

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

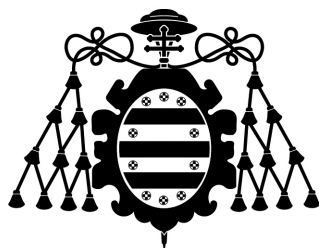
TRABAJO DE FIN DE GRADO DE MATEMÁTICAS

**Análisis de aproximaciones
interiores de modelos de
probabilidades imprecisas**

Autor:
Andrés PRESA VILLA

Tutores:
Enrique MIRANDA
MENÉNDEZ
Ignacio MONTES
GUTIÉRREZ

8 de junio de 2022



Universidad de Oviedo

Índice general

Resumen	3
1. Introducción	4
1.1. De probabilidades clásicas a probabilidades imprecisas	4
1.2. Conceptos básicos de Probabilidades Imprecisas	6
1.2.1. Previsiones inferiores y probabilidades inferiores	7
1.2.2. Casos particulares de probabilidades inferiores	10
2. Aproximaciones de probabilidades inferiores	16
2.1. Aproximaciones exteriores	16
2.2. Aproximaciones interiores	21
3. Casos particulares de aproximaciones interiores	27
3.1. Aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{LV}	27
3.2. Aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{PMM}	32
4. Aplicación de aproximaciones a problemas de decisión	39
4.1. Teoría de la decisión en un contexto impreciso	40
4.2. Comparación de criterios de decisión	41
4.2.1. El modelo transformado es una aproximación interior	41
4.2.2. El modelo transformado es una aproximación exterior	44
4.3. Teoría de la decisión bajo imprecisión generalizada	47
4.4. Un ejemplo ilustrativo	51
4.4.1. Planteamiento del problema	51
4.4.2. Resultados	54
5. Conclusiones	65
A. Códigos	68
A.1. Comprobación de la 2-monotonía y cálculo de los puntos extremos del conjunto credal	68
A.2. Búsqueda de aproximaciones interiores en \mathcal{C}_2	69
A.3. Búsqueda de aproximaciones exteriores en \mathcal{C}_2	73
A.4. Búsqueda de aproximaciones interiores en \mathcal{C}_∞	77

A.5. Búsqueda de aproximaciones exteriores en \mathcal{C}_∞	80
A.6. Comparación de criterios de decisión	83
A.7. Cálculo de las decisiones óptimas del ejemplo ilustrativo . . .	85

Bibliografía	90
---------------------	-----------

Resumen

Las probabilidades inferiores coherentes son una de las herramientas más generales dentro del contexto de las Probabilidades Imprecisas [14], y nos permiten representar escenarios bajo incertidumbre en los que la información es escasa o defectuosa. Pese a su flexibilidad para modelizar este tipo de situaciones, su generalidad puede ocasionar dificultades al emplearlas en la práctica. Por ese motivo, en [8, 10, 11] se estudió el problema de aproximar probabilidades inferiores coherentes por otras con mejores propiedades matemáticas sin incluir nueva información en el modelo. Siguiendo con este enfoque, en el presente trabajo nos movemos en la dirección opuesta. Consideramos el problema de transformar una probabilidad inferior coherente en otra que, además de ser más manejable, sea al menos tan informativa como la original. Denotaremos por aproximaciones interiores a este tipo de transformaciones.

El trabajo se divide en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 presentamos los aspectos más generales de la Teoría de las Probabilidades Imprecisas. En el Capítulo 2 estudiamos las aproximaciones interiores de probabilidades inferiores coherentes mediante probabilidades inferiores 2-monótonas y funciones de creencia, y comparamos nuestros resultados con los de [8, 10, 11]. El Capítulo 3 incluye algunos casos particulares de estas aproximaciones: los llamados modelos de distorsión. Finalmente, en el Capítulo 4 nos planteamos emplear estas aproximaciones en problemas de decisión. Tras presentar los conceptos básicos de la Teoría de la Decisión en un contexto impreciso, estudiamos las relaciones entre las soluciones óptimas con respecto al modelo original y el transformado. Después, aplicamos estos conceptos a un problema modélico presentado en [5].

A lo largo del trabajo se encuentran diferentes ejemplos de aproximaciones y problemas de decisión. La mayoría de estos ejemplos se han construido a partir de programas de Python que hemos elaborado con tan fin. Incluimos estos códigos comentados en los Apéndices.

Capítulo 1

Introducción

1.1. De probabilidades clásicas a probabilidades imprecisas

Existen varios modelos matemáticos adaptados al estudio de situaciones que presentan cierto grado de incertidumbre. La Teoría de la Probabilidad Clásica constituye uno de los modelos más utilizados en este tipo de contextos. El concepto básico de este formalismo matemático es el de **espacio de probabilidad**. Un espacio de probabilidad consiste en una terna $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$, donde cada uno de sus componentes se define como sigue:

- 1 **Espacio muestral** (\mathcal{X}): también conocido como conjunto de estados de la naturaleza, es el conjunto de los resultados posibles en el experimento aleatorio. En este trabajo nos referimos en todo momento a espacios muestrales finitos.
- 2 **σ -álgebra de sucesos** (\mathcal{A}): es la colección de todos los sucesos de interés relativos al experimento aleatorio, de modo que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Un suceso es un subconjunto del espacio muestral \mathcal{X} . La estructura de σ -álgebra implica que \mathcal{A} debe cumplir las siguientes propiedades:
 - $\emptyset \in \mathcal{A}$.
 - Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
 - Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
- 3 **Medida de probabilidad** (P): es una función $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ que representa la verosimilitud de cada suceso. Esta función debe verificar los Axiomas de Kolmogorov:
 - $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ (no-negatividad).
 - $P(\mathcal{X}) = 1$ (normalización).

- $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset \forall n \neq m \implies P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ (aditividad).

Históricamente, el concepto de probabilidad ha tenido diferentes interpretaciones. Algunas de estas interpretaciones son [4]:

- Interpretación clásica (Laplace, 1814). Está basada en el Principio de Indiferencia, por el que se asume que todos los resultados son igualmente verosímiles. Entonces, para un espacio muestral \mathcal{X} finito, la probabilidad del suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favorables a la ocurrencia de } A}{\text{n}^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{|A|}{|\mathcal{X}|}.$$

- Interpretación frecuentista (Von Mises, 1921). La probabilidad de un evento es la frecuencia relativa de su ocurrencia a medida que el número de repeticiones tiende a infinito:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N},$$

donde N_A denota el número de apariciones del suceso A en N repeticiones del experimento.

- Interpretación subjetiva (Bayes, 1763). La probabilidad de un suceso representa el grado de creencia del sujeto de que ese suceso vaya a suceder.

Dentro de las probabilidades subjetivas, otra posible interpretación es la comportamental (de Finetti): la probabilidad de un suceso se interpreta como el precio justo de compra/venta de una apuesta cuyo beneficio es una unidad, si el suceso ocurre, y cero unidades en otro caso.

La Teoría Clásica de la Probabilidad ha demostrado ser una herramienta muy útil en situaciones de aleatoriedad o incertidumbre. Sin embargo, una de sus desventajas es que no puede representar adecuadamente la ignorancia o falta de información sobre un suceso. Veamos este hecho con un ejemplo.

Ejemplo 1.1. [12, Ej.1.6] ¿Hay vida alrededor de la estrella Sirio? Exceptuando algunos expertos en la materia, la mayoría de nosotros profesamos una completa ignorancia sobre ello. Si x_1 representa el suceso correspondiente a que haya vida y x_2 representa el suceso en el que no la hay, nuestro espacio muestral es $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$. El problema reside en que, como consecuencia de los axiomas de Kolmogorov, se debe cumplir:

$$P(A) + P(A^c) = 1.$$

Entonces, no podemos asignar un valor muy pequeño a $P(\{x_1\})$ sin que $P(\{x_2\})$ tome un valor muy grande. La única forma de representar la ignorancia sobre ambos hechos sería considerar $P(\{x_1\}) = P(\{x_2\}) = 1/2$.

Veamos ahora qué sucede si planteamos el problema en otros términos. Consideremos el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, donde ω_1 representa el suceso de que haya vida alrededor de Sirio, ω_2 corresponde al suceso de que haya planetas pero no vida y ω_3 representa el suceso de que no haya ni siquiera planetas. De nuevo, si queremos representar nuestra ignorancia respetando los Axiomas de Kolmogorov, la única opción sería tomar

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = 1/3.$$

Sin embargo, esto implica que $P(\{\omega_2, \omega_3\})=2/3$. Puesto que $\{\omega_2, \omega_3\}$ tiene el mismo significado que $\{x_2\}$ y $\{x_1\}$ tiene el mismo significado que $\{\omega_1\}$, este planteamiento resulta inconsistente. \diamond

Este ejemplo ilustra cómo la Teoría Clásica de la Probabilidad asume un grado de conocimiento que no es realista en muchas situaciones. Supongamos que disponemos de una función $\underline{P}: \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0, 1]$ que sólo necesita satisfacer unas condiciones menos estrictas que una medida de probabilidad:

1. $\underline{P}(\emptyset) = 0$ y $\underline{P}(\mathcal{X}) = 1$ (normalización).
2. $A \subseteq B$ implica $\underline{P}(A) \leq \underline{P}(B) \forall A, B \in \mathcal{A}$ (monotonía).

Entonces, podríamos modelar el ejemplo anterior mediante la función

$$\underline{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \neq \Theta \\ 1 & \text{si } A = \Theta \end{cases} \quad \text{con } \Theta = \mathcal{X}, \Omega.$$

De esta forma, tendríamos una formulación coherente con nuestra información sobre el tema. Si se considera que existe una probabilidad precisa P_0 desconocida que modela esta situación, se puede interpretar \underline{P} como la envolvente inferior del conjunto de probabilidades compatibles con P_0 de acuerdo con nuestra información. Esta interpretación se denomina epistémica. En la próxima sección, veremos que \underline{P} es una **probabilidad inferior**, un concepto que entra dentro de las llamadas probabilidades imprecisas. La Teoría de las Probabilidades Imprecisas abarca todos los modelos que generalizan la Teoría de la Probabilidad Clásica, y se adecúan a situaciones donde la información es escasa o contradictoria, como en el Ejemplo 1.1. Los conceptos más relevantes de esta teoría necesarios para desarrollar este trabajo se desarrollan en la siguiente sección.

1.2. Conceptos básicos de la Teoría de las Probabilidades Imprecisas

Comenzamos introduciendo el modelo más general, el de las previsiones inferiores, para continuar introduciendo modelos más específicos, como las probabilidades inferiores y algunos casos particulares de estas.

1.2.1. Previsiones inferiores y probabilidades inferiores

Salvo que se indique lo contrario, denotamos por \mathcal{X} al conjunto de estados de la naturaleza. En primer lugar, denotamos por apuesta a una función $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, y denotemos por $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ al conjunto de todas las apuestas definidas sobre \mathcal{X} .

Definición 1.1. Una *previsión inferior* definida sobre un conjunto de apuestas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X})$ es una función $\underline{P}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$.

Según la interpretación epistémica, para cada $f \in \mathcal{K}$, $\underline{P}(f)$ representa una cota inferior de la esperanza matemática de f con respecto a una probabilidad P_0 que es parcialmente desconocida. Utilizamos la siguiente notación para referirnos a la esperanza matemática:

$$P_0(f) := E_{P_0}(f) = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)P_0(\{x\}).$$

También es posible definir una **previsión superior** conjugada $\overline{P}(f)$, que representa una cota superior de la esperanza matemática de f con respecto a P_0 . La previsión superior está dada por:

$$\overline{P}(f) = -\underline{P}(-f). \quad (1.1)$$

De acuerdo con esta interpretación, es posible definir un conjunto cerrado y convexo que incluye aquellas probabilidades compatibles con \underline{P} . Este conjunto se denomina **conjunto credal**:

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{P | P(f) \geq \underline{P}(f) \forall f \in \mathcal{K}\} = \{P | P(f) \leq \overline{P}(f) \forall f \in \mathcal{K}\}. \quad (1.2)$$

Adicionalmente, se suelen imponer algunas condiciones de racionalidad para que las previsiones inferiores sean consistentes. Las más habituales son **evitar pérdida segura** y **coherencia**.

Definición 1.2. Sea $\underline{P}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ una *previsión inferior*. Se dice que \underline{P} *evita pérdida segura* cuando $\mathcal{M}(\underline{P}) \neq \emptyset$.

Esta condición implica que existe al menos una probabilidad compatible con la información dada por \underline{P} . Según la interpretación epistémica, si \underline{P} representa una cota inferior de la esperanza asociada a una probabilidad desconocida P_0 , resulta razonable asumir que al menos $P_0 \in \mathcal{M}(\underline{P})$. La condición de coherencia es más fuerte:

Definición 1.3. Sea $\underline{P}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ una *previsión inferior*. \underline{P} es *coherente* si $\forall f \in \mathcal{K} \exists P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que $P(f) = \underline{P}(f)$.

La condición de coherencia indica que siempre hay una probabilidad en el conjunto credal cuya esperanza alcanza la cota inferior marcada por \underline{P} . Esta condición también se puede expresar como:

$$\underline{P}(f) = \min \{P(f) | P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}, \quad \overline{P}(f) = \max \{P(f) | P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}. \quad (1.3)$$

Notamos que, a la vista de sus definiciones, una previsión inferior contiene la misma información probabilística que su previsión superior conjugada. Por lo tanto, resulta suficiente trabajar con una de ellas (o con su conjunto credal asociado).

Además, el carácter cerrado y convexo de $\mathcal{M}(\underline{P})$ implica que el conjunto credal está caracterizado por sus **puntos extremos**. Un punto extremo de $\mathcal{M}(\underline{P})$ es una probabilidad $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que, si $P = \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ con $P_1, P_2 \in \mathcal{M}(\underline{P})$ y $\lambda \in (0, 1)$, entonces $P_1 = P_2 = P$. En consecuencia, se tiene que \underline{P} es coherente si y sólo si:

$$\underline{P}(f) = \min \{P(f) : P \text{ punto extremo de } \mathcal{M}(\underline{P})\} \quad \forall f \in \mathcal{K}. \quad (1.4)$$

En este trabajo manejamos un caso concreto de previsiones inferiores. Se trata de aquellas previsiones cuyo dominio está constituido por funciones indicador I_A de los subconjuntos $A \subseteq \mathcal{X}$. Para simplificar la notación, denotamos directamente por $\underline{P}(A)$ a $\underline{P}(I_A)$. También denotamos por $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ al dominio $\{I_A : A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})\}$. Entonces, \underline{P} es una función $\underline{P}: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0, 1]$ que se denomina **probabilidad inferior**. Empleando la relación (1.1), se deduce que la probabilidad superior conjugada de \underline{P} es:

$$\overline{P}(A) := \overline{P}(I_A) = -\underline{P}(-I_A) = -\underline{P}(I_{A^c} - 1) = 1 - \underline{P}(A^c), \quad (1.5)$$

donde hemos usado la relación $I_A = 1 - I_{A^c}$. Por otra parte, su conjunto credal asociado está dado por:

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{P | P(A) \geq \underline{P}(A) \forall A \in \mathcal{X}\} = \{P | P(A) \leq \overline{P}(A) \forall A \in \mathcal{X}\}. \quad (1.6)$$

Siguiendo la definición 1.2, diremos que una probabilidad inferior evita pérdida segura si su conjunto credal asociado es no vacío. Del mismo modo, siguiendo la definición 1.3 y la ecuación (1.3), diremos que una probabilidad inferior es coherente si es la envolvente inferior de su conjunto credal.

Por otro lado, las probabilidades inferiores son menos generales que las previsiones inferiores (o su representación equivalente en términos de conjuntos credales). De este modo, pueden existir conjuntos credales distintos cuya restricción a eventos sea la misma. Veamos este hecho con un ejemplo.

Ejemplo 1.2. Sea $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Sea \underline{P}_1 la previsión inferior coherente definida como la envolvente inferior de las probabilidades:

	$P(\{x_1\})$	$P(\{x_2\})$	$P(\{x_3\})$
P_1	0.2	0.2	0.6
P_2	0.2	0.5	0.3
P_3	0.6	0.2	0.2
P_4	0.3	0.5	0.2

Haciendo uso de la ecuación (1.3), deducimos que los valores de \underline{P}_1 son:

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\underline{P}_1(A)$	0.2	0.2	0.2	0.4	0.5	0.4

Consideremos también la previsión inferior coherente \underline{P}_2 , que corresponde a la envolvente inferior de las probabilidades:

	$P(\{x_1\})$	$P(\{x_2\})$	$P(\{x_3\})$
P_1	0.2	0.2	0.6
P_2	0.2	0.5	0.3
P_3	0.6	0.2	0.2
P'_4	0.4	0.4	0.2

Empleando la ecuación (1.3), encontramos que $\underline{P}_2(A) = \underline{P}_1(A) \forall A \subseteq \mathcal{X}$. Sin embargo, los conjuntos credales $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$ y $\mathcal{M}(\underline{P}_2)$ son distintos, ya que sus puntos extremos son diferentes. Por ejemplo, $(0.3, 0.5, 0.2)$ pertenece a $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$, pero no a $\mathcal{M}(\underline{P}_2)$. Esto puede visualizarse en la Figura 1.1.

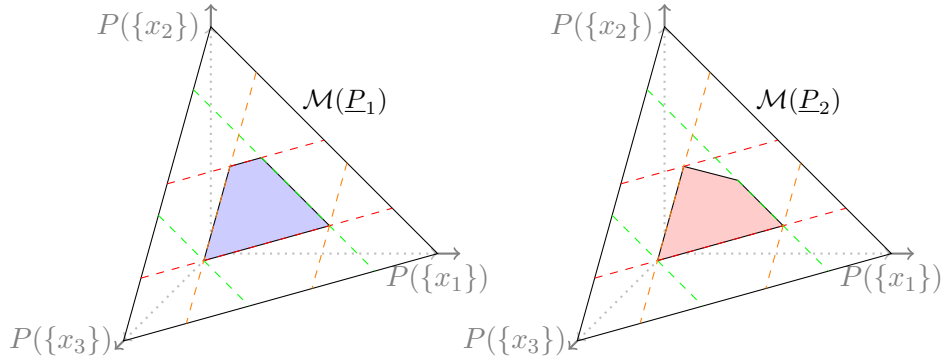


Figura 1.1: Representación gráfica de $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$ (a la izquierda, en azul) y $\mathcal{M}(\underline{P}_2)$ (a la derecha, en rojo).

Hemos encontrado dos previsiones inferiores distintas que inducen la misma probabilidad inferior al tomar las restricciones a eventos. \diamond

De entre las múltiples extensiones en $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$ que puede tener una probabilidad inferior coherente \underline{P} , una de las más comunes es la **extensión natural**, definida como [14]:

$$\underline{E}_{\underline{P}}(f) := \underline{P}(f) = \min \{E_P(f) : P \in \mathcal{M}(\underline{P})\} \quad \forall f \in \mathcal{K}'. \quad (1.7)$$

La extensión natural es la extensión más conservadora de \underline{P} en \mathcal{K}' : si \underline{P}' es otra extensión de \underline{P} en \mathcal{K}' , $\underline{P}'(f) \geq \underline{P}(f)$ para todo $f \in \mathcal{K}'$. Haremos uso de la extensión natural en el Capítulo 4, cuando abordemos problemas de decisión en un contexto impreciso.

1.2.2. Casos particulares de probabilidades inferiores

En esta sección introduciremos algunos casos particulares de probabilidades inferiores coherentes. El interés de estas representaciones radica en su simplicidad: estos modelos presentan propiedades que facilitan su manejo y computación en comparación con modelos más generales, como las previsiones inferiores coherentes.

Comenzamos definiendo las **probabilidades inferiores 2-monótonas**:

Definición 1.4. [3] Una probabilidad inferior coherente se denomina 2-monótona si para todo $A, B \in \mathcal{X}$, se satisface:

$$\underline{P}(A \cup B) + \underline{P}(A \cap B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B).$$

Denotamos por \mathcal{C}_2 a la clase de las probabilidades inferiores 2-monótonas en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Este tipo de probabilidades inferiores se puede representar también en términos de su **inversa de Möbius**:

Definición 1.5. [3] Sea \underline{P} una probabilidad inferior 2-monótona. Su inversa de Möbius $m_{\underline{P}} : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por:

$$m_{\underline{P}}(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \underline{P}(B) \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}.$$

Se cumple:

$$\underline{P}(A) = \sum_{B \subseteq A} m_{\underline{P}}(B) \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}. \quad (1.8)$$

Si no hay ambigüedad, nos referiremos a la inversa de Möbius directamente por m . Las probabilidades inferiores 2-monótonas poseen algunas propiedades que las hacen muy manejables [10]:

1. Como los conjuntos credales son cerrados y convexos, estos están determinados por sus puntos extremos. Aunque en general su cálculo puede ser costoso, si \underline{P} es 2-monótona y $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$, los puntos extremos de $\mathcal{M}(\underline{P})$ se pueden hallar de forma sencilla. Sea S_n el conjunto de permutaciones de \mathcal{X} . Dada una permutación $\sigma \in S_n$, definimos la probabilidad P_σ como sigue:

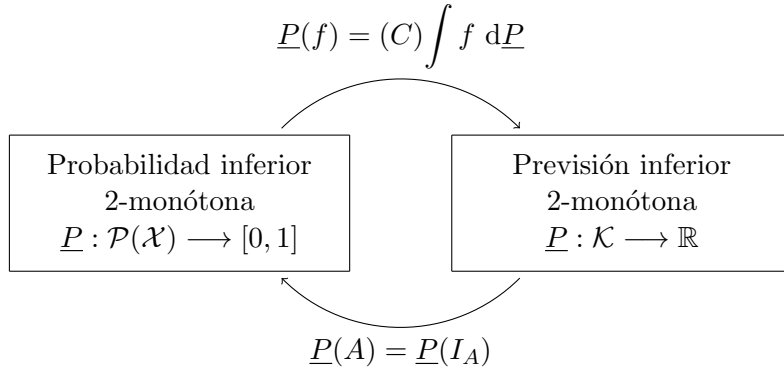
$$\begin{aligned} P_\sigma(\{x_{\sigma(1)}\}) &= \underline{P}(\{x_{\sigma(1)}\}). \\ P_\sigma(\{x_{\sigma(2)}\}) &= \underline{P}(\{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\}) - \underline{P}(\{x_{\sigma(1)}\}). \\ &\dots \\ P_\sigma(\{x_{\sigma(k)}\}) &= \underline{P}(\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}\}) - \underline{P}(\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k-1)}\}). \\ &\dots \\ P_\sigma(x_{\sigma(n)}) &= 1 - \underline{P}(\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}\}). \end{aligned}$$

Entonces, el conjunto de puntos extremos está dado por $ext(\mathcal{M}(\underline{P})) = \{P_\sigma \mid \sigma \in S_n\}$. Puesto que $|S_n| = n!$, notamos que $\mathcal{M}(\underline{P})$ tiene, a lo sumo, $n!$ puntos extremos distintos.

2. Si \underline{P}' es una probabilidad inferior 2-monótona en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X})$, existe una única extensión de \underline{P}' en \mathcal{K} que preserve la 2-monotonía. Esta extensión coincide con la extensión natural, aunque también se puede calcular mediante la integral de Choquet:

$$\underline{P}(f) = (C) \int f d\underline{P}' = \inf f + \int_{\inf f}^{\sup f} \underline{P}'(\{f \geq t\}) dt.$$

Más detalles sobre la integral de Choquet se pueden encontrar en [1, Sec.16.2.3]. Esta propiedad indica que, bajo la condición de 2-monotonía, basta trabajar con la probabilidad inferior, ya que esta determina de forma unívoca una extensión a apuestas. Esta relación se representa de forma gráfica en la siguiente figura:



La noción de 2-monotonía se puede extender a órdenes más altos:

Definición 1.6. [3] Una probabilidad inferior coherente se denomina ***n-monótona*** cuando para todo $2 \leq p \leq n$ y para todos $A_1, \dots, A_p \subseteq \mathcal{X}$ se satisface:

$$\underline{P}(\cup_{i=1}^p A_i) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{|I|+1} \underline{P}(\cap_{i=1}^p A_i).$$

Si \underline{P} es *n-monótona* para todo $n \in \mathbb{R}$, se dice que \underline{P} es **completamente monótona**.

Denotamos por \mathcal{C}_∞ a la clase de las probabilidades inferiores completamente monótonas en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Claramente, las probabilidades inferiores completamente monótonas son también 2-monótonas. Las probabilidades inferiores completamente monótonas también reciben el nombre de **funciones de creencia** en el contexto de la Teoría de la Evidencia de Shafer [12]. Las funciones de creencia también se pueden representar a través su inversa de Möbius mediante la ecuación (1.8). De hecho, una probabilidad inferior es completamente monótona si y sólo si su inversa de Möbius m es no negativa:

$$\underline{P} \in \mathcal{C}_\infty \iff m(A) \in [0, 1] \forall A \subseteq \mathcal{X}, \text{ con } m(\emptyset) = 0 \text{ y } \sum_{A \subseteq \mathcal{X}} m(A) = 1. \quad (1.9)$$

En la Teoría de la Evidencia de Shafer, la función m recibe el nombre de asignación básica de probabilidad, y $m(A)$ se interpreta como la cantidad de evidencia respaldando la ocurrencia del evento A . Al ser un caso concreto de probabilidades inferiores 2-monótonas, también poseen las propiedades introducidas para este tipo de probabilidades inferiores: el cálculo de los puntos extremos del conjunto credal se puede realizar mediante el método de las permutaciones y tienen una única extensión a previsiones completamente monótonas, dada por la integral de Choquet. Por otra parte, no todas las probabilidades inferiores 2-monótonas son funciones de creencia. El siguiente ejemplo muestra este caso:

Ejemplo 1.3. Sea un espacio ternario $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$, y sea la probabilidad inferior coherente \underline{P} :

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\underline{P}(A)$	0.1	0.2	0.2	0.5	0.5	0.6

\underline{P} es coherente por ser la envolvente inferior de las probabilidades:

	$P(\{x_1\})$	$P(\{x_2\})$	$P(\{x_3\})$
P_1	0.1	0.4	0.5
P_2	0.1	0.5	0.4
P_3	0.3	0.2	0.5
P_4	0.4	0.2	0.4
P_5	0.3	0.5	0.2
P_6	0.4	0.4	0.2

Se tiene que \underline{P} es 2-monótona, pues en espacios ternarios toda probabilidad inferior coherente lo es [14]. Sin embargo, \underline{P} no es una función de creencia. Es conocido que, para espacios ternarios, una probabilidad inferior no es función de creencia si y sólo si $m(\mathcal{X}) < 0$ [14]. En efecto, si calculamos la inversa de Möbius $m(A)$ para cada subconjunto A se obtiene:

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	\mathcal{X}
$m(A)$	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	-0.1

Como se puede observar, $m(\mathcal{X}) < 0$. \diamond

Introduciremos ahora otros dos casos particulares de probabilidades inferiores que aparecerán en este trabajo: los modelos **linear-vacuous** y los modelos **pari-mutuel**. Ambos modelos pertenecen a la categoría de los modelos de distorsión [1, Sec.4.7]. La idea es considerar una probabilidad inicial P_0 y debilitar la información disponible a través de un parámetro δ , que denominaremos **parámetro de distorsión**. Comencemos definiendo el modelo linear-vacuous.

Definición 1.7. [14, Sec.2.9.2] Sea una probabilidad P_0 y un parámetro de distorsión $\delta \in (0, 1)$. Entonces, P_0 y δ determinan la probabilidad inferior:

$$\underline{P}_{LV}(A) = \begin{cases} (1 - \delta)P_0(A), & \text{si } A \neq \mathcal{X}. \\ 1, & \text{si } A = \mathcal{X}. \end{cases}$$

Esta probabilidad inferior se denomina modelo linear-vacuous.

