mitad:  
15 cm, 10 cm, 5 cm, 0 cm.
- Para el caso de cinco sensores equiespaciados, las posiciones a utilizar son las siguientes:
  - Debido a que la regla de 3 m es la más larga utilizada en el estándar *EN-13674*:  
32 cm, 24 cm, 16 cm, 8 cm, 0 cm.
  - Similar al anterior pero separando los sensores el doble:  
64 cm, 48 cm, 32 cm, 16 cm, 0 cm.
  - Similar al primero pero separando los sensores la mitad:  
16 cm, 12 cm, 8 cm, 4 cm, 0 cm.
- Colocación de los sensores de acuerdo a las longitudes de regla utilizadas para medir el carril utilizando de referencia el estándar *EN-13674*. Para el caso de la colocación de cuatro sensores de acuerdo a este estándar, y teniendo en cuenta que al tener cuatro longitudes de regla, como mucho se podrían poner tres sensores en estas posiciones, ya que uno de ellos tiene que estar siempre en el principio del sistema, es decir, en la posición de 0 m, las pruebas son:
  - 30 cm, 20 cm, 15 cm, 0 cm.
  - 30 cm, 15 cm, 10 cm, 0 cm.
  - 30 cm, 20 cm, 10 cm, 0 cm.
  - 20 cm, 15 cm, 10 cm, 0 cm.
- Para el caso de cinco sensores de acuerdo al estándar europeo, la única colocación posible es:
  - 30 cm, 20 cm, 15 cm, 10 cm, 0 cm.
- Haciendo modificaciones sobre la colocación de los sensores de acuerdo a las longitudes de regla utilizadas para medir el carril utilizando de referencia el estándar *EN-13674*. Para el caso de la colocación de cuatro sensores las pruebas son:
  - Moviendo dos centímetros a la derecha los sensores 3 y 4:  
28 cm, 18 cm, 15 cm, 0 cm.
  - Moviendo dos centímetros a la izquierda los sensores 2 y 3:

- 30 cm, 22 cm, 17 cm, 0 cm.
- Moviendo dos centímetros a la derecha todos los sensores:  
28 cm, 18 cm, 8 cm, 0 cm.
- Moviendo dos centímetros a la izquierda todos los sensores:  
22 cm, 17 cm, 12 cm, 0 cm.
- Dejando la mayor separación posible entre los sensores:  
30 cm, 27 cm, 3 cm, 0 cm.
- Juntando lo máximo posible los sensores:  
17 cm, 15 cm, 12 cm, 0 cm.
- Para el caso de cinco sensores:
  - Moviendo dos centímetros a la derecha los sensores 4 y 5:  
28 cm, 18 cm, 15 cm, 10 cm, 0 cm.
  - Moviendo dos centímetros a la derecha los sensores 2 y 3:  
30 cm, 20 cm, 17 cm, 12 cm, 0 cm.
  - Moviendo dos centímetros a la izquierda los sensores 3 y 4:  
30 cm, 22 cm, 17 cm, 10 cm, 0 cm.
  - Moviendo dos centímetros a la izquierda los sensores 2 y 3:  
30 cm, 20 cm, 17 cm, 14 cm, 0 cm.
  - Moviendo el sensor 2 tres centímetros a la derecha y el sensor 4 tres centímetros a la izquierda:  
30 cm, 18 cm, 15 cm, 7 cm, 0 cm.
  - Acercando los sensores al primero y posteriormente equiespaciándolos cinco centímetros, dejando el último sensor sin mover:  
30 cm, 15 cm, 10 cm, 5 cm, 0 cm.
  - Acercando los sensores al último y posteriormente equiespaciándolos cinco centímetros, dejando el primer sensor sin mover:  
30 cm, 25 cm, 20 cm, 15 cm, 0 cm.

La tabla 6.2 muestra todas estas posiciones de los sensores.

## 6.1 Resultados de la generación de perfiles longitudinales de los carriles

Nombre de la prueba	Posiciones de los sensores (cm)	Número de sensores
P1	0, 10, 20, 30	4
P2	0, 20, 40, 60	4
P3	0, 5, 10, 15	4
P4	0, 15, 20, 30	4
P5	0, 10, 15, 30	4
P6	0, 10, 20, 30	4
P7	0, 10, 15, 20	4
P8	0, 15, 18, 28	4
P9	0, 17, 22, 30	4
P10	0, 8, 18, 28	4
P11	0, 12, 17, 22	4
P12	0, 3, 27, 30	4
P13	0, 12, 15, 17	4
P14	0, 8, 16, 24, 32	5
P15	0, 16, 32, 48, 64	5
P16	0, 4, 8, 12, 16	5
P17	0, 10, 15, 20, 30	5
P18	0, 10, 15, 18, 28	5
P19	0, 12, 17, 20, 30	5
P20	0, 10, 17, 22, 30	5
P21	0, 14, 17, 20, 30	5
P22	0, 7, 15, 18, 30	5
P23	0, 5, 10, 15, 30	5
P24	0, 15, 20, 25, 30	5

**Tabla 6.2:** Posiciones de los sensores a utilizar durante la experimentación del método descrito en el capítulo 4

Nombre	Longitud del carril (m)	Amplitud (mm)	Longitud de onda (cm)
Carril A	70	2	200
Carril B	70	2	130

**Tabla 6.3:** Carriles de prueba a utilizar durante la experimentación del método descrito en el capítulo 4

#### **6.1.4.1.3. Carriles de prueba**

Los carriles que se van a utilizar para medir el efecto de las vibraciones y el ruido de vibración tras la aplicación del método descrito en el capítulo 4, sufrirán un defecto de planitud y las características son las que se pueden ver en la tabla 6.3.

De esta forma se comprueba si el defecto de planitud que el carril pueda presentar influye en los resultados obtenidos tras la mitigación del ruido de medición y las vibraciones. En los carriles vistos en la tabla 6.3 se capturará una imagen cada 10 cm es decir, se tomarán 700 mediciones por carril.

#### **6.1.4.1.4. Tipo y nivel de las vibraciones que afectarán al carril de prueba**

Para llevar a cabo las pruebas, y con la finalidad de emular en la mayor medida posible la medición de un carril, por el algoritmo detallado en el capítulo 4, se va a introducir en el carril de prueba visto en la sección 6.1.4.1.3 tres tipos diferentes de vibraciones:

- Vibración senoidal.
- Vibración de rebotes.
- Vibración escalonado.

Las vibraciones descritas antes simulan en la medida de lo posible las vibraciones a las que los carriles son sometidos durante su medición en un entorno industrial.

Una vez se han definido los tipos de vibraciones a utilizar se debe definir la intensidad de dicha vibración. Teniendo en cuenta que todas ellas se basan en una onda senoidal, por lo tanto, basta con definir la amplitud y el periodo de la misma.

Las vibraciones senoidales son una de las vibraciones más comunes durante la medición del carril y se basa en una onda que sigue un seno de una amplitud y periodo definidos. La figura 6.5 muestra una imagen de este tipo de vibración.

En la figura 6.5 se puede ver el carril original, sin ruido o vibraciones, representado en color rojo. En color negro se puede ver en este caso la vibración de tipo *senoidal* que se va a aplicar al carril y en color azul el resultado de aplicar la vibración sobre el carril.

Para definir las pruebas a realizar se deben fijar la amplitud y el periodo de la onda senoidal, es por esto por lo que las vibraciones que se proponen tienen los siguientes aspectos:

- Amplitud: 5 mm. Periodo: 500 cm.

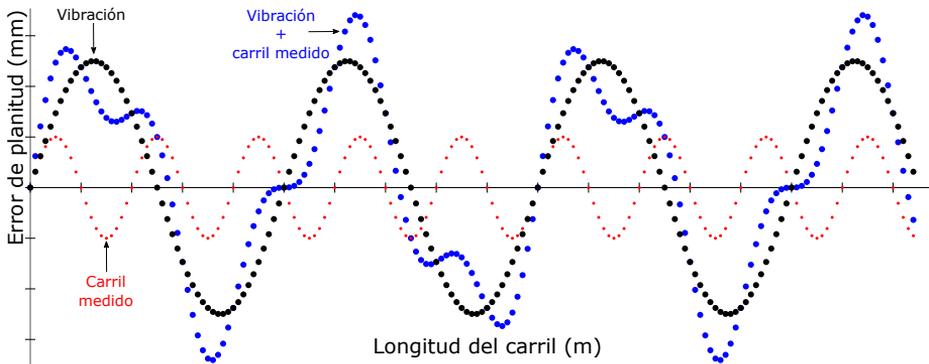


Figura 6.5: Vibración de tipo senoidal

- Amplitud: 1 mm. Periodo: 100 cm.

Las vibraciones basadas en una onda senoidal, como es el caso de las vibraciones de rebotes, son una de las vibraciones más comunes durante la medición del carril y se basa en una onda que sigue un seno de una amplitud y periodo definidos, solo que en este caso cuando el seno debería tener un valor negativo se calcula su valor absoluto, haciendo que la onda siempre tenga un valor positivo. La figura 6.6 muestra una imagen de este tipo de vibración.

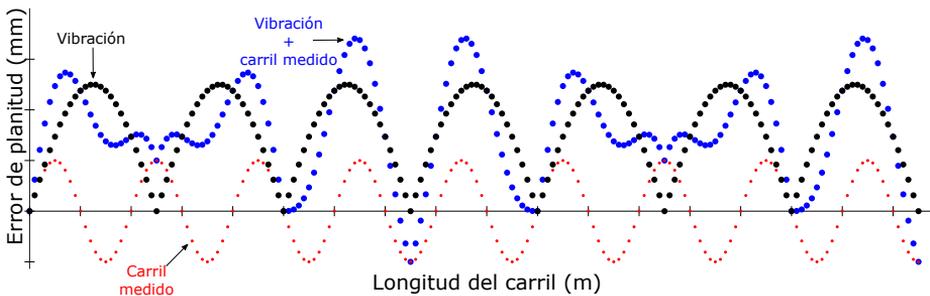


Figura 6.6: Vibración de tipo rebotes

En la figura 6.6 se puede ver el carril original, sin ruido o vibraciones, representado en color rojo. En color negro se puede ver en este caso la vibración de tipo *rebotes* que se va a aplicar al carril y en color azul el resultado de aplicar la vibración sobre el carril.

Para definir las pruebas a realizar se deben fijar la amplitud y el periodo de la onda

senoidal que conformará esta vibración, es por esto por lo que las vibraciones que se proponen tienen los siguientes aspectos:

- Amplitud: 5 mm. Periodo: 500 cm.
- Amplitud: 1 mm. Periodo: 100 cm.

Las vibraciones basadas en una onda senoidal, como es el caso de las vibraciones de tipo escalonado, son una de las vibraciones más comunes durante la medición del carril y se basa en una onda que sigue un seno de una amplitud y periodo definidos, solo que en este caso cuando el valor del seno es positivo o cero, el valor de esta vibración es igual a la amplitud del seno y cuando es negativo es igual a menos la amplitud del seno. La figura 6.7 muestra una imagen de este tipo de vibración.

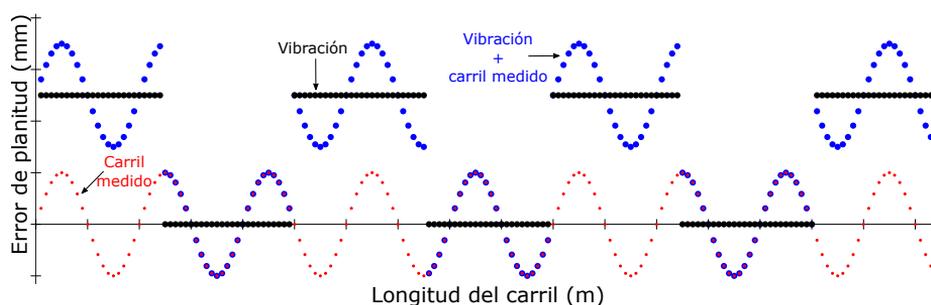


Figura 6.7: Vibración de tipo escalonado

En la figura 6.7 se puede ver el carril original, sin ruido o vibraciones, representado en color rojo. En color negro se puede ver en este caso la vibración de tipo *escalonado* que se va a aplicar al carril y en color azul el resultado de aplicar la vibración sobre el carril.

Para definir las pruebas a realizar se deben fijar la amplitud y el periodo de la onda senoidal que conformará esta vibración, es por esto por lo que las vibraciones que se proponen tienen los siguientes aspectos:

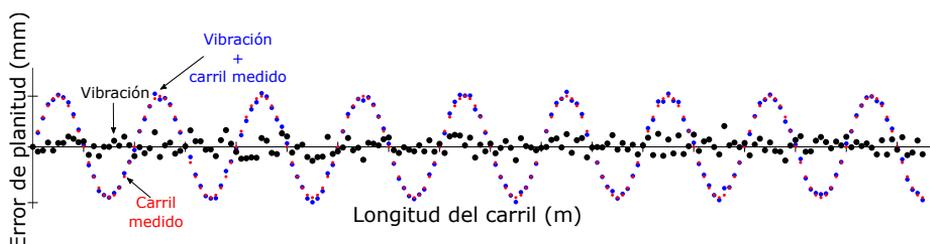
- Amplitud: 5 mm. Periodo: 500 cm.
- Amplitud: 1 mm. Periodo: 100 cm.

#### 6.1.4.1.5. Tipo y nivel de las vibraciones que afectarán al carril de prueba

Para llevar a cabo las pruebas, y con la finalidad de emular en la mayor medida

posible la medición de un carril, por el algoritmo detallado en el capítulo 4, se va a introducir en el carril de prueba visto en la sección 6.1.4.1.3 un tipo de ruido de medición, el cual es el *ruido gaussiano*.

Para el caso del ruido de medición basado en un ruido Gaussiano se debe definir la media y la desviación estándar. El *gaussiano aleatorio* es aquel que se caracteriza por seguir una distribución normal. Para definir correctamente este ruido se debe dar valor a la media y a la desviación estándar. Una imagen de este tipo de ruido se puede ver en la figura 6.8.



**Figura 6.8:** Vibración de tipo escalonado

En la figura 6.8 se puede ver el carril original, sin ruido o vibraciones, representado en color rojo. En color negro se puede ver en este caso el ruido de medición de tipo *gaussiano* que se va a aplicar al carril y en color azul el resultado de aplicar la vibración sobre el carril.

Para el caso de este tipo de ruido se proponen dos pruebas diferentes, cuyos valores a utilizar son los siguientes:

- Rango:  $\pm 1\%$  de la amplitud de la onda senoidal que conforma el defecto de planitud del carril visto en la sección 6.1.4.1.3.
- Rango:  $\pm 5\%$  de la amplitud de la onda senoidal que conforma el defecto de planitud del carril visto en la sección 6.1.4.1.3.

La tabla 6.4 muestra un resumen sobre todos los tipos de vibraciones y ruidos de vibración a introducir en el carril.

### 6.1.4.2. Resultados de la experimentación

A continuación se presentan los datos de llevar a cabo las pruebas que se han descrito; se han medido los carriles descritos en la sección 6.1.4.1.3 con las

Nombre de la prueba	Alteración	Parámetros
Senoidal 1	Vibración	Amplitud: 1 mm. Periodo: 100 cm
Senoidal 2	Vibración	Amplitud: 5 mm. Periodo: 500 cm
Rebotes 1	Vibración	Amplitud: 1 mm. Periodo: 100 cm
Rebotes 2	Vibración	Amplitud: 5 mm. Periodo: 500 cm
Escalonado 1	Vibración	Amplitud: 1 mm. Periodo: 100 cm
Escalonado 2	Vibración	Amplitud: 5 mm. Periodo: 500 cm
Gaussiano 1	Ruido de medición	Rango: $\pm 1\%$
Gaussiano 2	Ruido de medición	Rango: $\pm 5\%$

**Tabla 6.4:** Vibraciones y ruidos de medición a utilizar durante la experimentación del método descrito en el capítulo 4

distribuciones de sensores propuestas en la sección 6.2.

Para ello, en primer lugar, se va a probar el sistema con 3 sensores, ya que este es el número mínimo de sensores para poder llevar a cabo el método (debido a que se crean combinaciones de grupos de 3 sensores). De la misma forma se probará la distribución de sensores cuando el sistema dispone de 4 sensores. Se realizarán pruebas también con un sistema compuesto con 5 sensores.

Posteriormente, y con la finalidad de minimizar el efecto del ruido sobre el carril a la hora de calcular la planitud del mismo durante su paso bajo el sistema, se debe obtener la mejor distribución de sensores a lo largo del sistema, es decir, la posición que debe ocupar cada sensor.

La obtención de la distribución óptima de sensores para el caso de que el sistema disponga de cuatro sensores se llevará a cabo en la sección 6.1.4.4. Por otra parte, la obtención de la distribución óptima de sensores para el caso de que el sistema disponga de tres sensores se llevará a cabo en la sección 6.1.4.5.

Para llevar a cabo las pruebas para elegir una distribución de sensores frente a otra, se hará que circule un carril de prueba del que se conocen previamente los perfiles longitudinales de alturas. Este carril estará sometido a una fuente de ruido conocida y que será idéntica para todas las pruebas a realizar. Las características de este carril de prueba se ven con mayor profundidad en la sección 6.1.4.1.3. Los tipos de ruido a los que el carril puede ser sometido se ven con mayor profundidad en la sección 6.1.4.1.5.

Una vez el carril termine de circular bajo el sistema, se calcularán los perfiles longitudinales de alturas del mismo y se contrastarán con los conocidos. De esta

forma se comprobará la efectividad de la distribución de sensores en el sistema a la hora de eliminar el ruido que se ha introducido al carril. La forma de contrastar los perfiles obtenidos frente a los conocidos previamente es mediante el cálculo de un *Error Absoluto Medio*. De tal forma que para cada uno de los puntos de los perfiles longitudinales de alturas del carril, se obtiene su valor absoluto y se resta frente al valor absoluto de los perfiles longitudinales de alturas conocidos, y finalmente se hace una media de estas restas. De esta forma se obtiene un valor que indica la calidad de la distribución de sensores elegida.

Una vez se hayan obtenido las mejores distribuciones de sensores a lo largo del sistema, se seleccionará aquella que produzca menos error para llevar a cabo el resto de las pruebas sobre el sistema. Esto se puede ver en la sección 6.1.4.6.

Por último en la sección 6.1.5 se mostrarán los tiempos de ejecución para un carril de tamaño estándar en la industria que es medido por un sistema como el descrito en esta tesis.

#### **6.1.4.3. Desarrollo de la experimentación**

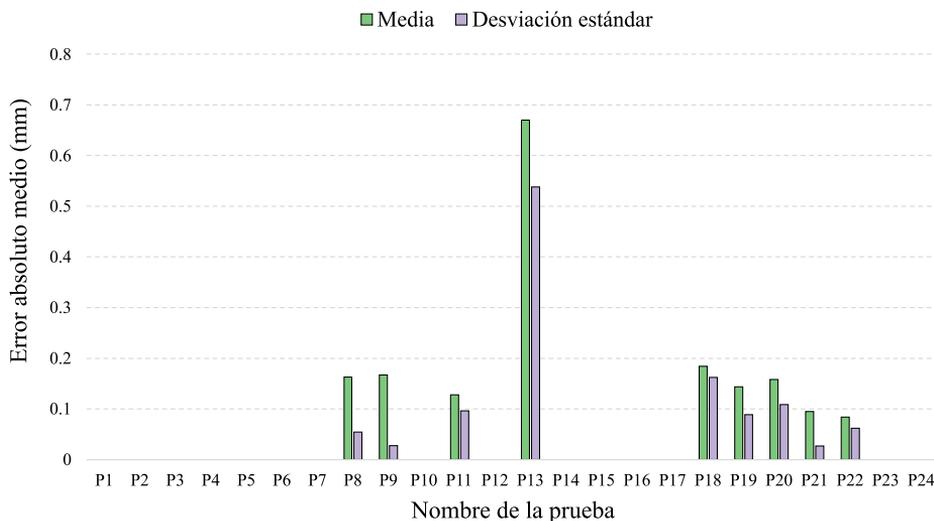
En la tabla 6.5 se muestran los resultados obtenidos una vez se ha terminado de medir los carriles utilizando las vibraciones de baja intensidad, es decir, *Senoidal 1*, *Rebotes 1* y *Escalonado 1*. Además para esta experimentación se ha añadido también el ruido de medición de baja intensidad, es decir, *Gaussiano 1*.

Lo cual visto en forma de gráfico se puede ver en la figura 6.9.

Con la finalidad de no hacer esta experimentación ilegible, no se han introducido los resultados de las pruebas de llevar a cabo la medición de los carriles utilizando la vibración de gran intensidad, es decir, *Senoidal 2*, *Rebotes 2* y *Escalonado 2* con un ruido de medición de baja intensidad. Esto se debe a que se producen exactamente los mismos resultados que con una vibración de baja intensidad. Debido a esto, se llega a la conclusión que la intensidad de una vibración constante, como es este caso, no afecta a los resultados.

Tal y como se puede comprobar en la tabla 6.5, existen pruebas para los que no se han generado resultados, esto se debe a que el sistema de ecuaciones resultante cuando se lleva a cabo la solución del mismo genera un error muy elevado.

El mejor resultado obtenido con una distribución de cuatro sensores se produce



**Figura 6.9:** Gráfica de las pruebas sobre las posiciones de los sensores descritas en la sección 6.1.4.1.2 con el ruido de medición *Gaussiano 1*

cuando estos se colocan en la posición:

$$|0 \quad 12 \quad 17 \quad 22|$$

Esta distribución de sensores produce un error de  $0.128 \text{ mm}$  de media del error absoluto medio para todos los tipos de vibración, ofreciendo también una desviación típica muy baja, de  $0.096 \text{ mm}$ .