Su probabilidad superior conjugada se deduce a partir de la ecuación (1.5) y de la definición del modelo linear-vacuous:

$$\overline{P}_{LV}(A) = 1 - \underline{P}_{LV}(A^c) = \begin{cases} 1 - (1 - \delta)P_0(A^c), & \text{si } A^c \neq \mathcal{X}. \\ 0, & \text{si } A^c = \mathcal{X}. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $P_0(A^c) = 1 - P_0(A)$ y que $(1 - \delta)(1 - P_0(A)) = 1 - \delta - P_0(A)(1 - \delta)$, se llega a:

$$\overline{P}_{LV}(A) = \begin{cases} (1 - \delta)P_0(A) + \delta, & \text{si } A \neq \emptyset. \\ 1, & \text{si } A = \emptyset. \end{cases}$$

Una vez hallado el valor de \overline{P}_{LV} , deducimos que $\overline{P}_{LV}(A) - \underline{P}_{LV}(A) = \delta > 0$ $\forall A \neq \emptyset, \mathcal{X}$.

Los modelos linear-vacuous constituyen un tipo de funciones de creencia. Para una tupla (P_0, δ) , basta considerar la asignación básica de probabilidad

$$m(A) = \begin{cases} (1 - \delta)P_0(A), & \text{si } |A| = 1. \\ \delta, & \text{si } A = \mathcal{X}. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, aplicando la ecuación (1.8) resulta que la función de creencia Bel definida por m coincide con la definición del modelo linear-vacuous. Para todo $A \neq \mathcal{X}$, se tiene:

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) = \sum_{x_i \in A} m(\{x_i\}) = (1 - \delta) \sum_{x_i \in A} P_0(\{x_i\}) = (1 - \delta)P_0(A).$$

Otra propiedad interesante de los modelo linear-vacuous es que son aditivos en su probabilidad inferior. Esto se deduce de forma inmediata a partir de la aditividad de la medida de probabilidad P_0 . Si \underline{P}_{LV} es un modelo linear vacuous definido por (P_0, δ) , para todo $A \neq \mathcal{X}$ resulta:

$$\underline{P}_{LV}(A) = (1 - \delta)P_0(A) = (1 - \delta) \sum_{x \in A} P_0(\{x\}) = \sum_{x \in A} \underline{P}_{LV}(\{x\}). \quad (1.10)$$

Una vez vistos los conceptos básicos de los modelos linear-vacuous, introduzcamos ahora el otro modelo de distorsión con el que trabajaremos: el pari-mutuel.

Definición 1.8. [14, Sec.2.9.3] Sea una probabilidad P_0 y un parámetro de distorsión $\delta > 0$. Entonces, P_0 y δ determinan las probabilidades inferior y superior:

$$\underline{P}_{PMM}(A) = \max\{0, (1+\delta)P_0(A) - \delta\}, \quad \overline{P}_{PMM}(A) = \min\{1, (1+\delta)P_0(A)\}.$$

El modelo resultante se denomina modelo pari-mutuel.

Los modelos pari-mutuel son aditivos en su probabilidad superior:

Lema 1.1. [9, Lema 1] Sea \overline{P}_{PMM} el modelo pari-mutuel inducido por (P_0, δ) . Para todo $A \subseteq \mathcal{X}$ tal que $\overline{P}_{PMM}(A) < 1$, se tiene que $\overline{P}_{PMM}(A) = \sum_{x \in A} \overline{P}_{PMM}(\{x\})$.

Esta condición es la dual de (1.10). Además, los modelos pari-mutuel son un caso particular de probabilidades inferiores 2-monótonas [1, Sec.4.7.1]. Sin embargo, a diferencia de los modelos linear-vacuous, no son funciones de creencia. Veamos este hecho con un ejemplo.

Ejemplo 1.4. Sea la medida de probabilidad $P_0 = (5/13, 4/13, 4/13)$ y el parámetro de distorsión $\delta = 0.3$. El modelo pari-mutuel resultante se muestra en la siguiente tabla:

A	\underline{P}_{PMM}	\underline{P}_{LV}
$\{x_1\}$	0.2	35/130
$\{x_2\}$	0.1	28/130
$\{x_3\}$	0.1	28/130
$\{x_1, x_2\}$	0.6	63/130
$\{x_1, x_3\}$	0.6	63/130
$\{x_2, x_3\}$	0.5	56/130
\mathcal{X}	1	1

Tabla 1.1: Modelos pari-mutuel y linear-vacuous definidos por $P_0 = (5/13, 4/13, 4/13)$ y $\delta = 0.3$.

Calculando la inversa de Möbius $m_{\underline{P}_{PMM}}(A)$ para cada subconjunto A obtenemos los siguientes valores:

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	\mathcal{X}
$m_{\underline{P}_{PMM}}(A)$	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3	0.3	-0.3

Como se puede observar, $m_{\underline{P}_{PMM}}(\mathcal{X}) < 0$. De acuerdo con la propiedad que enunciamos en el Ejemplo 1.3, deducimos que \underline{P}_{PMM} no es completamente monótona. También podemos calcular el modelo linear-vacuous que definen P_0 y δ . La probabilidad inferior resultante \underline{P}_{LV} se muestra en la Tabla 1.1. Teniendo en cuenta que ambos modelos son 2-monótonos, podemos utilizar

el método de las permutaciones para obtener los puntos extremos de cada conjunto credal. Para \underline{P}_{PMM} se obtienen los tres puntos extremos:

	x_1	x_2	x_3
π_{LV}^1	0.2	0.4	0.4
π_{LV}^2	0.5	0.1	0.4
π_{LV}^3	0.5	0.4	0.1

$\mathcal{M}(\underline{P}_{LV})$ también tiene tres puntos extremos:

	x_1	x_2	x_3
π_{PMM}^1	35/130	67/130	28/130
π_{PMM}^2	74/130	28/130	28/130
π_{PMM}^3	35/130	28/130	67/130

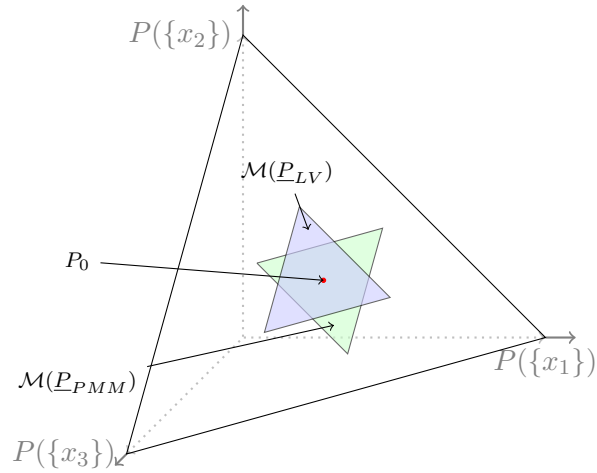


Figura 1.2: Representación gráfica de los conjunto credal inducido por los modelos pari-mutuel (verde) y linear-vacuous (azul) de la Tabla 1.1.

Finalmente, ilustramos gráficamente ambos conjuntos credales en la Figura 1.2. \diamond

Capítulo 2

Aproximaciones de probabilidades inferiores

Las probabilidades inferiores coherentes son uno de los modelos más generales en el marco de las Probabilidades Imprecisas, y constituyen una alternativa a la Teoría de la Probabilidad en situaciones donde la información es escasa o contradictoria.

Sin embargo, las probabilidades inferiores coherentes pueden resultar poco manejables en la práctica: como mostramos en el Ejemplo 1.2, no tienen una extensión única a apuestas y no existe una forma sencilla de determinar los puntos extremos de su conjunto credal asociado. Por este motivo, resulta interesante aproximar una probabilidad inferior coherente por otros modelos más operativos, como las probabilidades inferiores 2-monótonas o las funciones de creencia.

En este capítulo estudiamos cómo realizar estas aproximaciones y sus propiedades. La sección 2.1 trata sobre las aproximaciones que no introducen nueva información con respecto a la probabilidad inferior coherente inicial (aproximaciones exteriores), estudiadas en [8, 10, 11]. La sección 2.2 está dedicada a las aproximaciones más informativas (aproximaciones interiores).

2.1. Aproximaciones exteriores

Definición 2.1. [11] Sean \underline{P} una probabilidad inferior coherente y \mathcal{C} una clase de probabilidades inferiores coherentes. $\underline{Q} \in \mathcal{C}$ es una aproximación exterior de \underline{P} en \mathcal{C} si $\underline{Q}(E) \leq \underline{P}(E) \forall E \subseteq \mathcal{X}$. Además, \underline{Q} es no dominada en \mathcal{C} si no existe ninguna $\underline{Q}' \in \mathcal{C}$ tal que $\underline{Q} \preceq \underline{Q}' \leq \underline{P}$.

En términos de conjuntos credales, \underline{Q} es una aproximación exterior de \underline{P} cuando $\mathcal{M}(\underline{P}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{Q})$, y es no dominada si no existe ninguna $\underline{Q}' \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{M}(\underline{P}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{Q}') \subsetneq \mathcal{M}(\underline{Q})$.

Si interpretamos $\underline{P}(E) - \underline{Q}(E)$ como la imprecisión adicional en E que surge al reemplazar \underline{P} por \underline{Q} , una manera intuitiva de determinar apro-

ximaciones exteriores óptimas consiste en minimizar la imprecisión total introducida por \underline{Q} , dada por la distancia de Baroni-Vicig [2]:

$$d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{P}(E) - \underline{Q}(E)). \quad (2.1)$$

De esta forma, es posible obtener aproximaciones óptimas de \underline{P} en \mathcal{C}_2 resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

$$\min d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{P}(E) - \underline{Q}(E)) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{P}(E) - \sum_{B \subseteq E} m_{\underline{Q}}(B)) \quad (\text{LP-2monot})$$

sujeto a:

$$\sum_{E \subseteq \mathcal{X}} m_{\underline{Q}}(E) = 1, \quad m_{\underline{Q}}(\emptyset) = 0. \quad (2\text{monot.1})$$

$$\sum_{\{x_i, x_j\} \subseteq B \subseteq E} m_{\underline{Q}}(B) \geq 0, \quad \forall E \subseteq \mathcal{X}, \forall x_i, x_j \in E, x_i \neq x_j. \quad (2\text{monot.2})$$

$$m_{\underline{Q}}(\{x_i\}) \geq 0, \quad \forall x_i \in \mathcal{X}. \quad (2\text{monot.3})$$

$$\sum_{B \subseteq E} m_{\underline{Q}}(B) \leq \underline{P}(E), \quad \forall E \neq \emptyset, \mathcal{X}. \quad (2\text{monot.4})$$

Según lo expuesto en [10], las condiciones (2monot.1)÷(2monot.3) aseguran la 2-monotonía de \underline{Q} , mientras que la condición (2monot.4) garantiza que \underline{Q} es una aproximación exterior de \underline{P} .

De manera similar, se pueden determinar aproximaciones exteriores óptimas de \underline{P} en \mathcal{C}_∞ resolviendo el problema de programación lineal:

$$\min d_{BV}(\underline{P}, Bel) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{P}(E) - Bel(E)) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{P}(E) - \sum_{B \subseteq E} m_{Bel}(B)) \quad (\text{LP-bel})$$

sujeto a:

$$\sum_{E \subseteq \mathcal{X}} m_{Bel}(E) = 1, \quad m_{Bel}(E) \geq 0 \quad \forall E \subseteq \mathcal{X}. \quad (\text{bel.1})$$

$$\sum_{B \subseteq E} m_{Bel}(B) \leq \underline{P}(E), \quad \forall E \neq \emptyset, \mathcal{X}. \quad (\text{bel.2})$$

Como ya se ha comentado en (1.9), la condición (bel.1) asegura que m_{Bel} determina una función de creencia, mientras que en (bel.2) se excluye el caso $E = \emptyset$ porque se deduce directamente de (bel.1).

Por otro lado, las regiones factibles definidas por (2monot.1)÷(2monot.4) y (bel.1)÷(bel.2) son no vacías: basta considerar la probabilidad inferior del Ejemplo 1.1:

$$\underline{Q}_v(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \neq \mathcal{X}. \\ 1 & \text{si } A = \mathcal{X}. \end{cases}$$

Esta probabilidad inferior es completamente monótona (y, por tanto, también 2-monótona) [12] y constituye una aproximación exterior de cualquier probabilidad inferior coherente.

En lugar de considerar la distancia dada por (2.1), otra posibilidad para determinar aproximaciones exteriores consiste en minimizar la distancia cuadrática:

$$\min d_q(\underline{P}, \underline{Q}) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{P}(E) - \underline{Q}(E))^2. \quad (\text{QP-2monot})$$

Este enfoque se exploró en [10] tras constatar que el problema de programación lineal (LP-2monot) no tiene solución única. Para solucionar este problema, se plantea el problema de programación cuadrática (QP-2monot) con las restricciones (2monot.1)÷(2monot.4), que proporciona una única aproximación exterior no dominada en \mathcal{C}_2 .

Análogamente, se obtiene una única aproximación no dominada de \underline{P} en \mathcal{C}_∞ resolviendo el siguiente problema de programación cuadrática con las restricciones (bel.1)÷(bel.2).

$$\min d_q(\underline{P}, Bel) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{P}(E) - Bel(E))^2. \quad (\text{QP-bel})$$

Pese a la ventaja que supone obtener una única aproximación no dominada, la distancia cuadrática no tiene una interpretación tan clara como la distancia de BV (2.1).

Por este motivo, en [8] se propone combinar los dos procedimientos introducidos anteriormente: del conjunto de soluciones de los problemas de programación lineal (LP-2monot) o (LP-bel), seleccionar aquella que minimice la distancia cuadrática. Para formalizar este modelo consideramos la siguiente notación:

$$\delta_2^{BV} = \min_{\underline{Q} \in \mathcal{C}_2, \underline{Q} \leq \underline{P}} d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}) \quad \delta_\infty^{BV} = \min_{Bel \in \mathcal{C}_\infty, Bel \leq \underline{P}} d_{BV}(\underline{P}, Bel). \quad (2.2)$$

Teniendo esto en cuenta, el problema de programación cuadrática resultante en \mathcal{C}_2 es (QP-2monot) con las restricciones (2monot.1)÷(2monot.4) y la nueva restricción:

$$\sum_{E \subseteq \mathcal{X}} \left(\underline{P}(E) - \sum_{B \subseteq E} m_{\underline{Q}}(B) \right) = \delta_2^{BV}. \quad (2\text{monot-}\delta)$$

De igual forma, el problema de programación cuadrática resultante en \mathcal{C}_∞ es (QP-bel) con las restricciones (bel.1)÷(bel.2) y la nueva restricción:

$$\sum_{E \subseteq \mathcal{X}} \left(\underline{P}(E) - \sum_{B \subseteq E} m_{Bel}(B) \right) = \delta_\infty^{BV}. \quad (\text{bel-}\delta)$$

Una vez presentados estos 3 métodos para calcular aproximaciones exteriores resumimos algunas de sus principales propiedades en la siguiente proposición:

Proposición 2.1. Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente. Entonces:

- (1) Las soluciones óptimas del problema de programación lineal de la ecuación (LP-2monot) con las restricciones (2monot.1)÷(2monot.4) son aproximaciones exteriores no dominadas de \underline{P} en \mathcal{C}_2 [10, Prop.1].
- (2) Las soluciones óptimas del problema de programación lineal (LP-bel) con las restricciones (bel.1)÷(bel.2) son aproximaciones exteriores no dominadas de \underline{P} en \mathcal{C}_∞ [11, Prop.3].
- (3) Si \underline{Q} es una aproximación exterior no dominada de \underline{P} en \mathcal{C}_2 , entonces $\underline{Q}(\{x\}) = \underline{P}(\{x\})$ para todo $x \in \mathcal{X}$ [10, Prop.2].
- (4) El problema de programación cuadrática (QP-2monot) con las restricciones (2monot.1)÷(2monot.4) y (2monot- δ) tiene solución única, que es una aproximación exterior no dominada de \underline{P} en \mathcal{C}_2 [8, Prop.1].
- (5) El problema de programación cuadrática (QP-bel) con las restricciones (bel.1)÷(bel.2) y (bel- δ) tiene solución única, que es una aproximación exterior no dominada de \underline{P} en \mathcal{C}_∞ [8, Prop.1].

Notamos que el problema de programación lineal no siempre tiene solución única. Además, la solución del problema de programación cuadrática no tiene por qué ser solución del problema de programación lineal. Ilustraremos estas cuestiones por medio de un ejemplo numérico:

Ejemplo 2.1. [11] Sea $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y \underline{P} la probabilidad inferior coherente en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ dada en la Tabla 2.1. Para ver que \underline{P} es coherente, notamos que es la envolvente inferior de las medidas de probabilidad con funciones de probabilidad (0.1,0,0.4,0.5), (0.4,0.1,0.2,0.3) y (0.3,0.3,0,0.4).

Resolviendo el problema de programación lineal con las restricciones (2monot.1)÷(2monot.4) se obtiene la solución óptima única \underline{Q}_0 .

Por otra parte, el problema de programación cuadrática (QP-2monot) tiene una única solución óptima \underline{Q}_1 .¹ Esta solución no es solución óptima del problema de programación lineal, ya que $d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}_1) = 0.24$, mientras que $d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}_0) = 0.2$.

¹Las aproximaciones exteriores \underline{Q}_0 y \underline{Q}_1 se obtuvieron mediante el código que se muestra en el Apéndice A.3.

A	$\underline{P}(A)$	\underline{Q}_0	\underline{Q}_1	Bel_0	Bel_1	$Bel_{1/2}$
$\{x_1\}$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\{x_2\}$	0	0	0	0	0	0
$\{x_3\}$	0	0	0	0	0	0
$\{x_4\}$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\{x_1, x_2\}$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\{x_1, x_3\}$	0.3	0.3	0.26	0.3	0.2	0.25
$\{x_1, x_4\}$	0.6	0.5	0.54	0.5	0.6	0.55
$\{x_2, x_3\}$	0.3	0.2	0.24	0.2	0.3	0.25
$\{x_2, x_4\}$	0.4	0.4	0.36	0.4	0.3	0.35
$\{x_3, x_4\}$	0.4	0.4	0.36	0.3	0.3	0.3
$\{x_1, x_2, x_3\}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\{x_1, x_2, x_4\}$	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
$\{x_1, x_3, x_4\}$	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
$\{x_2, x_3, x_4\}$	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
\mathcal{X}	1	1	1	1	1	1

Tabla 2.1: Probabilidad inferior coherente del Ejemplo 2.1 y algunas aproximaciones exteriores suyas en \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_∞ .

La Tabla 2.1 también muestra las aproximaciones exteriores en \mathcal{C}_∞ Bel_0 , Bel_1 y $Bel_{1/2}$. En este caso, el problema de programación lineal tiene infinitas soluciones óptimas: Bel_0 , Bel_1 y sus combinaciones convexas $Bel_\lambda = \lambda Bel_0 + (1 - \lambda) Bel_1$, con $\lambda \in [0, 1]$. La solución óptima del problema de programación cuadrática (QP-bel) con las restricciones (bel.1)÷(bel.2) es Bel_2 , que también resulta ser solución de (LP-bel): $Bel_{1/2} = \frac{1}{2}(Bel_0 + Bel_1)$.

Una de las diferencias principales entre las aproximaciones exteriores óptimas en \mathcal{C}_2 y en \mathcal{C}_∞ consiste en que, para estas últimas, el punto (3) de la Proposición 2.1 no es cierto en general. En efecto, si consideramos la probabilidad inferior \underline{P} de la Tabla 2.1 con las modificaciones² $\underline{P}(\{x_3\}) = 0.1$ y $\underline{P}(\{x_1, x_4\}) = 0.4$ la solución óptima de (QP-bel) con las restricciones (bel.1), (bel.2) y (bel- δ) resulta ser³:

²La nueva \underline{P} sigue siendo coherente: es la envolvente inferior de las probabilidades $(0.1, 0.4, 0.5)$, $(0.4, 0.1, 0.2, 0.3)$, $(0.2, 0.2, 0.1, 0.5)$, $(0.1, 0.3, 0.3, 0.3)$ y $(0.3, 0.3, 0.1, 0.3)$.

³Las aproximaciones exteriores Bel_0 , Bel_1 , $Bel_{1/2}$ y Bel se calcularon mediante el código que se muestra en el Apéndice A.5.

A	$\underline{P}(A)$	Bel	A	$\underline{P}(A)$	Bel
$\{x_1\}$	0.1	0.075	$\{x_2, x_3\}$	0.3	0.25
$\{x_2\}$	0	0	$\{x_2, x_4\}$	0.4	0.35
$\{x_3\}$	0.1	0.1	$\{x_3, x_4\}$	0.4	0.4
$\{x_4\}$	0.3	0.3	$\{x_1, x_2, x_3\}$	0.5	0.475
$\{x_1, x_2\}$	0.1	0.1	$\{x_1, x_2, x_4\}$	0.6	0.575
$\{x_1, x_3\}$	0.3	0.3	$\{x_1, x_3, x_4\}$	0.7	0.675
$\{x_1, x_4\}$	0.4	0.4	$\{x_2, x_3, x_4\}$	0.6	0.6
			\mathcal{X}	1	1

Bel también es solución óptima del problema de programación lineal y en este caso no coincide con \underline{P} en todos los conjuntos unipuntuales, como se puede ver en el punto $\{x_1\}$. \diamond

A lo largo del capítulo se encontrarán otros ejemplos numéricos de este tipo, derivados a partir de problemas de programación lineal y cuadrática. Hemos implementado varios códigos en `Python` para resolver estos problemas, que se pueden encontrar en el Apéndice A. En el ejemplo que acabamos de ver comprobamos que nuestros códigos funcionan correctamente, ya que conseguimos replicar los resultados obtenidos en [11, Ej.1].

2.2. Aproximaciones interiores

En la sección 2.1 se han presentado los principales resultados acerca de las aproximaciones exteriores de probabilidades inferiores coherentes, estudiadas en detalle en [8, 10, 11]. Este tipo de aproximaciones se emplea cuando no queremos introducir información adicional al modelo. En [10, Sec.7] se realiza un breve análisis sobre las aproximaciones más informativas que el modelo original, conocidas como aproximaciones interiores. Estas aproximaciones se pueden utilizar cuando no se desea introducir más imprecisión al modelo. En esta sección continuamos con este marco de trabajo y estudiamos en detalle las aproximaciones interiores.

Definición 2.2. Sean \underline{P} una probabilidad inferior coherente y \mathcal{C} una clase de probabilidades inferiores coherentes, se dice que $\underline{Q} \in \mathcal{C}$ es una aproximación interior de \underline{P} en \mathcal{C} si $\underline{Q}(E) \geq \underline{P}(E) \forall E \subseteq \mathcal{X}$. Además, \underline{Q} es no dominante si cualquier otra aproximación interior \underline{Q}' tal que $\underline{P} \leq \underline{Q}' \leq \underline{Q}$ satisface $\underline{Q}' = \underline{Q}$.

En términos de conjuntos credales, \underline{Q} es una aproximación interior de \underline{P} cuando $\mathcal{M}(\underline{Q}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$, y es no dominante si no existe ninguna $\underline{Q}' \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{M}(\underline{Q}) \subsetneq \mathcal{M}(\underline{Q}') \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$.

Al igual que en la sección 2.1, el problema de encontrar aproximaciones interiores no dominantes en \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_∞ también se puede abordar mediante programación lineal. Para ello, consideramos los problemas de minimización:

$$\min d_{BV}(\underline{Q}, \underline{P}) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{Q}(E) - \underline{P}(E)). \quad (\text{LP-inner.2monot})$$

$$\min d_{BV}(\underline{Bel}, \underline{P}) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{Bel}(E) - \underline{P}(E)). \quad (\text{LP-inner.bel})$$

Para garantizar que \underline{Q} y \underline{Bel} son aproximaciones interiores se deben considerar las siguientes restricciones:

$$\sum_{B \subseteq E} m_{\underline{Q}}(B) \geq \underline{P}(E), \quad \forall E \neq \emptyset, \mathcal{X}. \quad (2\text{monot.4}^*)$$

$$\sum_{B \subseteq E} m_{\underline{Bel}}(B) \geq \underline{P}(E), \quad \forall E \neq \emptyset, \mathcal{X}. \quad (\text{bel.2}^*)$$

Las condiciones (2monot.4*) y (bel.2*) son las duales de (2monot.4) y (bel.2), donde se cambia la desigualdad para pasar de aproximaciones exteriores a interiores. Además, las regiones factibles definidas por las restricciones (2monot.1)÷(2monot.3), (2monot.4*) y (bel.1), (bel.2*) son no vacías: puesto que \underline{P} es coherente, el conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P})$ es no vacío y cualquier probabilidad precisa $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ satisface los dos conjuntos de restricciones.

Teniendo esto en cuenta, ya estamos en condiciones de plantear el primer resultado al respecto de las aproximaciones interiores no dominantes:

Proposición 2.2. *Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente. Entonces:*

- (1) *Sea \underline{Q} una solución óptima del problema de programación lineal (LP-inner.2monot) con las restricciones (2monot.1)÷(2monot.3) y (2monot.4*). Entonces, \underline{Q} es una aproximación interior no dominante de \underline{P} en \mathcal{C}_2 .*
- (2) *Sea \underline{Bel} una solución óptima del problema de programación lineal (LP-inner.bel) con las restricciones (bel.1) y (bel.2*). Entonces, \underline{Bel} es una aproximación interior no dominante de \underline{P} en \mathcal{C}_∞ .*

Demostración. Consideramos en primer lugar el caso (1). Las condiciones (2monot.1) ÷ (2monot.3) aseguran que \underline{Q} es 2-monótona, mientras que la condición (2monot.4*) implica que \underline{Q} es una aproximación interior de \underline{P} . Para ver que \underline{Q} es no dominante, notamos que (LP-inner.2monot) es un caso particular del problema más general

$$\min_{P' \in \mathcal{C}, P' \geq \underline{P}} \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} g(\underline{P}'(E) - \underline{P}(E)), \quad (2.3)$$

con $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente.

Supongamos que \underline{P}' es una solución de (2.3) y es dominante en \mathcal{C} . Entonces, existe $\underline{P}'' \in \mathcal{C}$ tal que $\underline{P} \leq \underline{P}'' \leq \underline{P}'$. Esto implica que $g(\underline{P}''(E) - \underline{P}(E)) \leq g(\underline{P}'(E) - \underline{P}(E)) \forall E \subseteq \mathcal{X}$, con desigualdad estricta para al menos un evento E_0 . Por lo tanto:

$$\sum_{E \subseteq \mathcal{X}} g(\underline{P}''(E) - \underline{P}(E)) < \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} g(\underline{P}'(E) - \underline{P}(E)).$$

Esto contradice la hipótesis de que \underline{P}' sea solución de (2.3), luego \underline{P}' es no dominante. Aplicando este resultado a $\underline{P}' = \underline{Q} \in \mathcal{C}_2$ y a $g = id_{\mathbb{R}}$ deducimos que \underline{Q} es no dominante en \mathcal{C}_2 .

En cuanto al caso (2), la condición (bel.1) garantiza que Bel es una función de creencia, mientras que la condición (bel.2*) implica que Bel es una aproximación interior de \underline{P} . Para ver que Bel es no dominante seguimos un razonamiento idéntico al empleado en el apartado (1). Notamos que (LP-inner.bel) es un caso particular del problema (2.3). En estas condiciones, aplicando el resultado anterior a $\underline{P}' = Bel \in \mathcal{C}_\infty$ y a $g = id_{\mathbb{R}}$ se completa la prueba. \square

Un ejemplo ilustrativo es el siguiente:

Ejemplo 2.2. Sea $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y \underline{P} la probabilidad inferior coherente en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ dada en la Tabla 2.2. Para ver que \underline{P} es coherente, notamos que es la envolvente inferior de las medidas de probabilidad con funciones de probabilidad $(0,0,0.5,0.5)$, $(0.5,0,0,0.5)$, $(0.4,0.3,0.3,0)$ y $(0.2,0.5,0.1,0.2)$.

A	$\underline{P}(A)$	\underline{Q}	Bel_1	Bel_2
$\{x_1\}$	0	0	0.15	0
$\{x_2\}$	0	0	0	0
$\{x_3\}$	0	0	0.05	0
$\{x_4\}$	0	0.2	0.25	0.3
$\{x_1, x_2\}$	0	0	0.15	0.1
$\{x_1, x_3\}$	0.3	0.3	0.3	0.3
$\{x_1, x_4\}$	0.4	0.4	0.4	0.4
$\{x_2, x_3\}$	0	0	0.05	0.1
$\{x_2, x_4\}$	0.3	0.3	0.3	0.3
$\{x_3, x_4\}$	0.3	0.3	0.3	0.3
$\{x_1, x_2, x_3\}$	0.5	0.5	0.5	0.5
$\{x_1, x_2, x_4\}$	0.5	0.5	0.5	0.5
$\{x_1, x_3, x_4\}$	0.5	0.7	0.55	0.7
$\{x_2, x_3, x_4\}$	0.5	0.5	0.5	0.5
\mathcal{X}	1	1	1	1

Tabla 2.2: Probabilidad inferior coherente del Ejemplo 2.2 y algunas aproximaciones interiores suyas en \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_∞ .

Resolvemos el problema de programación lineal (LP-inner.2monot) con las restricciones (2monot.1)÷(2monot.3) y (2monot.4*) mediante el código que se muestra en el Apéndice A.2. La solución óptima correspondiente resulta ser \underline{Q} .

Notamos que $\underline{Q}(\{x_4\}) \neq \underline{P}(\{x_4\})$, por lo que la propiedad (3) de la Proposición 2.1 no se cumple para aproximaciones interiores.

Por otra parte, usando los códigos del Apéndice A.4, encontramos que Bel_1 y Bel_2 son soluciones óptimas de (LP-inner.bel) con las restricciones (bel.1) y (bel.2*). Además, Bel_2 domina a \underline{Q} , lo que muestra que las aproximaciones interiores no dominantes en \mathcal{C}_∞ sí pueden ser dominantes en la clase \mathcal{C}_2 . \diamond

Como se ha visto en el Ejemplo 2.2, los problemas de programación lineal (LP-inner.2monot) y (LP-inner.bel) pueden no tener solución única. Una forma de lidiar con este problema es, al igual que para las aproximaciones exteriores, minimizar las distancias cuadráticas (QP-2monot) y (QP-bel).

Proposición 2.3. *Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente. Entonces:*

- (1) *El problema de programación cuadrática (QP-2monot) con las restricciones (2monot.1)÷(2monot.3) y (2monot.4*) tiene una única solución óptima \underline{Q} , que es una aproximación interior no dominante de \underline{P} en \mathcal{C}_2 .*
- (2) *El problema de programación cuadrática (QP-bel) con las restricciones (bel.1) y (bel.2*) tiene una única solución óptima Bel , que es una aproximación interior no dominante de \underline{P} en \mathcal{C}_∞ .*

Demostración. Comenzamos probando el caso (1): \underline{Q} es 2-monótona por las restricciones (2monot.1)÷(2monot.3) y es una aproximación interior de \underline{P} por (2monot.4*). Para ver que es no dominada basta considerar (2.3) con $g(x) = x^2$ y usar el mismo razonamiento que en la demostración de la Proposición 2.2. Finalmente, para demostrar que \underline{Q} es la única solución óptima notamos que (QP-2monot) se puede expresar en forma matricial como:

$$\min \frac{1}{2} \vec{Bel}^t H \vec{Bel} + \vec{c}^t \vec{Bel},$$

con $H = 2I_{2^n-1}$ y $c = -2\vec{P}$. Como H es semidefinida positiva, (QP-2monot) tiene solución óptima y es única.

Para el caso (2), la restricción (bel.1) implica que Bel es una función de creencia, mientras que la restricción (bel.2*) garantiza que Bel es una aproximación interior de \underline{P} . El resto de la demostración es análoga al primer caso. \square

Notamos que la solución del problema de programación cuadrática no tiene por qué ser solución del problema de programación lineal. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 2.3. Sea \underline{P} la probabilidad inferior coherente del Ejemplo 2.2. Los problemas de programación cuadrática (QP-2monot) y (QP-bel) tienen como soluciones óptimas \underline{Q} y Bel respectivamente ⁴, cuyos valores se muestran en la Tabla 2.3.

A	$\underline{P}(A)$	\underline{Q}	Bel
$\{x_1\}$	0	0.08	0.1
$\{x_2\}$	0	0	0
$\{x_3\}$	0	0	0.1
$\{x_4\}$	0	0.12	0.2
$\{x_1, x_2\}$	0	0.08	0.1
$\{x_1, x_3\}$	0.3	0.3	0.3
$\{x_1, x_4\}$	0.4	0.4	0.4
$\{x_2, x_3\}$	0	0	0.1
$\{x_2, x_4\}$	0.3	0.3	0.3
$\{x_3, x_4\}$	0.3	0.3	0.3
$\{x_1, x_2, x_3\}$	0.5	0.5	0.5
$\{x_1, x_2, x_4\}$	0.5	0.58	0.5
$\{x_1, x_3, x_4\}$	0.5	0.62	0.6
$\{x_2, x_3, x_4\}$	0.5	0.5	0.5
\mathcal{X}	1	1	1

Tabla 2.3: Probabilidad inferior coherente del Ejemplo 2.3 y algunas aproximaciones interiores suyas en \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_∞ .

La solución óptima \underline{Q} es una aproximación interior no dominada de \underline{P} en \mathcal{C}_2 , pero no es solución óptima del problema de programación lineal (LP-inner.2monot): $d_{BV}(\underline{P}, \underline{Q}) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}} (\underline{Q}(E) - \underline{P}(E)) = 0.48$, mientras que la distancia óptima a \underline{P} es 0.4. Concluimos que no todas las aproximaciones interiores no dominantes se obtienen resolviendo el problema de programación lineal.

Por otra parte, Bel es un ejemplo de una solución óptima del problema de programación cuadrática (QP-bel) que también es solución óptima del problema de programación lineal (LP-inner.bel). \diamond

Finalmente, podemos considerar el problema de programación cuadrática solamente en aquellas aproximaciones interiores que minimizen la distancia de Baroni-Vicig. Esto se consigue añadiendo las restricciones:

⁴Para hallar \underline{Q} se empleó el código del Apéndice A.2, y para calcular Bel se hizo uso del código mostrado en el Apéndice A.4.

$$\sum_{E \subseteq \mathcal{X}} \left(\sum_{B \subseteq E} m_{\underline{Q}}(B) - \underline{P}(E) \right) = \Delta_2^{BV} \quad (\text{inner-2monot-}\delta)$$

$$\sum_{E \subseteq \mathcal{X}} \left(\sum_{B \subseteq E} m_{Bel}(B) - \underline{P}(E) \right) = \Delta_\infty^{BV} \quad (\text{inner-bel-}\delta)$$

donde hemos empleado la notación:

$$\Delta_2^{BV} = \min_{\underline{Q} \in \mathcal{C}_2, \underline{Q} \geq \underline{P}} d_{BV}(\underline{Q}, \underline{P}) \quad \Delta_\infty^{BV} = \min_{Bel \in \mathcal{C}_\infty, Bel \geq \underline{P}} d_{BV}(Bel, \underline{P}). \quad (2.4)$$

Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4. *Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente. Entonces:*

- (1) *El problema de programación cuadrática (QP-2monot) con las restricciones (2monot.1)÷(2monot.3), (2monot.4*) y (inner-2monot- δ) tiene una única solución, que constituye una aproximación interior no dominante en \mathcal{C}_2 .*
- (2) *El problema de programación cuadrática (QP-bel) con las restricciones (bel.1), (bel.2*) y (bel- δ) tiene una única solución óptima, que es una aproximación interior no dominante de \underline{P} en \mathcal{C}_∞ .*

Demostración. La proposición se demuestra empleando los mismos argumentos que en la Proposición 2.3. \square

El siguiente ejemplo ilustra este caso.

Ejemplo 2.4. Sea \underline{P} la probabilidad inferior coherente del Ejemplo 2.3. Para esta probabilidad inferior coherente, $\Delta_2^{BV} = 0.4$ y $\Delta_\infty^{BV} = 0.7$. Resolviendo el problema de programación cuadrática (QP-bel) con la restricción adicional (inner-bel- δ) se obtiene la misma solución Bel que en dicho ejemplo. Como se comentó allí, este es un caso especial en el que la solución óptima del problema de programación cuadrática también es solución óptima del problema de programación lineal.

Por otro lado, la aproximación interior en \mathcal{C}_2 obtenida al añadir la restricción (inner-2monot- δ) difiere con la solución encontrada en el Ejemplo 2.3, que estaba a una distancia del modelo inicial de $0.48 > \Delta_2^{BV}$. Esta aproximación coincide con la solución del problema de programación lineal \underline{Q} mostrada en el Ejemplo 2.2, y es por tanto única. \diamond

Capítulo 3

Casos particulares de aproximaciones interiores

Tras estudiar en el capítulo anterior el caso general, en este capítulo investigamos las aproximaciones interiores de una probabilidad inferior coherente mediante algunas subfamilias particulares de las probabilidades inferiores 2-monótonas: los modelos de distorsión introducidos en la sección 1.2.2. Concretamente, nos centraremos en los modelos linear-vacuous y parimutuel. Denotaremos sus respectivas clases por \mathcal{C}_{LV} y \mathcal{C}_{PMM} . Como vimos en la introducción, estos modelos tienen propiedades interesantes. Además, en [10] se probó la unicidad de aproximaciones exteriores para estos casos particulares, por lo que queremos estudiar qué sucede para las aproximaciones interiores.

3.1. Aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{LV}

Dada una probabilidad inferior coherente \underline{P} , en [10, Prop.8] se demostró la existencia de una única aproximación exterior no dominada en \mathcal{C}_{LV} , definida por los elementos:

$$\delta_{LV} = 1 - \sum_{i=1}^n \underline{P}(\{x_i\}) \quad P_0(\{x_i\}) = \frac{\underline{P}(\{x_i\})}{\sum_{i=1}^n \underline{P}(\{x_i\})} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

En el caso de aproximaciones interiores, en cambio, no siempre está garantizada la existencia de este tipo de aproximaciones. Así pues, comenzamos dando una condición necesaria y suficiente de la existencia de aproximaciones interiores linear-vacuous.

Proposición 3.1. *Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente y \overline{P} su probabilidad superior conjugada. Existe un modelo linear-vacuous \underline{P}_{LV} tal que $\underline{P} \leq \underline{P}_{LV}$ si y sólo si $\underline{P}(A) < \overline{P}(A) \forall A \subset \mathcal{X}, A \neq \emptyset$.*

Demostración.

$\boxed{\implies}$ Sea \underline{P}_{LV} un modelo linear-vacuous tal que $\underline{P} \leq \underline{P}_{LV}$, y sea \overline{P}_{LV} su probabilidad superior conjugada. Como vimos en la sección 1.2.2, dicho modelo verifica $\overline{P}_{LV}(A) - \underline{P}_{LV}(A) = \delta > 0 \forall A \subset \mathcal{X}, A \neq \emptyset$. Además, es claro que $\overline{P}_{LV} \leq \overline{P}$.

Teniendo esto en cuenta, $\forall A \subset \mathcal{X}$ con $A \neq \emptyset$ se tiene que $\overline{P}(A) - \underline{P}(A) \geq \overline{P}_{LV}(A) - \underline{P}_{LV}(A) = \delta > 0 \implies \underline{P}(A) < \overline{P}(A)$.

$\boxed{\impliedby}$ Supongamos ahora que \underline{P} es una probabilidad inferior coherente verificando $\underline{P}(A) < \overline{P}(A) \forall A \subset \mathcal{X}, A \neq \emptyset$. Sea $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ cualquiera pero fijo. Puesto que \underline{P} es coherente, existen $P_1^A, P_2^A \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tales que $P_1^A = \underline{P}(A)$, $P_2^A = \overline{P}(A) > \underline{P}(A)$. Definimos P_0 como sigue:

$$P_0 := \frac{1}{(2^{|\mathcal{X}|} - 2)} \sum_{\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}} \frac{P_1^A + P_2^A}{2}.$$

Por ser el conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P})$ convexo, se tiene que $P_0 \in \mathcal{M}(\underline{P})$. Además, $\forall \emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$, se tiene que $P_2^A(A) > \underline{P}(A) \implies (P_1^A(A) + P_2^A(A))/2 > P_0(A)$. En vista de cómo hemos definido P_0 , se cumple $P_0(A) > \underline{P}(A) \forall A \neq \emptyset, \mathcal{X}$. Definiendo $\varepsilon := \min_{\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}} \{P_0(A) - \underline{P}(A)\}$ y siendo B el subconjunto donde se alcanza dicho mínimo, el modelo linear vacuous definido como:

$$\underline{P}_{LV}(A) = (1 - \delta)P_0(A) \quad \forall A \subset \mathcal{X}, \quad \underline{P}_{LV}(\mathcal{X}) = 1, \quad \delta \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \underline{P}(B)}.$$

cumple $\underline{P}_{LV} \geq \underline{P}$. En efecto:

$$\begin{aligned} \underline{P}_{LV} \geq \underline{P} &\implies (1 - \delta)P_0(B) - \underline{P}(B) = (1 - \delta)[\varepsilon + \underline{P}(B)] - \underline{P}(B) \\ &= \varepsilon - \delta\varepsilon - \delta\underline{P}(B) \geq 0 \implies \delta \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \underline{P}(B)}. \quad \square \end{aligned}$$

Cuando existen, las aproximaciones interiores mediante un modelo linear vacuous no tienen por qué ser únicas, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Sea $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ y \underline{P} la probabilidad inferior coherente dada por:

A	$\underline{P}(A)$	\underline{P}_{LV}^1	\underline{P}_{LV}^2	\underline{P}_{LV}^3
$\{x_1\}$	0.2	0.2	0.2	0.3
$\{x_2\}$	0.1	0.2	0.3	0.1
$\{x_3\}$	0.1	0.3	0.2	0.4
$\{x_1, x_2\}$	0.4	0.4	0.5	0.4
$\{x_1, x_3\}$	0.4	0.5	0.4	0.7
$\{x_2, x_3\}$	0.5	0.5	0.5	0.5
\mathcal{X}	1	1	1	1

Tabla 3.1: Probabilidad inferior coherente del Ejemplo 3.1 y algunas aproximaciones interiores suyas en \mathcal{C}_{LV} .

\underline{P} es coherente por ser la envolvente inferior de las probabilidades:

	$P(\{x_1\})$	$P(\{x_2\})$	$P(\{x_3\})$
P_1	0.2	0.2	0.6
P_2	0.2	0.6	0.2
P_3	0.3	0.1	0.6
P_4	0.5	0.1	0.4
P_5	0.3	0.6	0.1
P_6	0.5	0.4	0.1

En primer lugar, acotamos superiormente el parámetro de distorsión δ de un modelo linear vacuuous \underline{P}_{LV} definido por (P_0, δ) que aproxima interiormente a \underline{P} . A partir de la desigualdad:

$$\begin{aligned} \underline{P}(\{x_1\}) + \underline{P}(\{x_2, x_3\}) &= 0.7 \leq \underline{P}_{LV}(\{x_1\}) + \underline{P}_{LV}(\{x_2, x_3\}) \\ &= (1 - \delta)P_0(\{x_1\}) + (1 - \delta)P_0(\{x_2, x_3\}) \\ &= (1 - \delta)P_0(\{x_1\}) + (1 - \delta)[P_0(\{x_2\}) + P_0(\{x_3\})] = 1 - \delta \end{aligned}$$

deducimos que $\delta \leq 0.3$.

Tomando el máximo valor posible del parámetro de distorsión $\delta = 0.3$ y las probabilidades $P_0^1 = (2/7, 2/7, 3/7)$, $P_0^2 = (2/7, 3/7, 2/7)$, encontramos los modelos linear vacuuous \underline{P}_{LV}^1 y \underline{P}_{LV}^2 descritos en la Tabla 3.1. Estos elementos resultan ser dos aproximaciones interiores de \underline{P} distintas.

\underline{P}_{LV}^1 y \underline{P}_{LV}^2 son no dominantes. En efecto, supongamos que existe un modelo linear vacuuous \underline{Q}_{LV}^1 tal que $\underline{P} \leq \underline{Q}_{LV}^1 \leq \underline{P}_{LV}^1$. Entonces, \underline{Q}_{LV}^1 debe verificar:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_{LV}^1(\{x_1\}) &= 0.2. \\ \underline{Q}_{LV}^1(\{x_1, x_2\}) &= 0.4. \\ \underline{Q}_{LV}^1(\{x_2, x_3\}) &= 0.5. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, utilizando la ecuación (1.10)

$$\underline{Q}_{LV}^1(\{x_1, x_2\}) = \underline{Q}_{LV}^1(\{x_1\}) + \underline{Q}_{LV}^1(\{x_2\}),$$

sustituyendo el valor de $\underline{Q}_{LV}^1(\{x_1\})$ se deduce que $\underline{Q}_{LV}^1(\{x_2\}) = 0.2$. Análogamente, sustituyendo el valor de $\underline{Q}_{LV}^1(\{x_2\})$ en la expresión

$$\underline{Q}_{LV}^1(\{x_2, x_3\}) = \underline{Q}_{LV}^1(\{x_2\}) + \underline{Q}_{LV}^1(\{x_3\}),$$

se deduce que $\underline{Q}_{LV}^1(\{x_3\}) = 0.3$. Puesto que los modelos linear-vacuuous son aditivos en la probabilidad inferior, dos modelos de este tipo que coincidan en los conjuntos unipuntuales serán iguales. Por lo tanto, $\underline{Q}_{LV}^1 = \underline{P}_{LV}^1$ y se llega a una contradicción.

Análogamente, supongamos que existe un modelo linear vacuous \underline{Q}_{LV}^2 tal que $\underline{P} \leq \underline{Q}_{LV}^2 \leq \underline{P}_{LV}^2$. Las condiciones

$$\begin{aligned}\underline{Q}_{LV}^2(\{x_1\}) &= 0.2 \\ \underline{Q}_{LV}^2(\{x_1, x_3\}) &= 0.4 \\ \underline{Q}_{LV}^2(\{x_2, x_3\}) &= 0.5\end{aligned}$$

permiten deducir que $\underline{Q}_{LV}^1(\{x_3\}) = 0.2$ y $\underline{Q}_{LV}^1(\{x_2\}) = 0.3$, con lo que $\underline{Q}_{LV}^2 = \underline{P}_{LV}^2$ y se llega a la contradicción buscada.

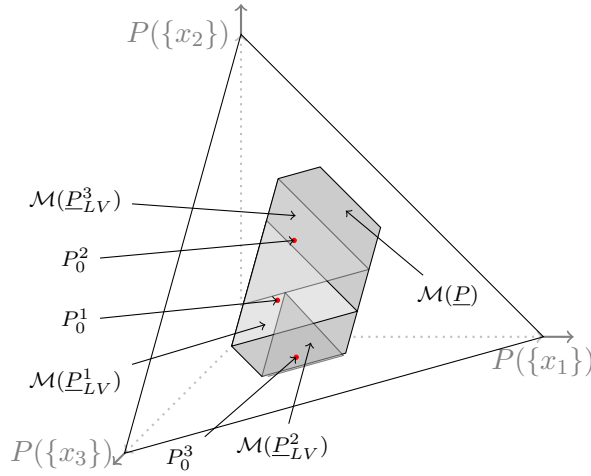


Figura 3.1: Representación gráfica de la probabilidad inferior \underline{P} del Ejemplo 3.1 y de sus aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{LV} encontradas.

Hemos encontrado dos aproximaciones interiores con el mismo parámetro de distorsión, el máximo permitido ($\delta = 0.3$). Por otra parte, es posible encontrar aproximaciones interiores linear vacuous para $\delta < 0.3$. A modo de ejemplo, la probabilidad $P_0 = (3/8, 1/8, 4/8)$ y el parámetro de distorsión $\delta = 0.2$ determinan la aproximación interior en \mathcal{C}_{LV} \underline{P}_{LV}^3 , indicada en la Tabla 3.1. Procediendo como en los casos anteriores, teniendo en cuenta que cualquier otro modelo linear vacuous \underline{Q}_{LV}^3 tal que $\underline{P} \leq \underline{Q}_{LV}^3 \leq \underline{P}_{LV}^3$ debe cumplir

$$\begin{aligned}\underline{Q}_{LV}^3(\{x_2\}) &= 0.1 \\ \underline{Q}_{LV}^3(\{x_1, x_2\}) &= 0.4 \\ \underline{Q}_{LV}^3(\{x_2, x_3\}) &= 0.5\end{aligned}$$

se deduce que \underline{P}_{LV}^3 es no dominante. Una representación gráfica de la situación descrita en este ejemplo se encuentra en la Figura 3.1. \diamond

En el Ejemplo 3.1 notamos que la distancia de Baroni-Vicig entre ambos modelos es $d_{BV}(\underline{P}_{LV}^1, \underline{P}) = d_{BV}(\underline{P}_{LV}^2, \underline{P}) = 0.4$ y $d_{BV}(\underline{P}_{LV}^3, \underline{P}) = 0.7$, es decir, el modelo linear vacuuous con un parámetro de distorsión más pequeño está a una distancia mayor de \underline{P} . Como veremos en el siguiente resultado, esta propiedad se cumple siempre. De hecho, la distancia d_{BV} se minimiza para el máximo valor posible del parámetro de distorsión.

Proposición 3.2. *Una aproximación interior en \mathcal{C}_{LV} de una probabilidad inferior coherente minimiza la distancia de Baroni-Vicig si y sólo si se maximiza el parámetro de distorsión δ .*

Demostración. Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente. Consideramos una aproximación interior linear vacuuous definida por:

$$\underline{P}_{LV}(A) = (1 - \delta)P_0(A) \quad \forall A \subset \mathcal{X}, \quad \underline{P}_{LV}(\mathcal{X}) = 1. \quad (3.1)$$

Sustituyendo (3.1) en la definición de la distancia de Baroni-Vicig d_{BV} dada por la ecuación (2.1) resulta:

$$\begin{aligned} d_{BV}(\underline{P}_{LV}, \underline{P}) &= \sum_{A \subset \mathcal{X}} (\underline{P}_{LV}(A) - \underline{P}(A)) \\ &= (1 - \delta) \sum_{\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}} P_0(A) - \sum_{\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}} \underline{P}(A). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Denotando $|\mathcal{X}| = n$, el número de subconjuntos propios de \mathcal{X} de cardinal k que contienen al elemento $x \in \mathcal{X}$ es $\binom{n-1}{k-1}$. Teniendo esto en cuenta, se puede calcular el término $\sum_{\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}} P_0(A)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}} P_0(A) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{A \subset \mathcal{X} \\ |A|=k}} P_0(A) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{x \in \mathcal{X}} \binom{n-1}{k-1} P_0(\{x\}) = 2^{n-1} - 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sustituyendo (3.3) en (3.2) se llega a la expresión para d_{BV} :

$$d_{BV}(\underline{P}_{LV}, \underline{P}) = (1 - \delta)(2^{n-1} - 1) - \sum_{\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}} \underline{P}(A). \quad (3.4)$$

La expresión (3.4) permite deducir que d_{BV} depende únicamente de δ , y alcanza un mínimo para el máximo valor posible de δ . \square

Hemos visto que una aproximación interior en \mathcal{C}_{LV} de una probabilidad inferior coherente minimiza d_{BV} cuando el parámetro de distorsión del modelo linear vacuuous es máximo. A continuación, buscaremos el valor de dicho

máximo. Para ello, $\forall \delta \in (0, 1)$ definimos la probabilidad inferior \underline{Q}_δ como sigue:

$$\underline{Q}_\delta(\mathcal{X}) = 1 \quad \underline{Q}_\delta(A) = \frac{\underline{P}(A)}{(1 - \delta)} \forall A \subset \mathcal{X}. \quad (3.5)$$

Proposición 3.3. 1. Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente. Para un factor de distorsión $\delta \in (0, 1)$, existe una probabilidad P_0 de forma que el modelo linear vacuous definido por (P_0, δ) constituye una aproximación interior de \underline{P} si y sólo si \underline{Q}_δ evita pérdida segura.

2. El conjunto $\Lambda_{LV} = \{\delta \in (0, 1) \mid \mathcal{M}(\underline{Q}_\delta) \neq \emptyset\}$ tiene un máximo δ_{LV} .

Demostración.

1. $\boxed{\implies}$ Sea (P_0, δ) un modelo linear vacuous que aproxima interiormente a \underline{P} . Entonces, $(1 - \delta)P_0(A) \geq \underline{P}(A) \forall A \subset \mathcal{X}$. Teniendo en cuenta la definición de \underline{Q}_δ dada por (3.5), esto equivale a $P_0(A) \geq \underline{Q}_\delta(A) \forall A \subset \mathcal{X}$, luego $\mathcal{M}(\underline{Q}_\delta) \neq \emptyset$ y \underline{Q}_δ evita pérdida segura.

$\boxed{\impliedby}$ Partimos de la hipótesis “ \underline{Q}_δ evita pérdida segura”, es decir, $\mathcal{M}(\underline{Q}_\delta) \neq \emptyset$. Entonces, existe una probabilidad P_0 tal que $P_0(A) \geq \underline{Q}_\delta(A) \forall A \subset \mathcal{X}$. Empleando la definición de \underline{Q}_δ , se tiene que $(1 - \delta)P_0(A) \geq \underline{P}(A) \forall A \subset \mathcal{X}$. Concluimos que el modelo linear vacuous definido por (P_0, δ) es una aproximación interior de \underline{P} .

2. En primer lugar, notamos que $\delta_1 < \delta_2 \implies \underline{Q}_{\delta_1} \leq \underline{Q}_{\delta_2}$, o equivalentemente en términos de conjuntos credales, $\mathcal{M}(\underline{Q}_{\delta_2}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{Q}_{\delta_1})$. Por otro lado, $\forall \delta \in \Lambda_{LV}$, el conjunto $\mathcal{M}(\underline{Q}_\delta)$ es compacto por ser cerrado y acotado. Así, $\{\mathcal{M}(\underline{Q}_\delta)\}_{\delta \in \Lambda_{LV}}$ es una sucesión de compactos dirigidos distintos del vacío. Denotamos $\mathcal{M}(\underline{Q}_{\delta_{LV}}) = \bigcap_{\delta \in \Lambda_{LV}} \mathcal{M}(\underline{Q}_\delta)$. Notamos que $\mathcal{M}(\underline{Q}_{\delta_{LV}}) \neq \emptyset$ por ser intersección de conjuntos compactos dirigidos, por lo que $\delta_{LV} \in \Lambda_{LV}$.

Se cumple que $\sup \Lambda_{LV} = \delta_{LV}$. En efecto, supongamos que $\sup \Lambda_{LV} = \delta' \neq \delta_{LV}$. Por definición de supremo, $\delta' \geq \delta \forall \delta \in \Lambda_{LV}$ y $\delta' < \delta_{LV}$. Hemos llegado a una contradicción: ambas condiciones no pueden cumplirse simultáneamente, ya que $\delta_{LV} \in \Lambda_{LV}$. \square

Las proposiciones 3.2 y 3.3 permiten deducir que las aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{LV} asociadas con $\delta_{LV} = \max \Lambda_{LV}$ y cualquier probabilidad $P_0 \in \mathcal{M}(\underline{Q}_{\delta_{LV}})$ son no dominantes.