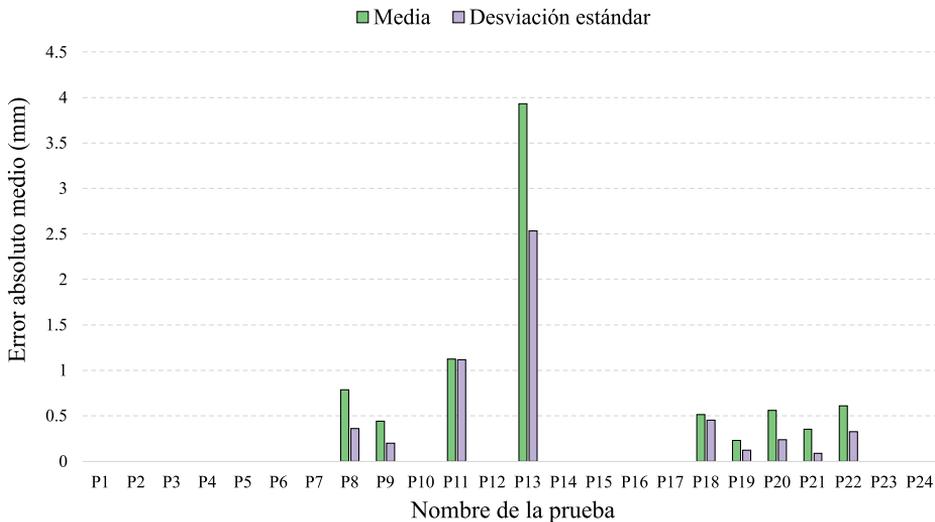
Por otra parte, el mejor resultado obtenido con una distribución basada en el uso de cinco sensores se produce cuando estos se colocan en las siguientes posiciones:

$$|0 \quad 7 \quad 15 \quad 18 \quad 30|$$

Con esta distribución de los cinco sensores, se produce un error de  $0.084 \text{ mm}$  de media del error absoluto medio para todos los tipos de vibración, además de tener de nuevo una desviación típica muy baja, de  $0.062 \text{ mm}$ .

De forma análoga al caso anterior, en la tabla 6.6 se muestran los resultados obtenidos una vez se ha terminado de medir los carriles utilizando las vibraciones, de baja intensidad, es decir, *Senoidal 1*, *Rebotes 1* y *Escalonado 1*. La diferencia con el caso anterior es que para esta experimentación se ha añadido el ruido de medición de alta intensidad, es decir, *Gaussiano 2*.

Lo cual visto en forma de gráfico se puede ver en la figura 6.10.



**Figura 6.10:** Gráfica de las pruebas sobre las posiciones de los sensores descritas en la sección 6.1.4.1.2 con el ruido de medición *Gaussiano 2*

En este caso, la prueba *P11* que antes generaba los mejores resultados cuando se llevaba a cabo la medición con cuatro sensores, ahora no lo hace. En cambio es la prueba *P9* la que genera los mejores resultados, la distribución de sensores es la siguiente:

$$|0 \quad 17 \quad 22 \quad 30|$$

Y con esta distribución de sensores se consigue una media de errores medios absolutos de  $0.441 \text{ mm}$  con una desviación típica de  $0.2 \text{ mm}$ .

En el caso de las distribuciones de cinco sensores, al igual que sucede con los casos de cuatro sensores, la distribución que antes aportaba la mejor solución en cuando a error medio, ahora no lo hace, si no que en este caso, la mejor distribución de sensores es la siguiente:

$$|0 \quad 12 \quad 17 \quad 20 \quad 30|$$

Con esta distribución de sensores se consigue una media de errores medios absolutos de  $0.229 \text{ mm}$  con una desviación típica de  $0.122 \text{ mm}$ .

Se puede observar que simplemente aumentando el ruido de medición al doble, se

multiplica aproximadamente por cuatro el error obtenido, aunque este sigue siendo muy reducido.

Se puede observar también que las distribuciones de sensores que antes generaban un sistema de ecuaciones cuya solución aportaba un error razonable, al aumentar el nivel de ruido de medición siguen haciéndolo, aunque aumentando el error absoluto medio .

El error obtenido en ambos casos, cuando las pruebas realizadas se hacen con un ruido de medición bajo y con un ruido de medición alto, las distribuciones de cinco sensores aportan un error medio más bajo que las distribuciones de cuatro sensores.

Debido a que la arquitectura de la que se parte y que se ha podido ver en detalle en la sección 6.1.2 se disponía de un sistema de cuatro sensores, y con la finalidad de no incrementar el número de los mismos en la arquitectura actual, en las posteriores secciones se va a buscar la mejor distribución de los mismos que generen el menor error absoluto medio .

En primer lugar, en la sección 6.1.4.4 se buscará la mejor distribución de cuatro sensores, y posteriormente, en la sección 6.1.4.5 se hará lo propio con tres.

#### **6.1.4.4. Obtención de la mejor posición de los cuatro sensores**

Para obtener la mejor distribución de sensores se hace que el carril descrito en la sección 6.1.4.1.3, que se verá afectado por una vibración de tipo senoidal como la vista en la sección 6.1.4.1.4.

Esta vibración denominada *Senoidal 2* cuenta con una con amplitud de 5 mm y periodo de 500 cm. Este carril también se verá afectado por un ruido de medición gaussiano como el visto en la sección 6.1.4.1.5. Este ruido de medición se denomina *Gaussiano 2* y cuanta con un rango  $\pm 5\%$  de la amplitud del seno que conforma el defecto de planitud del carril.

Se deben obtener las posiciones de los cuatro sensores que se van a utilizar en el sistema, para ello se hace que el primero esté fijo en la primera posición del sistema, es decir, en la posición 0. Por otra parte, el último sensor se sitúa en la posición 30, ya que es el mayor tamaño de regla utilizada para medir los carriles según la norma EN-13674.

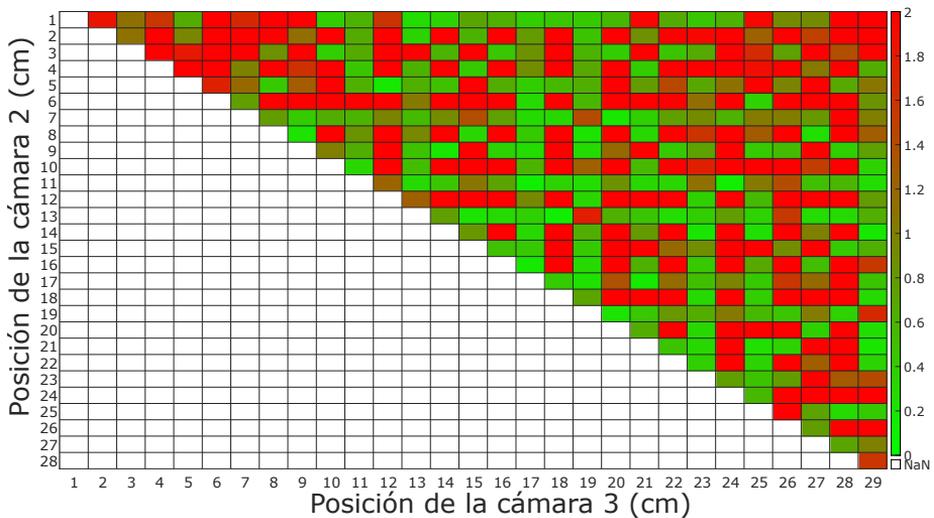
De esta forma restan dos sensores a situar, los dos centrales. Estos se irán moviendo

## 6.1 Resultados de la generación de perfiles longitudinales de los carriles

a derecha e izquierda desde la posición 1 hasta la 29, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} |0 \quad 1 \quad 2 \quad 30| \\ |0 \quad 1 \quad 3 \quad 30| \\ |\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots| \\ |0 \quad 27 \quad 29 \quad 30| \\ |0 \quad 28 \quad 29 \quad 30| \end{array}$$

De esta forma se obtendrá una gráfica con un mapa de calor que indicará el error absoluto medio de la distribución que se ha probado. Esta se puede ver en la figura 6.11.



**Figura 6.11:** Diagrama de calor para la distribución de cuatro sensores a lo largo del sistema.

En la gráfica de la figura 6.11 se dibuja desde el color verde al color rojo el error absoluto medio producido al llevar a cabo la medición del carril, donde el color rojo indica una distribución de sensores que ha producido un error absoluto medio mayor que aquellas mediciones representadas en verde.

Por otra parte, la gráfica de la figura 6.11 es idéntica para el carril con un problema de planitud de tipo senoidal con longitud de onda de 200 centímetros que con el carril de longitud de onda de 130 centímetros. De tal forma que se puede concluir que la forma del carril no influye en los resultados obtenidos.

También se puede observar en la gráfica de la figura 6.11 que se obtienen mejores resultados cuando los sensores no están muy juntos, es decir, el color rojo es predominante en las esquinas de la gráfica, debido a que es ahí cuando los sensores están más cerca de otros.

Se puede observar también que los mejores resultados se obtienen cuando al menos uno de los dos sensores se encuentra en una posición cuyo valor es un número primo. Debido a esto se va a forzar que siempre uno los sensores esté en una posición prima, para ello el último sensor del sistema, aquel que estaba situado en la posición 30 ahora estará en la posición 29, de tal forma que la distribución de los sensores ahora será:

$$\begin{array}{c}
 |0 \quad 1 \quad 2 \quad 29| \\
 |0 \quad 1 \quad 3 \quad 29| \\
 |\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots| \\
 |0 \quad 26 \quad 28 \quad 29| \\
 |0 \quad 27 \quad 28 \quad 29|
 \end{array}$$

De esta forma, y al igual que en el caso anterior, se obtendrá una gráfica con un mapa de calor que indicará el error absoluto medio de la distribución que se ha probado. Esta se puede ver en la figura 6.12.

Tal y como se puede observar ahora, los resultados son notablemente mejores. Siendo la distribución de sensores que menor error absoluto medio ofrece la que se puede ver en (6.1).

$$|0 \quad 9 \quad 14 \quad 29| \tag{6.1}$$

Esta distribución de sensores produce un error absoluto medio de  $0.121 \text{ mm}$ .

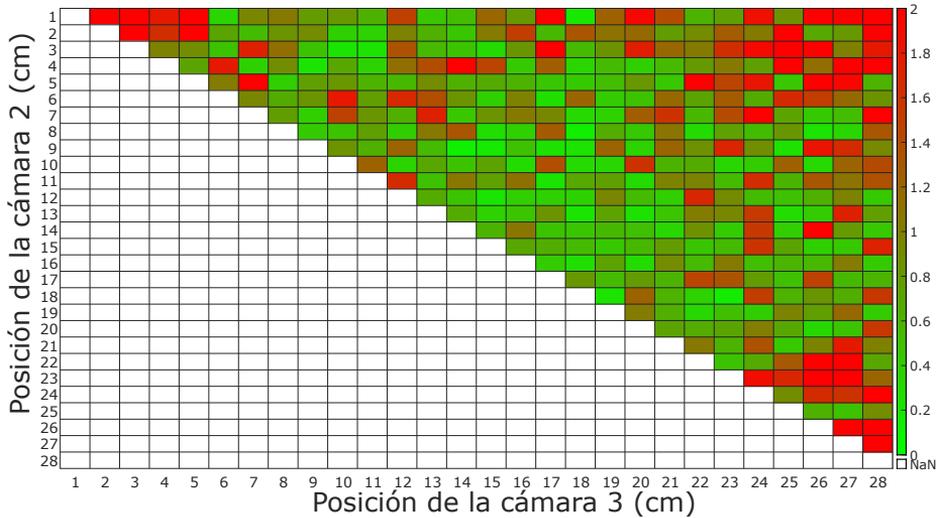


Figura 6.12: Diagrama de calor para la distribución de cuatro sensores a lo largo del sistema cuando el último sensor está situado en la posición 29.

#### 6.1.4.5. Obtención de la mejor posición de los tres sensores

De igual forma que en el caso anterior, para obtener la mejor distribución de sensores se hace que el carril descrito en la sección 6.1.4.1.3, que se verá afectado por una vibración de tipo senoidal, como la vista en la sección 6.1.4.1.4, con amplitud de 5 mm y periodo de 500 cm, es decir, *Senoidal 2* y que además también se verá afectado por un ruido de medición gaussiano como el visto en la sección 6.1.4.1.5 de rango  $\pm 5\%$  de la amplitud del seno que conforma el defecto de planitud del carril, el nombre de este ruido, de acuerdo a la tabla 6.4 es *Gaussiano 2*.

En este caso, debido a los resultados obtenidos con las pruebas llevadas a cabo sobre cuatro sensores, se parte de las siguientes premisas:

- El tipo de problema de planitud del carril no afecta a los resultados obtenidos.
- Al menos un sensor debe estar colocado en una posición cuyo número sea primo.
- Si los sensores están muy cerca unos de otros se producen peores resultados.

Es por esto por lo que el carril que se va a utilizar para llevar a cabo las mediciones es aquel que según se puede ver en la sección 6.1.4.1.3 dispone de un error de planitud con una longitud de onda de 200 cm.

Por otra parte, el último sensor del sistema se va a colocar en la posición 29 del sistema, de tal forma que la distribución de sensores será:

$$|0 \quad 1 \quad 29|$$

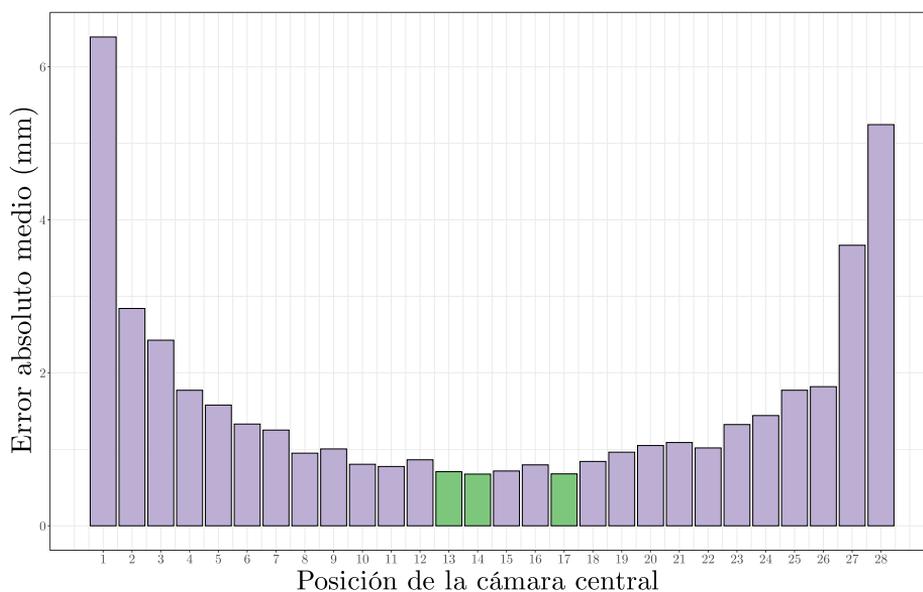
$$|0 \quad 2 \quad 29|$$

$$|\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots|$$

$$|0 \quad 27 \quad 29|$$

$$|0 \quad 28 \quad 29|$$

De esta forma se obtendrá una gráfica con un diagrama de columnas indicará el error absoluto medio de la distribución que se ha probado. Esta se puede ver en la figura 6.13.



**Figura 6.13:** Diagrama de barras para la distribución de tres sensores a lo largo del sistema cuando el último sensor está situado en la posición 29.

Tal y como se puede ver en la gráfica de la figura 6.13, y al igual que sucede cuando se utilizan cuatro sensores, los mejores resultados se obtienen cuanto más alejados están unos de otros. Es decir, los primeros y los últimos resultados ofrecen un error mayor que los resultados centrales.

En la figura 6.13 se pueden ver resaltados en color verde, las tres mejores posiciones para el sensor central dentro del sistema, en el cual, la mejor distribución de sensores es (6.2).

$$|0 \quad 14 \quad 29| \quad (6.2)$$

Esta distribución de sensores arroja un error absoluto medio de  $0,6757 \text{ mm}$  que es significativamente mayor que en el caso de cuatro sensores, que era de  $0.121 \text{ mm}$ .

Esto indica que cuantos más sensores se utilicen para llevar a cabo la medición del carril mejor se eliminarán tanto las vibraciones como los ruidos de medición. Debido al incremento sustancial de coste que conlleva el añadir un nuevo sensor al sistema, se utilizarán cuatro sensores con la distribución que menor error medio produce vista en la sección 6.1.4.4, para llevar a cabo el resto de las pruebas sobre el método.

### 6.1.4.6. Pruebas sobre la distribución de cuatro sensores que menor error produce

Una vez se ha seleccionado tanto el número óptimo de sensores (4) como su distribución (0 9 14 29) se deben llevar a cabo una serie de pruebas para ver cómo se comporta el sistema a la hora de eliminar los ruidos y las vibraciones que afectan al carril durante su medición.

La finalidad del algoritmo descrito en este capítulo, no es otra que la de eliminación de ruidos que se puedan producir durante la medición del tren de carril, mientras este circula por el sistema para su medición. Es por esto por lo que una vez se han definido todos los aspectos necesarios para poder realizar las pruebas del algoritmo; y que son, el carril de prueba, el número de sensores y la posición de las mismas, así como los tipos de ruido a utilizar. Se debe definir la forma de comprobar que dicho algoritmo realiza el trabajo esperado, para ello se debe contrastar los resultados con el carril de entrada, es decir, el carril de prueba.

Para hacer esto, y tal y como se hizo para elegir la distribución óptima de sensores, se restará el valor absoluto de cada medición obtenida de la salida del algoritmo al valor absoluto de la misma medición del carril de prueba. Una vez, y con todos estos valores, se calculará la media y esto será el valor que se utilizará para medir la

precisión del algoritmo.

Se llevarán a cabo un conjunto de pruebas que añadirán tanto ruido producido por vibraciones, como ruido de medición. Las vibraciones, vistas en la sección 6.1.4.1.4 se pueden clasificar en tres grandes conjuntos:

- Ruido senoidal, el cual puede ser de dos tipos:
  - Senoidal 1.
  - Senoidal 2.
- Ruido rebotes.
  - Rebotes 1.
  - Rebotes 2.
- Ruido escalonado.
  - Escalonado 1.
  - Escalonado 2.

Por su parte, el ruido de medición, visto en la sección 6.1.4.1.5, solo puede ser de tipo gaussiano, que también tendrá dos magnitudes diferentes:

- Gaussiano 1: Rango  $\pm 1\%$  de la amplitud de la onda senoidal que conforma el defecto de planitud del carril.
- Gaussiano 2: Rango  $\pm 5\%$  de la amplitud de la onda senoidal que conforma el defecto de planitud del carril.

La figura 6.14 muestra el error absoluto medio en el caso la medición del carril descrito en la sección 6.1.4.1.3 para cada uno de los tipos diferentes de vibración y cada uno de los tipos de ruido, con sus diferentes magnitudes.

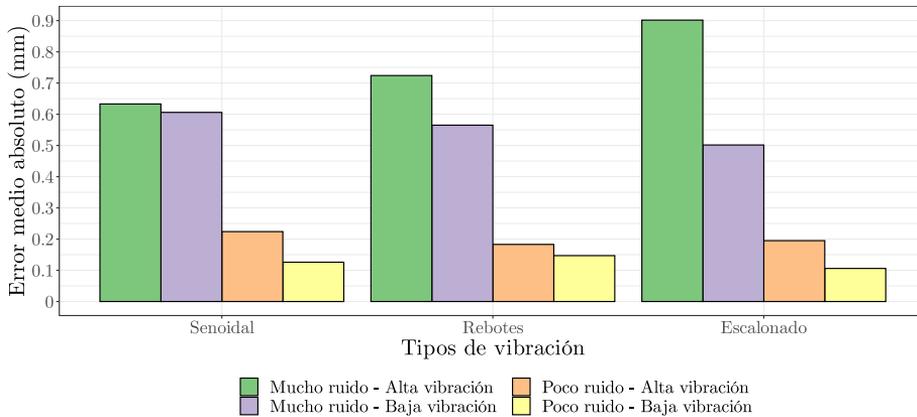
En la figura 6.14 se puede apreciar que cuanto mayor es el ruido de vibración así como la magnitud de la vibración se obtienen peores resultados. Sin embargo este error nunca es mayor de 1 mm.

### **6.1.5. Tiempo de resolución del sistema de ecuaciones**

Teniendo en cuenta que los carriles que se suelen fabricar tienen una longitud de unos 70 metros, y si tomamos medidas cada 10 centímetros de dicho carril, se generarán 700 mediciones.

Con 700 mediciones por carril el sistema genera alrededor de 2700 ecuaciones con 700 incógnitas (una incógnita para cada sección del carril). Como el proceso se

## 6.1 Resultados de la generación de perfiles longitudinales de los carriles



**Figura 6.14:** Error absoluto medio para cada una de las ejecuciones sobre el raíl de prueba.

lleva a cabo para cada una de las dimensiones  $V$  y  $H$  del carril, el proceso debe ser realizado dos veces.

El tiempo de ejecución del sistema depende de la tecnología con la que se implemente el sistema, así como del hardware donde se ejecute la misma.

Si la implementación de este método se lleva a cabo mediante la tecnología *.Net Core 3.1* de *Microsoft* y se utiliza para la resolución de matrices una librería llamada *Accord* basada en el uso de la *CPU* el tiempo de ejecución en un computador actual, se eleva hasta los 3 minutos y medio.

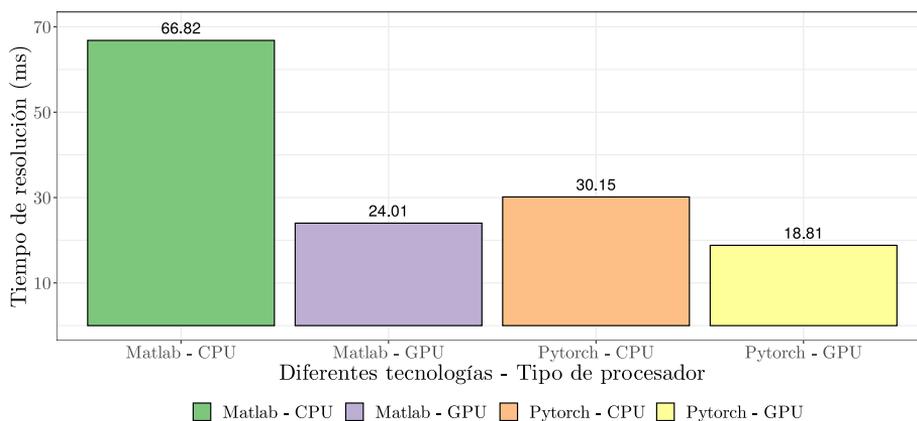
Debido al alto tiempo de resolución usando la tecnología anterior, esta es descartada, ya que uno de los requisitos principales del sistema es llevar a cabo la medición del carril en tiempo real.

Por lo tanto se deben buscar alternativas, se propone por lo tanto utilizar un sistema de resolución de problemas matemáticos desarrollado para este fin, como es *MATLAB*. Debido *MATLAB*, es un sistema pensado para el trabajo y resolución de matrices, el tiempo de ejecución necesario para llevar a cabo la resolución de un sistema de ecuaciones del tipo al estudiado en esta tesis será notablemente menor.

De igual forma se plantea el uso del framework *Pytorch*, que de igual forma que sucede con *MATLAB*, reducirá el tiempo de ejecución respecto al obtenido con *.Net core*.