3.2. Aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{PMM}

Para analizar las aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{PMM} seguimos los mismos pasos que en la sección anterior. En esta sección asumimos que $\underline{P}(A) > 0 \forall A \neq \emptyset$. Esto ayudará a simplificar algunos de los resultados que veremos a

continuación. En [10, Prop.7] se demostró la existencia de una única aproximación exterior de este tipo, dada por:

$$\delta_{PMM} = \sum_{i=1}^n \bar{P}(\{x_i\}) - 1 \quad P_0(\{x_i\}) = \frac{\bar{P}(\{x_i\})}{1 + \delta} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Al igual que ocurría con los modelos linear-vacuous, no siempre está garantizada la existencia de aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{PMM} . En primer lugar, caracterizaremos la existencia de este tipo de aproximaciones:

Proposición 3.4. *Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente y \bar{P} su probabilidad superior conjugada. Existe un modelo pari-mutuel \underline{P}_{PMM} tal que $\underline{P} \leq \underline{P}_{PMM}$ si y sólo si $\underline{P}(A) < \bar{P}(A) \forall A \subset \mathcal{X}, A \neq \emptyset$.*

Demostración.

\Rightarrow Sea \underline{P}_{PMM} un modelo pari-mutuel tal que $\underline{P} \leq \underline{P}_{PMM}$. Dicho modelo cumple $\bar{P}_{PMM}(A) - \underline{P}_{PMM}(A) > 0 \forall A \subset \mathcal{X}, A \neq \emptyset$. Teniendo en cuenta que $\bar{P}_{PMM} \leq \bar{P}$, se tiene que $\forall A \subset \mathcal{X}$ con $A \neq \emptyset$, $\bar{P}(A) - \underline{P}(A) \geq \bar{P}_{PMM}(A) - \underline{P}_{PMM}(A) > 0 \Rightarrow \underline{P}(A) < \bar{P}(A)$.

\Leftarrow Supongamos que \underline{P} es una probabilidad inferior coherente verificando $\underline{P}(A) < \bar{P}(A) \forall A \subset \mathcal{X}, A \neq \emptyset$. Consideramos la misma probabilidad P_0 que la definida en la Proposición 3.1. Entonces, se tiene que $\bar{P}(A) > P_0(A) \forall A \neq \emptyset, \mathcal{X}$. Buscamos $\delta > 0$ tal que $\bar{P}(A) \geq (1 + \delta)P_0(A) \forall A \subseteq \mathcal{X}$. Despejando δ y tomando el mínimo entre todos los subconjuntos, deducimos que el modelo pari mutuel definido por P_0 y cualquier δ perteneciente al intervalo:

$$\left(0, \min_{A \neq \emptyset, \mathcal{X}} \left\{ \frac{\bar{P}(A)}{P_0(A)} - 1 \right\} \right]$$

constituye una aproximación interior de \underline{P} . En efecto, para P_0 y δ en esas condiciones se tiene que $\bar{P}_{PMM}(A) = \min\{1, (1 + \delta)P_0(A)\} \leq (1 + \delta)P_0(A) \leq \bar{P}(A)$. \square

En la demostración anterior, la asunción $\underline{P}(A) > 0 \forall A \neq \emptyset$ garantiza la validez de la condición $\bar{P}_{PMM}(A) - \underline{P}_{PMM}(A) > 0 \forall A \subset \mathcal{X}, A \neq \emptyset$. En el caso general, es posible que para un cierto subconjunto A_0 se de la situación $\bar{P}_{PMM}(A_0) = \underline{P}_{PMM}(A_0) = 0$ si $P_0(A_0) = 0$. Además, notamos que la condición necesaria y suficiente para que exista una aproximación interior en \mathcal{C}_{PMM} coincide con la de \mathcal{C}_{LV} .

Puede existir más de una aproximación interior no dominante en \mathcal{C}_{PMM} :

Ejemplo 3.2. Sea $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ y \underline{Q} la probabilidad inferior coherente con probabilidad superior conjugada \bar{Q} dada por:

A	$\underline{Q}(A)$	$\overline{Q}(A)$	\overline{Q}_{PMM}^1	\overline{Q}_{PMM}^2	\overline{Q}_{PMM}^3
$\{x_1\}$	0.2	0.5	0.5	0.5	0.5
$\{x_2\}$	0.05	0.6	0.4	0.35	0.4
$\{x_3\}$	0.1	0.6	0.4	0.45	0.3
$\{x_1, x_2\}$	0.4	0.9	0.9	0.85	0.9
$\{x_1, x_3\}$	0.4	0.95	0.9	0.95	0.8
$\{x_2, x_3\}$	0.5	0.8	0.8	0.8	0.7
\mathcal{X}	1	1	1	1	1

Tabla 3.2: Probabilidad inferior coherente del Ejemplo 3.2 y algunas aproximaciones interiores suyas en \mathcal{C}_{PMM} .

\underline{Q} es coherente por ser la envolvente inferior de las probabilidades:

	$P(\{x_1\})$	$P(\{x_2\})$	$P(\{x_3\})$
P_1	0.2	0.2	0.6
P_2	0.2	0.6	0.2
P_3	0.35	0.05	0.6
P_4	0.5	0.05	0.45
P_5	0.3	0.6	0.1
P_6	0.5	0.4	0.1

Si \underline{Q}_{PMM} es una aproximación interior de \underline{Q} en \mathcal{C}_{PMM} definida por (P_0, δ) , entonces se debe cumplir $\delta \leq 0.3$. Por la definición del modelo pari mutuel, en este caso resulta más cómodo deducirlo a partir de la probabilidad superior:

$$\overline{Q}(\{x_1\}) + \overline{Q}(\{x_2, x_3\}) = 1.3 \geq \overline{Q}_{PMM}(\{x_1\}) + \overline{Q}_{PMM}(\{x_2, x_3\}) = 1 + \delta,$$

donde hemos utilizado la propiedad de aditividad del modelo pari-mutuel en el caso $\overline{Q}_{PMM}(A) < 1 \forall A \subset \mathcal{X}$ y la definición de aproximación interior reformulada para probabilidades superiores: $\overline{Q} \geq \overline{Q}_{PMM}$.

Considerando como parámetro de distorsión $\delta = 0.3$ y las probabilidades $P_0^1 = (5/13, 4/13, 4/13)$, $P_0^2 = (5/13, 3.5/13, 4.5/13)$ obtenemos las probabilidades superiores \overline{Q}_{PMM}^1 y \overline{Q}_{PMM}^2 descritas en la Tabla 3.2. Sus probabilidades inferiores conjugadas \underline{Q}_{PMM}^1 y \underline{Q}_{PMM}^2 son dos aproximaciones interiores de \underline{Q} en \mathcal{C}_{PMM} .

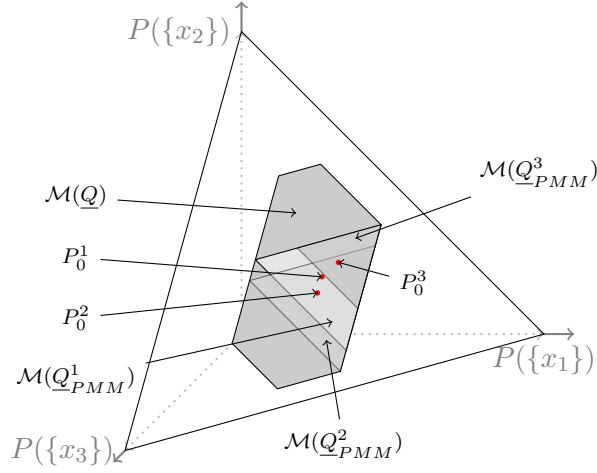


Figura 3.2: Representación gráfica de la probabilidad inferior \underline{Q} del Ejemplo 3.2 y de sus aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{PMM} encontradas.

Para ver que estas aproximaciones son no dominantes seguimos el procedimiento del Ejemplo 3.1. Así, si \underline{Q}' es otra aproximación interior de \underline{Q} en \mathcal{C}_{PMM} verificando $\bar{Q} \geq \bar{Q}' \succeq \bar{Q}^1_{PMM}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{Q}'(\{x_1\}) &= 0.5. \\ \bar{Q}'(\{x_1, x_2\}) &= 0.9. \\ \bar{Q}'(\{x_2, x_3\}) &= 0.8.\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1.1 resulta

$$\begin{aligned}\bar{Q}'(\{x_1, x_2\}) &= \bar{Q}'(\{x_1\}) + \bar{Q}'(\{x_2\}), \\ \bar{Q}'(\{x_2, x_3\}) &= \bar{Q}'(\{x_2\}) + \bar{Q}'(\{x_3\}).\end{aligned}$$

Despejando, se obtiene $\bar{Q}'(\{x_2\}) = 0.4$ y $\bar{Q}'(\{x_3\}) = 0.4$, de lo que se deduce que $\bar{Q}' = \bar{Q}^1_{PMM}$. De igual forma, teniendo en cuenta que cualquier otro modelo pari mutuel \underline{Q}'' tal que $\bar{Q} \geq \bar{Q}'' \succeq \bar{Q}^2_{PMM}$ debe cumplir

$$\begin{aligned}\bar{Q}''(\{x_1\}) &= 0.5 \\ \bar{Q}''(\{x_1, x_3\}) &= 0.95 \\ \bar{Q}''(\{x_2, x_3\}) &= 0.8\end{aligned}$$

se concluye que \bar{Q}^2_{PMM} es no dominante. Por otro lado, tomando $\delta = 0.2$ y $P^3_0 = (5/12, 4/12, 3/12)$ se obtiene la aproximación interior \underline{Q}^3_{PMM} . Su probabilidad superior conjugada se indica en la Tabla 3.2. \underline{Q}^3_{PMM} es un ejemplo

de aproximación interior dominante: observando la Tabla 3.2 es claro que domina a \underline{Q}_{PMM}^1 . Una representación gráfica de la situación estudiada en este ejemplo se muestra en la Figura 3.2. \diamond

Veamos ahora un caso en el que existe una única aproximación interior en \mathcal{C}_{PMM} para un determinado valor del parámetro de distorsión.

Ejemplo 3.3. Sea \underline{P} la probabilidad inferior del Ejemplo 3.1. En dicho ejemplo, encontramos dos aproximaciones interiores distintas en \mathcal{C}_{LV} con un parámetro de distorsión asociado $\delta = 0.3$. Sin embargo, \underline{P} sólo admite una aproximación interior en \mathcal{C}_{PMM} para este valor de δ :

Sea \underline{P}_{PMM} una aproximación interior de \underline{P} en \mathcal{C}_{PMM} definida por $\delta = 0.3$ y una probabilidad P_0 . Entonces, P_0 debe verificar:

$$\begin{aligned} P_0(\{x_1\}) &\leq 5/13 & P_0(\{x_1\}) + P_0(\{x_2\}) &\leq 9/13. \\ P_0(\{x_2\}) &\leq 6/13 & P_0(\{x_1\}) + P_0(\{x_3\}) &\leq 9/13. \\ P_0(\{x_3\}) &\leq 6/13 & P_0(\{x_2\}) + P_0(\{x_3\}) &\leq 8/13. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la propiedad de normalización, de la última desigualdad se deduce

$$1 \leq 8/13 + P_0(\{x_1\}) \implies P_0(\{x_1\}) \geq 5/13 \implies P_0(\{x_1\}) = 5/13.$$

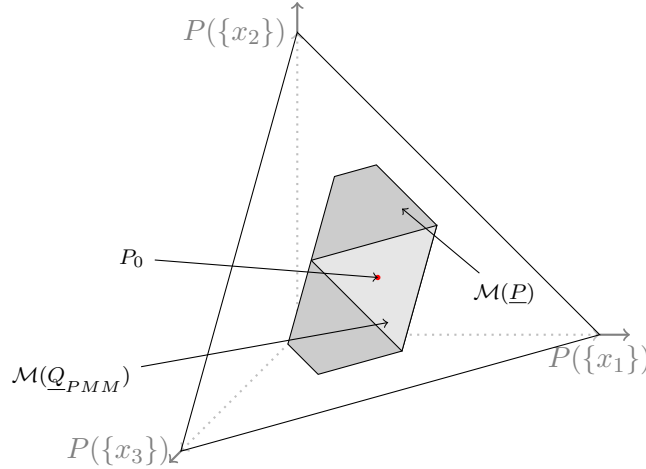


Figura 3.3: Representación gráfica de la probabilidad inferior \underline{P} del Ejemplo 3.3 y de su única aproximación interior \underline{Q}_{PMM} en \mathcal{C}_{PMM} con $\delta = 0.3$.

Análogamente, de las otras dos desigualdades de la columna derecha se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} 1 &\leq 9/13 + P_0(\{x_2\}) \implies P_0(\{x_2\}) \geq 4/13. \\ 1 &\leq 9/13 + P_0(\{x_3\}) \implies P_0(\{x_3\}) \geq 4/13. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de $P_0(\{x_1\})$ se llega a que la única probabilidad que cumple todas las restricciones es $P_0 = (5/13, 4/13, 4/13)$. La situación descrita en este ejemplo se puede observar gráficamente en la Figura 3.3. \diamond

Por otro lado, al igual que en las aproximaciones interiores mediante modelos linear-vacuous, la distancia de Baroni-Vicig entre el modelo inicial y el transformado se minimiza para el mayor valor posible del parámetro de distorsión. En el Ejemplo 3.2, $d_{BV}(\underline{Q}_{PMM}^1, \underline{Q}) = d_{BV}(\underline{Q}_{PMM}^2, \underline{P}) = 0.45$ y $d_{BV}(\underline{Q}_{PMM}^3, \underline{P}) = 0.75$.

Proposición 3.5. *Una aproximación interior en \mathcal{C}_{PMM} de una probabilidad inferior coherente minimiza la distancia de Baroni-Vicig si y sólo si se maximiza el parámetro de distorsión δ .*

Demostración. Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente y \underline{P}_{PMM} una aproximación interior suya en \mathcal{C}_{PMM} . Denotamos por \bar{P} y \bar{P}_{PMM} a sus respectivas probabilidades superiores conjugadas. Entonces, la distancia de Baroni-Vicig viene dada por:

$$d_{BV}(\underline{P}_{PMM}, \underline{P}) = d_{BV}(\bar{P}, \bar{P}_{PMM}) = \sum_{A \subseteq \mathcal{X}} (\bar{P}(A) - \bar{P}_{PMM}(A)). \quad (3.6)$$

La primera igualdad en la ecuación (3.6) se cumple debido a que, $\forall A \subseteq \mathcal{X}$, $\bar{P}(A) - \bar{P}_{PMM}(A) = 1 - \underline{P}(A^c) - 1 + \underline{P}_{PMM}(A^c) = \underline{P}_{PMM}(A^c) - \underline{P}(A^c)$. Ahora, si asumimos que $\underline{P}(A) > 0 \forall A \neq \emptyset$, se cumple que:

$$\begin{aligned} \min\{(1 + \delta)P_0(A), 1\} = (1 + \delta)P_0(A) &\implies \bar{P}(A) - \bar{P}_{PMM}(A) = \\ &= \bar{P}(A) - (1 + \delta)P_0(A). \end{aligned}$$

Sustituyendo el desarrollo del término $\sum_{A \subseteq \mathcal{X}} P_0(A)$ calculado en la Proposición 3.2 se llega a la expresión:

$$d_{BV} = \sum_{A \subseteq \mathcal{X}} \bar{P}(A) - (1 + \delta)(2^{n-1} - 1),$$

donde hemos denotado por n al cardinal de \mathcal{X} . De estas expresiones se deduce que d_{BV} aumenta cuanto más pequeño sea δ , y alcanza un mínimo para el mayor valor permitido de δ . \square

Al igual que para los modelos linear vacuous, las aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{PMM} minimizan d_{BV} cuando el parámetro de distorsión es el máximo permitido. Siguiendo los mismos pasos que en la sección 3.1, damos una caracterización de dicho máximo. Para cualquier $\delta > 0$, definimos la probabilidad superior:

$$\overline{Q}_\delta(A) = \begin{cases} \frac{\overline{P}(A)}{1+\delta} & \text{si } \overline{P}(A) < 1 \\ 1 & \text{si } \overline{P}(A) = 1 \end{cases} \quad \underline{Q}_\delta(A) = 1 - \overline{Q}_\delta(A^c) \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}. \quad (3.7)$$

Obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.6. 1. Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente. Para un factor de distorsión $\delta > 0$, existe una probabilidad P_0 de forma que el modelo pari mutuel definido por (P_0, δ) constituye una aproximación interior de \underline{P} si y sólo si \underline{Q}_δ evita pérdida segura.

2. El conjunto $\Lambda_{PMM} = \{\delta > 0 \mid \mathcal{M}(\underline{Q}_\delta) \neq \emptyset\}$ tiene un máximo δ_{PMM} .

Demostración.

1. $\boxed{\implies}$ Sea (P_0, δ) un modelo pari mutuel que aproxima interiormente a \underline{P} . Entonces, $\overline{P}(A) \geq \min\{(1 + \delta)P_0(A), 1\} \forall A \subset \mathcal{X}$. Teniendo en cuenta la definición de \overline{Q}_δ dada por (3.7), esto equivale a $\overline{Q}_\delta(A) \geq P_0(A) \forall A \subset \mathcal{X}$, luego $\mathcal{M}(\underline{Q}_\delta) \neq \emptyset$ y \underline{Q}_δ evita pérdida segura.

$\boxed{\impliedby}$ Partimos de la hipótesis “ \underline{Q}_δ evita pérdida segura”, es decir, $\mathcal{M}(\underline{Q}_\delta) \neq \emptyset$. Entonces, existe una probabilidad P_0 tal que $\overline{Q}_\delta(A) \geq P_0(A) \forall A \subset \mathcal{X}$. Empleando la definición de \overline{Q}_δ , se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{P}(A) &\geq (1 + \delta)P_0(A), \text{ si } \overline{P}(A) < 1. \\ P_0(A) &= 1, \quad \text{ si } \overline{P}(A) = 1. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el modelo pari mutuel definido por (P_0, δ) verifica $\overline{P}(A) \geq \min\{(1 + \delta)P_0(A), 1\}$, concluimos que este modelo pari mutuel es una aproximación interior de \underline{P} .

2. La demostración es análoga a la del apartado 2 de la Proposición 3.3. \square

A partir de las proposiciones 3.5 y 3.6 aseguramos que las aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{PMM} asociadas con $\delta_{PMM} = \max \Lambda_{PMM}$ y cualquier probabilidad $P_0 \in \mathcal{M}(\underline{Q}_{\delta_{PMM}})$ son no dominantes. Sin embargo, si el valor del parámetro de distorsión es menor que δ_{PMM} sí es posible que la aproximación interior en \mathcal{C}_{PMM} resultante sea dominante. Un ejemplo de ello es la aproximación interior \underline{Q}_{PMM}^3 del Ejemplo 3.2.

Capítulo 4

Aplicación de aproximaciones a problemas de decisión

En ocasiones, nos encontramos en situaciones donde debemos tomar una decisión en función de un conjunto de posibles consecuencias A . En la teoría de la decisión clásica, se asume que es posible disponer de una función $u: A \rightarrow \mathbb{R}$, algunas veces denominada utilidad, que representa la ganancia asignada a cada consecuencia. A menudo, las consecuencias también dependen de variables cuyo valor es incierto. Denotamos por \mathcal{X} al conjunto de estados de la naturaleza. Clásicamente, se dispone de una medida de probabilidad P que asigna una probabilidad a cada estado de la naturaleza $x \in \mathcal{X}$. Si D es el conjunto de posibles alternativas, podemos establecer una primera selección de alternativas considerando sólo aquellas que no están dominadas punto a punto por otra alternativa:

$$\text{opt}_{\geq} = \{X \in D \mid \text{o bien } u \circ Y = u \circ X, \text{ o bien } u \circ Y \not\geq u \circ X \forall Y \in D\}.$$

De entre este conjunto, una alternativa $X: \mathcal{X} \rightarrow A$ es considerada óptima si maximiza la utilidad esperada con respecto a P :

$$\text{opt}_{E_P}(D) = \left\{ X \in \text{opt}_{\geq} \mid E_P(u \circ X) = \max_{Y \in D} E_P(u \circ Y) \right\},$$

donde $E_P(u \circ X)$ es la esperanza de $u \circ X$ con respecto a P :

$$E_P(u \circ X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(\{x\})(u \circ X)(x).$$

Sin embargo, no siempre se conoce con precisión la distribución de probabilidad P . Además, para especificar una utilidad u en las condiciones anteriores el agente debe poder especificar un ranking de preferencias entre todas las posibles consecuencias, lo que tampoco es siempre posible. En estos casos, se pueden emplear modelos de probabilidades imprecisas para representar la información disponible. En este capítulo nos planteamos comparar

los resultados de un problema de decisión en un contexto impreciso cuando sustituimos el modelo inicial por una aproximación interior o exterior. En la primera sección, realizamos una introducción teórica acerca de la teoría de la decisión bajo imprecisión. Después, estudiamos las posibles relaciones entre el modelo inicial y los transformados para algunos criterios de decisión relevantes. Finalmente, describimos algunas formas de tratar problemas de decisión cuando la imprecisión es más severa y aplicamos estas cuestiones a un ejemplo real prototípico.

4.1. Teoría de la decisión en un contexto impreciso

En primer lugar, consideremos la situación en la que hay información probabilística parcial y existe una estructura de preferencia cardinal entre todas las posibles consecuencias del conjunto A , es decir, se dispone de una utilidad u bien definida en \mathbb{R} . En tal caso, se puede considerar una previsión inferior \underline{P} o su representación equivalente en términos de un conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P})$ para representar la información disponible. Entonces, para una decisión X , se define la ganancia inferior esperada como:

$$\underline{E}_{\underline{P}}(u \circ X) := \underline{P}(u \circ X) = \min_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} \sum_{x \in \mathcal{X}} P(\{x\})(u \circ X)(x), \quad (4.1)$$

y la ganancia superior esperada como:

$$\overline{E}_{\underline{P}}(u \circ X) := \overline{P}(u \circ X) = \max_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} \sum_{x \in \mathcal{X}} P(\{x\})(u \circ X)(x), \quad (4.2)$$

que se relaciona con la ganancia inferior esperada mediante la expresión $\overline{P}(u \circ X) = -\underline{P}(-u \circ X)$. En la teoría de las probabilidades imprecisas, esta función se corresponde con la extensión natural de \underline{P} . A partir de esta definición, hay varios criterios de elección de decisiones óptimas [13]:

Γ -maximin: Se eligen aquellas alternativas que maximicen la ganancia en el peor supuesto (las que producen la mayor utilidad inferior esperada):

$$\text{opt}_{\underline{P}}(D) = \left\{ X \in \text{opt}_{\geq} \mid \underline{P}(u \circ X) = \max_{Y \in \text{opt}_{\geq}} \underline{P}(u \circ Y) \right\}. \quad (4.3)$$

Γ -maximax: Se eligen aquellas alternativas de forma que, en el mejor de los supuestos, producen la mayor ganancia:

$$\text{opt}_{\overline{P}}(D) = \left\{ X \in \text{opt}_{\geq} \mid \overline{P}(u \circ X) = \max_{Y \in \text{opt}_{\geq}} \overline{P}(u \circ Y) \right\}. \quad (4.4)$$

Maximality: Se descarta cada alternativa X para la que existe otra alternativa Y cuya ganancia esperada domina a la de X con respecto a todos los elementos de $\mathcal{M}(\underline{P})$:

$$\text{opt}_{>\underline{P}}(D) = \left\{ X \in \text{opt}_{\geq} \mid \underline{P}(u \circ Y - u \circ X) \leq 0 \ \forall Y \in \text{opt}_{\geq} \right\}. \quad (4.5)$$

Interval dominance: Asociado a cada alternativa X se considera el intervalo de esperanza inferior y superior $[\underline{P}(u \circ X), \overline{P}(u \circ X)]$. Se eligen aquellas alternativas de forma que la mayor ganancia esperada posible $\overline{P}(u \circ X)$ sea mayor o igual que la peor ganancia esperada $\underline{P}(u \circ Y)$ de cada una de las demás decisiones Y :

$$\text{opt}_{\sqsupseteq_P}(D) = \{X \in \text{opt}_{\geq} \mid \overline{P}(u \circ X) \geq \underline{P}(u \circ Y) \forall Y \in \text{opt}_{\geq}\}. \quad (4.6)$$

E -admissibility: Se eligen aquellas decisiones que maximizan la utilidad esperada para al menos una probabilidad en $\mathcal{M}(\underline{P})$:

$$\text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P})}(D) = \{X \in \text{opt}_{\geq} \mid \exists P \in \mathcal{M}(\underline{P}) \text{ tal que} \\ E_P(u \circ Y) \leq E_P(u \circ X) \forall Y \in \text{opt}_{\geq}\}. \quad (4.7)$$

4.2. Comparación de criterios de decisión

En esta sección nos planteamos comparar los resultados del modelo inicial y del transformado en un problema de decisión con un contexto impreciso. Para un conjunto de alternativas D , comparamos las soluciones óptimas de cada modelo de acuerdo a los criterios Γ -*maximin*, Γ -*maximax*, *maximality*, *interval dominance* y *E-admissibility*.

Puesto que para poder aplicar estos modelos se asume que existe una única utilidad u cardinal bien definida, podemos simplificar la notación empleada en la sección anterior y denotar $J_X := u \circ X: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ para cada alternativa X . En la literatura, a veces se denomina directamente utilidad a las funciones J_X [13]. El interés de emplear los modelos transformados en este tipo de problemas reside en el cálculo de las utilidades esperadas (4.1) y (4.2): si hay 2-monotonía estos valores se pueden hallar de forma sencilla mediante la integral de Choquet, mientras que en el caso general el cálculo de la extensión natural o de los puntos extremos del conjunto credal pueden resultar más complejos.

4.2.1. El modelo transformado es una aproximación interior

Comenzamos estudiando el caso en el que el modelo transformado \underline{Q} es una aproximación interior de la probabilidad inferior original \underline{P} . En primer lugar, veremos que existe una relación de inclusión entre los conjuntos de decisiones asociados a \underline{P} y \underline{Q} en términos de *maximality*, *interval dominance* y *E-admissibility*.

Proposición 4.1. *Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente y \underline{Q} una aproximación interior suya. Para un conjunto de alternativas arbitrario D , se cumplen los siguientes resultados:*

$$(1) \text{opt}_{>\underline{Q}}(D) \subseteq \text{opt}_{>\underline{P}}(D).$$

$$(2) \text{opt}_{\sqsupset Q}(D) \subseteq \text{opt}_{\sqsupset P}(D).$$

$$(3) \text{opt}_{\mathcal{M}(Q)}(D) \subseteq \text{opt}_{\mathcal{M}(P)}(D).$$

Demostración.

(1) Sea $d \in \text{opt}_{>Q}(D)$ y sea J_d su utilidad asociada. Recordamos (1.7) que la extensión natural de \underline{P} se define como

$$\underline{E}_P(g) := \underline{P}(g) = \min_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x)P(\{x\}).$$

Puesto que \underline{Q} es una aproximación interior de \underline{P} , se tiene que $\mathcal{M}(\underline{Q}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$. Por tanto, $0 \leq \underline{P}(J_e - J_d) \leq \underline{Q}(J_e - J_d) \forall e \in D$.

(2) Sea $d \in \text{opt}_{\sqsupset Q}(D)$ y sea J_d su utilidad asociada. Se cumple que $\overline{Q}(J_d) \geq \underline{Q}(J_e) \forall e \in D$. Como \underline{Q} es una aproximación interior de \underline{P} , se tiene que $\underline{P}(J_e) \leq \underline{Q}(J_e) \forall e \in D$ y $\overline{P}(J_d) \geq \overline{Q}(J_d)$. Por tanto, se deduce que $\overline{P}(J_d) \geq \underline{P}(J_e) \forall e \in D$.

(3) Sea $d \in \text{opt}_{\mathcal{M}(Q)}(D)$ y sea J_d su utilidad asociada. Entonces, $\exists P \in \mathcal{M}(Q)$ tal que $E_P(J_e) \leq E_P(J_d) \forall e \in D$. Como \underline{Q} es una aproximación interior de \underline{P} se tiene que $\mathcal{M}(Q) \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$, luego $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$. \square

A continuación, veamos que estas inclusiones pueden ser estrictas y que no hay relación entre los conjuntos de alternativas óptimas según los criterios $\Gamma - \text{maximin}$ y $\Gamma - \text{maximax}$.