En estos dos sistemas, la resolución del sistema sobredeterminado obtenido mediante la aplicación del método descrito en la presente tesis, puede llevarse a cabo en la *CPU* o en la *GPU*. De esta forma se compararán los tiempos de ejecución en estos casos.

La figura 6.15 muestra una gráfica con los tiempos de ejecución de las dos alternativas comentadas anteriormente, siendo ejecutadas tanto en la *CPU* como en la *GPU*.



**Figura 6.15:** Tiempo de resolución del sistema de ecuaciones lineales para un carril de 70 metros, usando diferentes tecnologías.

Los resultados vistos en la figura 6.15 se obtienen llevando a cabo la resolución del sistema en un computador con las siguientes características:

- Procesador: *Intel Core i7 9700K CPU*.
- Cantidad total de RAM: 64GB.
- Procesador gráfico: *GeForce RTX 2080 Ti Turbo GPU con 11GB de RAM*

6.1 Resultados de la generación de perfiles longitudinales de los carriles

Prueba	Error absoluto medio				
	Senoidal 1 (mm)	Rebotes 1 (mm)	Escalonado 1 (mm)	Media (mm)	Desv. Std. (mm)
P1	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	-
P3	-	-	-	-	-
P4	-	-	-	-	-
P5	-	-	-	-	-
P6	-	-	-	-	-
P7	-	-	-	-	-
P8	0.226	0.134	0.130	0.163	0.054
P9	0.188	0.178	0.136	0.167	0.028
P10	-	-	-	-	-
P11	0.081	0.064	0.238	0.128	0.096
P12	-	-	-	-	-
P13	0.502	1.272	0.236	0.670	0.538
P14	-	-	-	-	-
P15	-	-	-	-	-
P16	-	-	-	-	-
P17	-	-	-	-	-
P18	0.060	0.125	0.368	0.184	0.162
P19	0.049	0.226	0.156	0.144	0.089
P20	0.055	0.271	0.149	0.158	0.109
P21	0.125	0.084	0.075	0.095	0.027
P22	0.043	0.155	0.053	0.084	0.062
P23	-	-	-	-	-
P24	-	-	-	-	-

**Tabla 6.5:** Pruebas sobre las posiciones de los sensores descritas en la sección 6.1.4.1.2 con el ruido de medición *Gaussiano 1*

Error absoluto medio					
Prueba	Senoidal 1 (mm)	Rebotes 1 (mm)	Escalonado 1 (mm)	Media (mm)	Desv. Std. (mm)
P1	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	-
P3	-	-	-	-	-
P4	-	-	-	-	-
P5	-	-	-	-	-
P6	-	-	-	-	-
P7	-	-	-	-	-
P8	0.554	1.202	0.606	0.787	0.360
P9	0.344	0.309	0.672	0.441	0.200
P10	-	-	-	-	-
P11	2.411	0.417	0.545	1.124	1.116
P12	-	-	-	-	-
P13	2.330	2.613	6.855	3.933	2.535
P14	-	-	-	-	-
P15	-	-	-	-	-
P16	-	-	-	-	-
P17	-	-	-	-	-
P18	1.010	0.407	0.120	0.512	0.454
P19	0.105	0.233	0.350	0.229	0.122
P20	0.508	0.352	0.818	0.559	0.237
P21	0.407	0.253	0.398	0.352	0.087
P22	0.842	0.237	0.755	0.611	0.327
P23	-	-	-	-	-
P24	-	-	-	-	-

**Tabla 6.6:** Pruebas sobre las posiciones de los sensores descritas en la sección 6.1.4.1.2 con el ruido de medición *Gaussiano 2*

## **6.2. Resultados de generación de reglas virtuales para la medición de la planitud**

### **6.2.1. Introducción**

El método descrito en el capítulo 5 para la generación de reglas virtuales debe ser puesto a pruebas para comprobar la efectividad del mismo. Para ello los resultados obtenidos se llevan a cabo dos grandes conjuntos de pruebas.

El primer conjunto de pruebas comprobará la planitud de un perfil longitudinal de alturas en el cual se ha introducido un error senoidal.

El segundo conjunto de pruebas compara los resultados obtenidos mediante la ejecución del método descrito en el capítulo 5 contra un *sistema industrial de medición de la planitud* que es un referente en la industria actual y está instalado en la mayoría de las empresas que necesitan comprobar la calidad de los carriles fabricados.

En último lugar, se llevará a cabo una comprobación del tiempo necesario que el método necesita para llevar a cabo todos los procesos necesarios, generación de reglas virtuales, el filtrado de las mismas y la clasificación de estas de acuerdo al estándar *EN-13674*.

### **6.2.2. Comparación contra un carril de prueba con defecto senoidal en el que se varía el periodo**

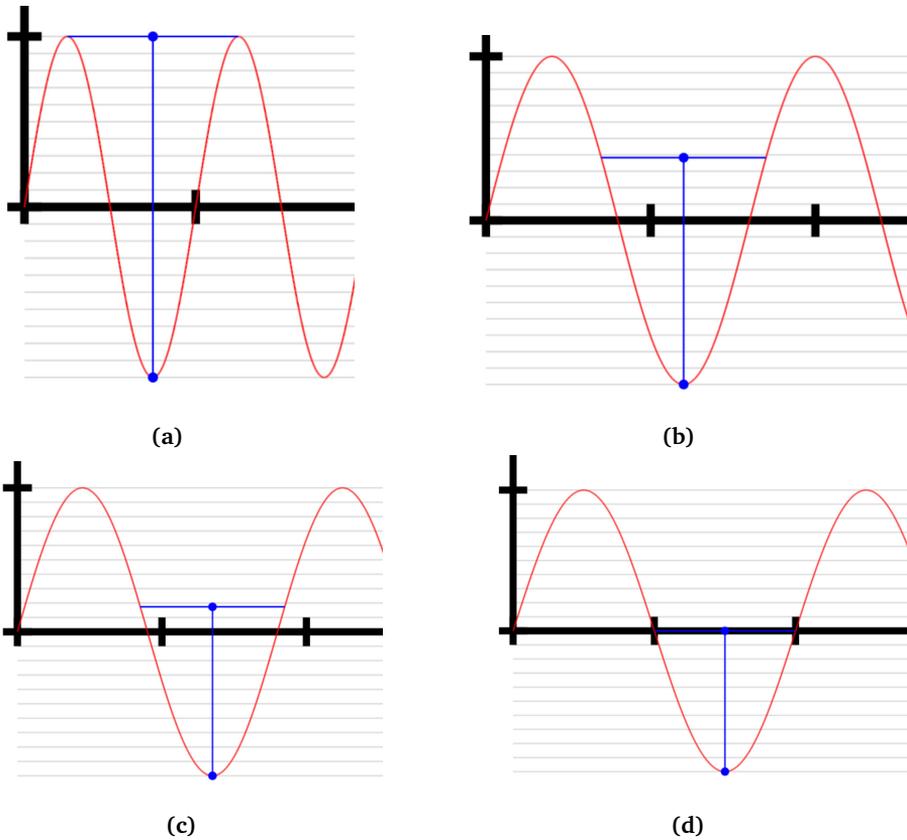
Se va a simular un defecto senoidal en un carril, de tal forma, que el perfil longitudinal de alturas resultante tenga este defecto. Posteriormente, debido a que la función seno es una función conocida, se debe sacar la profundidad de los valles formados en dicho perfil longitudinal. Esto se lleva a cabo mediante el uso del método descrito en la sección 5.

Los parámetros que se van a utilizar son los siguientes:

- Modificación del periodo de la función seno.
- Modificación de la amplitud de la función seno.

La modificación del periodo hace que la regla virtual que se va a utilizar para medir los valles generados caiga o no, dentro de los mismos. La figura 6.16 muestra un ejemplo sobre esto.

Esto se puede ver desde el punto de vista matemático, de la figura 6.16 se puede llegar a generar una ecuación que describa la profundidad de un valle que se genera



**Figura 6.16:** Modulación del periodo del seno para la modificación del valle generado.

debajo de una regla.

Para poder obtener esta ecuación se debe partir de la ecuación básica de un seno 6.4:

$$y = A(\sin(B(x + C))) \quad (6.3)$$

Donde:

- A, es la amplitud del seno.
- B, es el periodo del seno.
- C Desfase inicial, del seno.

## 6.2 Resultados de generación de reglas virtuales para la medición de la planitud

Se va a describir como  $P$  al periodo inicial del seno y  $x$  es el incremento del periodo en un momento determinado, o lo que es lo mismo:  $\Delta P$ . Por lo tanto  $P + x$  es el valor del periodo del seno en un momento determinado.

De esta forma, teniendo en cuenta que se va a ir modulando el periodo de la función, y debido a que el periodo en un momento determinado es lo mismo que  $\frac{2\pi}{x}$ , si esto lo llevamos a la ecuación básica del seno 6.4.

$$y = A(\sin(\frac{2\pi}{P + X}(x + C))) \quad (6.4)$$

Debido a que lo que se está calculando, no es el valor bajo la regla hasta 0 si no que es hasta el mínimo del seno, y teniendo en cuenta que desde 0 hasta el mínimo del seno, la distancia es igual a la amplitud, a toda la ecuación se le debe sumar la amplitud 6.5.

$$y = A(\sin(\frac{2\pi}{P + X}(x + C))) + A \quad (6.5)$$

Debido a que se empieza a medir en la parte superior del seno, el valor será  $\frac{P+x}{4}$ , lo que en el instante inicial será igual al periodo ( $\frac{2\pi}{4}$ ), esto se puede observar en la figura 6.17a.

Por otra parte, cada vez que aumentamos en  $x$  el periodo, el punto de medición de la planitud se incrementa en la mitad, es decir, en  $\frac{x}{2}$ . Esto se puede ver en la figura 6.17b.

De esta forma se obtiene la ecuación final 6.6. Esta describe completamente el valor del valle existente bajo la regla si se va modulando el periodo del seno.

$$y = A(\sin(\frac{2\pi}{P + x}(\frac{P}{4} + \frac{3x}{4}))) + A \quad (6.6)$$

En la ecuación 6.6, se calcula  $y$  que es la profundidad del valle cuando es medido por una regla de un metro de longitud. Y donde lo que se va cambiando ( $x$ ) el periodo del seno que forma el defecto de planitud.

Esta ecuación vista de forma gráfica se puede ver en la figura 6.19. En esta figura el periodo inicial es de 1 y la amplitud es de 0.5 mm.

De esta forma, se pueden generar perfiles longitudinales de altura sintéticos y variar los parámetros de entrada y posteriormente ejecutar el método descrito en el capítulo 5 y comprobar los resultados obtenidos frente a la formula.

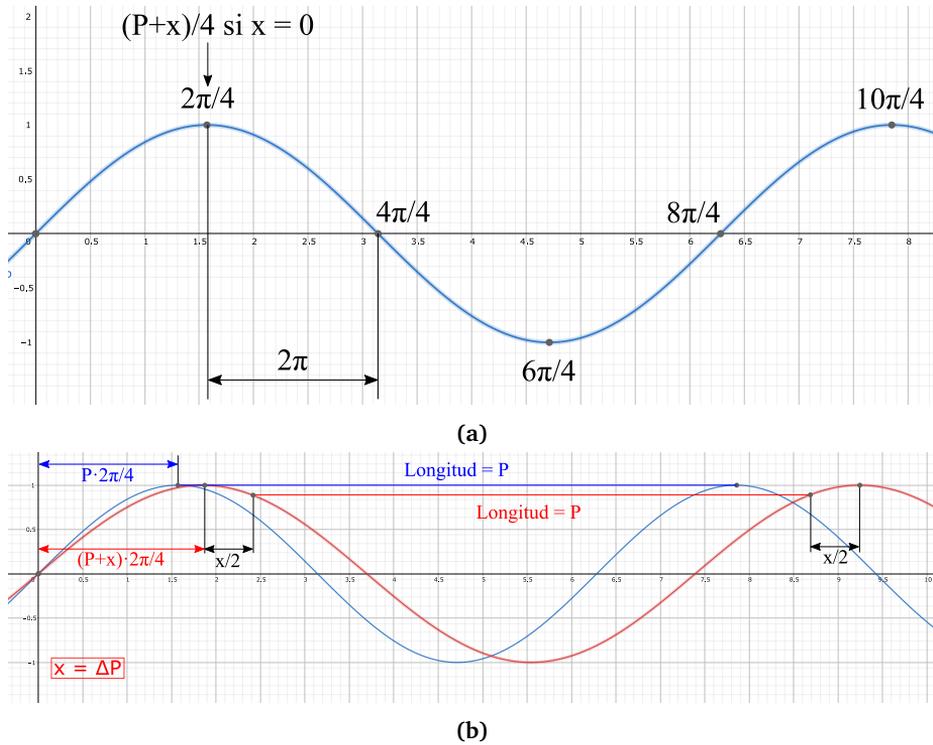


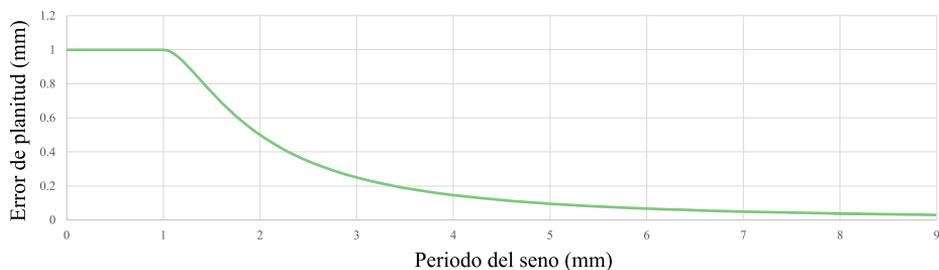
Figura 6.17: Alteración del periodo de la función seno.

Para ello la prueba que se lleva a cabo consiste en generar un carril de una longitud suficientemente grande para generar más de 4 valles, posteriormente se va incrementando el periodo de la función seno de tal forma que este incremento coincide con el periodo de muestreo de los sensores.

Debido a que el método descrito en el capítulo 5 va a generar más de una regla virtual, nos debemos quedar con la que peor resultado genera, es decir con la que más profundidad de valle ha cubierto.

Las pruebas que se llevan a cabo utilizarán los parámetros mostrados en la tabla 6.7.

## 6.2 Resultados de generación de reglas virtuales para la medición de la planitud



**Figura 6.18**

**Figura 6.19:** Representación gráfica de la ecuación 6.6.

Nombre	Amplitud (mm)	P inicial (m)	P final (m)	Incremento de P (m)
Prueba 1	0.5	1	3	0.05
Prueba 2	1	1	1.7	0.02

**Tabla 6.7:** Pruebas sobre el método visto en el capítulo 5.

### 6.2.2.1. Resultados de la prueba 1

Los resultados de ejecutar el método descrito en el capítulo 5 con un perfil longitudinal de alturas como el descrito en la tabla 6.11 se pueden ver en la tabla 6.8.

### 6.2.2.2. Resultados de la prueba 2

De la misma forma que en el caso anterior, se describen los resultados de ejecutar el método descrito en el capítulo 5 con un perfil longitudinal de alturas como el descrito en la tabla 6.11. Estos resultados se pueden ver en la tabla 6.9.

### 6.2.3. Comparación contra un sistema de referencia industrial

Con la finalidad de comparar los resultados con el sistema de referencia mencionado anteriormente, se utilizarán dos métricas diferentes:

Periodo (m)	Medición obtenida (método) (mm)	Valor esperado (ecuación) (mm)
1	1.000	1.000
1.05	0.994	0.994
1.1	0.980	0.980
1.15	0.959	0.959
1.2	0.933	0.933
1.25	0.905	0.905
1.3	0.874	0.874
1.35	0.843	0.843
1.4	0.812	0.812
1.45	0.781	0.781
1.5	0.750	0.750
1.55	0.720	0.720
1.6	0.691	0.691
1.65	0.664	0.664
1.7	0.637	0.637
1.75	0.611	0.611
1.8	0.587	0.587
1.9	0.541	0.541
1.95	0.520	0.520
2	0.500	0.500
2.05	0.481	0.481
2.1	0.463	0.463
2.15	0.445	0.445
2.2	0.429	0.429
2.25	0.413	0.413
2.3	0.398	0.398
2.35	0.384	0.384
2.4	0.371	0.371
2.45	0.358	0.358
2.5	0.345	0.345
2.55	0.334	0.334
2.6	0.323	0.323
2.65	0.312	0.312
2.7	0.302	0.302
2.8	0.283	0.283
2.9	0.266	0.266
3	0.250	0.250

**Tabla 6.8:** Resultados de la prueba 1 comparados contra los valores obtenidos mediante (6.6).

6.2 Resultados de generación de reglas virtuales para la medición de la planitud

Periodo (m)	Medición obtenida (método) (mm)	Valor esperado (ecuación) (mm)
1	2.000	2.000
1.02	1.998	1.998
1.04	1.993	1.993
1.06	1.984	1.984
1.08	1.973	1.973
1.1	1.959	1.959
1.12	1.944	1.944
1.14	1.926	1.926
1.16	1.908	1.908
1.18	1.887	1.887
1.2	1.866	1.866
1.22	1.844	1.844
1.24	1.821	1.821
1.26	1.797	1.797
1.28	1.773	1.773
1.3	1.749	1.749
1.32	1.724	1.724
1.34	1.699	1.699
1.36	1.674	1.674
1.38	1.649	1.649
1.4	1.623	1.623
1.42	1.598	1.598
1.44	1.574	1.574
1.46	1.549	1.549
1.48	1.524	1.524
1.5	1.500	1.500
1.52	1.476	1.476
1.54	1.452	1.452
1.56	1.429	1.429
1.58	1.406	1.406
1.6	1.383	1.383
1.62	1.360	1.360
1.64	1.338	1.338
1.66	1.316	1.316
1.68	1.295	1.295
1.7	1.274	1.274

**Tabla 6.9:** Resultados de la prueba 2 comparados contra los valores obtenidos mediante (6.6).

1. Comparar las reglas virtuales que ambos métodos extraen para el cuerpo del carril, debido a que es la zona del carril que mayor cantidad de reglas virtuales genera y donde mejor se puede llevar a cabo esta comprobación.
2. Comparación de los resultados globales de la clasificación acorde al estándar *EN-13674* para comprobar que ambos métodos clasifican de la misma forma el mismo carril para todas y cada una de sus partes en las dos dimensiones *V* y *H* a medir.

La comprobación de estas dos métricas se llevará a cabo utilizando el mismo conjunto de carriles para ambos métodos, tanto el referente industrial como el propuesto en esta tesis.

#### **6.2.3.1. Definición del conjunto de prueba**

El método descrito en el capítulo 5 para la generación de reglas virtuales se ha probado sobre un conjunto de 80 carriles reales. Estos carriles fueron medidos previamente con el *sistema industrial de medición de la planitud* mencionado anteriormente.

De esta forma se puede llevar a cabo una comparación entre los resultados obtenidos tanto para las reglas virtuales del cuerpo del carril como para la clasificación general que ambos sistemas otorgan a cada uno de los carriles.

#### **6.2.3.2. Comparación de reglas virtuales en el cuerpo del carril**

Debido a que el cuerpo del carril es la parte del mismo donde más reglas virtuales se concentran, debido a que es la mayor parte del carril, la comparación del método descrito en el capítulo 5 se realizará sobre este.

En la tabla 6.11 se muestran los resultados de esta comparación.

La tabla 6.11 muestra en la primera columna el porcentaje de las reglas del carril encontradas por el método propuesto en esta tesis y que no fue capaz de encontrar el sistema de referencia. El 9.66 % de las reglas virtuales solo han podido ser encontradas por el sistema propuesto.

Por otra parte, la tabla 6.11 muestra en la columna central el porcentaje de las reglas que ambos sistemas han encontrado y cuyos puntos de inicio *PO*, final *PI* y de medición de la planitud *PM*, así como el valor de la planitud *d* obtenido por la

## 6.2 Resultados de generación de reglas virtuales para la medición de la planitud

Nombre del carril	Método propuesto (Nº reglas)	Ambos métodos (Nº reglas)	Sistema industrial (Nº reglas)
Carril 1	1	20	1
Carril 2	1	18	1
Carril 3	0	18	0
Carril 4	0	10	0
Carril 5	1	16	2
Carril 6	2	17	3
Carril 7	0	18	0
Carril 8	1	19	2
Carril 9	1	18	2
Carril 19	3	18	4
Carril 79	1	15	1
Carril 80	4	17	2
Resultados (%)	9.66 %	86.71 %	13.29 %

**Tabla 6.10:** Comparación de las reglas virtuales del cuerpo de los carriles de prueba generadas con ambos métodos

regla virtual son iguales. El 86.71 % son completamente idénticas en ambos métodos.

Por último, la tabla 6.11 muestra en la última columna el número de reglas que no han sido encontradas por el método propuesto en esta tesis pero si por el sistema de referencia. El 13.29 % de las reglas virtuales son tan solo encontradas por el sistema de referencia y no por el propuesto.

En la sección 6.2.3.6 se explicarán las principales diferencias entre el método propuesto en esta tesis y el usado en el sistema de referencia.

### 6.2.3.3. Comparación de la clasificación del cuerpo y los solapes del carril

Una vez se han visto las diferencias en la generación de las reglas virtuales entre el método propuesto en esta tesis y el sistema de referencia, se debe comprobar si estas diferencias influyen a la hora de llevar a cabo la división de los carriles en las clases que propone el estándar *EN-13674*.

Para ello se va a comenzar comparando la clasificación del cuerpo de todos y cada

uno de los carriles del conjunto de prueba, de tal forma que los resultados obtenidos se muestran en la tabla 6.11.

	Horizontal	Vertical
Cuerpo del carril	100 %	100 %

**Tabla 6.11:** Resultado de la clasificación de los cuerpos en los carriles de prueba

Tal y como se puede comprobar en la tabla 6.11 ambos sistemas generan exactamente la misma clasificación en el cuerpo del carril, por lo que las diferencias vistas en la sección anterior no influyen en la clasificación.

#### **6.2.3.4. Comparación de la clasificación de los solapes del carril**

De igual forma que en la sección anterior, en la que se comparaba la clasificación del cuerpo del carril entre el método descrito en la presente tesis y el sistema de referencia, se debe llevar a cabo ahora la comprobación de la clasificación de los solapes del carril.

Para ello, y al igual que antes, se compararán las clasificaciones de todos y cada uno de los carriles de prueba, los resultados se pueden ver en la tabla 6.12.

	Horizontal	Vertical
Solapes del carril	100 %	100 %

**Tabla 6.12:** Resultado de la clasificación de los solapes en los carriles de prueba

Tal y como se puede comprobar en la tabla 6.12 ambos sistemas otorgan a la totalidad de los solapes de los carriles la misma clasificación utilizando ambos métodos.

#### **6.2.3.5. Comparación de la clasificación de los extremos del carril**

De forma análoga a la realizada tanto en el cuerpo como en los solapes del carril, se va a comparar ahora la clasificación que generan ambos sistemas. Estos resultados se pueden observar en la tabla 6.13.

	Horizontal	Vertical
Extremos del carril	68.35 %	8.86 %

**Tabla 6.13:** Resultado de la clasificación de los extremos en los carriles de prueba

Cuando se observan los resultados de la tabla 6.13, se aprecia que existen una serie de diferencias en la forma de calcular la planitud de los extremos si el método utilizado es el descrito en esta tesis o si, por otra parte, se utiliza el propuesto por el sistema de referencia.

Tal y como se puede ver en la tabla 6.13, la medición de las clases verticales y horizontales no es necesariamente iguales para todos los carriles.

La medición de la clase vertical tiene la particularidad de la medición de la dimensión  $e$  y  $F$ , que proporciona las principales diferencias entre los métodos comparados.

De tal forma que, si se ignoran los extremos de los carriles, las clases de carriles son completamente iguales. Sin embargo, si se comparan los extremos de los carriles, el porcentaje de éxito es significativamente menor, concretamente el 68.35 % para las clases horizontales y el 8.86 % para las clases verticales.

El cálculo de los extremos de carril de los dos métodos es diferente porque no interpretan la norma de la misma manera. Las diferencias, entre el porcentaje de éxito de las clases horizontales y verticales, se debe al cálculo de  $e$  y  $F$  explicado en la sección 5.4 del capítulo 5. Este parámetro sólo se calcula para la dimensión vertical, como estipula estándar *EN-13674*.

#### **6.2.3.6. Diferencias entre el método propuesto y el método de referencia**

Debido a que el sistema de referencia es un sistema industrial, puede no seguir completamente una norma dada, es por esto, entre otras razones que se detallarán a continuación, que pueden existir variaciones entre la clasificación de alguna de las partes de los carriles.

Las diferencias que existen entre el método propuesto en esta tesis y el sistema industrial de referencia son los siguientes:

- Problemas de redondeo: Los problemas de redondeo son las mayores fuentes de error cuando se comparan dos sistema de medición diferentes.

- Problemas tangenciales: Una regla virtual podría ser tangente a un punto que estaría bajo la propia regla, de tal forma, que la regla virtual podría estar apoyada en más de dos puntos. Esto se puede ver en la figura 6.20.

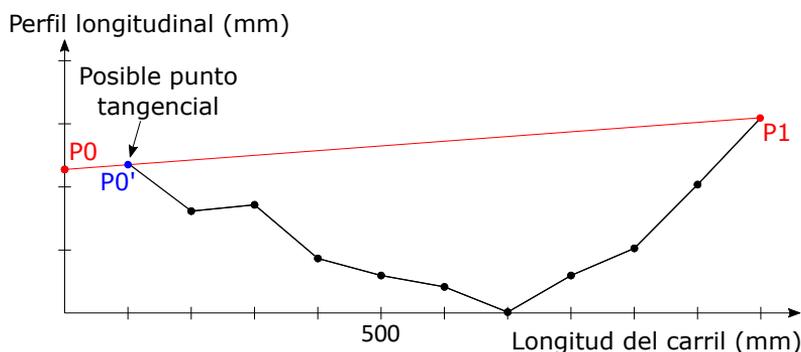


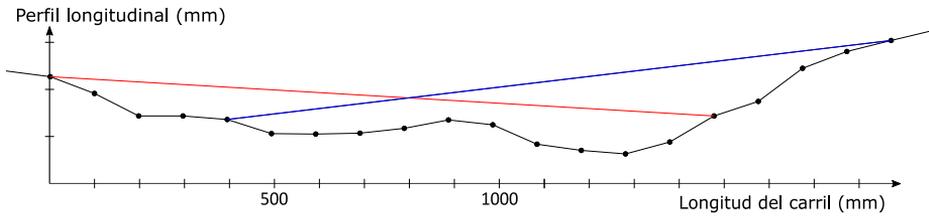
Figura 6.20: Diferencias debidas a problemas tangenciales.

En este caso, ambos métodos podrían extraer reglas virtuales diferentes en función de la programación que tenga el algoritmo de generación de reglas virtuales. Cabe destacar que ambos métodos de extracción en este casos serían totalmente válidos.

En la figura 6.20 se muestra una regla virtual con sus dos puntos de apoyo  $PO$  y  $P1$  en color rojo. Una alternativa a  $PO$ , y que se muestra en color azul es  $PO'$ , generaría una regla virtual igual de válida que usando el punto  $PO$ . Esto se debe a que el punto  $PO'$  pertenece al segmento que une  $PO$  y  $P1$ .

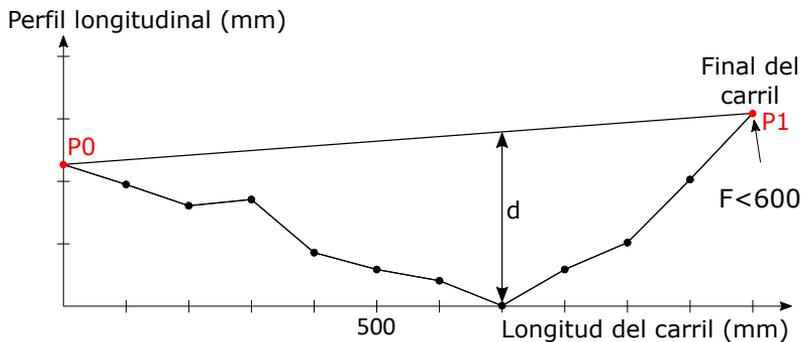
- Filtrado diferente de reglas virtual: Un mismo valle, si este es muy largo, puede ser medido en dos puntos diferentes y ambas mediciones ser válidas, generando dos reglas virtuales diferentes y ambas válidas. La figura 6.21 muestra un ejemplo de esto, en este caso la regla marcada en color rojo es obtenida solo por el método descrito en esta tesis, mientras que la marcada en azul es obtenida por ambos métodos.
- Diferencias en el cálculo de los extremos del carril. No se encuentra regla virtual: Debido a la interpretación que se ha realizado del estándar *EN-13674*, el método propuesto en esta tesis siempre asignará la *Clase C* a un carril si no es capaz de obtener una regla virtual. Debido a esto, todo el carril completo será de *Clase C*. El sistema de referencia en estos casos asigna la *Clase A*.

## 6.2 Resultados de generación de reglas virtuales para la medición de la planitud



**Figura 6.21:** Diferencias por existir dos reglas midiendo un valle largo en diferentes puntos.

- Diferencias en el cálculo de los extremos del carril. La dimensión  $e$  no se puede calcular: Tal y como se puede ver en la figura 6.22, si el segundo punto de apoyo  $P1$  es el mismo punto que el final del carril, entonces el parámetro  $e$  siempre será igual a  $0$ . Además la premisa de que  $F \geq 600$  mm, que debe obligatoriamente cumplirse será falsa, debido a que  $F = 0$ .



**Figura 6.22:** Diferencias debidas a no poder calcular  $e$  en el extremo del carril.

En este y de forma análoga al punto anterior, al extremo del carril se le asignará la *Clase C* y por consiguiente todo el carril será clasificado así.

Por otra parte, un carril totalmente plano podría tener un defecto justo en el último punto de medición del mismo, tal y como se muestra en la figura 6.23.

Este carril se clasificaría siempre como *Clase C*, debido a que la dimensión  $e$  no se puede calcular, independientemente del tamaño de la imperfección del extremo del carril.

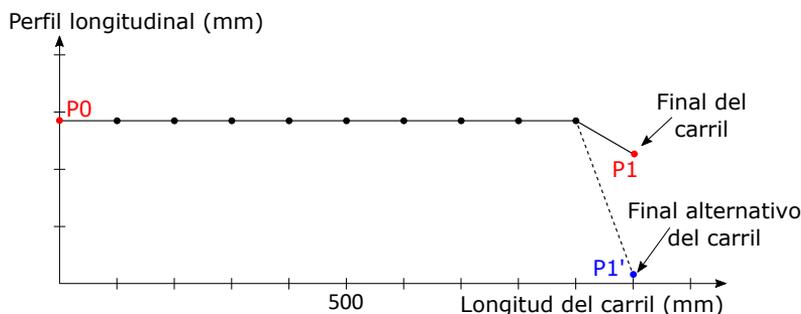


Figura 6.23: Carril con defecto en el último punto de medición.

Al igual que en el caso visto en la figura 6.22, lo visto en la figura 6.23 es una interpretación particular del estándar *EN-13674*, el cual no indica lo que se debe realizar en estos casos límite.

De nuevo, el sistema de referencia en estos casos asigna la *Clase A* al extremo del carril.

La diferencia más notable entre ambos métodos es la clasificación de los extremos del carril, haciendo que un carril pueda ser clasificado como *Clase A* o como *Clase C*, dependiendo del método utilizado.

Esto se debe a la interpretación de la norma *EN-13674*. El método propuesto y descrito en la presente tesis sigue estrictamente esta norma.

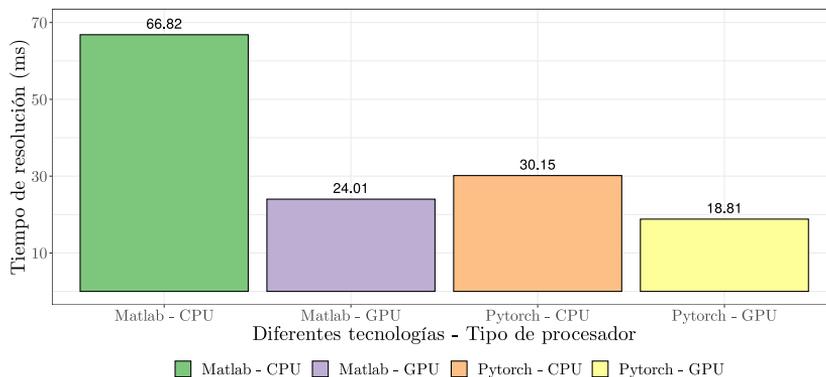
#### 6.2.4. El tiempo de ejecución de las pruebas

La medición de la planitud de los carriles es un proceso muy complejo y que, como todo proceso complejo, requiere mucho tiempo y dedicación. Si esta medición debe ser realizada de forma manual por un operario encargado de esta operación, tan solo se podrán medir un conjunto muy pequeño de carriles en toda su longitud sin afectar a la eficiencia de la cadena de producción. Debido a esto el control de calidad requerido no puede llevarse a cabo en un tiempo razonable.

La posibilidad de llevar a cabo la medición de la planitud con un método eficaz, rápido y preciso es la razón fundamental de un sistema en tiempo real como el que se presenta en esta tesis.

## 6.2 Resultados de generación de reglas virtuales para la medición de la planitud

Es por esto, que para medir el tiempo que este método emplea en la extracción de reglas virtuales de los carriles y la subsiguiente clasificación de los mismos acorde al estándar *EN-13674*, se mide el tiempo transcurrido en la ejecución del método visto en el capítulo 5. A continuación se divide el tiempo empleado en la medición de cada carril por la longitud de dicho carril y los resultados se presentan en modo de gráfico de frecuencia acumulada. Este gráfico se puede ver en la figura 6.24.



**Figura 6.24:** Diagrama de frecuencia acumulada en el tiempo de medición de la planitud de cada carril.

En la figura 6.24 se puede ver que el tiempo empleado para medir un carril de un metro es de alrededor de *0.98* milisegundos con una probabilidad superior al noventa por ciento. De tal forma que el tiempo transcurrido en la medición de un carril de un tamaño estándar, es decir, de 70 metros es de 68.6 milisegundos.



# Capítulo 7

## Conclusión

En este capítulo se muestran de forma resumida las conclusiones más importantes a las que se llegan, en vista al trabajo realizado y expuesto en los capítulos anteriores.

Se llevará a cabo también un repaso sobre los objetivos alcanzados y la difusión que se ha realizado sobre los resultados obtenidos.

Finalmente se propondrán una serie de líneas de investigación futuras que aparecen tras la finalización de la presente tesis.

### 7.1. Objetivos alcanzados y aportación realizada

En el inicio de la presente tesis se presentaba el problema de llevar a cabo la medición de los carriles de tren. Esta medición debía ser llevada a cabo en un entorno industrial al final de la línea de producción de los propios carriles.

Además se presentaba el problema de la medición en el entorno industrial, donde el carril está sometido a una serie de vibraciones y ruidos de medición, que dificultan en gran medida la tarea que se debía llevar a cabo.

Haciendo un análisis del estado del arte, el cual se puede ver en el capítulo 2, se pudo comprobar que los estudios actuales que se han publicado hasta la fecha llevan a cabo la medición de la planitud de carriles de tren, o bien cuando el carril ya se está usando en un sistema de transporte en producción, mediante sistemas de abordaje que miden la planitud entre dos puntos geográficos, o bien, llevan a cabo la medición de planitud sin tener en cuenta la planitud, bien sea por que se lleva a cabo fuera de un entorno industrial o por que el carril no está en movimiento, circulando por la línea de producción del mismo.

En el análisis del estado del arte, se han mostrado también ejemplos de sistemas industriales que comprueban la planitud del carril, pero la investigación y tecnología

de estos sistemas no son de dominio público, y además no tienen por qué seguir las directrices que se indican en el estándar europeo *EN-13674*, que se puede ver en [9], que es otro de los objetivos fundamentales de la presente tesis.

Para llevar a cabo esta medición de la planitud de acuerdo con el estándar europeo, se propuso la división del problema en dos grandes partes claramente diferenciadas. Esto se pudo ver en el capítulo 3, en el cual se muestra la arquitectura del sistema propuesto y las grandes partes propuestas, y sirve de introducción a los problemas que se van a resolver en los siguientes capítulos.

El primer problema que se debía afrontar a la hora de llevar a cabo la medición de la planitud es la extracción de dos perfiles longitudinales de alturas, uno por cada dimensión indicada en el estándar *EN-13674*. La extracción de estos perfiles no es compleja de llevar a cabo si el sistema no tiene en cuenta las vibraciones y ruidos de medición, pero cuando estos aparecen y deben ser tratados de forma correcta el problema se vuelve muy complejo. Debido a esto en el capítulo 4 se propone un método que además de extraer estos perfiles mitiga el efecto de las vibraciones y ruido de medición en gran medida.

El segundo problema a hacer frente es la medición de la planitud mediante el uso de los perfiles longitudinales de altura extraídos. Para ello en el capítulo 5 se propone un método que se basa en reglas virtuales, y que simula la medición mediante reglas físicas que los operarios llevan a cabo para medir la planitud de los carriles.

Una vez se han posicionado todas las reglas virtuales, y también en el capítulo 5, se propone un método que clasifica el carril de acuerdo a los diferentes niveles de planitud que se proponen, de nuevo, en el estándar europeo, y genera un informe sencillo de entender de cara a la revisión del mismo por las personas encargadas de este proceso.

Para finalizar, en el capítulo 6 se han presentado una serie de resultados que corroboran el correcto funcionamiento del sistema en todos los aspectos que se han comentado anteriormente. Además se compara el sistema con un sistema real que se utiliza de referencia, el cual es ampliamente utilizado en las empresas del sector. Las diferencias entre el sistema propuesto en la presente tesis y el sistema de referencia se explican debido a que el sistema descrito en este trabajo sigue de forma rigurosa el estándar europeo *EN-13674*.

Mediante el trabajo realizado y visto en la redacción de esta tesis, se puede elaborar una lista de logros obtenidos, los cuales se enumeran a continuación:

1. Se ha puesto en contexto todo el estudio que se detalla en la presente tesis,

introduciendo el problema de la comprobación de la calidad en los carriles. Además se ha desarrollado y detallado un análisis riguroso del estado del arte en cuanto a medición de planitud en carriles así como la comprobación de diferentes aspectos relativos a la calidad en la fabricación de productos largos de acero. De igual forma, se ha desarrollado un análisis del estado del arte en cuanto a mitigación del efecto de vibraciones que se producen a la hora de llevar a cabo la medición de la planitud.

2. Se ha presentado la arquitectura necesaria para llevar a cabo de forma asequible y rigurosa la medición de la planitud en carriles. Además se detalla que se trata de una arquitectura que hace que la solución sea robusta frente a diferentes fuentes de ruidos o tipos de vibraciones. También se ha desarrollado, explicado y presentado un método de mitigación del ruido durante la generación de los perfiles longitudinales de alturas, que es capaz de cumplir con el estándar europeo *EN-13674*. Se han desarrollado y presentado una serie de algoritmos para llevar a cabo la planitud utilizando los perfiles longitudinales de alturas extraídos y libres de vibraciones.
3. Se ha visto un método que simula virtualmente el proceso que un operario debe llevar a cabo de forma manual durante la comprobación de la planitud de un carril. Este método hace que el proceso sea mucho más rápido que si se debe realizar de forma manual, y más seguro, debido a que no está sometido a errores humanos. Tras esto, se ha presentado un método, que mediante los resultados generados en el punto anterior, es capaz de generar un informe que indica la clasificación de la planitud del carril de acuerdo al estándar europeo *EN-13674*.
4. Se ha presentado una serie de resultados que corroboran la efectividad del método propuesto y lo comparan con un método de referencia industrial.

Los objetivos alcanzados y enumerados antes cubren los objetivos que se habían planteado al inicio de esta tesis. Además, esta tesis se puede utilizar como punto de partida de futuras investigaciones.

## **7.2. Difusión de las aportaciones**

Las aportaciones realizadas en el transcurso de esta tesis han sido difundidas en diferentes congresos y revistas internacionales, y se detallan a continuación:

- Artículo presentado en este congreso en Portland, Oregon (Estados Unidos) en el año 2016, se presenta una de las partes centrales de esta tesis, el método de generación de reglas virtuales para llevar a cabo la medición de la planitud

de un carril:

*P. Manso, D.F. Garcia, R. Usamentiaga.*

*"Rail Flatness Measurement Method Based on Virtual Rules".*

*In 2016 IEEE Industry Applications Society Conference, IEEE, vol. 1, pp. 1-8.*

*DOI: [10.1109/IAS.2016.7731913](https://doi.org/10.1109/IAS.2016.7731913).*

*Portland (USA), 2016. (2016-10-2/2016-10-6).*

- El mismo artículo ampliado se publica en el volumen número 53 en el año 2017:

*P. Manso, D.F. Garcia, R. Usamentiaga.*

*"Rail Flatness Measurement Method Based on Virtual Rules".*

*In IEEE Transactions on Industry Applications, IEEE, vol. 53, no. 4, pp. 4116-4124.*

*DOI: [10.1109/TIA.2017.2676092](https://doi.org/10.1109/TIA.2017.2676092).*

*2017. (JCR: 2.747 - Q1 [2017]).*

- Artículo que se presentará en el congreso anual del IAS- IEEE que tendrá lugar este año 2021 en Vancouver (Canadá). Donde se detalla otra de las partes principales de esta tesis, la extracción de los perfiles longitudinales de alturas donde se ha mitigado el efecto de las vibraciones:

*P. Manso, D.F. Garcia, R. Usamentiaga.*

*"A Method to Extract rail Flatness Profile and Analysis of Different Noise Sources".*

*In IEEE Industry Applications Society Annual Meeting.*

*Aceptado, pendiente de publicación.*

*Vancouver (Canadá), 2021.*

### 7.3. Líneas de investigación futuras

El método propuesto en la presente tesis, aunque obtiene muy buenos resultados en la mitigación del ruido de medición y las vibraciones, se puede mejorar en varios aspectos.

El primer aspecto sería incrementar el número de sensores que se utilizan para llevar a cabo esta medición, lo cual incrementaría el coste de la arquitectura de forma significativa, así como el coste computacional, que se traduce en tiempo de ejecución, pero que en ciertos aspectos puede llegar a ser asumible.

Otra mejora posible que se podría llevar a cabo sobre este método es no medir únicamente la planitud en la cabeza del carril, a pesar de ser en este lugar donde el estándar europeo indica que se debe llevar a cabo. Esto posibilitaría la reconstrucción en tres dimensiones del carril, para mostrar al usuario los defectos de

planitud de forma visual, más allá de en un reporte que sea capaz de leer un operario.

Una vez se ha llevado a cabo la reconstrucción en tres dimensiones del carril completo, se abre todo un nuevo abanico de posibilidades, como son por ejemplo, llevar a cabo también la medición de la forma del carril, la comprobación de defectos superficiales, etc.



# Capítulo 8

## Anexos

### 8.1. Evolución de las matrices $M$ y $P$ para el Ejemplo de arquitectura equiespaciada

#### 8.1.1. Periodo 1

La figura 8.1 muestra el sistema al inicio del mismo, justo cuando el carril acaba de entrar en él.

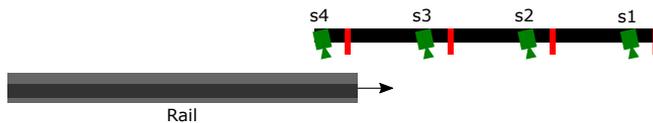


Figura 8.1: Evolución del sistema y del carril. Periodo = 1

Se puede observar que la única medición realizada por el sistema es la que representa en la tabla 8.1 como  $M_{41}$  y el resto, pintadas de color rojo, contendrán valores nulos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$									
$M_{21}$									
$M_{31}$									
$M_{41}$									

Tabla 8.1: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 1

Por otra parte, la matriz  $P$  contendrá un único valor y este será  $H1$  ya que será el primero de los valores de los que se desea conocer el valor de la planitud. Este valor estará en la columna  $S4$  puesto que es el sensor que a *capturado* dicho valor. Esto se ve representado en la tabla 8.2.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Tabla 8.2: Evolución de la matriz  $P$ .  $Periodo = 1$

### 8.1.2. Periodo 2

La figura 8.2 muestra el sistema en el segundo periodo, el carril ha entrado llegando ya al sensor S3.