Ejemplo 4.1. Sea el espacio probabilístico $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, la probabilidad inferior coherente \underline{P} y su aproximación interior 2-monótona \underline{Q} , definidas en la siguiente tabla:

A	$\underline{P}(A)$	$\underline{Q}(A)$	A	$\underline{P}(A)$	$\underline{Q}(A)$
$\{x_1\}$	0.1	0.1	$\{x_2, x_3\}$	0.3	0.3
$\{x_2\}$	0	0.1	$\{x_2, x_4\}$	0.4	0.4
$\{x_3\}$	0	0.1	$\{x_3, x_4\}$	0.4	0.4
$\{x_4\}$	0.3	0.3	$\{x_1, x_2, x_3\}$	0.5	0.5
$\{x_1, x_2\}$	0.1	0.2	$\{x_1, x_2, x_4\}$	0.6	0.7
$\{x_1, x_3\}$	0.3	0.3	$\{x_1, x_3, x_4\}$	0.7	0.8
$\{x_1, x_4\}$	0.6	0.6	$\{x_2, x_3, x_4\}$	0.6	0.6
			\mathcal{X}	1	1

Consideramos el conjunto de alternativas $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ y sus utilida-

des asociadas:

	x_1	x_2	x_3	x_4
J_1	3	2	-0.9	3
J_2	2	3	2/3	2
J_3	1/2	3	-1/3	3
J_4	19/20	6/5	8/5	1

Calculando las correspondientes extensiones naturales mediante el código mostrado en el Apéndice A.6 se obtienen los siguientes valores:

	J_1	J_2	J_3	J_4	$J_1 - J_2$	$J_2 - J_1$
\underline{P}	1.44	1.46	1.16	1.25	-0.026	-0.4
\overline{P}	2.7	2.3	2.25	1.5	0.4	0.026
\underline{Q}	1.73	1.7	1.25	1.25	0.03	-0.343
\overline{Q}	2.41	2.06	2.16	1.5	0.343	-0.03

Evaluando para qué alternativas se alcanzan máximos en $\underline{P}, \underline{Q}, \overline{P}$ y \overline{Q} se obtienen directamente las decisiones óptimas:

- Para $D_1 = \{d_1, d_2, d_3\}$, $\text{opt}_{\underline{P}}(D_1) = \{d_2\}$ y $\text{opt}_{\underline{Q}}(D_1) = \{d_1\}$.
- Para $D_2 = \{d_2, d_3, d_4\}$, $\text{opt}_{\overline{P}}(D_2) = \{d_2\}$ y $\text{opt}_{\overline{Q}}(D_2) = \{d_3\}$.

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\underline{P}(J_1 - J_2) \leq 0$ y $\underline{P}(J_2 - J_1) \leq 0$, deducimos que d_1 y d_2 cumplen el criterio *maximality*. Sin embargo, como $\underline{Q}(J_1 - J_2) \not\leq 0$, se tiene que d_2 no es óptima con respecto a este criterio cuando sustituimos \underline{P} por \underline{Q} . Así, encontramos las decisiones óptimas:

- Para $D_3 = \{d_1, d_2\}$, $\text{opt}_{\geq \underline{Q}}(D_3) = \{d_1\}$ y $\text{opt}_{\geq \underline{P}}(D_3) = \{d_1, d_2\}$.

En cuanto al criterio *interval dominance*, es claro que J_1 y J_4 son decisiones óptimas al considerar \underline{P} . Sin embargo, como $\underline{Q}(J_4) \not\leq \underline{Q}(J_1)$, la alternativa J_4 no es óptima cuando trabajamos con \underline{Q} . Entonces, se tiene:

- Para $D_4 = \{d_1, d_4\}$, $\text{opt}_{\neg \underline{Q}}(D_4) = \{d_1\}$ y $\text{opt}_{\neg \underline{P}}(D_4) = \{d_1, d_4\}$.

Finalmente, para hallar las soluciones óptimas según el criterio *E-admissibility*, consideramos las restricciones

$$\begin{aligned}
 \underline{P}(A) &\leq \sum_{x \in \mathcal{X}} P(\{x\}) I_A(\{x\}) \quad \forall A \subseteq \mathcal{X} \\
 \sum_{x \in \mathcal{X}} P(\{x\}) &= 1 \quad P(\{x\}) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} \\
 \sum_{x \in \mathcal{X}} (J_e(x) - J_d(x)) P(\{x\}) &\leq 0 \quad \forall e \in D \setminus \{d\}
 \end{aligned}$$

y estudiamos en qué casos la región factible no es vacía. Encontramos las siguientes decisiones óptimas para \underline{P} y \underline{Q} :

- Para el conjunto $D_5 = \{d_1, d_2, d_4\}$, se obtiene que $\text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q})}(D_5) = \{d_1\}$ y $\text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P})}(D_5) = \{d_1, d_2\}$.

Criterio	Conjunto de posibles decisiones	Decisiones óptimas para \underline{P}	Decisiones óptimas para \underline{Q}
Γ -maximin	$D_1 = \{d_1, d_2, d_3\}$	d_2	d_1
Γ -maximax	$D_2 = \{d_1, d_3, d_4\}$	d_2	d_3
Maximality	$D_3 = \{d_1, d_2\}$	d_1, d_2	d_1
Interval dominance	$D_4 = \{d_1, d_4\}$	d_1, d_4	d_1
E-admissibility	$D_5 = \{d_1, d_2, d_4\}$	d_1, d_2	d_1

Tabla 4.1: Resumen de las decisiones óptimas encontradas para \underline{P} y \underline{Q} según cada criterio considerado.

En la Tabla 4.1 incluimos un resumen de las decisiones óptimas halladas según cada modelo. Como se puede observar, en este caso las inclusiones probadas en la Proposición 4.1 son estrictas. \diamond

4.2.2. El modelo transformado es una aproximación exterior

Por otro lado, estudiamos ahora el caso en el que el modelo transformado \underline{Q} es una aproximación exterior del modelo original \underline{P} . En este caso $\mathcal{M}(\underline{P}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{Q})$ y, en consecuencia, las relaciones de inclusión encontradas para aproximaciones interiores irán a la inversa.

Proposición 4.2. *Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente y \underline{Q} una aproximación exterior suya. Para un conjunto de alternativas arbitrario D , se cumplen los siguientes resultados:*

- (1) $\text{opt}_{>\underline{Q}}(D) \subseteq \text{opt}_{>\underline{P}}(D)$.
- (2) $\text{opt}_{\sqsupseteq\underline{Q}}(D) \subseteq \text{opt}_{\sqsupseteq\underline{P}}(D)$.
- (3) $\text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q})}(D) \subseteq \text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P})}(D)$.

Demostración. (1) Sea $d \in \text{opt}_{>\underline{Q}}(D)$ y sea J_d su utilidad asociada. Puesto que \underline{Q} es una aproximación exterior de \underline{P} , se tiene que $\mathcal{M}(\underline{P}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{Q})$. Por tanto, $0 \leq \underline{Q}(J_e - J_d) \leq \underline{P}(J_e - J_d) \forall e \in D$.

(2) Sea $d \in \text{opt}_{\sqsupseteq\underline{Q}}(D)$ y sea J_d su utilidad asociada. Entonces, $\overline{Q}(J_d) \geq \underline{Q}(J_e) \forall e \in D$. Como \underline{Q} es una aproximación exterior de \underline{P} , se tiene que $\underline{Q}(J_e) \leq \underline{P}(J_e) \forall e \in D$ y $\overline{Q}(J_d) \geq \overline{P}(J_d)$. Por tanto, se deduce que $\overline{P}(J_d) \geq \underline{P}(J_e) \forall e \in D$.

(3) Sea $d \in \text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q})}(D)$ y sea J_d su utilidad asociada. Entonces, $\exists P \in \mathcal{M}(\underline{Q})$ tal que $E_P(J_e) \leq E_P(J_d) \forall e \in D$. Como \underline{Q} es una aproximación exterior de \underline{P} se tiene que $\mathcal{M}(\underline{P}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{Q})$, luego $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$. \square

Como es de esperar, estas inclusiones pueden ser estrictas. Además, en general, no hay relación entre los conjuntos de decisiones óptimas obtenidos para ambos modelos según los criterios de $\Gamma - maximin$ y $\Gamma - maximax$.

Ejemplo 4.2. Sea el espacio probabilístico $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, la probabilidad inferior coherente \underline{P} y su aproximación exterior 2-monótona \underline{Q} , definidas en la siguiente tabla:

A	$\underline{P}(A)$	$\underline{Q}(A)$	A	$\underline{P}(A)$	$\underline{Q}(A)$
$\{x_1\}$	0.1	0.1	$\{x_2, x_3\}$	0.3	0.2
$\{x_2\}$	0	0	$\{x_2, x_4\}$	0.4	0.4
$\{x_3\}$	0	0	$\{x_3, x_4\}$	0.4	0.4
$\{x_4\}$	0.3	0.3	$\{x_1, x_2, x_3\}$	0.5	0.5
$\{x_1, x_2\}$	0.1	0.1	$\{x_1, x_2, x_4\}$	0.6	0.6
$\{x_1, x_3\}$	0.3	0.3	$\{x_1, x_3, x_4\}$	0.7	0.7
$\{x_1, x_4\}$	0.6	0.5	$\{x_2, x_3, x_4\}$	0.6	0.6
			\mathcal{X}	1	1

Consideramos el conjunto de alternativas $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ y sus utilidades asociadas:

	x_1	x_2	x_3	x_4
J_1	3	2	-0.9	3
J_2	1.7	3	2/3	2
J_3	3	-2	-2	4
J_4	3	3.1	-1	-1

Calculando las correspondientes extensiones naturales empleando el código indicado en el Apéndice A.6 se obtienen los siguientes valores:

	J_1	J_2	J_3	J_4	$J_1 - J_2$	$J_2 - J_1$
\underline{P}	1.44	1.43 $\bar{6}$	1.5	-0.6	0.00 $\bar{3}$	-0.49
\bar{P}	2.7	2.21	1.9	1.43	0.49	-0.00 $\bar{3}$
\underline{Q}	1.34	1.40 $\bar{6}$	0.8	-0.6	-0.19 $\bar{6}$	-0.72
\bar{Q}	2.8	2.21	2.5	1.43	0.72	0.19 $\bar{6}$

Buscando los máximos en $\underline{P}, \underline{Q}, \bar{P}$ y \bar{Q} se obtienen directamente las decisiones óptimas:

- Para $D_1 = \{d_1, d_2, d_3\}$, $\text{opt}_{\underline{P}}(D_1) = \{d_1\}$ y $\text{opt}_{\underline{Q}}(D_1) = \{d_2\}$.
- Para $D_2 = \{d_2, d_3, d_4\}$, $\text{opt}_{\bar{P}}(D_2) = \{d_2\}$ y $\text{opt}_{\bar{Q}}(D_2) = \{d_3\}$.

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\underline{Q}(J_1 - J_2) \leq 0$ y $\underline{Q}(J_2 - J_1) \leq 0$, deducimos que d_1 y d_2 cumplen el criterio *maximality*. Sin embargo, como $\underline{P}(J_1 - J_2) \not\leq 0$, se tiene que d_2 no es óptima con respecto a este criterio cuando trabajamos con la probabilidad inferior original \underline{P} . Así, encontramos las decisiones óptimas:

- Para $D_3 = \{d_1, d_2\}$, $\text{opt}_{\geq \underline{Q}}(D_3) = \{d_1, d_2\}$ y $\text{opt}_{\geq \underline{P}}(D_3) = \{d_1\}$.

Para el criterio *interval dominance*, es claro que J_4 no es una decision óptima al considerar \underline{P} , pues $\underline{Q}(J_4) \not\subseteq \underline{Q}(J_1)$. Sin embargo, J_4 sí resulta ser óptima cuando empleamos la aproximación exterior \underline{Q} . Por lo tanto, se tiene:

- Para $D_4 = \{d_1, d_4\}$, $\text{opt}_{\sqsupseteq \underline{Q}}(D_4) = \{d_1, d_4\}$ y $\text{opt}_{\sqsupseteq \underline{P}}(D_4) = \{d_1\}$.

Para concluir el ejemplo, procediendo como en el Ejemplo 4.1 encontramos las siguientes decisiones óptimas con respecto al criterio *E-admissibility*:

- Considerando de nuevo D_1 , $\text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q})}(D_5) = \{d_1, d_2, d_3\}$ y $\text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P})}(D_5) = \{d_1, d_3\}$.

Criterio	Conjunto de posibles decisiones	Decisiones óptimas para \underline{P}	Decisiones óptimas para \underline{Q}
Γ -maximin	$D_1 = \{d_1, d_2, d_3\}$	d_1	d_2
Γ -maximax	$D_2 = \{d_1, d_3, d_4\}$	d_2	d_3
Maximality	$D_3 = \{d_1, d_2\}$	d_1	d_1, d_2
Interval dominance	$D_4 = \{d_1, d_4\}$	d_1	d_1, d_4
E-admissibility	$D_5 = \{d_1, d_2, d_4\}$	d_1, d_3	d_1, d_2, d_3

Tabla 4.2: Resumen de las decisiones óptimas encontradas para \underline{P} y \underline{Q} según cada criterio considerado.

En la Tabla 4.1 resumimos las decisiones óptimas encontradas en este ejemplo para cada modelo. Como se puede observar, en este caso las inclusiones probadas en la Proposición 4.1 son estrictas. \diamond

Finalmente, en la Tabla 4.3 resumimos las relaciones entre los conjuntos de soluciones óptimas estudiadas en esta sección.

Criterio	Relación
Γ -maximin	—
Γ -maximax	—
Maximality	$\text{opt}_{\geq \underline{Q}^{int}} \subseteq \text{opt}_{\geq \underline{P}} \subseteq \text{opt}_{\geq \underline{Q}^{ext}}$
Interval dominance	$\text{opt}_{\sqsupseteq \underline{Q}^{int}} \subseteq \text{opt}_{\sqsupseteq \underline{P}} \subseteq \text{opt}_{\sqsupseteq \underline{Q}^{ext}}$
E-admissibility	$\text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q}^{int})} \subseteq \text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P})} \subseteq \text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q}^{ext})}$

Tabla 4.3: Relaciones entre los conjuntos de soluciones óptimas de acuerdo a distintos criterios. \underline{P} denota una probabilidad inferior y \underline{Q}^{int} (resp. \underline{Q}^{ext}) es una aproximación interior (resp. exterior) suya.

4.3. Teoría de la decisión bajo imprecisión generalizada

Los criterios introducidos en la sección 4.4 no pueden ser aplicados si no es posible determinar una utilidad u . Esta situación puede darse cuando no podemos evaluar si una consecuencia es mejor que otra. En esta sección introducimos una serie de conceptos para tratar problemas de decisión de este tipo. Seguimos en todo momento el desarrollo detallado en [5].

Definición 4.1. [5, Def.1] Sea A un conjunto no vacío y sea $R_1 \subseteq A \times A$ un preorden en A , es decir, una relación reflexiva y transitiva. Asimismo, sea $R_2 \subseteq R_1 \times R_1$ un preorden en R_1 . La terna $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ se denomina sistema de preferencias en A .

La relación R_1 de la definición 4.1 se interpreta de la siguiente manera: si un par $(a, b) \in R_1$, entonces a es al menos tan deseable como b . Si $(a, b) \notin R_1$ y $(b, a) \notin R_1$, entonces no es posible comparar a y b . Además, si $((a, b)(c, d)) \in R_2$, se tiene que intercambiar la consecuencia b por la consecuencia a es al menos tan deseable como intercambiar la consecuencia d por la consecuencia c . Del mismo modo que para R_1 , si $((a, b)(c, d)) \notin R_2$ y $((c, d)(a, b)) \notin R_2$, entonces el intercambio de b por a es incomparable con el intercambio de d por c .

El concepto de sistema de preferencias ilustra con claridad muchas de las situaciones que surgen en un problema de decisión. Hay numerosos casos prácticos en los que ciertas consecuencias se pueden ordenar según su preferencia, mientras que otras consecuencias resultan ser incomparables con la información disponible del agente. Sin embargo, la definición 4.1 no incluye ninguna condición sobre la racionalidad del sistema. En la siguiente definición se incluye una caracterización axiomática de la consistencia del sistema de preferencias. Antes de enunciarla, necesitamos introducir algo más de notación. Para un preorden R en A , definimos su parte de indiferencia como:

$$I_R = \{(a, b) \in R \mid (b, a) \in R\},$$

y su parte estricta como

$$P_R = \{(a, b) \in R \mid (b, a) \notin R\}.$$

Definición 4.2. [5, Def.2] Sea $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ un sistema de preferencias. Entonces, se dice que \mathcal{A} es consistente si existe una función $u: A \rightarrow [0, 1]$ tal que $\forall a, b, c, d \in A$ se cumplen las dos siguientes propiedades:

- i) Si $(a, b) \in R_1$, entonces $u(a) \geq u(b)$, con igualdad si y sólo si $(a, b) \in I_{R_1}$.
- ii) Si $((a, b), (c, d)) \in R_2$, entonces $u(a) - u(b) \geq u(c) - u(d)$, con igualdad si y sólo si $((a, b)(c, d)) \in I_{R_2}$.

Cada función u en esas condiciones se dice que representa débilmente al sistema de preferencias \mathcal{A} . El conjunto de todas las representaciones débiles de \mathcal{A} se denota por $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. El subconjunto de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ formado por los elementos u que verifican $\inf_{a \in A} u(a) = 0$ y $\sup_{a \in A} u(a) = 1$ se denota por $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$.

La comprobación de la consistencia de un sistema de preferencias se puede realizar mediante programación lineal:

Proposición 4.3. [5, Prop.1] Sea $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ un sistema de preferencias, donde el conjunto de posibles consecuencias $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ es finito y no vacío. Consideremos el problema de programación lineal

$$\max_{(u_1, \dots, u_n, \varepsilon)} \varepsilon \quad (4.8)$$

con las restricciones $0 \leq (u_1, \dots, u_n, \varepsilon) \leq 1$ (todas las variables toman valores en el intervalo $[0,1]$) y

- i) $u_p = u_q$ para todo $(a_p, a_q) \in I_{R_1} \setminus \{(a, a) \mid a \in A\}$.
- ii) $u_q + \varepsilon \leq u_p$ para todo $(a_p, a_q) \in P_{R_1}$.
- iii) $u_p - u_q = u_r - u_s$ para todo $((a_p, a_q), (a_r, a_s)) \in I_{R_2} \setminus \{((a, b), (a, b)) \mid (a, b) \in R_1\}$.
- iv) $u_r - u_s + \varepsilon \leq u_p - u_q$ para todo $((a_p, a_q), (a_r, a_s)) \in P_{R_2}$.

Entonces, \mathcal{A} es consistente si y sólo si la solución de (4.8) es estrictamente positiva.

La propiedad de consistencia es necesaria para asegurarnos de que un sistema de preferencias no presenta incompatibilidades. Por ejemplo, no es posible que un sistema de preferencias consistente verifique $(c, a) \in P_{R_1}$ y $((a, b), (c, b)) \in R_2$ simultáneamente, ya que violaría las condiciones (i) y (ii) de la definición (4.2).

Antes de pasar a definir algunos criterios de decisión en este tipo de modelos vamos a introducir otro concepto relevante.

Definición 4.3. [5, Def.3] Sea $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ un sistema de preferencias consistente. Para $\delta \in (0, 1)$ denotamos por $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}^{\delta}$ al conjunto de todos los elementos u de $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ que satisfacen $u(a) - u(b) \geq \delta$ para todo $(a, b) \in P_{R_1}$ y $u(a) - u(b) - u(c) + u(d) \geq \delta$ para todo $((a, b), (c, d)) \in P_{R_2}$. Entonces, $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}^{\delta}$ se denomina conjunto de representaciones débiles de granularidad al menos δ .

Se puede interpretar la granularidad δ como un parámetro de control. Elegir un cierto valor de δ garantiza que una decisión no se va a considerar superior a otra únicamente a partir de utilidades que presentan diferencias demasiado pequeñas.

Una vez introducido el marco teórico de los sistemas de preferencias, pasamos a estudiar algunas formas de abordar problemas de decisión bajo incertidumbre. Primero, formalizamos el concepto de sistema de decisión.

Definición 4.4. [5, Def.4] Sea \mathcal{X} el conjunto de estados de la naturaleza, A el conjunto de posibles consecuencias y $D = \{X \mid X: \mathcal{X} \rightarrow A\}$ el conjunto de alternativas. Cada subconjunto $\mathcal{G} \subseteq D$ se denomina sistema de decisión.

Una forma de determinar decisiones óptimas en \mathcal{G} se basa en considerar intervalos de esperanza inferior y superior, de forma similar al criterio interval dominance introducido anteriormente. De este modo, denotando $\mathcal{D}_\delta = \mathcal{N}_A^\delta \times \mathcal{M}(\underline{P})$, para una decisión X definimos el intervalo de esperanza generalizado de X con granularidad δ como

$$E_{\mathcal{D}_\delta}(X) = \left[\inf_{u \in \mathcal{N}_A^\delta} \underline{P}(u \circ X), \sup_{u \in \mathcal{N}_A^\delta} \overline{P}(u \circ X) \right] = \left[\underline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(X), \overline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(X) \right]. \quad (4.9)$$

Entonces, definimos los criterios:

\mathcal{D}_δ -maximin: $\underline{\mathcal{G}}_\delta = \{X \in \mathcal{G} \mid \forall Y \in \mathcal{G} \text{ se cumple } \underline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(X) \geq \underline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(Y)\}$.

\mathcal{D}_δ -maximax: $\overline{\mathcal{G}}_\delta = \{X \in \mathcal{G} \mid \forall Y \in \mathcal{G} \text{ se cumple } \overline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(X) \geq \overline{P}_{\mathcal{D}_\delta}(Y)\}$.

Estos criterios son una generalización de Γ -maximin y Γ -maximax para los casos en los que no se dispone de una función utilidad u , por lo que se pueden interpretar de la misma manera. Por otro lado, el cálculo de los intervalos $E_{\mathcal{D}_\delta}$ se puede realizar mediante programación lineal:

Proposición 4.4. [5, Prop.3] Sea $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ un sistema de preferencias consistente, donde $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y para $a_j, a_k \in A$ fijos se cumple $(a_j, b), (b, a_k) \in R_1$ para todo $b \in A$. Sean $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ y $\mathcal{M}(\underline{P})$ un conjunto credal con puntos extremos $\mathcal{E}(\mathcal{M}(\underline{P})) = \{\pi^1, \dots, \pi^T\}$. Si ε^* es el resultado óptimo del problema (4.8), para una decisión $X \in \mathcal{G}$ y para $\varepsilon^* \geq \delta > 0$ consideremos la colección de problemas de programación lineal dados por:

$$\min_{(u_1, \dots, u_n)} \setminus \max_{(u_1, \dots, u_n)} \sum_{i=1}^n u_i \cdot \pi^t(X^{-1}(\{a_i\})) \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (4.10)$$

con las restricciones $0 \leq (u_1, \dots, u_n) \leq 1$, $u_j = 1$, $u_k = 0$ y $i) \div i v)$ de la Proposición 4.3 (fijando $\varepsilon = \delta$). Sean $\underline{\nu}(t, \delta)$ y $\overline{\nu}(t, \delta)$ los valores de la función objetivo del problema (4.10) en su forma de minimizar y maximizar respectivamente. Entonces, se tiene que $E_{\mathcal{D}_\delta} = [\min_t \underline{\nu}(t, \delta), \max_t \overline{\nu}(t, \delta)]$.

También se pueden definir criterios de decisión basados en comparaciones globales entre todas las decisiones disponibles. Dependiendo de las exigencias en el par $(u, P) \in \mathcal{U}_A \times \mathcal{M}(\underline{P})$ se dan 4 criterios distintos:

$\mathcal{A} \mid \mathcal{M}$ -admissibility: $\mathcal{G}_{\mathcal{A} \mid \mathcal{M}} = \{X \in \mathcal{G} \mid \exists u \in \mathcal{U}_A, \exists P \in \mathcal{M}(\underline{P}): \forall Y \in \mathcal{G} \text{ se cumple } E_P(u \circ X) \geq E_P(u \circ Y)\}$.

\mathcal{A} -admissibility: $\mathcal{G}_A = \{X \in \mathcal{G} \mid \exists u \in \mathcal{U}_A: \forall P \in \mathcal{M}(\underline{P}), \forall Y \in \mathcal{G} \text{ se verifica } E_P(u \circ X) \geq E_P(u \circ Y)\}$.

\mathcal{M} -admissibility: $\mathcal{G}_{\mathcal{M}} = \{X \in \mathcal{G} \mid \exists P \in \mathcal{M}(\underline{P}): \forall u \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}, \forall Y \in \mathcal{G} \text{ se tiene } E_P(u \circ X) \geq E_P(u \circ Y)\}$.

$\mathcal{A} \mid \mathcal{M}$ -dominance: $\mathcal{G}_{\mathcal{A} \mid \mathcal{M}}^d = \{X \in \mathcal{G} \mid \forall u \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}, \forall P \in \mathcal{M}(\underline{P}), \forall Y \in \mathcal{G} \text{ se cumple } E_P(u \circ X) \geq E_P(u \circ Y)\}$.

Notamos que los criterios $\mathcal{A} \mid \mathcal{M}$ -admissibility y \mathcal{M} -admissibility se reducen a E -admissibility cuando se dispone de una estructura de preferencia cardinal completa, es decir, cuando se puede disponer de una utilidad u . Además, se tiene que $\mathcal{G}_{\mathcal{A} \mid \mathcal{M}}^d \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}}, \mathcal{G}_{\mathcal{A} \mid \mathcal{M}}$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}}, \mathcal{G}_{\mathcal{A} \mid \mathcal{M}}^d \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A} \mid \mathcal{M}}$.

La siguiente proposición describe un método para comprobar si una decisión pertenece a $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$:

Proposición 4.5. [5, Prop.4] Sea $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ un sistema de preferencias consistente, donde $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Sean $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ y $\mathcal{M}(\underline{P})$ un conjunto credal con puntos extremos $\mathcal{E}(\mathcal{M}(\underline{P})) = \{\pi^1, \dots, \pi^T\}$. Dado un sistema de decisión $\mathcal{G} = \{X_1, \dots, X_k\}$ y $X_z \in \mathcal{G}$ cualquiera, consideremos el problema de programación lineal (4.8) con restricciones adicionales

$$\sum_{i=1}^n u_i \cdot \pi^t(X_z^{-1}(\{a_i\})) \geq \sum_{i=1}^n u_i \cdot \pi^t(X_l^{-1}(\{a_i\})) \quad \forall l = 1, \dots, k, \forall t = 1, \dots, T. \quad (4.11)$$

Entonces, X_z es \mathcal{A} -admisibile si y sólo si la solución óptima de este problema de optimización es estrictamente positiva.

Finalmente, también podemos establecer criterios de decisión basados en comparaciones de decisiones por parejas. Definimos las relaciones binarias:

$$R_{\exists\exists} = \{(X, Y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid \exists u \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}, \exists P \in \mathcal{M}(\underline{P}): E_P(u \circ X) \geq E_P(u \circ Y)\}.$$

$$R_{\forall\forall} = \{(X, Y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid \forall u \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}, \forall P \in \mathcal{M}(\underline{P}): E_P(u \circ X) \geq E_P(u \circ Y)\}.$$

Es posible plantear otras relaciones intermedias entre $R_{\exists\exists}$ y $R_{\forall\forall}$. Estas relaciones están definidas en [5, Sec.4.4]. Notamos que si hay una utilidad u bien definida, la relación $R_{\exists\exists}$ se corresponde con el criterio maximality introducido anteriormente. A partir de estas relaciones, podemos considerar como decisiones óptimas aquellas que no esten dominadas por ninguna otra, lo que nos lleva al siguiente criterio:

Local admissibility: $\text{máx}_R(\mathcal{G}) = \{X \in \mathcal{G} \mid \nexists Z \in \mathcal{G} \text{ t.q. } (Z, X) \in P_R\}$,

donde $R \in \{R_{\exists\exists}, R_{\forall\forall}\}$. Concluimos esta sección dando un algoritmo para comprobar la pertenencia de un par (X, Y) a estas relaciones.