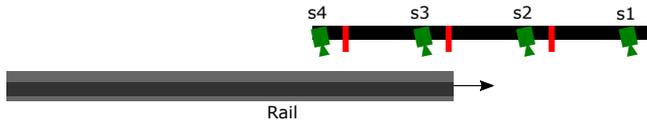


Figura 8.2: Evolución del sistema y del carril.  $Periodo = 2$

Se puede observar que ya se dispone de dos mediciones realizadas por el sistema representado en la tabla 8.3. Donde  $M_{42}$ , es la segunda captura de este sensor y como  $M_{32}$  la primera captura del sensor S3. El resto, pintadas de color rojo, contendrán valores nulos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{12}$								
$M_{21}$	$M_{22}$								
$M_{31}$	$M_{32}$								
$M_{41}$	$M_{42}$								

Tabla 8.3: Evolución de la matriz  $M$ .  $Periodo = 2$

Por otra parte la matriz  $P$  representada en la tabla 8.4, refleja que el valor de  $H1$  ha avanzado y ahora se sitúa en la columna del sensor ( $S3$ ) y se ha registrado un nuevo

8.1 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura equiespaciada

valor de planitud  $H2$ , en el sensor  $S4$ . Esto seguirá pasando de esta forma durante el resto de medición del carril.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Tabla 8.4: Evolución de la matriz  $P$ . Periodo = 2

8.1.3. Periodo 3

En el periodo 3, el carril llega al sensor  $S2$ , esto se puede observar en la figura 8.3.

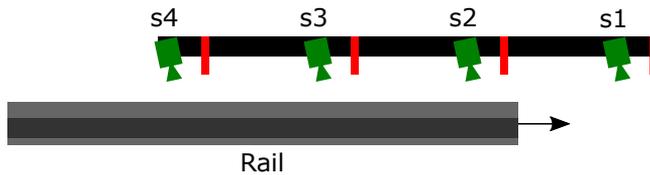


Figura 8.3: Evolución del sistema y del carril. Periodo = 3

Ya se disponen de 3 mediciones, mientras que en el sensor  $S1$  el carril aun no se ha medido y por lo tanto, las medidas tomadas por dicho sensor se muestran en color rojo. Esto se puede observar en la tabla 8.5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$							
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$							
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$							
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$							

Tabla 8.5: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 3

Al sensor  $S3$  llega la sección que fue medida en el periodo uno, por el sensor  $S4$ , el cual obtiene un nuevo valor de planitud  $H3$ . Esto se puede observar en la tabla 8.6.

	<b>S4</b>	<b>S3</b>	<b>S2</b>	<b>S1</b>
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3	H3 ( $M_{43}$ )	H2 ( $M_{33}$ )	H1 ( $M_{23}$ )	
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Tabla 8.6: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo = 3*

### 8.1.4. Periodo 4

Por primera vez desde que entrase el carril al sistema, todas los sensores están midiendo ahora una sección del carril, tal y como se puede observar en la figura 8.4.

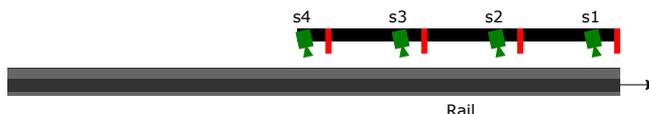


Figura 8.4: Evolución del sistema y del carril. *Periodo = 4*

Esto también se observa en la tabla 8.7, y es que ahora en la cuarta medición no hay ningún valor nulo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$						
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$						
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$						
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$						

Tabla 8.7: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo = 4*

El sensor  $S4$  obtiene un nuevo valor de planitud  $H4$  y el primer valor que tomo este, llega al sensor  $S1$ , tal y como se indica en la tabla 8.8.

8.1 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura equiespaciada

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3	H3 ( $M_{43}$ )	H2 ( $M_{33}$ )	H1 ( $M_{23}$ )	
4	H4 ( $M_{44}$ )	H3 ( $M_{34}$ )	H2 ( $M_{24}$ )	H1 ( $M_{14}$ )
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Tabla 8.8: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo* = 4

8.1.5. Periodo 5

Segundo periodo donde todos los sensores capturan alguna de las partes del carril, visible en la figura 8.5.

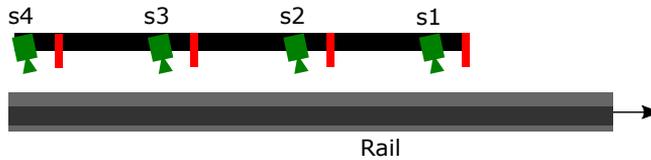


Figura 8.5: Evolución del sistema y del carril. *Periodo* = 5

De igual forma que en el periodo anterior, todos los sensores capturan valores válidos del carril, como se observa en la tabla 8.9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$					
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$					
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$					
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$					

Tabla 8.9: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo* = 5

Se obtiene el quinto valor de planitud horizontal  $H5$  en el sensor  $S4$ , como se puede observar en la tabla 8.10.

	<b>S4</b>	<b>S3</b>	<b>S2</b>	<b>S1</b>
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3	H3 ( $M_{43}$ )	H2 ( $M_{33}$ )	H1 ( $M_{23}$ )	
4	H4 ( $M_{44}$ )	H3 ( $M_{34}$ )	H2 ( $M_{24}$ )	H1 ( $M_{14}$ )
5	H5 ( $M_{45}$ )	H4 ( $M_{35}$ )	H3 ( $M_{25}$ )	H2 ( $M_{15}$ )
6				
7				
8				
9				
10				

Tabla 8.10: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo = 5*

### 8.1.6. Periodo 6

El periodo 6 al igual que los dos periodos anteriores, todos los sensores capturan valores del carril, se puede observar en la figura 8.6.

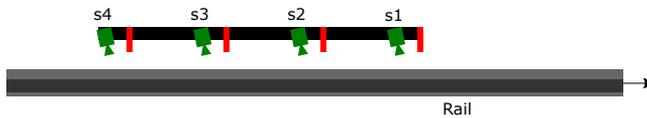


Figura 8.6: Evolución del sistema y del carril. *Periodo = 6*

De igual forma que en el periodo anterior, todos los sensores capturan valores válidos del carril, como se observa en la tabla 8.11.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$				
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$				
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$				
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$				

Tabla 8.11: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo = 6*

Se obtiene el sexto valor de planitud horizontal  $H6$  en el sensor  $S4$ , como se puede observar en la tabla 8.12.

8.1 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura equiespaciada

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3	H3 ( $M_{43}$ )	H2 ( $M_{33}$ )	H1 ( $M_{23}$ )	
4	H4 ( $M_{44}$ )	H3 ( $M_{34}$ )	H2 ( $M_{24}$ )	H1 ( $M_{14}$ )
5	H5 ( $M_{45}$ )	H4 ( $M_{35}$ )	H3 ( $M_{25}$ )	H2 ( $M_{15}$ )
6	H6 ( $M_{46}$ )	H5 ( $M_{36}$ )	H4 ( $M_{26}$ )	H3 ( $M_{16}$ )
7				
8				
9				
10				

Tabla 8.12: Evolución de la matriz  $P$ .  $Periodo = 6$

8.1.7. Periodo 7

Este periodo será el último que, como en el caso de los anteriores, se capturen imágenes válidas por todos los sensores, ya que se ha llegado al final del carril. Esto se puede observar en la figura 8.7.



Figura 8.7: Evolución del sistema y del carril.  $Periodo = 7$

De igual forma que en el periodo anterior, todos los sensores capturan valores válidos del carril, como se observa en la tabla 8.13.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$			
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$			
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$			
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$			

Tabla 8.13: Evolución de la matriz  $M$ .  $Periodo = 7$

Se obtiene el séptimo y último valor de planitud horizontal  $H7$  en el sensor  $S4$ , como se puede observar en la tabla 8.14.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3	H3 ( $M_{43}$ )	H2 ( $M_{33}$ )	H1 ( $M_{23}$ )	
4	H4 ( $M_{44}$ )	H3 ( $M_{34}$ )	H2 ( $M_{24}$ )	H1 ( $M_{14}$ )
5	H5 ( $M_{45}$ )	H4 ( $M_{35}$ )	H3 ( $M_{25}$ )	H2 ( $M_{15}$ )
6	H6 ( $M_{46}$ )	H5 ( $M_{36}$ )	H4 ( $M_{26}$ )	H3 ( $M_{16}$ )
7	H7 ( $M_{47}$ )	H6 ( $M_{37}$ )	H5 ( $M_{27}$ )	H4 ( $M_{17}$ )
8				
9				
10				

Tabla 8.14: Evolución de la matriz  $P$ .  $Periodo = 7$

### 8.1.8. Periodo 8

El carril ya ha terminado de pasar por el primero de los sensores en medirlo ( $S4$ ), por lo que empieza a tomar valores nulos. Esto se puede observar en la figura 8.8.

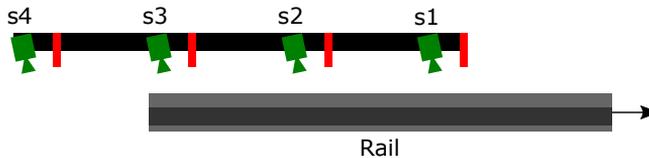


Figura 8.8: Evolución del sistema y del carril. Periodo = 8

El valor tomado por el sensor  $S4$  en este instante no es válido, ya el carril ha terminado de pasar por lo que se muestra en rojo en la tabla 8.15.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$		
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$		
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$		
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$		

Tabla 8.15: Evolución de la matriz  $M$ .  $Periodo = 8$

Ya no se miden nuevos valores de planitud, si no que los existentes, se están desplazando al resto de sensores. Como se puede observar en la tabla 8.16.

8.1 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura equiespaciada

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3	H3 ( $M_{43}$ )	H2 ( $M_{33}$ )	H1 ( $M_{23}$ )	
4	H4 ( $M_{44}$ )	H3 ( $M_{34}$ )	H2 ( $M_{24}$ )	H1 ( $M_{14}$ )
5	H5 ( $M_{45}$ )	H4 ( $M_{35}$ )	H3 ( $M_{25}$ )	H2 ( $M_{15}$ )
6	H6 ( $M_{46}$ )	H5 ( $M_{36}$ )	H4 ( $M_{26}$ )	H3 ( $M_{16}$ )
7	H7 ( $M_{47}$ )	H6 ( $M_{37}$ )	H5 ( $M_{27}$ )	H4 ( $M_{17}$ )
8		H7 ( $M_{38}$ )	H6 ( $M_{28}$ )	H5 ( $M_{18}$ )
9				
10				

Tabla 8.16: Evolución de la matriz  $P$ .  $Periodo = 8$

8.1.9. Periodo 9

El carril termina ahora de pasar por el sensor S3, por lo que también recogerá valores inválidos. Esto se puede observar en la figura 8.9.

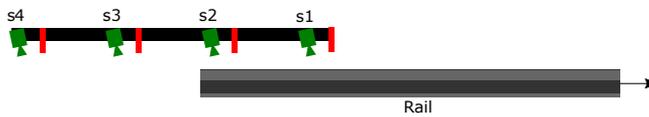


Figura 8.9: Evolución del sistema y del carril.  $Periodo = 9$

Los valores tomados por el sensor  $S4$  y  $S3$  en este instante no son válidos, ya el carril ha terminado de pasar por lo que se muestran en rojo en la tabla 8.17.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	

Tabla 8.17: Evolución de la matriz  $M$ .  $Periodo = 9$

De nuevo, ya no se miden nuevos valores, si no que los existentes, se están desplazando al resto de sensores. Como se puede observar en la tabla 8.18.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3	H3 ( $M_{43}$ )	H2 ( $M_{33}$ )	H1 ( $M_{23}$ )	
4	H4 ( $M_{44}$ )	H3 ( $M_{34}$ )	H2 ( $M_{24}$ )	H1 ( $M_{14}$ )
5	H5 ( $M_{45}$ )	H4 ( $M_{35}$ )	H3 ( $M_{25}$ )	H2 ( $M_{15}$ )
6	H6 ( $M_{46}$ )	H5 ( $M_{36}$ )	H4 ( $M_{26}$ )	H3 ( $M_{16}$ )
7	H7 ( $M_{47}$ )	H6 ( $M_{37}$ )	H5 ( $M_{27}$ )	H4 ( $M_{17}$ )
8		H7 ( $M_{38}$ )	H6 ( $M_{28}$ )	H5 ( $M_{18}$ )
9			H7 ( $M_{29}$ )	H6 ( $M_{19}$ )
10				

Tabla 8.18: Evolución de la matriz  $P$ .  $Periodo = 9$

### 8.1.10. Periodo 10

Este es el último periodo de captura de imágenes del sistema, ya que la última sección del carril está a punto de pasar el sensor ( $S1$ ), tal y como se observa en la figura 8.10.

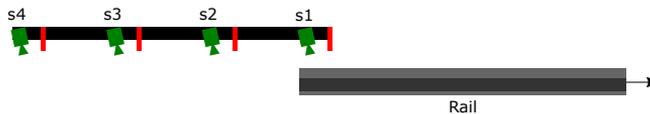


Figura 8.10: Evolución del sistema y del carril. Periodo = 10

Todos los valores insertados en este momento son inválidos excepto el tomado por el sensor  $S1$ , tal y como se aprecia en la tabla 8.19.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{11}$	$M_{13}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$

Tabla 8.19: Evolución de la matriz  $M$ .  $Periodo = 10$

El último valor que resta por medir, es decir  $H7$ , se captura ahora en el sensor  $S1$ , como se puede observar en la tabla 8.20.

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )	H1 ( $M_{32}$ )		
3	H3 ( $M_{43}$ )	H2 ( $M_{33}$ )	H1 ( $M_{23}$ )	
4	H4 ( $M_{44}$ )	H3 ( $M_{34}$ )	H2 ( $M_{24}$ )	H1 ( $M_{14}$ )
5	H5 ( $M_{45}$ )	H4 ( $M_{35}$ )	H3 ( $M_{25}$ )	H2 ( $M_{15}$ )
6	H6 ( $M_{46}$ )	H5 ( $M_{36}$ )	H4 ( $M_{26}$ )	H3 ( $M_{16}$ )
7	H7 ( $M_{47}$ )	H6 ( $M_{37}$ )	H5 ( $M_{27}$ )	H4 ( $M_{17}$ )
8		H7 ( $M_{38}$ )	H6 ( $M_{28}$ )	H5 ( $M_{18}$ )
9			H7 ( $M_{29}$ )	H6 ( $M_{19}$ )
10				H7 ( $M_{110}$ )

Tabla 8.20: Evolución de la matriz  $P$ .  $Periodo = 10$

## 8.2. Evolución de las matrices $M$ y $P$ para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

### 8.2.1. Periodo 1

La figura 8.11 muestra el sistema al inicio del mismo, justo cuando el carril acaba de entrar en él.



Figura 8.11: Evolución del sistema y del carril.  $Periodo = 1$

Se puede observar que la única medición realizada por el sistema es la que representa en la tabla 8.21 como  $M_{41}$  y el resto, pintadas de color rojo, contendrán valores nulos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$																
$M_{21}$																
$M_{31}$																
$M_{41}$																

Tabla 8.21: Evolución de la matriz  $M$ .  $Periodo = 1$

Por otra parte, la matriz  $P$  contendrá un único valor y este será  $H1$  ya que será el

primero de los valores de los que se desea conocer el valor de la planitud. Este valor estará en la columna  $S4$  puesto que es el sensor que a *capturado* dicho valor. Esto se ve representado en la tabla 8.22.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.22: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo = 1*

### 8.2.2. Periodo 2

La figura 8.12 muestra el sistema en el segundo periodo, el carril sigue sin llegar al sensor  $S3$ , por lo tanto el único que hasta el momento realiza capturas es el cuarto sensor  $S4$ .

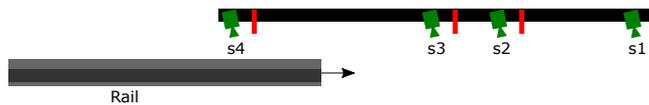


Figura 8.12: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo = 2*

Se puede observar que ya se dispone de dos mediciones realizadas por el sistema representado en la tabla 8.3. Donde  $M_{42}$ , es la segunda captura de este sensor. El resto, pintadas de color rojo, contendrán valores nulos.

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$															
$M_{21}$	$M_{22}$															
$M_{31}$	$M_{32}$															
$M_{41}$	$M_{42}$															

Tabla 8.23: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo = 2*

Por otra parte la matriz  $P$  representada en la tabla 8.24, refleja que el valor de  $H1$  ha avanzado y ya no es medido por ningún sensor. Ahora  $H2$  se mide en el cuarto sensor.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.24: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo = 2*

### 8.2.3. Periodo 3

En el periodo 3, el carril aun no ha llegado al sensor S3, si no que solo está siendo medido por el sensor S4 esto se puede observar en la figura 8.13.

Ya se disponen de 3 mediciones, todas ellas tomadas por el sensor S4 mientras que el resto de sensores del sistema no han medido aun ninguna sección del carril. Por



**Figura 8.13:** Evolución del sistema y del carril. Periodo = 3

lo tanto, las medidas tomadas por los sensores  $S3$ ,  $S2$  y  $S1$  se muestran en color rojo. Esto se puede observar en la tabla 8.25.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$														
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$														
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$														
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$														

**Tabla 8.25:** Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 3

Al sensor  $S4$  llega la tercera sección del carril, el cual obtiene un nuevo valor de planitud  $H3$ . Esto se puede observar en la tabla 8.26.

### 8.2.4. Periodo 4

Por primera vez desde que entrase el carril al sistema, el carril llega al sensor  $S3$ , tal y como se puede observar en la figura 8.14.



**Figura 8.14:** Evolución del sistema y del carril. Periodo = 4

El sensor  $S4$  adquiere una nueva medición y por primera vez lo hace también  $S3$ , el resto de sensores continúan midiendo valores inválidos, que se pueden ver en rojo en la tabla 8.27.

Esto también se observa en la tabla 8.28, el sensor  $S3$  captura la primera medición llevada a cabo por el sensor  $S4$ , es decir  $H1$  y el sensor  $S4$  adquiere una nueva medición  $H4$ .

### 8.2.5. Periodo 5

Segundo periodo donde el sensor  $S3$  adquiere mediciones válidas, y el carril llega ahora al sensor  $S2$ , tal y como se puede observar en la figura 8.15. Mientras tanto el carril sigue pasando por debajo del sensor  $S4$ .

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.26: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo = 3*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$													
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$													
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$													
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$													

Tabla 8.27: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo = 4*

Tal y como se puede observar en 8.29, ahora un nuevo sensor  $S2$  adquiere mediciones válidas, al igual que ya lo hacían los sensores  $S3$  y  $S4$ . Mediciones inválidas son medidas por el sensor  $S1$  que se pueden ver en color rojo.

Se obtiene el quinto valor de planitud horizontal  $H5$  en el sensor  $S4$ , como se puede observar en la tabla 8.30. El segundo o  $H2$  en el sensor  $S3$  y el primero  $H1$  en  $S2$ .

### 8.2.6. Periodo 6

El periodo 6 al igual que en el periodo anterior, los sensores  $S4$ ,  $S3$  y  $S2$  capturan valores del carril, se puede observar en la figura 8.16.

Tal y como se puede observar en la tabla 8.31, el sensor  $S1$  aun no ha tomado ninguna medición válida.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.28: Evolución de la matriz  $P$ . Periodo = 4



Figura 8.15: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$												
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$												
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$												
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$												

Tabla 8.29: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 5



Figura 8.16: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 6

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.30: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo = 5*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$											
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$											
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$											
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$											

Tabla 8.31: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo = 6*

Se obtiene el sexto valor de planitud horizontal  $H6$  en el sensor  $S4$ , el tercero  $H3$  en el sensor  $S3$  y el segundo  $H2$  en el sensor  $S2$  como se puede observar en la tabla 8.32.

**8.2.7. Periodo 7**

El carril finalmente llega al sensor  $S1$ . Esto se puede observar en la figura 8.17. Por primera vez desde que el carril entro en el sistema, todos los sensores están tomando mediciones válidas, de tal forma, que ningun valor en rojo se puede observar en la tabla 8.33.

Se obtiene el séptimo valor de planitud  $H7$  y el primero  $S1$  en el sensor  $S1$ . Esto se puede observar en la tabla 8.34.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.32: Evolución de la matriz  $P$ . Periodo = 6



Figura 8.17: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 7

### 8.2.8. Periodo 8

El carril continúa circulando bajo todos los sensores que siguen tomando mediciones válidas del mismo. Esto se puede observar en la figura 8.18.

Ninguna medición inválida es tomada por los sensores, tal y como se puede observar en la tabla 8.35.

El sensor  $S4$ , primer sensor en tomar información válida del carril  $S4$ , ahora recoge el octavo valor de planitud  $H8$  y el sensor  $S1$  mide el segundo valor de planitud  $H2$ . Esto se puede observar en la tabla 8.36.

### 8.2.9. Periodo 9

El carril continúa siendo medido por todos los sensores, como se puede observar en la figura 8.19.

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$										
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$										
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$										
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$										

Tabla 8.33: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 7

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.34: Evolución de la matriz  $P$ . Periodo = 7



Figura 8.18: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$									
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$									
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$									
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$									

Tabla 8.35: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 8

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.36: Evolución de la matriz  $P$ . Periodo = 8

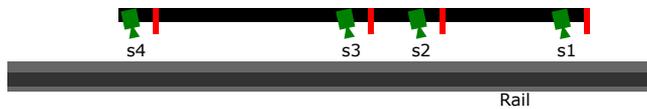


Figura 8.19: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 9

Ninguna medición inválida es tomada por los sensores, tal y como se puede observar en la tabla 8.37.

El sensor  $S4$  ahora recoge el noveno valor de planitud  $H9$  y el sensor  $S1$  mide el tercer valor de planitud  $H3$ . Esto se puede observar en la tabla 8.38.

### 8.2.10. Periodo 10

El carril continua siendo medido por todos los sensores, como se puede observar en la figura 8.20.

Ninguna medición inválida es tomada por los sensores, tal y como se puede observar en la tabla 8.39.

El sensor  $S4$  ahora recoge el décimo valor de planitud  $H10$  y el sensor  $S1$  mide el cuarto valor de planitud  $H4$ . Esto se puede observar en la tabla 8.40.

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$								
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$								
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$								
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$								

Tabla 8.37: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 9

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.38: Evolución de la matriz  $P$ . Periodo = 9

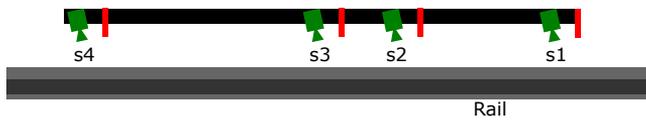


Figura 8.20: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$							
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$							
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$							
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$							

Tabla 8.39: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 10

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10	H10 ( $M_{410}$ )	H7 ( $M_{310}$ )	H6 ( $M_{210}$ )	H4 ( $M_{110}$ )
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.40: Evolución de la matriz  $P$ .  $Periodo = 10$

### 8.2.11. Periodo 11

El carril continua siendo medido por todos los sensores, como se puede observar en la figura 8.21. Este periodo será el último en el cual todos los sensores capturen datos válidos.