Proposición 4.6. [5, Prop.5] Sea $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ un sistema de preferencias consistente, donde $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Sean $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ y $\mathcal{M}(\underline{P})$ un

conjunto credal con puntos extremos $\mathcal{E}(\mathcal{M}(\underline{P})) = \{\pi^1, \dots, \pi^T\}$. Para un sistema de decisión finito \mathcal{G} , consideremos $X, Y \in \mathcal{G}$ y la colección de problemas de programación lineal dados por:

$$\min_{(u_1, \dots, u_n)} \setminus \max_{(u_1, \dots, u_n)} \sum_{i=1}^n u_i \cdot [\pi^t(X^{-1}(\{a_i\})) - \pi^t(Y^{-1}(\{a_i\}))] \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (4.12)$$

con las restricciones *i) ÷ iv)* de la Proposición 4.3 (fijando $\varepsilon = 0$). Sean $\underline{\nu}(t)$ y $\bar{\nu}(t)$ los valores de la función objetivo del problema (4.12) en su forma de minimizar y maximizar respectivamente. Se cumple:

i) $(X, Y) \in R_{\forall t}$ si y sólo si $\min_t \underline{\nu}(t) \geq 0$.

ii) $(X, Y) \in R_{\exists t}$ si y sólo si $\max_t \bar{\nu}(t) > 0$.

4.4. Un ejemplo ilustrativo

En esta sección, aplicamos los conceptos vistos en este capítulo a un ejemplo práctico que simula una situación real sencilla. Este ejemplo está planteado en [5, Sec.5].

4.4.1. Planteamiento del problema

El problema en cuestión consiste en elegir entre tres ofertas de empleo: J_1, J_2 y J_3 . Cada oferta de empleo tiene asociada un salario mensual y una serie de beneficios adicionales de entre un conjunto $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_5\}$:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
	Prima por horas extra	Guardería	Cursos de preparación	Posibilidad de ascenso	Horario flexible

Además, cada oferta de empleo depende de las diferentes previsiones económicas que pueda haber. En este caso, se consideran cuatro escenarios económicos, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. La situación se describe en la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4
J_1	$\underbrace{(5000, \mathcal{B})}_{a_1}$	$\underbrace{(2700, \{b_1, b_2\})}_{a_2}$	$\underbrace{(2300, \{b_1, b_2, b_3\})}_{a_3}$	$\underbrace{(1000, \emptyset)}_{a_4}$
J_2	$\underbrace{(3500, \{b_1, b_5\})}_{a_5}$	$\underbrace{(2400, \{b_1, b_2\})}_{a_6}$	$\underbrace{(1700, \{b_1, b_2\})}_{a_7}$	$\underbrace{2500, \{b_1\}}_{a_8}$
J_3	$\underbrace{(3000, \{b_1, b_2, b_3\})}_{a_9}$	$\underbrace{(1000, \{b_1\})}_{a_{10}}$	$\underbrace{(2000, \{b_1\})}_{a_{11}}$	$\underbrace{(3000, \{b_1, b_4, b_5\})}_{a_{12}}$

Asumiendo que los distintos beneficios son incomparables entre sí, este planteamiento induce el sistema de preferencias $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$. $A =$

(a_1, \dots, a_{12}) es el conjunto de posibles consecuencias, donde cada consecuencia consiste en un par (y, B) indicando el salario y los beneficios adicionales. La relación R_1 se define de forma natural como

$$R_1 = \{((y_1, B_1), (y_2, B_2)) : y_1 \geq y_2 \wedge B_2 \subseteq B_1\}. \quad (4.13)$$

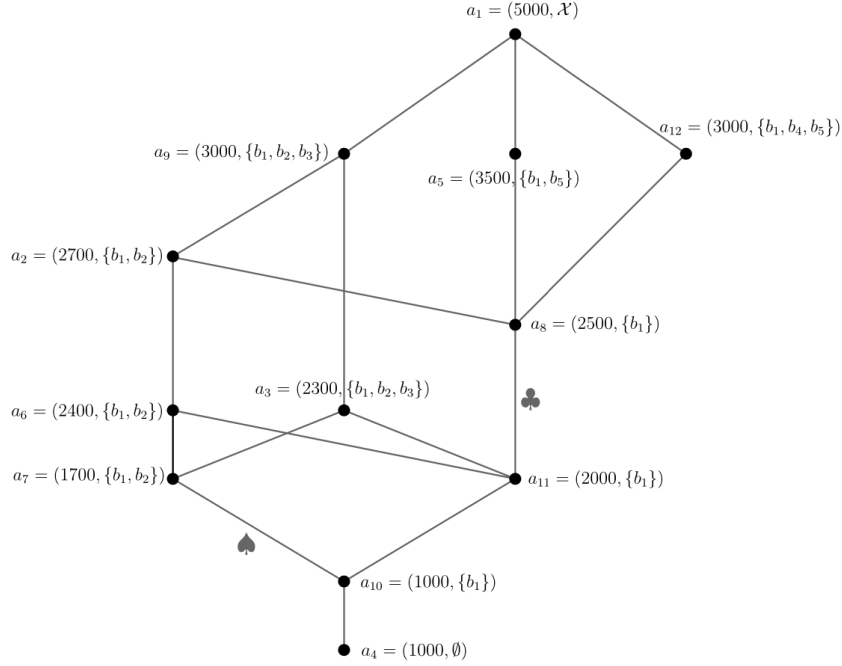


Figura 4.1: Diagrama de Hasse de la relación R_1 del ejemplo [5, Fig.4]. Los símbolos ♣ y ♠ indican ejemplos de elementos de $R_1 \times R_1$ que son comparables con respecto a la relación estricta P_{R_2} .

La interpretación de la relación R_1 es clara: una consecuencia es superior a otra cuando su salario correspondiente es mayor y su conjunto de beneficios asociado contiene al de la otra consecuencia. La relación R_2 se define como:

$$R_2 = \{(((y_1, B_1), (y_2, B_2)), ((y_3, B_3), (y_4, B_4))) : y_1 - y_2 \geq y_3 - y_4 \wedge B_2 \subseteq B_4 \subseteq B_3 \subseteq B_1\}. \quad (4.14)$$

La relación R_2 también tiene una interpretación intuitiva. Como ya se comentó, se trata de una medida de la intensidad de la preferencia entre dos posibles consecuencias. Es claro que es preferible intercambiar B_2 por B_1 a intercambiar B_4 por B_3 , puesto que se cumple $B_2 \subseteq B_4 \subseteq B_3 \subseteq B_1$. Además, es preferible intercambiar y_2 por y_1 a y_4 por y_3 , ya que $y_1 - y_2 \geq y_3 - y_4$.

El diagrama de Hasse de la relación R_1 se ilustra en la Figura 4.1. Adicionalmente, suponemos que se dispone de información para ordenar los

diferentes escenarios económicos por su probabilidad de ocurrencia. Esta información está modelada por el conjunto credal

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{P: P(\{x_1\}) \geq P(\{x_2\}) \geq P(\{x_3\}) \geq P(\{x_4\})\}. \quad (4.15)$$

De acuerdo con [5], los puntos extremos de este conjunto credal son:

	x_1	x_2	x_3	x_4
π_1	1	0	0	0
π_2	1/2	1/2	0	0
π_3	1/3	1/3	1/3	0
π_4	1/4	1/4	1/4	1/4

A partir de los puntos extremos, empleando la expresión

$$\underline{P}(A) = \min \{P(A) \mid P \text{ punto extremo de } \mathcal{M}(\underline{P})\}$$

se deduce que la probabilidad inferior asociada al conjunto credal es:

A	$\underline{P}(A)$	A	$\underline{P}(A)$
$\{x_1\}$	1/4	$\{x_2, x_3\}$	0
$\{x_2\}$	0	$\{x_2, x_4\}$	0
$\{x_3\}$	0	$\{x_3, x_4\}$	0
$\{x_4\}$	0	$\{x_1, x_2, x_3\}$	3/4
$\{x_1, x_2\}$	1/2	$\{x_1, x_2, x_4\}$	2/3
$\{x_1, x_3\}$	1/2	$\{x_1, x_3, x_4\}$	1/2
$\{x_1, x_4\}$	1/3	$\{x_2, x_3, x_4\}$	0

Tabla 4.4: Probabilidad inferior asociada con el conjunto credal (4.15), que modela la ocurrencia de los cuatro escenarios económicos posibles.

Notamos que esta probabilidad inferior no es 2-monótona: basta considerar los subconjuntos $A = \{x_1, x_3\}$ y $B = \{x_1, x_4\}$. Se tiene que $\underline{P}(A \cup B) + \underline{P}(A \cap B) = 3/4$, mientras que $\underline{P}(A) + \underline{P}(B) = 5/6$. De hecho, ninguna probabilidad inferior generada por comparativas es 2-monótona [6].

Es necesario conocer los puntos extremos del conjunto credal para aplicar algunos de los algoritmos de cálculo de decisiones óptimas, como hemos visto en (4.10), (4.11) y (4.12). Aunque en el caso de probabilidades comparativas como (4.15) existen algoritmos para calcularlos [6], esto podría ser complicado para otros conjuntos credales. Sin embargo, si la probabilidad inferior es 2-monótona, hay métodos para hallar los puntos extremos de forma fácil, como comentamos en la sección 1.2.2. Por este motivo, puede resultar de interés trabajar con una aproximación interior o exterior del modelo inicial. Para ilustrar esta metodología, compararemos las soluciones óptimas de este ejemplo obtenidas al trabajar con distintas aproximaciones de la probabilidad inferior de la Tabla 4.4.

4.4.2. Resultados

Comenzamos estudiando distintos criterios de decisión para la probabilidad inferior original dada en la Tabla 4.4. Primero, comprobamos que el sistema de preferencia es consistente en el sentido de la Definición 4.2 aplicando la Proposición 4.3. Con ayuda de `Python`, encontramos 49 relaciones en R_1 , 490 relaciones en P_{R_2} y 4 relaciones en I_{R_2} . El código se muestra en el Apéndice A.7. Resolviendo el problema de programación lineal (4.8), encontramos la solución óptima

$$(u_1, \dots, u_{12}, \varepsilon) = (1, 0.526, 0.474, 0.632, 0.474, 0.316, 0.368, \\ 0.632, 0.053, 0.263, 0.579, 0.053),$$

por lo que el sistema de preferencia \mathcal{A} es consistente ($\varepsilon > 0$). Notamos que esta solución difiere de la encontrada en [5], $\varepsilon^* = 0.037$. Recuperamos esta solución al considerar que $((a_9, a_2)(a_2, a_6))$ pertenece a I_{R_2} en lugar de a P_{R_2} . Esto no es correcto, ya que el conjunto de beneficios asociado a a_9 es $\{b_1, b_2, b_3\}$ y el conjunto asociado a a_2 y a_6 es $\{a_1, a_2\}$. Por lo tanto, creemos que se trata de un error en los resultados de [5].

A continuación, comprobamos cuáles de los empleos J_1, J_2, J_3 son \mathcal{A} -admisibles aplicando la Proposición 4.5. Como el conjunto credal tiene cuatro puntos extremos, debemos resolver el problema (4.8) con las restricciones adicionales dadas en la Proposición 4.5. Por ejemplo, para J_1 y el punto extremo $(1,0,0,0)$ se tienen las dos restricciones:

$$u_1 \geq u_5. \\ u_1 \geq u_9.$$

Procediendo de igual forma con el resto de puntos extremos se deducen las otras seis restricciones:

$$\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \geq \frac{1}{2}(u_5 + u_6). \\ \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \geq \frac{1}{2}(u_9 + u_{10}). \\ \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) \geq \frac{1}{3}(u_5 + u_6 + u_7). \\ \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) \geq \frac{1}{3}(u_9 + u_{10} + u_{11}). \\ \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \geq \frac{1}{4}(u_5 + u_6 + u_7 + u_8). \\ \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \geq \frac{1}{4}(u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12}).$$

Para J_1, J_2 y J_3 obtenemos los valores óptimos $\varepsilon_1 = 0.053$, $\varepsilon_2 = 0$ y $\varepsilon_3 = 0.038$. Entonces, atendiendo al criterio de \mathcal{A} -admissibility, se podrían elegir

los empleos J_1 y J_3 . El empleo J_2 quedaría descartado. Nuestra solución difiere de la de [5], donde obtienen que el único empleo \mathcal{A} -admisibles es J_1 .

Después, calculamos los intervalos de esperanza generalizados dados en (4.9) para granularidades $\delta = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$. Notamos que no tiene sentido considerar granularidades superiores a 0.053, ya que este fue el valor óptimo obtenido al comprobar la consistencia. Resolviendo el problema de programación lineal de la Proposición 4.4 con nuestros códigos, obtenemos:

	$\delta = 0$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.02$	$\delta = 0.03$	$\delta = 0.04$	$\delta = 0.05$
$E_{D_\delta}(J_1)$	[0.25, 1]	[0.2925, 1]	[0.335, 1]	[0.3775, 1]	[0.412, 1]	[0.4625, 1]
$E_{D_\delta}(J_2)$	[0, 1]	[0.08, 0.93]	[0.16, 0.86]	[0.24, 0.79]	[0.32, 0.72]	[0.4, 0.65]
$E_{D_\delta}(J_3)$	[0, 1]	[0.056, 0.93]	[0.113, 0.86]	[0.17, 0.79]	[0.226, 0.72]	[0.283, 0.65]

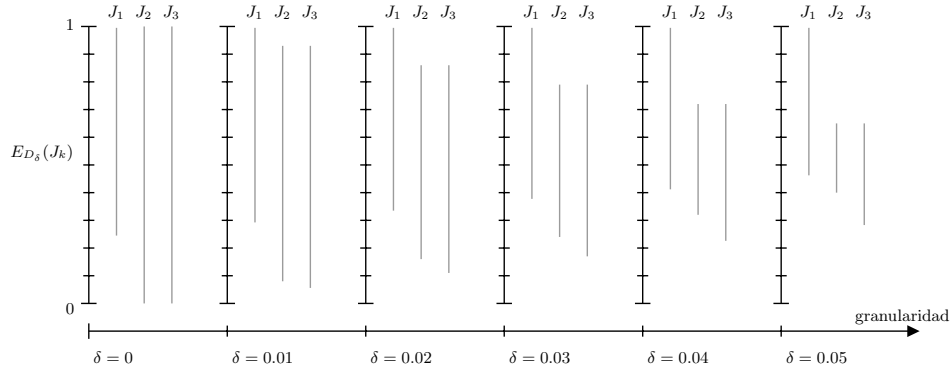


Figura 4.2: Intervalos de esperanza generalizados de los diferentes empleos con respecto a \underline{P} para distintos valores de la granularidad.

Puesto que, independientemente de la granularidad considerada, los límites inferior y superior de J_1 son mayores que los respectivos límites de J_2 y J_3 , el empleo J_1 es óptimo con respecto a los criterios \mathcal{D}_δ -maximin y \mathcal{D}_δ -maximax. Gráficamente, esto se puede observar en la Figura 4.2.

Finalmente, aplicamos la Proposición 4.6 para investigar cómo se comportan entre sí J_1, J_2 y J_3 con respecto a las relaciones $R_{\exists\exists}$ y $R_{\forall\forall}$. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

	(J_1, J_2)	(J_1, J_3)	(J_2, J_1)	(J_2, J_3)	(J_3, J_1)	(J_3, J_2)
$R_{\exists\exists}$	\in	\in	\in	\in	\in	\in
$R_{\forall\forall}$	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin

En este caso no se obtiene ninguna conclusión clara de estas comparaciones. Mientras que todos los empleos son localmente admisibles con respecto a $R_{\exists\exists}$, ninguno lo es con respecto a $R_{\forall\forall}$. A la vista de los resultados obtenidos, probablemente se debería optar por el empleo J_1 . Este empleo es el único

óptimo con respecto a los criterios basados en los intervalos de esperanza generalizados, y también es \mathcal{A} -admisibles.

A continuación, aplicamos estos criterios para aproximaciones interiores y exteriores en \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_∞ de la probabilidad inferior original \underline{P} dada en la Tabla 4.4. Empleando los códigos desarrollados para calcular aproximaciones, encontramos que una aproximación interior de \underline{P} en \mathcal{C}_2 minimizando d_{BV} es:

A	$\underline{P}^I(A)$	A	$\underline{P}^I(A)$
$\{x_1\}$	$7/24$	$\{x_2, x_3\}$	0
$\{x_2\}$	0	$\{x_2, x_4\}$	0
$\{x_3\}$	0	$\{x_3, x_4\}$	0
$\{x_4\}$	0	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$3/4$
$\{x_1, x_2\}$	$1/2$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	$2/3$
$\{x_1, x_3\}$	$1/2$	$\{x_1, x_3, x_4\}$	$13/24$
$\{x_1, x_4\}$	$1/3$	$\{x_2, x_3, x_4\}$	0

Tabla 4.5: Aproximación interior \underline{P}^I de la probabilidad inferior asociada con el conjunto credal (4.15). Notamos que esta probabilidad inferior también pertenece a \mathcal{C}_∞ , y la distancia entre ambos modelos es $d_{BV}(\underline{P}, \underline{P}^I) = 0.08\bar{3}$.

Esta aproximación interior no es única. De entre todas ellas, \underline{P}^I es aquella que minimiza también la distancia cuadrática (QP-2monot). Desarrollamos un código en Python para calcular los puntos extremos de $\mathcal{M}(\underline{P}^I)$ mediante el método de las permutaciones. Obtenemos quince puntos extremos:

	x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4
π_1	$7/24$	$5/24$	$1/4$	$1/4$	π_9	1	0	0	0
π_2	$7/24$	$5/24$	$1/3$	$1/6$	π_{10}	$2/3$	0	$1/3$	0
π_3	$7/24$	$1/4$	$5/24$	$1/4$	π_{11}	$1/2$	$1/4$	0	$1/4$
π_4	$7/24$	$11/24$	$5/24$	$1/24$	π_{12}	$1/2$	$11/24$	0	$1/24$
π_5	$7/24$	$1/3$	$1/3$	$1/24$	π_{13}	$13/24$	$11/24$	0	0
π_6	$1/2$	0	$1/4$	$1/4$	π_{14}	$1/3$	$1/3$	$1/3$	0
π_7	$1/2$	0	$1/3$	$1/6$	π_{15}	$1/3$	$11/24$	$5/24$	0
π_8	$3/4$	0	0	$1/4$					

Resolvemos el problema de programación lineal (4.11) con las restricciones adicionales generadas por estos puntos extremos. Para J_1 , J_2 y J_3 obtenemos los valores óptimos $\varepsilon_1 = 0.053$, $\varepsilon_2 = 0$ y $\varepsilon_3 = 0.034$ respectivamente. Al igual que en el caso original, los empleos \mathcal{A} -admisibles son J_1 y J_3 .

Seguidamente, calculamos los intervalos de esperanza generalizados aplicando la Proposición 4.9:

	$\delta = 0$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.02$	$\delta = 0.03$	$\delta = 0.04$	$\delta = 0.05$
$E_{D_\delta}(J_1)$	$[7/24, 1]$	$[0.3304, 1]$	$[0.3692, 1]$	$[0.4079, 1]$	$[0.4467, 1]$	$[0.4854, 1]$
$E_{D_\delta}(J_2)$	$[0, 1]$	$[0.08, 0.93]$	$[0.16, 0.86]$	$[0.24, 0.79]$	$[0.32, 0.72]$	$[0.4, 0.65]$
$E_{D_\delta}(J_3)$	$[0, 1]$	$[0.052\bar{6}, 0.93]$	$[0.10\bar{3}, 0.86]$	$[0.155, 0.79]$	$[0.20\bar{6}, 0.72]$	$[0.258\bar{3}, 0.65]$

Los intervalos resultantes son muy similares a los obtenidos al considerar la probabilidad inferior original. De nuevo, el empleo J_1 es óptimo con respecto a los criterios \mathcal{D}_δ -maximin y \mathcal{D}_δ -maximax. La representación gráfica de los intervalos se muestra en la Figura 4.3.

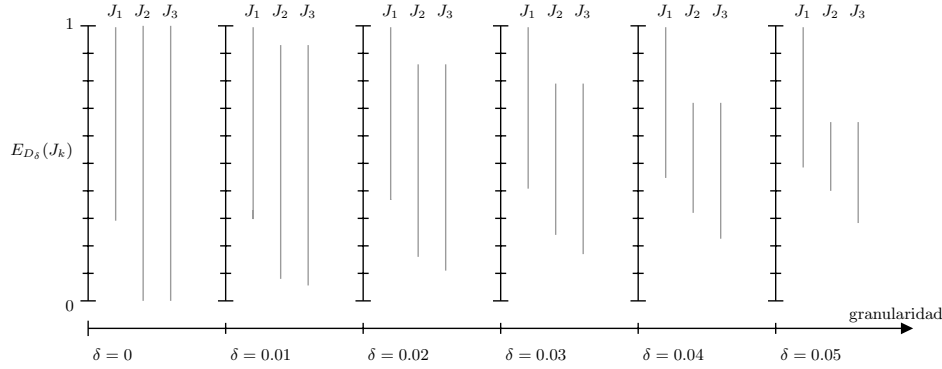


Figura 4.3: Intervalos de esperanza generalizados de los diferentes empleos con respecto a \underline{P}^I para distintos valores de la granularidad.

Por otra parte, las comparaciones por parejas producen exactamente los mismos resultados que cuando consideramos la probabilidad inferior original. Hemos obtenido las mismas conclusiones que en el ejemplo inicial (el empleo más adecuado sería J_1), mientras que la dificultad del cálculo de los puntos extremos del conjunto credal se ha reducido notablemente.

También podemos considerar una aproximación exterior de \underline{P} . Utilizando los códigos que hemos desarrollado encontramos la aproximación exterior en \mathcal{C}_2 \underline{P}^O :

A	$\underline{P}^O(A)$	A	$\underline{P}^O(A)$
$\{x_1\}$	$1/4$	$\{x_2, x_3\}$	0
$\{x_2\}$	0	$\{x_2, x_4\}$	0
$\{x_3\}$	0	$\{x_3, x_4\}$	0
$\{x_4\}$	0	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$3/4$
$\{x_1, x_2\}$	$1/2$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	$2/3$
$\{x_1, x_3\}$	$11/24$	$\{x_1, x_3, x_4\}$	$1/2$
$\{x_1, x_4\}$	$7/24$	$\{x_2, x_3, x_4\}$	0

Tabla 4.6: Aproximación exterior \underline{P}^O de la probabilidad inferior asociada con el conjunto credal (4.15). Notamos que esta probabilidad exterior también pertenece a \mathcal{C}_∞ , y la distancia entre ambos modelos es $d_{BV}(\underline{P}, \underline{P}^O) = 0.08\bar{3}$.

Esta aproximación no es única. De entre las aproximaciones exteriores de \underline{P} que minimizan d_{BV} , \underline{P}^O es la que minimiza también la distancia cuadrática (QP-2monot). Los puntos extremos de $\mathcal{M}(\underline{P}^O)$ son:

	x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4
π_1	1/4	1/4	1/4	1/4	π_9	1	0	0	0
π_2	1/4	1/4	1/3	1/6	π_{10}	2/3	0	1/3	0
π_3	1/4	7/24	5/24	1/4	π_{11}	11/24	7/24	0	1/4
π_4	1/4	1/2	5/24	1/24	π_{12}	11/24	1/2	0	1/24
π_5	1/4	3/8	1/3	1/24	π_{13}	1/2	1/2	0	0
π_6	1/2	0	1/4	1/4	π_{14}	7/24	3/8	1/3	0
π_7	1/2	0	1/3	1/6	π_{15}	7/24	1/2	5/24	0
π_8	3/4	0	0	1/4					

De nuevo, los empleos \mathcal{A} -admisibles son J_1 y J_3 : al resolver el problema de programación lineal (4.11) con las restricciones adicionales generadas $\mathcal{M}(\underline{P}^O)$ para J_1, J_2 y J_3 obtenemos los valores óptimos $\varepsilon_1 = 0.053$, $\varepsilon_2 = 0$ y $\varepsilon_3 = 0.03$ respectivamente. Los intervalos de esperanza generalizados son:

	$\delta = 0$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.02$	$\delta = 0.03$	$\delta = 0.04$	$\delta = 0.05$
$E_{D_\delta}(J_1)$	[0.25, 1]	[0.2925, 1]	[0.335, 1]	[0.3775, 1]	[0.412, 1]	[0.4625, 1]
$E_{D_\delta}(J_2)$	[0, 1]	[0.078, 0.93]	[0.156, 0.86]	[0.235, 0.79]	[0.313, 0.72]	[0.3916, 0.65]
$E_{D_\delta}(J_3)$	[0, 1]	[0.0475, 0.93]	[0.095, 0.86]	[0.1425, 0.79]	[0.19, 0.72]	[0.23753, 0.65]

Como se puede observar en la tabla anterior y en la Figura 4.4, las diferencias con el modelo inicial son mínimas y no alteran los resultados al aplicar los criterios \mathcal{D}_δ -maximin y \mathcal{D}_δ -maximax. Tampoco hay diferencias en lo que respecta a los criterios $R_{\exists\exists}$ y $R_{\forall\forall}$.

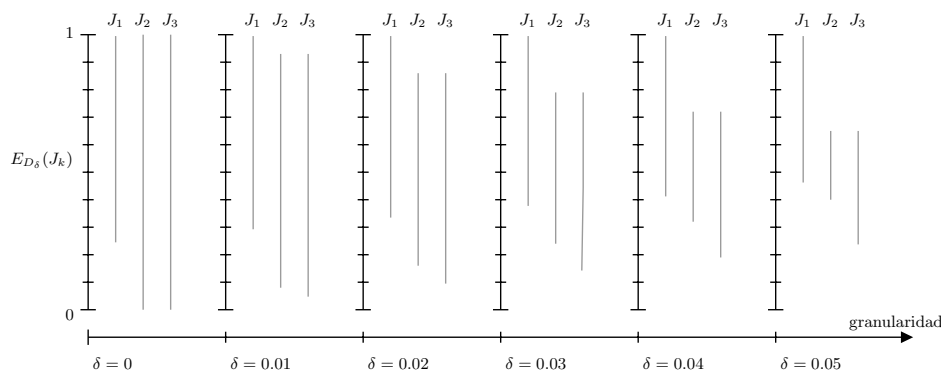


Figura 4.4: Intervalos de esperanza generalizados de los diferentes empleos con respecto a \underline{P}^O para distintos valores de la granularidad.

Hemos visto dos ejemplos de aproximaciones que, por estar a una distancia muy pequeña del modelo original, no alteran los resultados de ningún

criterio de decisión. Veamos ahora algunos casos para los que se aprecian diferencias más significativas.

Sabemos por [10, Prop.8] que, dada una probabilidad inferior coherente, existe una única aproximación exterior cuya no dominada en \mathcal{C}_{LV} . Para la probabilidad inferior \underline{P} inicial, esta aproximación está definida por un parámetro de distorsión $\delta_{LV} = 0.75$ y una probabilidad $P_0 = (1, 0, 0, 0)$:

A	$\underline{P}_{LV}^O(A)$	A	$\underline{P}_{LV}^O(A)$
$\{x_1\}$	$1/4$	$\{x_2, x_3\}$	0
$\{x_2\}$	0	$\{x_2, x_4\}$	0
$\{x_3\}$	0	$\{x_3, x_4\}$	0
$\{x_4\}$	0	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$1/4$
$\{x_1, x_2\}$	$1/4$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	$1/4$
$\{x_1, x_3\}$	$1/4$	$\{x_1, x_3, x_4\}$	$1/4$
$\{x_1, x_4\}$	$1/4$	$\{x_2, x_3, x_4\}$	0

Tabla 4.7: Aproximación exterior en \mathcal{C}_{LV} de la probabilidad inferior asociada con el conjunto credal (4.15). Notamos que la distancia entre ambos modelos es $d_{BV}(\underline{P}, \underline{P}_{LV}^O) = 1.75$.

Esta aproximación es peor que la otras dos consideradas anteriormente, en el sentido de que su distancia d_{BV} con respecto al modelo inicial es mucho mayor. Los puntos extremos de $\mathcal{M}(\underline{P}_{LV}^O)$ son cuatro:

	x_1	x_2	x_3	x_4
π_1	1	0	0	0
π_2	$1/4$	$3/4$	0	0
π_3	$1/4$	0	$3/4$	0
π_4	$1/4$	0	0	$3/4$

Los empleos J_1 y J_3 siguen siendo los \mathcal{A} -admisibles, aunque los valores óptimos del problema de programación lineal (4.11) cambian bastante: $\varepsilon_1 = 0.0227$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0.0186$ respectivamente. Tampoco hay diferencias relevantes con el modelo inicial respecto a las relaciones $R_{\exists\exists}$ y $R_{\forall\forall}$. Encontramos mayores discrepancias al evaluar los intervalos de esperanza generalizados:

	$\delta = 0$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.02$	$\delta = 0.03$	$\delta = 0.04$	$\delta = 0.05$
$E_{D_\delta}(J_1)$	[0.25, 1]	[0.25, 1]	[0.25, 1]	[0.25, 1]	[0.25, 1]	[0.25, 1]
$E_{D_\delta}(J_2)$	[0, 1]	[0.0675, 0.93]	[0.135, 0.86]	[0.2025, 0.79]	[0.27, 0.72]	[0.3375, 0.65]
$E_{D_\delta}(J_3)$	[0, 1]	[0.035, 0.93]	[0.07, 0.86]	[0.105, 0.79]	[0.14, 0.72]	[0.175, 0.65]

Para cualquier granularidad $\delta > 0$, el empleo J_1 es óptimo con respecto al criterio \mathcal{D}_δ -maximax, ya que el límite superior de J_1 domina a los respectivos límites de J_2 y J_3 . Sin embargo, el criterio \mathcal{D}_δ -maximin no ofrece conclusiones claras. Para $\delta = 0.01$, $\delta = 0.02$ y $\delta = 0.03$ J_1 es la decisión óptima de acuerdo

con este criterio. En cambio, de $\delta = 0.04$ en adelante, la decisión óptima es J_2 . Estos resultados se ilustran gráficamente en la Figura 4.5. Este ejemplo muestra que, si la aproximación empleada difiere bastante del modelo inicial, las decisiones óptimas resultantes pueden cambiar.

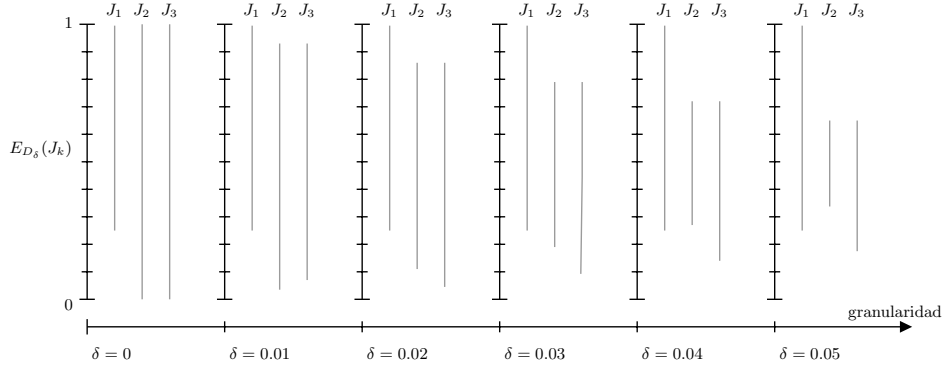


Figura 4.5: Intervalos de esperanza generalizados de los diferentes empleos con respecto a \underline{P}_{LV}^O para distintos valores de la granularidad.

Una situación similar ocurre cuando consideramos la aproximación exterior en \mathcal{C}_{PMM} definida por $\delta_{PMM} = 13/12$ y $P_0 = (12/25, 6/25, 4/25, 3/25)$. Esta aproximación es única por [10, Prop.7]. Para cada subconjunto, esta probabilidad inferior toma los valores:

A	$\underline{P}_{PMM}^O(A)$	A	$\underline{P}_{PMM}^O(A)$
$\{x_1\}$	0	$\{x_2, x_3\}$	0
$\{x_2\}$	0	$\{x_2, x_4\}$	0
$\{x_3\}$	0	$\{x_3, x_4\}$	0
$\{x_4\}$	0	$\{x_1, x_2, x_3\}$	3/4
$\{x_1, x_2\}$	5/12	$\{x_1, x_2, x_4\}$	2/3
$\{x_1, x_3\}$	1/4	$\{x_1, x_3, x_4\}$	1/2
$\{x_1, x_4\}$	1/6	$\{x_2, x_3, x_4\}$	0

Tabla 4.8: Aproximación exterior en \mathcal{C}_{PMM} de la probabilidad inferior asociada con el conjunto credal (4.15). Notamos que la distancia entre ambos modelos es $d_{BV}(\underline{P}, \underline{P}_{PMM}^O) = 0.75$.

Los puntos extremos de $\mathcal{M}(\underline{P}_{PMM}^O)$ son:

	x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4
π_1	0	5/12	1/3	1/4	π_6	1	0	0	0
π_2	0	1/2	1/4	1/4	π_7	2/3	0	1/3	0
π_3	0	1/2	1/3	1/6	π_8	1/4	1/2	0	1/4
π_4	5/12	0	1/3	1/6	π_9	1/2	1/2	0	0
π_5	3/4	0	0	1/4	π_{10}	1/6	1/2	1/3	0

Entonces, los empleos \mathcal{A} -admisibles son J_1 y J_3 , ya que al resolver el problema de programación lineal (4.11) se obtiene $\varepsilon_1 = 0.05, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0.02\overline{18}$. Las relaciones $R_{\exists\exists}$ y $R_{\forall\forall}$ también son idénticas a los demás casos estudiados. Los intervalos de esperanza generalizados resultan ser:

	$\delta = 0$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.02$	$\delta = 0.03$	$\delta = 0.04$	$\delta = 0.05$
$E_{D_\delta}(J_1)$	[0, 1]	[0.0641 $\overline{6}$, 1]	[0.128 $\overline{3}$, 1]	[0.1925, 1]	[0.25 $\overline{6}$, 1]	[0.3208, 1]
$E_{D_\delta}(J_2)$	[0, 1]	[0.0675, 0.93]	[0.135, 0.86]	[0.2025, 0.79]	[0.27, 0.72]	[0.3375, 0.65]
$E_{D_\delta}(J_3)$	[0, 1]	[0.04, 0.93]	[0.08, 0.86]	[0.12, 0.79]	[0.16, 0.72]	[0.20, 0.65]

A partir de estos valores, deducimos que los empleos óptimos según los criterios \mathcal{D}_δ -maximax y \mathcal{D}_δ -maximin son J_1 y J_2 respectivamente, independientemente del valor de δ . Esto difiere con los resultados obtenidos para la probabilidad inferior original, donde J_1 era el empleo óptimo según ambos criterios. La representación gráfica de los intervalos de esperanza generalizados se muestra en la Figura 4.6:

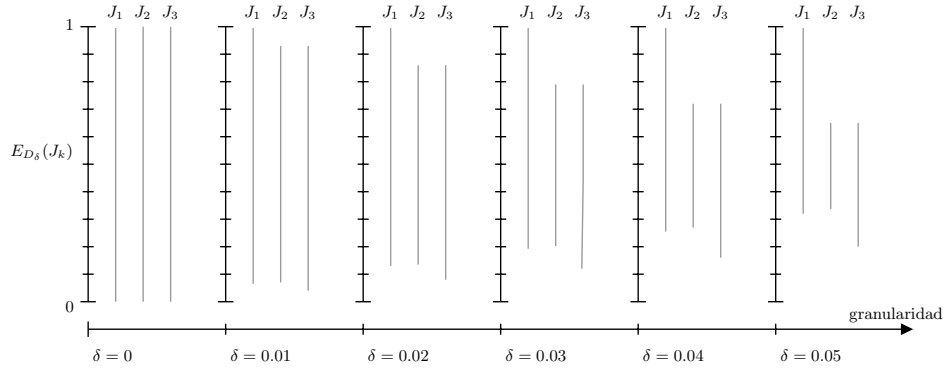


Figura 4.6: Intervalos de esperanza generalizados de los diferentes empleos con respecto a \underline{P}_{PMM}^O para distintos valores de la granularidad.

A	$\underline{P}_{LV}^I(A)$	A	$\underline{P}_{LV}^I(A)$
$\{x_1\}$	1/2	$\{x_2, x_3\}$	1/4
$\{x_2\}$	1/4	$\{x_2, x_4\}$	1/4
$\{x_3\}$	0	$\{x_3, x_4\}$	0
$\{x_4\}$	0	$\{x_1, x_2, x_3\}$	3/4
$\{x_1, x_2\}$	3/4	$\{x_1, x_2, x_4\}$	3/4
$\{x_1, x_3\}$	1/2	$\{x_1, x_3, x_4\}$	1/2
$\{x_1, x_4\}$	1/2	$\{x_2, x_3, x_4\}$	1/4

Tabla 4.9: Aproximación interior en \mathcal{C}_{LV} de la probabilidad inferior asociada con el conjunto credal (4.15). Notamos que la distancia entre ambos modelos es $d_{BV}(\underline{P}, \underline{P}_{LV}^I) = 1.75$.

Para completar esta sección, calculamos aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{LV} y \mathcal{C}_{PMM} y evaluamos los distintos criterios de decisión. En el Capítulo 3 vimos que estas aproximaciones no son únicas, así que elegimos un modelo linear vacuous definido por $\delta_{LV} = 0.25$ y $P_0 = (2/3, 1/3, 0, 0)$. La probabilidad inferior resultante se indica en la Tabla 4.9. Mediante el método de las permutaciones, se obtienen los puntos extremos de $\mathcal{M}(\underline{P}_{LV}^I)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4
π_1	1/2	1/4	0	1/4
π_2	1/2	1/4	1/4	0
π_3	1/2	1/2	0	0
π_4	1/4	0	0	3/4

En lo que respecta a \mathcal{A} -admisibilidad y a las relaciones $R_{\exists\exists}$, $R_{\forall\forall}$, se obtienen los mismos resultados que para el modelo original. También se tiene que el empleo óptimo con respecto a los criterios \mathcal{D}_δ -maximin y \mathcal{D}_δ -maximax es J_1 , aunque los intervalos de esperanza generalizados varían bastante:

	$\delta = 0$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.02$	$\delta = 0.03$	$\delta = 0.04$	$\delta = 0.05$
$E_{D_\delta}(J_1)$	[0.5, 1]	[0.5225, 0.9775]	[0.545, 0.955]	[0.5675, 0.9325]	[0.59, 0.91]	[0.6125, 0.8875]
$E_{D_\delta}(J_2)$	[0, 1]	[0.0925, 0.9225]	[0.185, 0.845]	[0.2775, 0.7675]	[0.37, 0.69]	[0.4625, 0.6125]
$E_{D_\delta}(J_3)$	[0, 1]	[0.06, 0.9025]	[0.12, 0.805]	[0.18, 0.7075]	[0.24, 0.61]	[0.3, 0.5125]

Incluimos una representación gráfica de estos intervalos en la Figura 4.7.

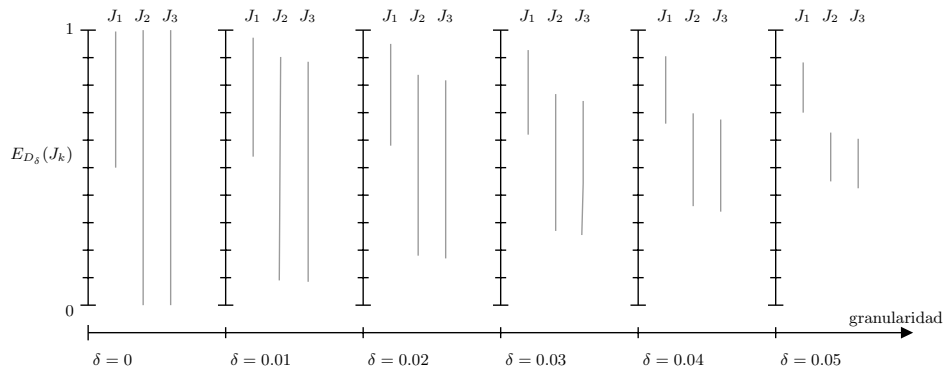


Figura 4.7: Intervalos de esperanza generalizados de los diferentes empleos con respecto a \underline{P}_{LV}^I para distintos valores de la granularidad.

Finalmente, elegimos la aproximación interior de \underline{P} en \mathcal{C}_{PMM} determinada por $\delta_{PMM} = 0.25$ y $P_0 = (3/5, 1/5, 1/5, 0)$. La probabilidad inferior asociada se muestra en la Tabla 4.10.

A	$\underline{P}_{PMM}^I(A)$	A	$\underline{P}_{PMM}^I(A)$
$\{x_1\}$	1/2	$\{x_2, x_3\}$	1/4
$\{x_2\}$	0	$\{x_2, x_4\}$	0
$\{x_3\}$	0	$\{x_3, x_4\}$	0
$\{x_4\}$	0	$\{x_1, x_2, x_3\}$	1
$\{x_1, x_2\}$	3/4	$\{x_1, x_2, x_4\}$	3/4
$\{x_1, x_3\}$	3/4	$\{x_1, x_3, x_4\}$	3/4
$\{x_1, x_4\}$	1/2	$\{x_2, x_3, x_4\}$	1/4

Tabla 4.10: Aproximación interior en \mathcal{C}_{PMM} de la probabilidad inferior asociada con el conjunto credal (4.15). Notamos que la distancia entre ambos modelos es $d_{BV}(\underline{P}, \underline{P}_{PMM}^I) = 2$.

Como en todos los casos anteriores, los empleos \mathcal{A} -admisibles son J_1 y J_3 , puesto que los valores óptimos del problema de programación lineal (4.11) son $\varepsilon_1 = 0.053, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0.04$. Los intervalos de esperanza generalizados también indican que la decisión óptima con respecto a los criterios \mathcal{D}_δ -maximin y \mathcal{D}_δ -maximax es J_1 :

	$\delta = 0$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.02$	$\delta = 0.03$	$\delta = 0.04$	$\delta = 0.05$
$E_{D_\delta}(J_1)$	[0.5, 1]	[0.5425, 0.9775]	[0.585, 0.955]	[0.6275, 0.9325]	[0.667, 0.91]	[0.7125, 0.8875]
$E_{D_\delta}(J_2)$	[0, 1]	[0.0925, 0.9225]	[0.185, 0.845]	[0.2775, 0.7675]	[0.37, 0.69]	[0.4625, 0.6125]
$E_{D_\delta}(J_3)$	[0, 1]	[0.07, 0.9125]	[0.14, 0.825]	[0.21, 0.7375]	[0.28, 0.65]	[0.35, 0.5625]

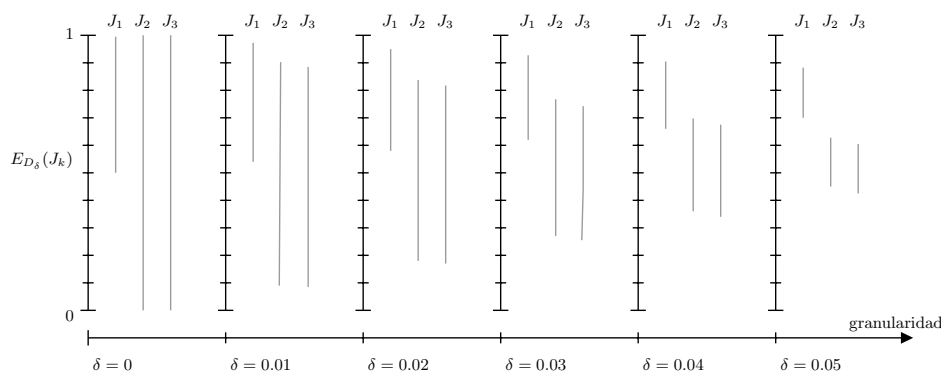


Figura 4.8: Intervalos de esperanza generalizados de los diferentes empleos con respecto a \underline{P}_{PMM}^I para distintos valores de la granularidad.

A diferencia de para los demás modelos considerados, en este caso sí podemos extraer conclusiones acerca de las relaciones $R_{\exists\exists}$ y $R_{\forall\forall}$. Aplicamos la Proposición 4.6 empleando nuestros códigos para calcular que elementos pertenecen a cada relación. Los resultados se indican en la siguiente tabla:

	(J_1, J_2)	(J_1, J_3)	(J_2, J_1)	(J_2, J_3)	(J_3, J_1)	(J_3, J_2)
$R_{\exists\exists}$	\in	\in	\notin	\in	\notin	\in
$R_{\forall\forall}$	\in	\in	\notin	\notin	\notin	\notin

A la vista de los resultados, podemos afirmar que la única decisión localmente admisible con respecto a $R_{\exists\exists}$ y $R_{\forall\forall}$ es el empleo J_1 .

Para finalizar esta sección, resumimos en forma de tabla las decisiones óptimas obtenidas para cada aproximación considerada, junto con los resultados correspondientes al modelo original.

Empleando las aproximaciones óptimas \underline{P}^I (interior) y \underline{P}^O (exterior), los resultados son los mismos que con el modelo original. Estas aproximaciones están a una distancia de \underline{P} de tan solo $\delta_{BV} = 0.08\bar{3}$. Sin embargo, es claro que las decisiones óptimas pueden cambiar al considerar una aproximación del modelo inicial. Por lo tanto, se debe valorar con cuidado en qué ocasiones puede resultar de interés emplear estos métodos. Por ejemplo, podría no ser conveniente utilizar una aproximación que esté a una distancia d_{BV} muy grande del modelo original, ya que las conclusiones podrían ser totalmente distintas.

	\mathcal{D}_δ -maximin	\mathcal{D}_δ -maximax	\mathcal{A} -admiss.	Local admiss.	δ_{BV}
\underline{P}	J_1	J_1	J_1, J_3	—	0
\underline{P}^I	J_1	J_1	J_1, J_3	—	$0.08\bar{3}$
\underline{P}^O	J_1	J_1	J_1, J_3	—	$0.08\bar{3}$
\underline{P}_{LV}^O	—	J_1	J_1, J_3	—	1.75
\underline{P}_{PMM}^O	J_2	J_1	J_1, J_3	—	0.75
\underline{P}_{LV}^I	J_1	J_1	J_1, J_3	—	1.75
\underline{P}_{PMM}^I	J_1	J_1	J_1, J_3	J_1	2

Tabla 4.11: Resumen de las decisiones óptimas encontradas mediante cada uno de los modelos empleados en el ejemplo práctico de esta sección. La columna δ_{BV} indica la distancia a la que se encuentra cada modelo del original.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos investigado las aproximaciones interiores de probabilidad inferior coherentes. Esto es, hemos considerado el problema de transformar una probabilidad inferior coherente en otra que: (i) pertenezca a una subclase con mejores propiedades matemáticas, (ii) sea lo más próxima posible al modelo original y (iii) sea al menos tan informativa como el modelo original. En trabajos previos [8, 10, 11] se había estudiado el caso de las aproximaciones exteriores: cuando el modelo transformado es menos informativo que el inicial.

Primero, hemos considerado las aproximaciones interiores óptimas con respecto a la distancia de Baroni-Vicig d_{BV} [2]. En la Proposición 2.2 probamos que se pueden obtener aproximaciones de este tipo lo más cercanas posibles al modelo original (no dominantes) en \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_∞ mediante programación lineal. Sin embargo, notamos que la solución no es, en general, única. Siguiendo el procedimiento propuesto en [8] para aproximaciones exteriores, hemos razonado que se puede encontrar una única aproximación interior seleccionando, de entre el conjunto de aproximaciones que minimizan d_{BV} , aquella que también es óptima con respecto a la distancia cuadrática (Proposición 2.4). Las aproximaciones exteriores en \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_∞ también comparan estas propiedades. No obstante, hemos encontrado una diferencia entre ambos enfoques: si bien las aproximaciones exteriores en \mathcal{C}_2 coinciden con el modelo original en los conjuntos unipuntuales, esto no es cierto para las aproximaciones interiores. Los contrastes entre los dos tipos de aproximaciones son mayores cuando consideramos los casos particulares de los modelos de distorsión, como los modelos pari-mutuel y linear-vacuous. Mientras que en [10] se probó la existencia de una única aproximación exterior en \mathcal{C}_{LV} y en \mathcal{C}_∞ , en el Capítulo 3 hemos visto que no siempre existen aproximaciones interiores mediante estas subfamilias. En las proposiciones 3.1 y 3.4 dimos unas condiciones necesarias y suficientes para su existencia. También constatamos que, de existir, las aproximaciones interiores en \mathcal{C}_{LV} y \mathcal{C}_∞ no tienen por qué ser únicas. De entre todas ellas, en el Capítulo 3 he-

mos caracterizado aquellas que son óptimas con respecto a d_{BV} . A modo de resumen, presentamos algunas de las propiedades más relevantes de las aproximaciones interiores y exteriores en la siguientes tablas:

Clase de la aprox. exterior de \underline{P}	Existencia de aprox. exteriores	Unicidad de aprox. exterior	Caracterización de las aprox. exteriores	Coincidencia con $\underline{P}, \overline{P}$ en unipuntuales
\mathcal{C}_2	SÍ [10]	NO	Problema abierto	SÍ [10]
\mathcal{C}_∞	SÍ [11]	NO	Problema abierto	NO
\mathcal{C}_{LV}	SÍ [10]	SÍ [10]	SÍ [10]	Parcialmente [10]
\mathcal{C}_{PMM}	SÍ [10]	SÍ [10]	SÍ [10]	Parcialmente [10]

Clase de la aprox. interior de \underline{P}	Existencia de aprox. interiores	Unicidad de aprox. interior	Caracterización de las aprox. interiores	Coincidencia con $\underline{P}, \overline{P}$ en unipuntuales
\mathcal{C}_2	SÍ	NO	Problema abierto	NO
\mathcal{C}_∞	SÍ	NO	Problema abierto	NO
\mathcal{C}_{LV}	Depende (Prop. 3.1)	NO	SÍ (Prop. 3.3)	NO
\mathcal{C}_{PMM}	Depende (Prop.3.4)	NO	SÍ (Prop. 3.6)	NO

Por otro lado, en el Capítulo 4 hemos realizado un estudio sobre las decisiones óptimas derivadas de una probabilidad inferior inicial y de una aproximación interior/exterior suya en un problema de decisión bajo incertidumbre. Aunque las decisiones óptimas pueden cambiar para todos los criterios considerados, encontramos relaciones de inclusión para los criterios de Maximality, Interval Dominance y E-admissibility. Resumimos estas relaciones en forma de tabla:

Criterio	Relación
Γ -maximin	—
Γ -maximax	—
Maximality	$\text{opt}_{\geq \underline{Q}^{int}} \subseteq \text{opt}_{\geq \underline{P}} \subseteq \text{opt}_{\geq \underline{Q}^{ext}}$
Interval dominance	$\text{opt}_{\sqsupseteq \underline{Q}^{int}} \subseteq \text{opt}_{\sqsupseteq \underline{P}} \subseteq \text{opt}_{\sqsupseteq \underline{Q}^{ext}}$
E-admissibility	$\text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q}^{int})} \subseteq \text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P})} \subseteq \text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{Q}^{ext})}$

Finalmente, siguiendo [5], introducimos un marco general para tratar problemas de decisión bajo imprecisión severa, donde la intertidumbre no sólo se encuentra en el modelo probabilístico, sino también en la comparación de las posibles consecuencias. Aplicamos estos conceptos a un ejemplo prototípico planteado en [5, Sec.5]. Calculamos distintas aproximaciones interiores y exteriores de la probabilidad inferior coherente original en las clases consideradas en este trabajo (\mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_∞ , \mathcal{C}_{LV} y \mathcal{C}_{PMM}). Calculando las decisiones óptimas derivadas de cada aproximación, constatamos que se pueden obtener conclusiones muy distintas a las resultantes de aplicar el modelo inicial (Tabla 4.11). Con todo, para las aproximaciones más cerca-

nas al modelo original en el sentido de d_{BV} (\underline{P}^I y \underline{P}^O en la Tabla 4.11), encontramos que las decisiones óptimas del ejemplo no varían.

En definitiva, en este trabajo hemos demostrado que es posible intercambiar una probabilidad inferior coherente por otra más manejable con una diferencia mínima entre ambos modelos. Al elegir una aproximación inferior en alguna de las subclases consideradas, se ha de buscar un equilibrio entre la simplicidad del modelo transformado y su distancia con el original. De lo contrario, se pueden obtener conclusiones engañosas al emplear el modelo transformado, como hemos visto en los ejemplos de Teoría de la Decisión.

Como futuras líneas de trabajo, se podrían estudiar las aproximaciones interiores mediante otros casos particulares de probabilidades inferiores, o considerar otros tipos de distancias entre el modelo inicial y el transformado.

Los resultados de este Trabajo de Fin de Grado han sido aceptados para ser presentados en el congreso internacional IPMU (Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems), que se celebrará en Milán entre los días 11 y 15 de julio de 2022 [7].