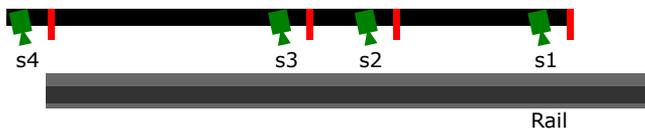


Figura 8.21: Evolución de la matriz  $M$ .  $Periodo = 11$

Por última vez, no hay ninguna medición inválida es tomada por los sensores, tal y como se puede observar en la tabla 8.41.

El sensor  $S4$  ahora recoge el undécimo valor de planitud  $H11$ , que es el último del carril y el sensor  $S1$  mide el cuarto valor de planitud  $H5$ . Esto se puede observar en la tabla 8.42.

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$	$M_{111}$						
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$	$M_{211}$						
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$	$M_{311}$						
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$	$M_{411}$						

Tabla 8.41: Evolución de la matriz  $M$ .  $Periodo = 11$

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10	H10 ( $M_{410}$ )	H7 ( $M_{310}$ )	H6 ( $M_{210}$ )	H4 ( $M_{110}$ )
11	H11 ( $M_{411}$ )	H8 ( $M_{311}$ )	H7 ( $M_{211}$ )	H5 ( $M_{111}$ )
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.42: Evolución de la matriz  $P$ .  $Periodo = 11$

8.2.12. Periodo 12

El carril termina ahora de pasar por el sensor  $S4$ , por lo que empieza a tomar valores inválidos. Esto se puede observar en la figura 8.22.

El valor tomados por el sensor  $S4$  en este instante no son válidos, ya el carril ha terminado de pasar por lo que se muestran en rojo en la tabla 8.43.

Por primera vez, el sensor  $S4$ , ya no toma valores del carril, si no que estos se van desplazando hasta que lleguen al resto de sensores, tal y como se puede ver en la tabla 8.44.

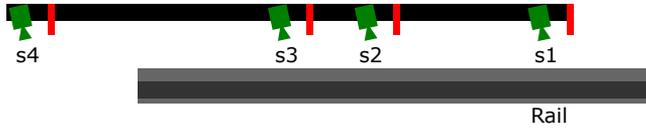


Figura 8.22: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$	$M_{111}$	$M_{112}$					
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$	$M_{211}$	$M_{212}$					
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$	$M_{311}$	$M_{312}$					
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$	$M_{411}$	$M_{412}$					

Tabla 8.43: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 12

### 8.2.13. Periodo 13

Al igual que en el periodo anterior el carril termina ya no es medido por el sensor  $S4$ , por lo que continúa tomando valores inválidos. Esto se puede observar en la figura 8.23.

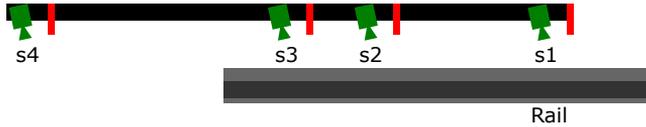


Figura 8.23: Evolución de la matriz  $M$ . Periodo = 13

El valor tomados por el sensor  $S4$  en este instante no son válidos, ya el carril ha terminado de pasar por lo que se muestran en rojo en la tabla 8.45.

El sensor  $S4$ , ya no toma valores del carril, si no que estos se van desplazando hasta que lleguen al resto de sensores, tal y como se puede ver en la tabla 8.46.

### 8.2.14. Periodo 14

El sensor  $S3$  captura la última sección del carril. Esto se puede observar en la figura 8.24.

Los valores tomados por el sensor  $S4$  en este instante no son válidos, ya el carril ha terminado de pasar por él, por lo que se muestran en rojo en la tabla 8.47. Este periodo será el ultimo en el que el sensor  $S3$  capture valores válidos.

El sensor  $S4$  no captura un valor válido y el sensor  $S3$  captura la última medida de planitud del carril, es decir,  $H11$ , tal y como se puede ver en la tabla 8.48.

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10	H10 ( $M_{410}$ )	H7 ( $M_{310}$ )	H6 ( $M_{210}$ )	H4 ( $M_{110}$ )
11	H11 ( $M_{411}$ )	H8 ( $M_{311}$ )	H7 ( $M_{211}$ )	H5 ( $M_{111}$ )
12		H9 ( $M_{312}$ )	H8 ( $M_{212}$ )	H6 ( $M_{112}$ )
13				
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.44: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo* = 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$	$M_{111}$	$M_{112}$	$M_{113}$				
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$	$M_{211}$	$M_{212}$	$M_{213}$				
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$	$M_{311}$	$M_{312}$	$M_{313}$				
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$	$M_{411}$	$M_{412}$	$M_{413}$				

Tabla 8.45: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo* = 13

**8.2.15. Periodo 15**

El carril ya ha terminado de pasar por el sensor S3, por lo que también recogerá valores inválidos. Esto se puede observar en la figura 8.25.

Los valores tomados por el sensor S4 y por primera vez en el sensor S3, en este instante no son válidos, ya el carril ha terminado de pasar por lo que se muestran en rojo en la tabla 8.49.

Los sensores S4 y S3 no capturan valores, mientras que el sensor S2 captura el último valor de planitud del carril H11. Tal y como se puede ver en la tabla 8.50.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10	H10 ( $M_{410}$ )	H7 ( $M_{310}$ )	H6 ( $M_{210}$ )	H4 ( $M_{110}$ )
11	H11 ( $M_{411}$ )	H8 ( $M_{311}$ )	H7 ( $M_{211}$ )	H5 ( $M_{111}$ )
12		H9 ( $M_{312}$ )	H8 ( $M_{212}$ )	H6 ( $M_{112}$ )
13		H10 ( $M_{313}$ )	H9 ( $M_{213}$ )	H7 ( $M_{113}$ )
14				
15				
16				
17				

Tabla 8.46: Evolución de la matriz P. Periodo = 13

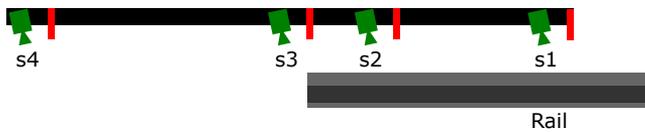


Figura 8.24: Evolución de la matriz M. Periodo = 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$	$M_{111}$	$M_{112}$	$M_{113}$	$M_{114}$			
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$	$M_{211}$	$M_{212}$	$M_{213}$	$M_{214}$			
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$	$M_{311}$	$M_{312}$	$M_{313}$	$M_{314}$			
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$	$M_{411}$	$M_{412}$	$M_{413}$	$M_{414}$			

Tabla 8.47: Evolución de la matriz M. Periodo = 14

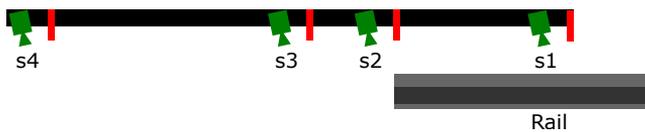


Figura 8.25: Evolución de la matriz M. Periodo = 15

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10	H10 ( $M_{410}$ )	H7 ( $M_{310}$ )	H6 ( $M_{210}$ )	H4 ( $M_{110}$ )
11	H11 ( $M_{411}$ )	H8 ( $M_{311}$ )	H7 ( $M_{211}$ )	H5 ( $M_{111}$ )
12		H9 ( $M_{312}$ )	H8 ( $M_{212}$ )	H6 ( $M_{112}$ )
13		H10 ( $M_{313}$ )	H9 ( $M_{213}$ )	H7 ( $M_{113}$ )
14		H11 ( $M_{314}$ )	H10 ( $M_{214}$ )	H8 ( $M_{114}$ )
15				
16				
17				

Tabla 8.48: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo* = 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$	$M_{111}$	$M_{112}$	$M_{113}$	$M_{114}$	$M_{115}$		
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$	$M_{211}$	$M_{212}$	$M_{213}$	$M_{214}$	$M_{215}$		
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$	$M_{311}$	$M_{312}$	$M_{313}$	$M_{314}$	$M_{315}$		
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$	$M_{411}$	$M_{412}$	$M_{413}$	$M_{414}$	$M_{415}$		

Tabla 8.49: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo* = 15

**8.2.16. Periodo 16**

El carril ya ha terminado de pasar por el sensor  $S2$ , por lo que también recogerá valores inválidos. Esto se puede observar en la figura 8.26.

Los valores tomados por el sensor  $S4$ , por el sensor  $S3$  y por primera vez en el sensor  $S2$ , en este instante no son válidos, ya el carril ha terminado de pasar por lo que se muestran en rojo en la tabla 8.51.

Los sensores  $S4$ ,  $S3$  y  $S2$  no capturan valores, mientras que el sensor  $S1$  captura el penúltimo valor de planitud del carril  $H10$ . Tal y como se puede ver en la tabla 8.52.

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10	H10 ( $M_{410}$ )	H7 ( $M_{310}$ )	H6 ( $M_{210}$ )	H4 ( $M_{110}$ )
11	H11 ( $M_{411}$ )	H8 ( $M_{311}$ )	H7 ( $M_{211}$ )	H5 ( $M_{111}$ )
12		H9 ( $M_{312}$ )	H8 ( $M_{212}$ )	H6 ( $M_{112}$ )
13		H10 ( $M_{313}$ )	H9 ( $M_{213}$ )	H7 ( $M_{113}$ )
14		H11 ( $M_{314}$ )	H10 ( $M_{214}$ )	H8 ( $M_{114}$ )
15			H11 ( $M_{215}$ )	H9 ( $M_{115}$ )
16				
17				

Tabla 8.50: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo = 15*

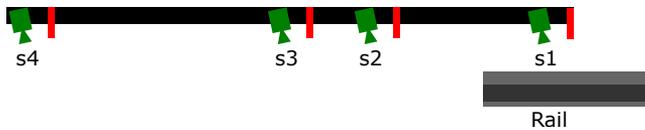


Figura 8.26: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo = 16*

### 8.2.17. Periodo 17

Este es el último periodo de captura de imágenes del sistema, ya que la última sección del carril está a punto de pasar por el último de los sensores, es decir  $S1$ . Esto se puede observar en la figura 8.27.

Todos los valores insertados en este momento son inválidos excepto el tomado por el último sensor, tal y como se aprecia en la tabla 8.53.

El último valor que resta por medir, es decir  $H11$  por el sensor  $S1$ , es medido por este, como se puede observar en la tabla 8.54.

8.2 Evolución de las matrices  $M$  y  $P$  para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$	$M_{111}$	$M_{112}$	$M_{113}$	$M_{114}$	$M_{115}$	$M_{116}$	
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$	$M_{211}$	$M_{212}$	$M_{213}$	$M_{214}$	$M_{215}$	$M_{216}$	
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$	$M_{311}$	$M_{312}$	$M_{313}$	$M_{314}$	$M_{315}$	$M_{316}$	
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$	$M_{411}$	$M_{412}$	$M_{413}$	$M_{414}$	$M_{415}$	$M_{416}$	

Tabla 8.51: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo* = 16

	S4	S3	S2	S1
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10	H10 ( $M_{410}$ )	H7 ( $M_{310}$ )	H6 ( $M_{210}$ )	H4 ( $M_{110}$ )
11	H11 ( $M_{411}$ )	H8 ( $M_{311}$ )	H7 ( $M_{211}$ )	H5 ( $M_{111}$ )
12		H9 ( $M_{312}$ )	H8 ( $M_{212}$ )	H6 ( $M_{112}$ )
13		H10 ( $M_{313}$ )	H9 ( $M_{213}$ )	H7 ( $M_{113}$ )
14		H11 ( $M_{314}$ )	H10 ( $M_{214}$ )	H8 ( $M_{114}$ )
15			H11 ( $M_{215}$ )	H9 ( $M_{115}$ )
16				H10 ( $M_{116}$ )
17				

Tabla 8.52: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo* = 16

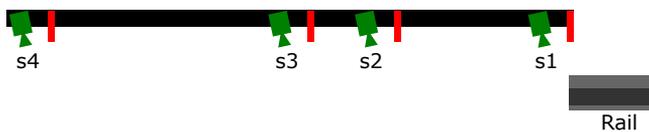


Figura 8.27: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo* = 17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$	$M_{19}$	$M_{110}$	$M_{111}$	$M_{112}$	$M_{113}$	$M_{114}$	$M_{115}$	$M_{116}$	$M_{117}$
$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$M_{25}$	$M_{26}$	$M_{27}$	$M_{28}$	$M_{29}$	$M_{210}$	$M_{211}$	$M_{212}$	$M_{213}$	$M_{214}$	$M_{215}$	$M_{216}$	$M_{217}$
$M_{31}$	$M_{32}$	$M_{33}$	$M_{34}$	$M_{35}$	$M_{36}$	$M_{37}$	$M_{38}$	$M_{39}$	$M_{310}$	$M_{311}$	$M_{312}$	$M_{313}$	$M_{314}$	$M_{315}$	$M_{316}$	$M_{317}$
$M_{41}$	$M_{42}$	$M_{43}$	$M_{44}$	$M_{45}$	$M_{46}$	$M_{47}$	$M_{48}$	$M_{49}$	$M_{410}$	$M_{411}$	$M_{412}$	$M_{413}$	$M_{414}$	$M_{415}$	$M_{416}$	$M_{417}$

Tabla 8.53: Evolución de la matriz  $M$ . *Periodo* = 17

	<b>S4</b>	<b>S3</b>	<b>S2</b>	<b>S1</b>
1	H1 ( $M_{41}$ )			
2	H2 ( $M_{42}$ )			
3	H3 ( $M_{43}$ )			
4	H4 ( $M_{44}$ )	H1 ( $M_{34}$ )		
5	H5 ( $M_{45}$ )	H2 ( $M_{35}$ )	H1 ( $M_{25}$ )	
6	H6 ( $M_{46}$ )	H3 ( $M_{36}$ )	H1 ( $M_{26}$ )	
7	H7 ( $M_{47}$ )	H4 ( $M_{37}$ )	H3 ( $M_{27}$ )	H1 ( $M_{17}$ )
8	H8 ( $M_{48}$ )	H5 ( $M_{38}$ )	H4 ( $M_{28}$ )	H2 ( $M_{18}$ )
9	H9 ( $M_{49}$ )	H6 ( $M_{39}$ )	H5 ( $M_{29}$ )	H3 ( $M_{19}$ )
10	H10 ( $M_{410}$ )	H7 ( $M_{310}$ )	H6 ( $M_{210}$ )	H4 ( $M_{110}$ )
11	H11 ( $M_{411}$ )	H8 ( $M_{311}$ )	H7 ( $M_{211}$ )	H5 ( $M_{111}$ )
12		H9 ( $M_{312}$ )	H8 ( $M_{212}$ )	H6 ( $M_{112}$ )
13		H10 ( $M_{313}$ )	H9 ( $M_{213}$ )	H7 ( $M_{113}$ )
14		H11 ( $M_{314}$ )	H10 ( $M_{214}$ )	H8 ( $M_{114}$ )
15			H11 ( $M_{215}$ )	H9 ( $M_{115}$ )
16				H10 ( $M_{116}$ )
17				H11 ( $M_{117}$ )

Tabla 8.54: Evolución de la matriz  $P$ . *Periodo* = 17

### 8.3. Resolución del problema para el *Ejemplo de arquitectura equiespaciada*

La resolución del *Problema A* se lleva a cabo en los periodos donde los cuatro sensores estaban midiendo de forma simultánea. La resolución para estos periodos son:

- Para el periodo cuatro, que se pudo ver en la sección 8.1.4, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.3.1.
- Para el periodo cinco, que se pudo ver en la sección 8.1.5, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.3.2.
- Para el periodo seis, que se pudo ver en la sección 8.1.6, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.3.3.
- Para el periodo siete, que se pudo ver en la sección 8.1.7, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.3.4.

De igual forma el desglose en las matrices  $A$ ,  $x$  y  $B$  se lleva a cabo en la sección 8.3.5.

### 8.3.1. Periodo 4

Para el periodo igual a cuatro, las variables son (8.1).

$$\text{Periodo} = 4 \quad P[4] = \begin{matrix} & s4 & s3 & s2 & s1 \\ (H4 & H3 & H2 & H1) \end{matrix} \quad M_{.4} = \begin{pmatrix} M_{14} \\ M_{24} \\ M_{34} \\ M_{44} \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

#### 8.3.1.1. Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (8.2).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 1 \quad 2) \quad r[1] = \frac{1}{2} \quad (8.2)$$

La ecuación resultante es (8.3).

$$(1-r) \cdot H3 - 1 \cdot H2 + r \cdot H1 = (1-r) \cdot M_{34} - 1 \cdot M_{24} + r \cdot M_{14} \quad (8.3)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.4).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H3 - H2 + \frac{1}{2} \cdot H1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{34} - M_{24} + \frac{1}{2} \cdot M_{14} \quad (8.4)$$

Que visto en forma de matrices (8.5).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{2}\right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{34} - M_{24} + \frac{1}{2} \cdot M_{14}\right) \quad (8.5)$$

Donde los valores  $M_{34}$ ,  $M_{24}$  y  $M_{14}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

### 8.3.1.2. Segunda combinación

Las variables de esta segunda combinación son (8.6).

$$c[2] = (1 \quad 2 \quad 4) \quad d[2] = (0 \quad 1 \quad 3) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (8.6)$$

La ecuación resultante es (8.7).

$$(1-r) \cdot H4 - 1 \cdot H2 + r \cdot H1 = (1-r) \cdot M_{44} - 1 \cdot M_{24} + r \cdot M_{14} \quad (8.7)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.8).

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot H4 - H2 + \frac{1}{3} \cdot H1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot M_{44} - M_{24} + \frac{1}{3} \cdot M_{14} \quad (8.8)$$

Que visto en forma de matrices (8.9).

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{44} + 0 + -M_{24} + \frac{1}{3} \cdot M_{14}\right) \quad (8.9)$$

Donde los valores  $M_{44}$ ,  $M_{24}$  y  $M_{14}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.1.3. Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (8.10).

$$c[3] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[3] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[3] = \frac{2}{3} \quad (8.10)$$

La ecuación resultante es (8.11).

$$(1-r) \cdot H4 - 1 \cdot H3 + r \cdot H1 = (1-r) \cdot M_{44} - 1 \cdot M_{34} + r \cdot M_{14} \quad (8.11)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.12).

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H4 - H3 + \frac{2}{3} \cdot H1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{44} - M_{34} + \frac{2}{3} \cdot M_{14} \quad (8.12)$$

Que visto en forma de matrices (8.13).

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{44} + -M_{34} + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{14}\right) \quad (8.13)$$

Donde los valores  $M_{44}$ ,  $M_{34}$  y  $M_{14}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

#### 8.3.1.4. Cuarta combinación

Las variables de esta cuarta combinación son (8.14).

$$c[4] = (2 \quad 3 \quad 4) \quad d[4] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad r[4] = \frac{2}{3} \quad (8.14)$$

La ecuación resultante es (8.15).

$$(1 - r) \cdot H4 - 1 \cdot H3 + r \cdot H2 = (1 - r) \cdot M_{44} - 1 \cdot M_{34} + r \cdot M_{24} \quad (8.15)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.16).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H4 - H3 + \frac{1}{2} \cdot H2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{44} - M_{34} + \frac{1}{2} \cdot M_{24} \quad (8.16)$$

Que visto en forma de matrices (8.17).

$$A_i = \left( 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left( 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{44} + -M_{34} + \frac{1}{2} \cdot M_{24} + 0 \right) \quad (8.17)$$

Donde los valores  $M_{44}$ ,  $M_{34}$  y  $M_{24}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.2. Periodo 5

Para el periodo igual a cinco, las variables son (8.18).

$$Periodo = 5 \quad P[5] = \begin{matrix} & s4 & s3 & s2 & s1 \\ (H5 & H4 & H3 & H2) \end{matrix} \quad M_{.5} = \begin{pmatrix} M_{15} \\ M_{25} \\ M_{35} \\ M_{45} \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

#### 8.3.2.1. Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (8.19).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 1 \quad 2) \quad r[1] = \frac{1}{2} \quad (8.19)$$

La ecuación resultante es (8.20).

$$(1 - r) \cdot H4 - 1 \cdot H3 + r \cdot H2 = (1 - r) \cdot M_{35} - 1 \cdot M_{25} + r \cdot M_{15} \quad (8.20)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.21).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H4 - H3 + \frac{1}{2} \cdot H2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{35} - M_{25} + \frac{1}{2} \cdot M_{15} \quad (8.21)$$

Que visto en forma de matrices (8.22).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad 0\right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{35} + -M_{25} + \frac{1}{2} \cdot M_{15} + 0\right) \quad (8.22)$$

Donde los valores  $M_{35}$ ,  $M_{25}$  y  $M_{15}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

### 8.3.2.2. Segunda combinación

Las variables de esta segunda combinación son (8.23).

$$c[2] = (1 \quad 2 \quad 4) \quad d[2] = (0 \quad 1 \quad 3) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (8.23)$$

La ecuación resultante es (8.24).

$$(1 - r) \cdot H5 - 1 \cdot H3 + r \cdot H2 = (1 - r) \cdot M_{45} - 1 \cdot M_{25} + r \cdot M_{15} \quad (8.24)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.25).

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot H5 - H3 + \frac{1}{3} \cdot H2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot M_{45} - M_{25} + \frac{1}{3} \cdot M_{15} \quad (8.25)$$

Que visto en forma de matrices (8.26).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{3} \quad 0\right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(0 + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{45} + 0 + -M_{25} + \frac{1}{3} \cdot M_{15} + 0\right) \quad (8.26)$$

Donde los valores  $M_{45}$ ,  $M_{25}$  y  $M_{15}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.2.3. Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (8.27).

$$c[3] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[3] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[3] = \frac{2}{3} \quad (8.27)$$

La ecuación resultante es (8.28).

$$(1 - r) \cdot H5 - 1 \cdot H4 + r \cdot H2 = (1 - r) \cdot M_{45} - 1 \cdot M_{35} + r \cdot M_{15} \quad (8.28)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.29).

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H5 - H4 + \frac{2}{3} \cdot H2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{2}{3} \cdot M_{15} \quad (8.29)$$

Que visto en forma de matrices (8.30).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0\right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(0 + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{45} - M_{35} + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{15} + 0\right) \quad (8.30)$$

Donde los valores  $M_{45}$ ,  $M_{35}$  y  $M_{15}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.2.4. Cuarta combinación

Las variables de esta cuarta combinación son (8.31).

$$c[4] = (2 \quad 3 \quad 4) \quad d[4] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad r[4] = \frac{2}{3} \quad (8.31)$$

La ecuación resultante es (8.32).

$$(1-r) \cdot H5 - 1 \cdot H4 + r \cdot H3 = (1-r) \cdot M_{45} - 1 \cdot M_{35} + r \cdot M_{25} \quad (8.32)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.33).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H5 - H4 + \frac{1}{2} \cdot H3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{1}{2} \cdot M_{25} \quad (8.33)$$

Que visto en forma de matrices (8.34).

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{45} + -M_{35} + \frac{1}{2} \cdot M_{25} + 0 + 0\right) \quad (8.34)$$

Donde los valores  $M_{45}$ ,  $M_{35}$  y  $M_{25}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.3. Periodo 6

Para el periodo igual a seis, las variables son (8.35).

$$Periodo = 6 \quad P[6] = \begin{matrix} & s4 & s3 & s2 & s1 \\ \begin{pmatrix} H6 & H5 & H4 & H3 \end{pmatrix} & & & & \end{matrix} \quad M_{.6} = \begin{pmatrix} M_{16} \\ M_{26} \\ M_{36} \\ M_{46} \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

#### 8.3.3.1. Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (8.36).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 1 \quad 2) \quad r[1] = \frac{1}{2} \quad (8.36)$$

La ecuación resultante es (8.37).

$$(1-r) \cdot H5 - 1 \cdot H4 + r \cdot H3 = (1-r) \cdot M_{36} - 1 \cdot M_{26} + r \cdot M_{16} \quad (8.37)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.38).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H5 - H4 + \frac{1}{2} \cdot H3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{36} - M_{26} + \frac{1}{2} \cdot M_{16} \quad (8.38)$$

Que visto en forma de matrices (8.39).

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{36} - M_{26} + \frac{1}{2} \cdot M_{16} + 0 + 0\right) \quad (8.39)$$

Donde los valores  $M_{36}$ ,  $M_{26}$  y  $M_{16}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

### 8.3.3.2. Segunda combinación

Las variables de esta segunda combinación son (8.40).

$$c[2] = (1 \quad 2 \quad 4) \quad d[2] = (0 \quad 1 \quad 3) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (8.40)$$

La ecuación resultante es (8.41).

$$(1 - r) \cdot H6 - 1 \cdot H4 + r \cdot H3 = (1 - r) \cdot M_{46} - 1 \cdot M_{26} + r \cdot M_{16} \quad (8.41)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.42).

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot H6 - H4 + \frac{1}{3} \cdot H3 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot M_{46} - M_{26} + \frac{1}{3} \cdot M_{16} \quad (8.42)$$

Que visto en forma de matrices (8.43).

$$A_i = \left( 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left( 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{46} + 0 + -M_{26} + \frac{1}{3} \cdot M_{16} + 0 + 0 \right) \quad (8.43)$$

Donde los valores  $M_{46}$ ,  $M_{26}$  y  $M_{16}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.3.3. Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (8.44).

$$c[3] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[3] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[3] = \frac{2}{3} \quad (8.44)$$

La ecuación resultante es (8.45).

$$(1 - r) \cdot H6 - 1 \cdot H5 + r \cdot H3 = (1 - r) \cdot M_{46} - 1 \cdot M_{36} + r \cdot M_{16} \quad (8.45)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.46).

$$\left( 1 - \frac{2}{3} \right) \cdot H6 - H5 + \frac{2}{3} \cdot H3 = \left( 1 - \frac{2}{3} \right) \cdot M_{46} - M_{36} + \frac{2}{3} \cdot M_{16} \quad (8.46)$$

Que visto en forma de matrices (8.47).

$$A_i = \left( 0 \quad \frac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left( 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{46} + -M_{36} + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{16} + 0 + 0 \right) \quad (8.47)$$

Donde los valores  $M_{46}$ ,  $M_{36}$  y  $M_{16}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.3.4. Cuarta combinación

Las variables de esta cuarta combinación son (8.48).

$$c[4] = (2 \quad 3 \quad 4) \quad d[4] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad r[4] = \frac{2}{3} \quad (8.48)$$

La ecuación resultante es (8.49).

$$(1-r) \cdot H6 - 1 \cdot H5 + r \cdot H4 = (1-r) \cdot M_{46} - 1 \cdot M_{36} + r \cdot M_{26} \quad (8.49)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.50).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H6 - H5 + \frac{1}{2} \cdot H4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{46} - M_{36} + \frac{1}{2} \cdot M_{26} \quad (8.50)$$

Que visto en forma de matrices (8.51).

$$A_i = \left(0 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(0 + \frac{1}{2} \cdot M_{46} - M_{36} + \frac{1}{2} \cdot M_{26} + 0 + 0 + 0\right) \quad (8.51)$$

Donde los valores  $M_{46}$ ,  $M_{36}$  y  $M_{26}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.4. Periodo 7

Para el periodo igual a siete, las variables son (8.52).

$$Periodo = 7 \quad P[7] = \begin{pmatrix} s4 & s3 & s2 & s1 \\ H7 & H6 & H5 & H4 \end{pmatrix} \quad M_{.7} = \begin{pmatrix} M_{17} \\ M_{27} \\ M_{37} \\ M_{47} \end{pmatrix} \quad (8.52)$$

### 8.3.4.1. Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (8.53).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 1 \quad 2) \quad r[1] = \frac{1}{2} \quad (8.53)$$

La ecuación resultante es (8.54).

$$(1-r) \cdot H6 - 1 \cdot H5 + r \cdot H4 = (1-r) \cdot M_{37} - 1 \cdot M_{27} + r \cdot M_{17} \quad (8.54)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.55).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H6 - H5 + \frac{1}{2} \cdot H4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{37} - M_{27} + \frac{1}{2} \cdot M_{17} \quad (8.55)$$

Que visto en forma de matrices (8.56).

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(0 + \frac{1}{2} \cdot M_{37} - M_{27} + \frac{1}{2} \cdot M_{17} + 0 + 0 + 0\right) \quad (8.56)$$

Donde los valores  $M_{37}$ ,  $M_{27}$  y  $M_{17}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

### 8.3.4.2. Segunda combinación

Las variables de esta segunda combinación son (8.57).

$$c[2] = (1 \quad 2 \quad 4) \quad d[2] = (0 \quad 1 \quad 3) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (8.57)$$

La ecuación resultante es (8.58).

$$(1-r) \cdot H7 - 1 \cdot H5 + r \cdot H4 = (1-r) \cdot M_{47} - 1 \cdot M_{27} + r \cdot M_{17} \quad (8.58)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.59).

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot H7 - H5 + \frac{1}{3} \cdot H4 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot M_{47} - M_{27} + \frac{1}{3} \cdot M_{17} \quad (8.59)$$

Que visto en forma de matrices (8.60).

$$A_i = \left(\frac{2}{3} \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left(\frac{2}{3} \cdot M_{47} + 0 + -M_{27} + \frac{1}{3} \cdot M_{17} + 0 + 0 + 0\right) \quad (8.60)$$

Donde los valores  $M_{47}$ ,  $M_{27}$  y  $M_{17}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.4.3. Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (8.61).

$$c[3] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[3] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[3] = \frac{2}{3} \quad (8.61)$$

La ecuación resultante es (8.62).

$$(1 - r) \cdot H7 - 1 \cdot H6 + r \cdot H4 = (1 - r) \cdot M_{47} - 1 \cdot M_{37} + r \cdot M_{17} \quad (8.62)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.63).

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H7 - H6 + \frac{2}{3} \cdot H4 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{2}{3} \cdot M_{17} \quad (8.63)$$

Que visto en forma de matrices (8.64).

$$A_i = \left( \frac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left( \frac{1}{3} \cdot M_{47} + -M_{37} + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{17} + 0 + 0 + 0 \right) \quad (8.64)$$

Donde los valores  $M_{47}$ ,  $M_{37}$  y  $M_{17}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

#### 8.3.4.4. Cuarta combinación

Las variables de esta cuarta combinación son (8.65).

$$c[4] = (2 \quad 3 \quad 4) \quad d[4] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad r[4] = \frac{2}{3} \quad (8.65)$$

La ecuación resultante es (8.66).

$$(1 - r) \cdot H7 - 1 \cdot H6 + r \cdot H5 = (1 - r) \cdot M_{47} - 1 \cdot M_{37} + r \cdot M_{27} \quad (8.66)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.67).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H7 - H6 + \frac{1}{2} \cdot H5 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{27} \quad (8.67)$$

Que visto en forma de matrices (8.68).

$$A_i = \left( \frac{1}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \quad x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \left( \frac{1}{2} \cdot M_{47} + -M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{27} + 0 + 0 + 0 + 0 \right) \quad (8.68)$$

Donde los valores  $M_{47}$ ,  $M_{37}$  y  $M_{27}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores.

### 8.3.5. Matrices $A$ , $x$ y $B$

Todo el conjunto de ecuaciones vistos en los puntos anteriores, se recogen en las siguientes matrices  $A$  (8.69),  $x$  (8.70) y  $B$  (8.71).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.69)$$

$$x = \begin{pmatrix} H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.70)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot M_{34} - M_{24} + \frac{1}{2} \cdot M_{14} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{44} - M_{24} + \frac{1}{3} \cdot M_{14} \\ \frac{1}{3} \cdot M_{44} - M_{34} + \frac{2}{3} \cdot M_{14} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{44} - M_{34} + \frac{1}{2} \cdot M_{24} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{35} - M_{25} + \frac{1}{2} \cdot M_{15} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{45} - M_{25} + \frac{1}{3} \cdot M_{15} \\ \frac{1}{3} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{2}{3} \cdot M_{15} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{1}{2} \cdot M_{25} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{35} - M_{25} + \frac{1}{2} \cdot M_{15} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{45} - M_{25} + \frac{1}{3} \cdot M_{15} \\ \frac{1}{3} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{2}{3} \cdot M_{15} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{1}{2} \cdot M_{25} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{35} - M_{25} + \frac{1}{2} \cdot M_{15} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{45} - M_{25} + \frac{1}{3} \cdot M_{15} \\ \frac{1}{3} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{2}{3} \cdot M_{15} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{45} - M_{35} + \frac{1}{2} \cdot M_{25} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.71)$$

#### 8.4. Resolución del problema para el *Ejemplo de arquitectura no equiespaciada*

La resolución del *Problema B* se lleva a cabo en los periodos donde los cuatro sensores estaban midiendo de forma simultánea. La resolución para estos periodos son:

- Para el periodo siete, que se pudo ver en la sección 8.2.7, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.1.
- Para el periodo ocho, que se pudo ver en la sección 8.2.8, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.2.
- Para el periodo nueve, que se pudo ver en la sección 8.2.9, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.3.

- Para el periodo diez, que se pudo ver en la sección 8.2.10, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.4.
- Para el periodo once, que se pudo ver en la sección 8.2.11, la resolución se lleva a cabo en la sección 8.4.5.

De igual forma el desglose en las matrices  $A$ ,  $x$  y  $B$  se lleva a cabo en la sección 8.4.6.

### 8.4.1. Periodo 7

Para el periodo igual a siete, las variables son (8.72).

$$\text{Periodo} = 7 \quad P[7] = \begin{matrix} & s4 & s3 & s2 & s1 \\ (H7 & H4 & H3 & H1) \end{matrix} \quad M_{.7} = \begin{pmatrix} M_{17} \\ M_{27} \\ M_{37} \\ M_{47} \end{pmatrix} \quad (8.72)$$

#### 8.4.1.1. Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (8.73).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[1] = \frac{2}{3} \quad (8.73)$$

La ecuación resultante es (8.74).

$$(1-r) \cdot H4 - 1 \cdot H3 + r \cdot H1 = (1-r) \cdot M_{37} - 1 \cdot M_{27} + r \cdot M_{17} \quad (8.74)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.75).

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H4 - H3 + \frac{2}{3} \cdot H1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{37} - M_{27} + \frac{2}{3} \cdot M_{17} \quad (8.75)$$

Que visto en forma de matrices (8.76).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad \frac{2}{3}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.76)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{37} + -M_{27} + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{17}\right)$$

Donde los valores  $M_{37}$ ,  $M_{27}$  y  $M_{17}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.1.2. Segunda combinación

Las variables de esta segunda combinación son (8.77).

$$c[2] = (1 \quad 2 \quad 4) \quad d[2] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (8.77)$$

La ecuación resultante es (8.78).

$$(1 - r) \cdot H7 - 1 \cdot H3 + r \cdot H1 = (1 - r) \cdot M_{47} - 1 \cdot M_{27} + r \cdot M_{17} \quad (8.78)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.79).

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot H7 - H3 + \frac{1}{3} \cdot H1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot M_{47} - M_{27} + \frac{1}{3} \cdot M_{17} \quad (8.79)$$

Que visto en forma de matrices (8.80).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \frac{1}{3}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.80)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{47} + 0 + 0 + 0 + 0 - M_{27} + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{17}\right)$$

Donde los valores  $M_{47}$ ,  $M_{27}$  y  $M_{17}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.1.3. Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (8.81).

$$c[3] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[3] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[3] = \frac{1}{2} \quad (8.81)$$

La ecuación resultante es (8.82).

$$(1 - r) \cdot H7 - 1 \cdot H4 + r \cdot H1 = (1 - r) \cdot M_{47} - 1 \cdot M_{37} + r \cdot M_{17} \quad (8.82)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.83).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H7 - H4 + \frac{1}{2} \cdot H1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{17} \quad (8.83)$$

Que visto en forma de matrices (8.84).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.84)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{47} + 0 + 0 + -M_{37} + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{17}\right)$$

Donde los valores  $M_{47}$ ,  $M_{27}$  y  $M_{17}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.1.4. Cuarta combinación

Las variables de esta cuarta combinación son (8.85).

$$c[4] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[4] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[4] = \frac{1}{4} \quad (8.85)$$

La ecuación resultante es (8.86).

$$(1 - r) \cdot H7 - 1 \cdot H4 + r \cdot H3 = (1 - r) \cdot M_{47} - 1 \cdot M_{37} + r \cdot M_{27} \quad (8.86)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{4}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.87).

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot H7 - H4 + \frac{1}{4} \cdot H3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{4} \cdot M_{27} \quad (8.87)$$

Que visto en forma de matrices (8.88).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.88)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + 0 + \frac{3}{4} \cdot M_{47} + 0 + 0 + -M_{37} + \frac{1}{4} \cdot M_{27} + 0 + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{47}$ ,  $M_{37}$  y  $M_{27}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

### 8.4.2. Periodo 8

Para el periodo igual a ocho, las variables son (8.89).

$$\text{Periodo} = 8 \quad P[8] = \begin{matrix} & s4 & s3 & s2 & s1 \\ (H8 & H5 & H4 & H2) \end{matrix} \quad M_{.8} = \begin{pmatrix} M_{18} \\ M_{28} \\ M_{38} \\ M_{48} \end{pmatrix} \quad (8.89)$$

#### 8.4.2.1. Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (8.90).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[1] = \frac{2}{3} \quad (8.90)$$

La ecuación resultante es (8.91).

$$(1 - r) \cdot H5 - 1 \cdot H4 + r \cdot H2 = (1 - r) \cdot M_{38} - 1 \cdot M_{28} + r \cdot M_{18} \quad (8.91)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.92).

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H5 - H4 + \frac{2}{3} \cdot H2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{38} - M_{28} + \frac{2}{3} \cdot M_{18} \quad (8.92)$$

Que visto en forma de matrices (8.93).

$$A_i = \left( 0 \quad \frac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.93)$$

$$B_i = \left( 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{38} + -M_{28} + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{18} + 0 \right)$$

Donde los valores  $M_{38}$ ,  $M_{28}$  y  $M_{18}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.2.2. Segunda combinación

Las variables de esta segunda combinación son (8.94).

$$c[2] = (1 \quad 2 \quad 4) \quad d[2] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (8.94)$$

La ecuación resultante es (8.95).

$$(1 - r) \cdot H8 - 1 \cdot H4 + r \cdot H2 = (1 - r) \cdot M_{48} - 1 \cdot M_{28} + r \cdot M_{18} \quad (8.95)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.96).

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot H8 - H4 + \frac{1}{3} \cdot H2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot M_{48} - M_{28} + \frac{1}{3} \cdot M_{18} \quad (8.96)$$

Que visto en forma de matrices (8.97).

$$A_i = \left( 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.97)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{48} + 0 + 0 + 0 + 0 - M_{28} + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{18} + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{48}$ ,  $M_{28}$  y  $M_{18}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.2.3. Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (8.98).

$$c[3] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[3] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[3] = \frac{1}{2} \quad (8.98)$$

La ecuación resultante es (8.99).

$$(1 - r) \cdot H8 - 1 \cdot H5 + r \cdot H2 = (1 - r) \cdot M_{48} - 1 \cdot M_{38} + r \cdot M_{18} \quad (8.99)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.100).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H8 - H5 + \frac{1}{2} \cdot H2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{48} - M_{38} + \frac{1}{2} \cdot M_{18} \quad (8.100)$$

Que visto en forma de matrices (8.101).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.101)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{48} + 0 + 0 + -M_{38} + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{18} + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{48}$ ,  $M_{28}$  y  $M_{18}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.2.4. Cuarta combinación

Las variables de esta cuarta combinación son (8.102).

$$c[4] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[4] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[4] = \frac{1}{4} \quad (8.102)$$

La ecuación resultante es (8.103).

$$(1 - r) \cdot H8 - 1 \cdot H5 + r \cdot H4 = (1 - r) \cdot M_{48} - 1 \cdot M_{38} + r \cdot M_{28} \quad (8.103)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{4}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.104).

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot H8 - H5 + \frac{1}{4} \cdot H4 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot M_{48} - M_{38} + \frac{1}{4} \cdot M_{28} \quad (8.104)$$

Que visto en forma de matrices (8.105).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.105)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + 0 + \frac{3}{4} \cdot M_{48} + 0 + 0 + -M_{38} + \frac{1}{4} \cdot M_{28} + 0 + 0 + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{48}$ ,  $M_{38}$  y  $M_{28}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

### 8.4.3. Periodo 9

Para el periodo igual a nueve, las variables son (8.106).

$$Periodo = 9 \quad P[9] = \begin{matrix} & s4 & s3 & s2 & s1 \\ (H9 & H6 & H5 & H3) \end{matrix} \quad M_{,9} = \begin{pmatrix} M_{19} \\ M_{29} \\ M_{39} \\ M_{49} \end{pmatrix} \quad (8.106)$$

#### 8.4.3.1. Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (8.107).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[1] = \frac{2}{3} \quad (8.107)$$

La ecuación resultante es (8.108).

$$(1 - r) \cdot H6 - 1 \cdot H5 + r \cdot H3 = (1 - r) \cdot M_{39} - 1 \cdot M_{29} + r \cdot M_{19} \quad (8.108)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.109).

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H6 - H5 + \frac{2}{3} \cdot H3 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{39} - M_{29} + \frac{2}{3} \cdot M_{19} \quad (8.109)$$

Que visto en forma de matrices (8.110).

$$A_i = \left( 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.110)$$

$$B_i = \left( 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{39} + -M_{29} + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{19} + 0 + 0 \right)$$

Donde los valores  $M_{39}$ ,  $M_{29}$  y  $M_{19}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.3.2. Segunda combinación

Las variables de esta segunda combinación son (8.111).

$$c[2] = \left( 1 \quad 2 \quad 4 \right) \quad d[2] = \left( 0 \quad 2 \quad 3 \right) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (8.111)$$

La ecuación resultante es (8.112).

$$(1 - r) \cdot H9 - 1 \cdot H5 + r \cdot H3 = (1 - r) \cdot M_{49} - 1 \cdot M_{29} + r \cdot M_{19} \quad (8.112)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.113).

$$\left( 1 - \frac{1}{3} \right) \cdot H9 - H5 + \frac{1}{3} \cdot H3 = \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \cdot M_{49} - M_{29} + \frac{1}{3} \cdot M_{19} \quad (8.113)$$

Que visto en forma de matrices (8.114).

$$A_i = \left( 0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.114)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{49} + 0 + 0 + 0 + -M_{29} + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{19} + 0 + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{49}$ ,  $M_{29}$  y  $M_{19}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.3.3. Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (8.115).

$$c[3] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[3] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[3] = \frac{1}{2} \quad (8.115)$$

La ecuación resultante es (8.116).

$$(1 - r) \cdot H9 - 1 \cdot H6 + r \cdot H3 = (1 - r) \cdot M_{49} - 1 \cdot M_{39} + r \cdot M_{19} \quad (8.116)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.117).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H9 - H6 + \frac{1}{2} \cdot H3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{49} - M_{39} + \frac{1}{2} \cdot M_{19} \quad (8.117)$$

Que visto en forma de matrices (8.118).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.118)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{49} + 0 + 0 + -M_{39} + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{19} + 0 + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{49}$ ,  $M_{29}$  y  $M_{19}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.3.4. Cuarta combinación

Las variables de esta cuarta combinación son (8.119).

$$c[4] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[4] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[4] = \frac{1}{4} \quad (8.119)$$

La ecuación resultante es (8.120).

$$(1 - r) \cdot H9 - 1 \cdot H6 + r \cdot H5 = (1 - r) \cdot M_{49} - 1 \cdot M_{39} + r \cdot M_{29} \quad (8.120)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{4}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.121).

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot H9 - H6 + \frac{1}{4} \cdot H5 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot M_{49} - M_{39} + \frac{1}{4} \cdot M_{29} \quad (8.121)$$

Que visto en forma de matrices (8.122).

$$A_i = \left(0 \quad 0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.122)$$

$$B_i = \left(0 + 0 + \frac{3}{4} \cdot M_{49} + 0 + 0 + -M_{39} + \frac{1}{4} \cdot M_{29} + 0 + 0 + 0 + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{49}$ ,  $M_{39}$  y  $M_{29}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.4. Periodo 10

Para el periodo igual a diez, las variables son (8.123).

$$\text{Periodo} = 10 \quad P[10] = \begin{matrix} & s4 & s3 & s2 & s1 \\ (H10 & H7 & H6 & H4) \end{matrix} \quad M_{.10} = \begin{pmatrix} M_{110} \\ M_{210} \\ M_{310} \\ M_{410} \end{pmatrix} \quad (8.123)$$

##### 8.4.4.1. Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (8.124).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[1] = \frac{2}{3} \quad (8.124)$$

La ecuación resultante es (8.125).

$$(1 - r) \cdot H7 - 1 \cdot H6 + r \cdot H4 = (1 - r) \cdot M_{310} - 1 \cdot M_{210} + r \cdot M_{110} \quad (8.125)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.126).

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H7 - H6 + \frac{2}{3} \cdot H4 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{310} - M_{210} + \frac{2}{3} \cdot M_{110} \quad (8.126)$$

Que visto en forma de matrices (8.127).

$$A_i = \left( 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.127)$$

$$B_i = \left( 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{310} + -M_{210} + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{110} + 0 + 0 + 0 \right)$$

Donde los valores  $M_{310}$ ,  $M_{210}$  y  $M_{110}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.4.2. Segunda combinación

Las variables de esta segunda combinación son (8.128).

$$c[2] = (1 \quad 2 \quad 4) \quad d[2] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (8.128)$$

La ecuación resultante es (8.129).

$$(1 - r) \cdot H10 - 1 \cdot H6 + r \cdot H4 = (1 - r) \cdot M_{410} - 1 \cdot M_{210} + r \cdot M_{110} \quad (8.129)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.130).

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot H10 - H6 + \frac{1}{3} \cdot H4 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot M_{410} - M_{210} + \frac{1}{3} \cdot M_{110} \quad (8.130)$$

Que visto en forma de matrices (8.131).

$$A_i = \left( 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.131)$$

$$B_i = \left(0 + \frac{2}{3} \cdot M_{410} + 0 + 0 + 0 + 0 - M_{210} + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{110} + 0 + 0 + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{410}$ ,  $M_{210}$  y  $M_{110}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.4.3. Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (8.132).

$$c[3] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[3] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[3] = \frac{1}{2} \quad (8.132)$$

La ecuación resultante es (8.133).

$$(1 - r) \cdot H10 - 1 \cdot H7 + r \cdot H4 = (1 - r) \cdot M_{410} - 1 \cdot M_{310} + r \cdot M_{110} \quad (8.133)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.134).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H10 - H7 + \frac{1}{2} \cdot H4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{410} - M_{310} + \frac{1}{2} \cdot M_{110} \quad (8.134)$$

Que visto en forma de matrices (8.135).

$$A_i = \left(0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.135)$$

$$B_i = \left(0 + \frac{1}{2} \cdot M_{410} + 0 + 0 + -M_{310} + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{110} + 0 + 0 + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{410}$ ,  $M_{210}$  y  $M_{110}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.4.4. Cuarta combinación

Las variables de esta cuarta combinación son (8.136).

$$c[4] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[4] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[4] = \frac{1}{4} \quad (8.136)$$

La ecuación resultante es (8.137).

$$(1 - r) \cdot H10 - 1 \cdot H7 + r \cdot H6 = (1 - r) \cdot M_{410} - 1 \cdot M_{310} + r \cdot M_{210} \quad (8.137)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{4}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.138).

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot H10 - H7 + \frac{1}{4} \cdot H6 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot M_{410} - M_{310} + \frac{1}{4} \cdot M_{210} \quad (8.138)$$

Que visto en forma de matrices (8.139).

$$A_i = \left(0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.139)$$

$$B_i = \left(0 + \frac{3}{4} \cdot M_{410} + 0 + 0 + -M_{310} + \frac{1}{4} \cdot M_{210} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0\right)$$

Donde los valores  $M_{410}$ ,  $M_{310}$  y  $M_{210}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

### 8.4.5. Periodo 11

Para el periodo igual a once, las variables son (8.140).

$$\text{Periodo} = 11 \quad P[11] = \begin{matrix} & s4 & s3 & s2 & s1 \\ (H11 & H8 & H7 & H5) \end{matrix} \quad M_{.11} = \begin{pmatrix} M_{111} \\ M_{211} \\ M_{311} \\ M_{411} \end{pmatrix} \quad (8.140)$$

#### 8.4.5.1. Primera combinación

Las variables de esta primera combinación son (8.141).

$$c[1] = (1 \quad 2 \quad 3) \quad d[1] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[1] = \frac{2}{3} \quad (8.141)$$

La ecuación resultante es (8.142).

$$(1 - r) \cdot H8 - 1 \cdot H7 + r \cdot H5 = (1 - r) \cdot M_{311} - 1 \cdot M_{211} + r \cdot M_{111} \quad (8.142)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.143).

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot H8 - H7 + \frac{2}{3} \cdot H5 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot M_{311} - M_{211} + \frac{2}{3} \cdot M_{111} \quad (8.143)$$

Que visto en forma de matrices (8.144).

$$A_i = \left( 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.144)$$

$$B_i = \left( 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{311} + -M_{211} + 0 + \frac{2}{3} \cdot M_{111} + 0 + 0 + 0 + 0 \right)$$

Donde los valores  $M_{311}$ ,  $M_{211}$  y  $M_{111}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.5.2. Segunda combinación

Las variables de esta segunda combinación son (8.145).

$$c[2] = (1 \quad 2 \quad 4) \quad d[2] = (0 \quad 2 \quad 3) \quad r[2] = \frac{1}{3} \quad (8.145)$$

La ecuación resultante es (8.146).

$$(1-r) \cdot H11 - 1 \cdot H7 + r \cdot H5 = (1-r) \cdot M_{411} - 1 \cdot M_{211} + r \cdot M_{111} \quad (8.146)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{2}{3}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.147).

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot H11 - H7 + \frac{1}{3} \cdot H5 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot M_{411} - M_{211} + \frac{1}{3} \cdot M_{111} \quad (8.147)$$

Que visto en forma de matrices (8.148).

$$A_i = \left( \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.148)$$

$$B_i = \left( \frac{2}{3} \cdot M_{411} \quad 0 + 0 + 0 + -M_{211} + 0 + \frac{1}{3} \cdot M_{111} + 0 + 0 + 0 + 0 \right)$$

Donde los valores  $M_{411}$ ,  $M_{211}$  y  $M_{111}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

### 8.4.5.3. Tercera combinación

Las variables de esta tercera combinación son (8.149).

$$c[3] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[3] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[3] = \frac{1}{2} \quad (8.149)$$

La ecuación resultante es (8.150).

$$(1 - r) \cdot H11 - 1 \cdot H8 + r \cdot H5 = (1 - r) \cdot M_{411} - 1 \cdot M_{311} + r \cdot M_{111} \quad (8.150)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{2}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.151).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H11 - H8 + \frac{1}{2} \cdot H5 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot M_{411} - M_{311} + \frac{1}{2} \cdot M_{111} \quad (8.151)$$

Que visto en forma de matrices (8.152).

$$A_i = \left( \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.152)$$

$$B_i = \left( \frac{1}{2} \cdot M_{411} \quad 0 + 0 + -M_{311} + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot M_{111} + 0 + 0 + 0 + 0 \right)$$

Donde los valores  $M_{411}$ ,  $M_{211}$  y  $M_{111}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.5.4. Cuarta combinación

Las variables de esta cuarta combinación son (8.153).

$$c[4] = (1 \quad 3 \quad 4) \quad d[4] = (0 \quad 3 \quad 6) \quad r[4] = \frac{1}{4} \quad (8.153)$$

La ecuación resultante es (8.154).

$$(1 - r) \cdot H11 - 1 \cdot H8 + r \cdot H7 = (1 - r) \cdot M_{411} - 1 \cdot M_{311} + r \cdot M_{211} \quad (8.154)$$

Donde  $r$  es el ratio entre el primer sensor y la última, es decir  $\frac{1}{4}$ , por lo cual, la ecuación quedaría de la siguiente forma (8.155).

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot H11 - H8 + \frac{1}{4} \cdot H7 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot M_{411} - M_{311} + \frac{1}{4} \cdot M_{211} \quad (8.155)$$

Que visto en forma de matrices (8.156).

$$A_i = \left( \frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.156)$$

$$B_i = \left( \frac{3}{4} \cdot M_{411} + 0 + 0 + -M_{311} + \frac{1}{4} \cdot M_{211} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \right)$$

Donde los valores  $M_{411}$ ,  $M_{311}$  y  $M_{211}$  son valores conocidos, ya que son los valores de planitud en este caso *horizontal*, medidos por los sensores. Los valores que no son medidos en esta combinación y periodo valen por tanto 0.

#### 8.4.6. Matrices A, x y B

Todo el conjunto de ecuaciones vistos en los puntos anteriores, se recogen en las siguientes matrices A (8.157), x (8.158) y B (8.159).

8.4 Resolución del problema para el Ejemplo de arquitectura no equiespaciada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.157)$$

$$x = \begin{pmatrix} H11 \\ H10 \\ H9 \\ H8 \\ H7 \\ H6 \\ H5 \\ H4 \\ H3 \\ H2 \\ H1 \end{pmatrix} \quad (8.158)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot M_{37} - M_{27} + \frac{2}{3} \cdot M_{17} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{47} - M_{27} + \frac{1}{3} \cdot M_{17} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{17} \\ \frac{3}{4} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{4} \cdot M_{27} \\ \frac{1}{3} \cdot M_{38} - M_{28} - \frac{2}{3} \cdot M_{18} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{47} - M_{27} - \frac{1}{3} \cdot M_{17} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{17} \\ \frac{3}{4} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{4} \cdot M_{27} \\ \frac{1}{3} \cdot M_{38} - M_{28} + \frac{2}{3} \cdot M_{18} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{47} - M_{27} + \frac{1}{3} \cdot M_{17} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{17} \\ \frac{3}{4} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{4} \cdot M_{27} \\ \frac{1}{3} \cdot M_{38} - M_{28} + \frac{2}{3} \cdot M_{18} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{47} - M_{27} + \frac{1}{3} \cdot M_{17} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{17} \\ \frac{3}{4} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{4} \cdot M_{27} \\ \frac{1}{3} \cdot M_{38} - M_{28} + \frac{2}{3} \cdot M_{18} \\ \frac{2}{3} \cdot M_{47} - M_{27} + \frac{1}{3} \cdot M_{17} \\ \frac{1}{2} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{2} \cdot M_{17} \\ \frac{3}{4} \cdot M_{47} - M_{37} + \frac{1}{4} \cdot M_{27} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.159}$$



# Bibliografía

- [1] DF Cannon y col. “Rail defects: an overview”. En: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 26.10 (2003), págs. 865-886.
- [2] J. Molleda y col. “A Profile Measurement System for Rail Quality Assessment During Manufacturing”. En: *IEEE Transactions on Industry Applications* 52.3 (2016), págs. 2684-2692. DOI: 10.1109/TIA.2016.2524459.
- [3] K. Tzanakakis. *The Railway Track and Its Long Term Behaviour: A Handbook for a Railway Track of High Quality*. Springer Tracts on Transportation and Traffic. Springer, 2013.
- [4] K. Iwano y T. Yamamoto. “Recent improvements in rail quality”. En: (jul. de 2011), págs. 14-16.
- [5] Oscar Orringer. “Rail Testing: Strategies for Safe and Economical Rail Quality Assurance”. En: *Transportation research record* 1174 (1988), págs. 28-42.
- [6] Ilinykh, Andrey y col. “Quality assurance and control system for railway track tamping”. En: *MATEC Web Conf.* 216 (2018), pág. 03004. DOI: 10.1051/mateconf/201821603004.
- [7] Jollyroger. CC BY-SA 3.0. *Fotografía del ElettroTreno ETR 200 en el depósito de Pistoia, Italia*. URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9800843>.
- [8] Omio. *Ranking Internacional de Trenes de Alta Velocidad*. 2019. URL: <https://www.omio.es/trenes/alta-velocidad>.
- [9] European Committee for Standardization. *EN-13674 — Railway applications - Track - Rail*. 2011.
- [10] Asociación Española de Normalización y Certificación - AENOR. *UNE-EN-13674 — Aplicaciones ferroviarias. Vía. Carriles*. 2012.
- [11] Deutsches Institut für Normung - DIN. *DIN-EN-13674 — Bahnanwendungen - Oberbau - Schienen*. 2017.
- [12] Gosstandart of Russia. *GOST R 51685-2000 — Railway rails - General Specifications*. 2001.
- [13] AREMA. *AREMA Manual for Railway Engineering — Chapter 4: Rails*. 2011.
- [14] International Union of Railways. *UIC Code 860 — Technical specification for the supply of rails*. 2008.

- [15] Asociación Española de Normalización y Certificación - AENOR. *UNE-EN-13674-1 — Aplicaciones ferroviarias. Vía. Carriles. Parte 1: Carriles Vignole de masa mayor o igual a 46 kg/m*. Feb. de 2018.
- [16] Asociación Española de Normalización y Certificación - AENOR. *UNE-EN-13674-2 — Aplicaciones ferroviarias. Vía. Carriles. Parte 2: Carriles para desvíos y cruzamientos utilizados con carriles Vignole de masa mayor o igual a 46 kg/m*. Sep. de 2020.
- [17] Asociación Española de Normalización y Certificación - AENOR. *UNE-EN-13674-3 — Aplicaciones ferroviarias. Vía. Carriles. Parte 3: Contracarriles*. Abr de 2011.
- [18] Asociación Española de Normalización y Certificación - AENOR. *UNE-EN-13674-4 — Aplicaciones ferroviarias. Vía. Carriles. Parte 4: Carriles Vignole de masa comprendida entre 27 kg/m y 46 kg/m, excluyendo 46 kg/m*. Dic de 2019.
- [19] Oliver Sidla y col. "Vision system for gauging and automatic straightening of steel bars". En: 4189 (2001). Ed. por Kevin G. Harding, John W. V. Miller y Bruce G. Batchelor, págs. 248-257. DOI: 10.1117/12.417200.
- [20] Franco Francini y col. "Identification of timber deformations". En: *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 4.6 (nov. de 2002), S406-S412. DOI: 10.1088/1464-4258/4/6/388.
- [21] Liju Yin y Zhenzhou Wang. "Measurement of the flatness or the shapes of mirrors by one-shot projection of structured light dot pattern". En: *Results in Physics* 15 (2019), pág. 102594. ISSN: 2211-3797. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102594>.
- [22] Jie Li y col. "Flatness measurement of large flat with two-station laser trackers". En: *International Journal of Optomechatronics* 12.1 (2018), págs. 53-62. DOI: 10.1080/15599612.2018.1529846.
- [23] T. Hackel y col. "Track detection in 3D laser scanning data of railway infrastructure". En: *2015 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC) Proceedings*. 2015, págs. 693-698. DOI: 10.1109/I2MTC.2015.7151352.
- [24] Q. Luo y col. "Automated Visual Defect Detection for Flat Steel Surface: A Survey". En: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 69.3 (2020), págs. 626-644. DOI: 10.1109/TIM.2019.2963555.
- [25] R. Noll y M. Krauhausen. "Online laser measurement technology for rolled products". En: *Ironmaking & Steelmaking* 35.3 (2008), págs. 221-227. DOI: 10.1179/174328108X284543.

- [26] Julio Molleda y col. "An improved 3D imaging system for dimensional quality inspection of rolled products in the metal industry". En: *Computers in Industry* 64.9 (2013). Special Issue: 3D Imaging in Industry, págs. 1186-1200. ISSN: 0166-3615. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compind.2013.05.002>.
- [27] J. Molleda y col. "Real-time flatness inspection of rolled products based on optical laser triangulation and three-dimensional surface reconstruction". En: *Journal of Electronic Imaging* 19.3 (2010). article id. 031206, págs. 1-14.
- [28] Julio Molleda, Rubén Usamentiaga y Daniel F. García. "On-Line Flatness Measurement in the Steelmaking Industry". En: *Sensors* 13.8 (2013), págs. 10245-10272. ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s130810245.
- [29] Qi Ouyang y col. "Approach for designing and developing high-precision integrative systems for strip flatness detection". En: *Appl. Opt.* 54.28 (oct. de 2015), págs. 8429-8438. DOI: 10.1364/AO.54.008429.
- [30] L. Zhao y col. "Study on CCD laser scanning flatness measurement method for hot rolled strip". En: *Ironmaking & Steelmaking* 42.8 (2015), págs. 600-607. DOI: 10.1179/1743281215Y.0000000009.
- [31] Sami Abdelkhalek. "A proposal improvement in flatness measurement in strip rolling". En: vol. 12. 2019, pages89-96. DOI: 10.1007/s12289-018-1409-4.
- [32] R. Usamentiaga y col. "Vibrations in Steel Strips: Effects on Flatness Measurement and Filtering". En: *IEEE Transactions on Industry Applications* 50.5 (2014), págs. 3103-3112. DOI: 10.1109/TIA.2014.2308359.
- [33] Ruben Usamentiaga y col. "Flatness measurement using two laser stripes to remove the effects of vibrations". En: *Industry Applications, IEEE Transactions on* 51.5 (2015), págs. 4297-4304.
- [34] Xinglan Zhang y col. "A double laser filtering approach to vibration noise rejection for hot-rolled strip flatness measurement". En: *Ironmaking & Steelmaking* 46.1 (2019), págs. 66-70.
- [35] Y. Santur, M. Karaköse y E. Akin. "A new rail inspection method based on deep learning using laser cameras". En: *2017 International Artificial Intelligence and Data Processing Symposium (IDAP)*. 2017, págs. 1-6. DOI: 10.1109/IDAP.2017.8090245.
- [36] Zhimin Xiong y col. "A 3D Laser Profiling System for Rail Surface Defect Detection". En: *Sensors* 17.8 (2017). ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s17081791.
- [37] Ç. Aytekin y col. "Railway Fastener Inspection by Real-Time Machine Vision". En: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* 45.7 (2015), págs. 1101-1107. DOI: 10.1109/TSMC.2014.2388435.
- [38] Yunus Santur, Mehmet Karaköse y Erhan Akın. "Learning Based Experimental Approach For Condition Monitoring Using Laser Cameras In Railway Tracks". En: Selcuk University, 2016, págs. 1-5. DOI: 10.18100/ijamec.270656.

- [39] Limin Chen, Yin Liang y Kaimin Wang. "Inspection of rail surface defect based on machine vision system". En: *The 2nd International Conference on Information Science and Engineering*. 2010, págs. 3793-3796. DOI: 10.1109/ICISE.2010.5691348.
- [40] Ze Liu y col. "Inspection of rail surface defects based on image processing". En: *2010 2nd International Asia Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (CAR 2010)*. Vol. 1. 2010, págs. 472-475. DOI: 10.1109/CAR.2010.5456793.
- [41] C. Alippi y col. "Composite real-time image processing for railways track profile measurement". En: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 49.3 (2000), págs. 559-564.
- [42] Z. Liu y col. "Simple and fast rail wear measurement method based on structured light". En: *Optics and Lasers in Engineering* 49.11 (2011), págs. 1343-1351.
- [43] Y. Santur, M. Karaköse y E. Akin. "Random forest based diagnosis approach for rail fault inspection in railways". En: *2016 National Conference on Electrical, Electronics and Biomedical Engineering (ELECO)*. 2016, págs. 745-750.
- [44] S. Magnus y D. Magnus. *Rail measurement system*. US Patent App. 12/229,244. Mar. de 2009.
- [45] Q. Li y S. Ren. "A Real-Time Visual Inspection System for Discrete Surface Defects of Rail Heads". En: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 61.8 (2012), págs. 2189-2199. DOI: 10.1109/TIM.2012.2184959.
- [46] H-M Thomas, T Heckel y G Hanspach. "Advantage of a combined ultrasonic and eddy current examination for railway inspection trains". En: *Insight - Non-Destructive Testing and Condition Monitoring* 49.6 (2007), págs. 341-344. ISSN: 1354-2575. DOI: doi:10.1784/insi.2007.49.6.341.
- [47] F. Attivissimo y col. "A railway measurement system to evaluate the wheel-rail interaction quality". En: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 56.5 (2007), págs. 1583-1589.
- [48] E. Deutschl y col. "Defect detection on rail surfaces by a vision based system". En: *IEEE Intelligent Vehicles Symposium, 2004*. 2004, págs. 507-511. DOI: 10.1109/IVS.2004.1336435.
- [49] F. Marino y col. "A Real-Time Visual Inspection System for Railway Maintenance: Automatic Hexagonal-Headed Bolts Detection". En: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)* 37.3 (2007), págs. 418-428. DOI: 10.1109/TSMCC.2007.893278.
- [50] Y. Li y col. "Rail Component Detection, Optimization, and Assessment for Automatic Rail Track Inspection". En: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 15.2 (2014), págs. 760-770. DOI: 10.1109/TITS.2013.2287155.

- [51] Erhan Akin Orhan Yaman Mehmet Karakose. “PSO Based Diagnosis Approach for Surface and Components Faults in Railways”. En: *International Journal of Computer Science and Software Engineering (IJCSSE)* 5.5 (2016), págs. 89, 96.
- [52] Á. F. Millara y col. “Profile Measurement of Rails in a Rolling Mill: Implementing and Evaluating Autonomic Computing Capabilities”. En: *IEEE Transactions on Industry Applications* 55.5 (2019), págs. 5466-5475. DOI: 10.1109/TIA.2019.2919487.
- [53] P. Zhou, K. Xu y D. Wang. “Rail Profile Measurement Based on Line-structured Light Vision”. En: *IEEE Access* 6 (2018), págs. 16423-16431. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2813319.
- [54] Y. P. Nugraha y col. “Design of instrumentation for flatness measurement of railroads”. En: *2015 International Conference on Automation, Cognitive Science, Optics, Micro Electro-Mechanical System, and Information Technology (ICACOMIT)*. 2015, págs. 160-163. DOI: 10.1109/ICACOMIT.2015.7440197.
- [55] C. Weiming y col. “Straightness Measurement for Long-length Rails of Bridge Crane”. En: 3 (2011), págs. 354-357. DOI: 10.1109/ICMTMA.2011.659.
- [56] T. De Cicco A. Bracciali F. Piccioli. “Measurement and analysis of mid wavelength rail irregularity”. En: *Proceedings of Railway Engineering. Conference. London*. (jun. de 2009).
- [57] F. Piccioli A. Bracciali y L. Di Benedetto. “Rail Straightness Control in Service”. En: *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing* 69.18 (2011).
- [58] Zhendong Zhou, Haima Yang y Jin Liu. “Research on the measurement of the rail straightness based on the outer boundary support point model”. En: *Optik* 223 (2020), pág. 165591. ISSN: 0030-4026. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2020.165591>.
- [59] Zhao Liu y col. “Online Rail Straightness Measurement Based on Parallel Computing”. En: (2015/08), págs. 1112-1115. ISSN: 2352-5401. DOI: <https://doi.org/10.2991/ic3me-15.2015.215>.
- [60] Hexagon. *FMG: Inline Flatness Measurement and Calibration for Steel Rail Production*. URL: <https://www.hexagonmi.com/products/profile-and-surface-measurement/fmg>.
- [61] LMATS: Laboratories for Materials Advanced Testing Services. *Rail Straightness and corrugation measuring*. URL: <https://lmats.com.au/services/product-quality-inspections/rail-straightness-testing>.
- [62] Alkiviadis G Akritas y Gennadi I Malaschonok. “Applications of singular-value decomposition (SVD)”. En: *Mathematics and computers in simulation* 67.1-2 (2004), págs. 15-31.