Apéndice A

Códigos

A.1. Comprobación de la 2-monotonía y cálculo de los puntos extremos del conjunto credal

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools
from scipy.optimize import linprog
import sys

n = int(input("Introduzca el cardinal de su espacio: "))
x = np.arange(1, n+1)
tol = 10E-6 # tolerancia numerica. Si |a-b| < tol consideramos a=b

def powerset(L): # construimos el conjunto potencia
    P = set()
    for n in range(len(L) + 1):
        for sset in itertools.combinations(L, n):
            P.add(sset)
    return P

# se ordenan los subconjuntos
p = sorted(list(powerset(x)), key=lambda x: (len(x), x))

probs = []

for i in p: # se pide por pantalla la medida de cada subconjunto
    probs.append(float(eval(input('Introduzca la medida del conjunto '
        + str(i) + ': '))))

#---comprobacion normalizacion
if probs[0] != 0:
    sys.exit('La probabilidad inferior del suceso imposible debe ser 0')
if probs[-1] != 1:
    sys.exit('La probabilidad del suceso seguro debe ser 1')

probs.remove(probs[p.index(())]) #eliminamos el conjunto vacio
p.remove(p[p.index(())])

#---comprobacion coherencia
# para cada subconjunto A resolvemos el programa de PL
# min sum_{x in A} P({x})
# s.a. sum_{x in B} P({x}) >= underline(P) para todo B
# si la solucion optima coincide con underline(A) para todo A
# concluimos que underline(P) es coherente
for i in range(len(p)):
    obj_C = np.zeros(n)
    lhs_ineq_C = np.zeros((len(p), n))
    rhs_ineq_C = np.array(probs)
    lhs_eq_C = [np.ones(n)] #restricciones de igualdad
    rhs_eq_C = np.array([[1]]) # las probabilidades deben sumar 1
    # restricciones de >=
    for j in range(n):
```

```

        if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
            obj_C[j]=1
        for k in range(len(p)):
            if set(p[j]).issubset(set(p[k]))==True:
                lhs_ineq_C[k,j]=1
    # solucion optima
    opt_C = linprog(c=obj_C , A_ub=-lhs_ineq_C , b_ub=-rhs_ineq_C ,
                  A_eq=lhs_eq_C , b_eq=rhs_eq_C ,method="revised simplex")
    if abs(opt_C.fun-probs[i])>tol:
        sys.exit('La probabilidad inferior introducida no es coherente')
#-----

probs.append(0)
p.append(())
probs=np.array(probs)

def prob(x): # funcion que relaciona cada subconjunto con su medida
    return probs[p.index(x)]

#-----comprobacion 2-monotonia
#comprobamos la condicion de 2-monotonia empleando su definicion
contador=True
for i in range(len(p)):
    for j in range(i, len(p)):
        suma1=round(prob(p[i])+prob(p[j]),4)
        suma2=round(prob(tuple(set(p[i]).union(set(p[j]))))
                    +prob(tuple(set(p[i]).intersection(set(p[j])))),4)
        if suma2 < suma1:
            contador=False
# se pasa por pantalla para que subconjuntos falla la condicion
print('La condicion de 2-monotonia falla para los subconjuntos '
      +str(p[i]+' y '+str(p[j]))
if contador==True:
    print('La probabilidad inferior coherente introducida es 2-monotona')
else:
    print('La probabilidad inferior coherente introducida no es 2-monotona')

#-----calculo de los puntos extremos del conjunto credal
#si \underline(P) es 2-monotona, calculamos los puntos extremos
#de M(\underline(P)) mediante el metodo de las permutaciones
per=itertools.permutations(list(range(1,n+1))) #permutaciones de {1,...,n}
per=list(per) # permutaciones en forma de lista
T=len(list(per)) # numero maximo de puntos extremos
ext=[] # para almacenar los puntos extremos

for i in range(T):
    e=np.zeros(n)
    e[per[i][0]-1]=prob(tuple(sorted(per[i][:1])))
    for j in range(n-1):
        e[per[i][j+1]-1]=round(prob(tuple(sorted(per[i][:j+2])))
                              -prob(tuple(sorted(per[i][:j+1]))),6)
    e=list(e)
    if e not in ext:
        ext.append(e.copy()) #eliminamos las repeticiones
if contador==True:
    print('Los puntos extremos del conjunto credal son:')
    print(ext)

```

A.2. Búsqueda de aproximaciones interiores 2-monótonas

```

#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools
import math
from scipy.optimize import linprog
import sys
from qpsolvers import solve_qp

n = int(input("Introduzca el cardinal de su espacio: "))
x= np.arange(1,n+1)
tol=10E-6 # tolerancia numerica. Si |a-b|<tol consideramos a=b

def powerset(L): # construimos el conjunto potencia
    P = set()

```

```

    for n in range(len(L) + 1):
        for sset in itertools.combinations(L, n):
            P.add(sset)
    return P

p=sorted(list(powerset(x)),key=lambda x: (len(x),x))

probs=[]

for i in p: # se pide por pantalla la medida de cada subconjunto
    probs.append(np.round(float(eval(input('Introduzca la medida del conjunto '
        + str(i)+' : '))),10))

#---comprobacion normalizacion
if probs[0]!=0:
    sys.exit('La probabilidad inferior del suceso imposible debe ser 0')
if probs[-1]!=1:
    sys.exit('La probabilidad del suceso seguro debe ser 1')

probs.remove(probs[p.index(())]) #eliminamos el conjunto vacio
p.remove(p[p.index(())])

#---comprobacion coherencia
#se realiza del mismo modo que en el codigo del Apendice A.1
for i in range(len(p)):
    obj_C=np.zeros(n)
    lhs_ineq_C=np.zeros((len(p),n))
    rhs_ineq_C=np.array(probs)
    lhs_eq_C=[np.ones(n)]
    rhs_eq_C=np.array([[1]])
    for j in range(n):
        if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
            obj_C[j]=1
            for k in range(len(p)):
                if set(p[j]).issubset(set(p[k]))==True:
                    lhs_ineq_C[k,j]=1
    opt_C = linprog(c=obj_C, A_ub=-lhs_ineq_C, b_ub=-rhs_ineq_C,
        A_eq=lhs_eq_C, b_eq=rhs_eq_C, method="revised simplex")
    if abs(opt_C.fun-probs[i])> tol:
        sys.exit('La probabilidad inferior introducida no es coherente')

#-----
#Resolvemos el problema de PL (LP-inner.2monot) con las restricciones
#(2monot1):(2monot4*) en terminos de la inversa de Mobius m
obj=np.zeros(len(p)) # definimos la funcion objetivo

#----- matriz de la restriccion (LP-2monot1)-----
rhs_eq=np.array([[1]])
lhs_eq=[np.ones(len(p))]

#----- matriz de la restriccion (LP-2monot2)-----
sset2=[]

for i in p:
    if len(i)==2:
        sset2.append(i)

r=2*(n-2)*math.factorial(n)/math.factorial(2)/math.factorial(n-2)
lhs_ineq3=np.zeros((int(r),len(p)))
contador=-1

for i in range(n,len(p)):
    for j in range(len(sset2)):
        if set(sset2[j]).issubset(set(p[i]))==True:
            contador+=1
            for k in range(len(p)):
                if set(sset2[j]).issubset(set(p[k]))==True and set(
                    p[k]).issubset(set(p[i]))==True:
                    lhs_ineq3[contador,k]=1

rhs_ineq3=np.zeros(int(r))
#-----
#----- matriz de la restriccion (LP-2monot3)-----
lhs_ineq2=np.zeros((n,len(p)))

for i in range(n):
    lhs_ineq2[i,i]=1

rhs_ineq2=np.zeros(n)
#-----
#----- matriz de la restriccion (LP-2monot4*)-----
lhs_ineq1=np.zeros((len(p),len(p)))

for i in range(len(p)):
    for j in range(len(p)):

```

```

        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            obj[i]+=1 #calculamos los coefs. de la funcion objetivo
            lhs_ineq1[j,i]=1

rhs_ineq1=np.array(probs)
#
#juntamos todas las matrices de restricciones
lhs_ineq=np.vstack((lhs_ineq1,lhs_ineq2,lhs_ineq3))
rhs_ineq=np.concatenate((rhs_ineq1,rhs_ineq2,rhs_ineq3))

# solucion optima del problema de programacion lineal
opt = linprog(c=obj, A_ub=-lhs_ineq, b_ub=-rhs_ineq, A_eq=lhs_eq,
              b_eq=rhs_eq, method="revised simplex", bounds=(None, None))

m=[] #valores optimos redondeados a 14 decimales
for i in range(len(opt.x)):
    m.append(round(opt.x[i],14))

#calculamos \underline(P) a partir de las inversas de Mobius
#obtenidas resolviendo el problema de PL
Bel=np.zeros(len(m))

for i in range(len(m)):
    for j in range(len(m)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            Bel[j]+=m[i]

for i in range(len(Bel)):
    Bel[i]=round(Bel[i],14)
    probs[i]=round(probs[i],14)

#calculamos la distancia d_{BV} entre la aproximacion y
#el modelo original. Si es 0 concluimos que la prob. inferior
#inicial ya es 2-monotona
dVB=str(round(sum(np.subtract(Bel, probs)),14))
if float(dVB)==0:
    sys.exit('La probabilidad inferior introducida ya es 2-monotona')
#pasamos por pantalla los resultados
print('\n Aproximacion interior mediante programacion lineal:\n')

titulos=['A', 'P(A)', 'm', 'Q']
datos = [titulos] + list(zip(p, probs, m, Bel))

for i, d in enumerate(datos):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '+dVB)
print('\n')
#
#Resolvemos el problema de programacion cuadratica (QP-2monot)
#con las restricciones (2monot1):(2monot4*) en terminos de la
# probabilidad inferior

def mobius(x): #definimos la inversa de Mobius en forma de funcion
    t=np.zeros(len(p))
    for i in range(len(p)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[x]))==True:
            t[i]=(-1)**(len(p[x])-len(p[i]))
    return t

# expresamos las matrices de restricciones en terminos de la
# probabilidad inferior

lhs_ineq_Bel=np.zeros(np.shape(lhs_ineq))

for i in range(len(lhs_ineq)):
    for j in range(len(p)):
        lhs_ineq_Bel[i]+=lhs_ineq[i,j]*mobius(j)

lhs_eq_Bel=np.array([np.zeros(len(p))])
lhs_eq_Bel[0][-1]=1

H=2*np.identity(2**n-1)
c=-2*np.array(probs)

rhs_eq=rhs_eq.reshape(rhs_eq.shape[1])

#solucion optima del problema de programacion cuadratica
opt_Bel_C = solve_qp(P=H, q=c,G=-lhs_ineq_Bel, h=-rhs_ineq, A=lhs_eq_Bel,
                    b=rhs_eq, lb=None, ub=None)

```



```

for i in range(len(opt_Bel_C)):
    opt_Bel_C[i]=abs(round(opt_Bel_C[i],14))

#imprimimos por pantalla la aproximacion interior hallada y la distancia
#d_BV con respecto a la probabilidad inferior inicial, con un redondeo
#de 14 decimales
print('Aproximacion interior mediante programacion cuadratica:\n')

titulos_C=['A','P(A)','Q']
datos_C = [titulos_C] + list(zip(p, probs, opt_Bel_C))

for i, d in enumerate(datos_C):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '+
      str(round(sum(np.subtract(opt_Bel_C, probs)),14)))
print('\n')
#-----
#Resolvemos el problema de programacion cuadratica (QP-2monot)
#con las restricciones (2monot1):(2monot4*) y (inner-2monot-delta)
#en terminos de la probabilidad inferior
#--- matriz de la restricción (inner-2monot-delta)-----
rhs_eq_2=np.array([round(float(dVB)+sum(probs),14)])
lhs_eq_2=np.array([np.ones(len(p))])
lhs_eq_C2=np.vstack((lhs_eq_Bel, lhs_eq_2))
rhs_eq_C2=np.concatenate((rhs_eq, rhs_eq_2))

# solucion optima del problema de programacion cuadratica
opt_Bel_C2 = solve_qp(P=H, q=c,G=-lhs_ineq_Bel, h=-rhs_ineq, A=lhs_eq_C2,
                    b=rhs_eq_C2, lb=None, ub=None)

for i in range(len(opt_Bel_C2)):
    opt_Bel_C2[i]=abs(round(opt_Bel_C2[i],14))

#imprimimos por pantalla la aproximacion interior hallada y la distancia
#d_BV con respecto a la probabilidad inferior inicial, con un redondeo
#de 14 decimales
print("""Aproximacion interior mediante programacion
cuadratica minimizando la distancia de B-V:\n""")

titulos_C2=['A','P(A)','Q']
datos_C2 = [titulos_C2] + list(zip(p, probs, opt_Bel_C2))

for i, d in enumerate(datos_C2):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '+
      str(round(sum(np.subtract(opt_Bel_C2, probs)),14)))
print('\n')

#-----
#Buscamos soluciones optimas alternativas
#Si \underline(Q) es la aproximacion interior de \underline(P)
#hallada, seleccionamos un subconjunto A tal que \underline(Q)>\underline(P)
#y resolvemos el problema de PL con la restricción adicional
#\underline(Q)=\underline(P). Si la distancia d_BV resultante no varia,
#hemos encontrado una aproximacion interior optima alternativa
contador_U=0

for i in range(len(probs)):
    if (probs==Bel)[i]==False:
        lhs_eq_U1=np.zeros(len(p))
        rhs_eq_U1=np.array([probs[i]])
        for j in range(len(p)):
            if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
                lhs_eq_U1[j]=1
        lhs_eq_U=np.vstack((lhs_eq, [lhs_eq_U1]))
        rhs_eq_U=np.concatenate((rhs_eq, rhs_eq_U1))
        opt_U = linprog(c=obj, A_ub=-lhs_ineq, b_ub=-rhs_ineq, A_eq=lhs_eq_U,
                      b_eq=rhs_eq_U, method="revised simplex", bounds=(None, None))
        m_U=[]
        for i in range(len(opt_U.x)):
            m_U.append(round(opt_U.x[i],14))

        Bel_U=np.zeros(len(m_U))

        for i in range(len(m_U)):
            for j in range(len(m_U)):

```

```

        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            Bel_U[j]+=m.U[i]

    for i in range(len(Bel_U)):
        Bel_U[i]=round(Bel_U[i],14)

    dVB_U=str(round(sum(np.subtract(Bel_U, probs)),14))

    if float(dVB_U)==float(dVB):

        contador_U+=1
        print("""La solucion optima del problema de programacion lineal
              no es unica. Una solucion optima alternativa es: """)
        titulos_U=['A', 'P(A)', 'm', 'Q']
        datos_U = [titulos_U] + list(zip(p, probs, m.U, Bel_U))
        for i, d in enumerate(datos_U):
            line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
            print(line)
            if i == 0:
                print('-' * len(line))
        break

if contador_U==0:
    print('La solucion mediante programacion lineal es unica')

```

A.3. Búsqueda de aproximaciones exteriores 2-monótonas

```

#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools
import math
from scipy.optimize import linprog
import sys
from qpsolvers import solve_qp

n = int(input("Introduzca el cardinal de su espacio: "))
x= np.arange(1,n+1)
tol=10E-6 # tolerancia numerica. Si |a-b|<tol consideramos a=b

def powerset(L): # construimos el conjunto potencia
    P = set()
    for n in range(len(L) + 1):
        for sset in itertools.combinations(L, n):
            P.add(sset)
    return P

p=sorted(list(powerset(x)),key=lambda x: (len(x),x))

probs=[]

for i in p: # se pide por pantalla la medida de cada subconjunto
    probs.append(np.round(float(eval(input('Introduzca la medida del conjunto '
        + str(i)+': '))),10))

#---comprobacion normalizacion
if probs[0]!=0:
    sys.exit('La probabilidad inferior del suceso imposible debe ser 0')
if probs[-1]!=1:
    sys.exit('La probabilidad del suceso seguro debe ser 1')

probs.remove(probs[p.index(())]) #eliminamos el conjunto vacio
p.remove(p[p.index(())])

#---comprobacion coherencia
#se realiza del mismo modo que en el codigo del Apendice A.1
for i in range(len(p)):
    obj_C=np.zeros(n)
    lhs_ineq_C=np.zeros((len(p),n))
    rhs_ineq_C=np.array(probs)
    lhs_eq_C=[np.ones(n)]
    rhs_eq_C=np.array([[1]])
    for j in range(n):
        if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:

```

```

        obj_C[j]=1
        for k in range(len(p)):
            if set(p[j]).issubset(set(p[k]))==True:
                lhs_ineq_C[k,j]=1
    opt_C = linprog(c=obj_C, A_ub=-lhs_ineq_C, b_ub=-rhs_ineq_C,
                    A_eq=lhs_eq_C, b_eq=rhs_eq_C, method="revised simplex")
    if abs(opt_C.fun-probs[i])>tol:
        sys.exit('La probabilidad inferior introducida no es coherente')
#-----
#Resolvemos el problema de PL (LP-2monot) con las restricciones
#(2monot1):(2monot4) en terminos de la inversa de Mobius m
obj=np.zeros(len(p)) # definimos la funcion objetivo

#----- matriz de la restriccion (LP-2monot1)-----
rhs_eq=np.array([[1]])
lhs_eq=[np.ones(len(p))]
#-----
#----- matriz de la restriccion (LP-2monot2)-----
sset2=[]

for i in p:
    if len(i)==2:
        sset2.append(i)

r=2*(n-2)*math.factorial(n)/math.factorial(2)/math.factorial(n-2)
lhs_ineq3=np.zeros((int(r),len(p)))
contador=-1

for i in range(n,len(p)):
    for j in range(len(sset2)):
        if set(sset2[j]).issubset(set(p[i]))==True:
            contador+=1
            for k in range(len(p)):
                if set(sset2[j]).issubset(set(p[k]))==True and set(
                    p[k]).issubset(set(p[i]))==True:
                    lhs_ineq3[contador,k]=1

rhs_ineq3=np.zeros(int(r))
#-----
#----- matriz de la restriccion (LP-2monot3)-----
lhs_ineq2=np.zeros((n,len(p)))

for i in range(n):
    lhs_ineq2[i,i]=1

rhs_ineq2=np.zeros(n)
#-----
#----- matriz de la restriccion (LP-2monot4)-----
lhs_ineq1=np.zeros((len(p),len(p)))

for i in range(len(p)):
    for j in range(len(p)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            obj[i]+=1#calculamos los coefs. de la funcion objetivo
            lhs_ineq1[j,i]=1

rhs_ineq1=np.array(probs) #cambio de signo de las restricciones para
rhs_ineq1=-rhs_ineq1 #adecuarlas a aproximaciones exteriores
lhs_ineq1=-lhs_ineq1
#-----
#juntamos todas las matrices de restricciones
lhs_ineq=np.vstack((lhs_ineq1,lhs_ineq2,lhs_ineq3))
rhs_ineq=np.concatenate((rhs_ineq1,rhs_ineq2,rhs_ineq3))

#solucion optima del problema de programacion lineal
#los coefs. de la funcion objetivo tambien llevan un factor -1
#por tratarse de aprox exteriores
opt = linprog(c=-1*obj, A_ub=-1*lhs_ineq, b_ub=-1*rhs_ineq, A_eq=lhs_eq,
              b_eq=rhs_eq, method="revised simplex", bounds=(None,None))

m=[] #valores optimos redondeados a 14 decimales
for i in range(len(opt.x)):
    m.append(round(opt.x[i],14))

#calculamos \underline(P) a partir de las inversas de Mobius
#obtenidas resolviendo el problema de PL
Bel=np.zeros(len(m))

for i in range(len(m)):
    for j in range(len(m)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            Bel[j]+=m[i]

for i in range(len(Bel)):

```

```

    Bel[i]=round(Bel[i],14)
    probs[i]=round(probs[i],14)

#calculamos la distancia d_{BV} entre la aproximacion y
#el modelo original. Si es 0 concluimos que la prob. inferior
#inicial ya es 2-monotona
titulos=['A','P(A)','m','Q']
datos = [titulos] + list(zip(p, probs, m, Bel))
dVB=str(round(sum(np.subtract(Bel, probs)),14))
dVB1=str(-float(dVB))
#pasamos por pantalla los resultados
if float(dVB)==0:
    sys.exit('La probabilidad inferior introducida ya es 2-monotona')
print('\n Aproximacion exterior mediante programacion lineal:\n')

for i, d in enumerate(datos):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '+dVB1)
print('\n')
#-----
#Resolvemos el problema de programacion cuadratica (QP-2monot)
#con las restricciones (2monot1):(2monot4) en terminos de la
#probabilidad inferior

def mobius(x): #definimos la inversa de Mobius en forma de funcion
    t=np.zeros(len(p))
    for i in range(len(p)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[x]))==True:
            t[i]=(-1)**(len(p[x])-len(p[i]))
    return t

# expresamos las matrices de restricciones en terminos de la
# probabilidad inferior

lhs_ineq_Bel=np.zeros(np.shape(lhs_ineq))

for i in range(len(lhs_ineq)):
    for j in range(len(p)):
        lhs_ineq_Bel[i]+=lhs_ineq[i,j]*mobius(j)

lhs_eq_Bel=np.array([np.zeros(len(p))])
lhs_eq_Bel[0][-1]=1

H=2*np.identity(2*n-1)
c=-2*np.array(probs)

rhs_eq=rhs_eq.reshape(rhs_eq.shape[1])

#solucion optima del problema de programacion cuadratica
opt_Bel_C = solve_qp(P=H, q=c, G=-lhs_ineq_Bel, h=-rhs_ineq, A=lhs_eq_Bel,
                    b=rhs_eq, lb=None, ub=None)

for i in range(len(opt_Bel_C)):
    opt_Bel_C[i]=abs(round(opt_Bel_C[i],14))

#imprimimos por pantalla la aproximacion exterior hallada y la distancia
#d_{BV} con respecto a la probabilidad inferior inicial, con un redondeo
#de 14 decimales
print('Aproximacion exterior mediante programacion cuadratica:\n')

titulos_C=['A','P(A)','Q']
datos_C = [titulos_C] + list(zip(p, probs, opt_Bel_C))

for i, d in enumerate(datos_C):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '
      +str(round(sum(np.subtract(probs, opt_Bel_C)),14)))
print('\n')
#-----
#Resolvemos el problema de programacion cuadratica (QP-2monot)
#con las restricciones (2monot1):(2monot4) y (2monot-delta)
#en terminos de la probabilidad inferior
#----- matriz de la restriccion (2monot-delta)-----

rhs_eq_2=np.array([round(float(dVB)+sum(probs),14)])

```

```

lhs_eq_2=np.array([np.ones(len(p))])

lhs_eq_C2=np.vstack((lhs_eq_Bel , lhs_eq_2))
rhs_eq_C2=np.concatenate((rhs_eq , rhs_eq_2))

# solucion optima del problema de programacion cuadratica

opt_Bel_C2 = solve_qp(P=H, q=c,G=-lhs_ineq_Bel , h=-rhs_ineq , A=lhs_eq_C2 ,
                    b=rhs_eq_C2 , lb=None, ub=None)

for i in range(len(opt_Bel_C2)):
    opt_Bel_C2[i]=abs(round(opt_Bel_C2[i],14))

#imprimimos por pantalla la aproximacion interior hallada y la distancia
#d_BV con respecto a la probabilidad inferior inicial, con un redondeo
#de 14 decimales
print("""Aproximacion exterior mediante programacion
cuadratica minimizando la distancia de B-V:\n""")

titulos_C2=['A', 'P(A)', 'Q']
datos_C2 = [titulos_C2] + list(zip(p, probs , opt_Bel_C2))

for i, d in enumerate(datos_C2):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '
      +str(round(sum(np.subtract(probs , opt_Bel_C2)),14)))
print('\n')

#Buscamos soluciones optimas alternativas
#Si \underline(Q) es la aproximacion exterior de \underline(P)
#hallada, seleccionamos un subconjunto A tal que \underline(Q)<\underline(P)
#y resolvemos el problema de PL con la restriccion adicional
#\underline(Q)=\underline(P). Si la distancia d_BV resultante no varia,
#hemos encontrado una aproximacion exterior optima alternativa
contador_U=0

contador_U=0

for i in range(len(probs)):
    if (probs==Bel)[i]==False:
        lhs_eq_U1=np.zeros(len(p))
        rhs_eq_U1=np.array([probs[i]])
        for j in range(len(p)):
            if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
                lhs_eq_U1[j]=1
        lhs_eq_U=np.vstack((lhs_eq , [lhs_eq_U1]))
        rhs_eq_U=np.concatenate((rhs_eq , rhs_eq_U1))
        opt_U = linprog(c=-1*obj , A_ub=-1*lhs_ineq , b_ub=-1*rhs_ineq ,
                      A_eq=lhs_eq_U , b_eq=rhs_eq_U , method="revised simplex" ,
                      bounds=(None, None))
        m_U=[]
        for i in range(len(opt_U.x)):
            m_U.append(round(opt_U.x[i],14))

        Bel_U=np.zeros(len(m_U))

        for i in range(len(m_U)):
            for j in range(len(m_U)):
                if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
                    Bel_U[j]+=m_U[i]

        for i in range(len(Bel_U)):
            Bel_U[i]=round(Bel_U[i],14)

dVB_U=str(round(sum(np.subtract(Bel_U , probs)),14))

if float(dVB_U)==float(dVB):

    contador_U+=1
    print("""La solucion optima del problema de programacion lineal
no es unica. Una solucion optima alternativa es: """)
    titulos_U=['A', 'P(A)', 'm', 'Bel']
    datos_U = [titulos_U] + list(zip(p, probs , m_U, Bel_U))
    for i, d in enumerate(datos_U):
        line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
        print(line)
        if i == 0:
            print('-' * len(line))
    break

```

```

if contador_U==0:
    print('La solución mediante programación lineal es única')

```

A.4. Búsqueda de aproximaciones interiores completamente monótonas

```

#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools
from scipy.optimize import linprog
import sys
from qpsolvers import solve_qp

n = int(input("Introduzca el cardinal de su espacio: "))
x = np.arange(1,n+1)
tol=10E-6 # tolerancia numerica. Si |a-b|<tol consideramos a=b

def powerset(L): # construimos el conjunto potencia
    P = set()
    for n in range(len(L) + 1):
        for sset in itertools.combinations(L, n):
            P.add(sset)
    return P

p=sorted(list(powerset(x)),key=lambda x: (len(x),x))

probs=[]

for i in p: # se pide por pantalla la medida de cada subconjunto
    probs.append(np.round(float(eval(input('Introduzca la medida del conjunto '
        + str(i)+': '))),10))

#---comprobacion normalizacion
if probs[0]!=0:
    sys.exit('La probabilidad inferior del suceso imposible debe ser 0')
if probs[-1]!=1:
    sys.exit('La probabilidad del suceso seguro debe ser 1')

probs.remove(probs[p.index(())]) #eliminamos el conjunto vacio
p.remove(p[p.index(())])

#---comprobacion coherencia
#se realiza del mismo modo que en el codigo del Apéndice A.1
for i in range(len(p)):
    obj_C=np.zeros(n)
    lhs_ineq_C=np.zeros((len(p),n))
    rhs_ineq_C=np.array(probs)
    lhs_eq_C=[np.ones(n)]
    rhs_eq_C=np.array([[1]])
    for j in range(n):
        if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
            obj_C[j]=1
        for k in range(len(p)):
            if set(p[j]).issubset(set(p[k]))==True:
                lhs_ineq_C[k,j]=1
    opt_C = linprog(c=obj_C, A_ub=-lhs_ineq_C, b_ub=-rhs_ineq_C,
        A_eq=lhs_eq_C, b_eq=rhs_eq_C, method="revised simplex")
    if abs(opt_C.fun-probs[i])>tol:
        sys.exit('La probabilidad inferior introducida no es coherente')
#
#Resolvemos el problema de PL (LP-inner.bel) con las restricciones
#(bel1):(bel2*) en terminos de la inversa de Mobius m
obj=np.zeros(len(p)) # definimos la funcion objetivo
lhs_ineq=np.zeros((len(p),len(p)))

for i in range(len(p)): # lado izquierdo de la restriccion (bel.1)
    for j in range(len(p)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            obj[i]+=1
            lhs_ineq[j,i]=1

rhs_eq=np.array([[1]]) # lado derecho de la restriccion (bel.2*)
rhs_ineq=np.array(probs) # lado derecho de la restriccion (bel.2*)
lhs_eq=[np.ones(len(p))] # lado izquierdo de la restriccion (bel.1)

# solucion optima del problema de programacion lineal

```

```

opt = linprog(c=obj, A_ub=-lhs_ineq, b_ub=-rhs_ineq, A_eq=lhs_eq,
             b_eq=rhs_eq, method="revised simplex")

m=[] #valores optimos redondeados a 14 decimales
for i in range(len(opt.x)):
    m.append(round(opt.x[i],14))

#calculamos Bel a partir de las inversas de Mobius
#obtenidas resolviendo el problema de PL

Bel=np.zeros(len(m))

for i in range(len(m)):
    for j in range(len(m)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            Bel[j]+=m[i]

for i in range(len(Bel)):
    Bel[i]=round(Bel[i],14)
    probs[i]=round(probs[i],14)

titulos=['A','P(A)','m','Bel']
datos = [titulos] + list(zip(p, probs, m, Bel))

#calculamos la distancia d_{BV} entre la aproximacion y
#el modelo original. Si es 0 concluimos que la prob. inferior
#inicial ya es completamente monotona
dVB=str(round(sum(np.subtract(Bel, probs)),14))
if float(dVB)==0:
    sys.exit('La probabilidad inferior introducida ya es funcion de creencia')
print('\n Aproximacion interior mediante programacion lineal:\n')
#pasamos por pantalla los resultados
for i, d in enumerate(datos):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '+dVB)
print('\n')

#Resolvemos el problema de programacion cuadratica (QP-bel)
#con las restricciones (bel1):(bel2*) en terminos de Bel

def mobius(x): #definimos la inversa de mobius en forma de funcion
    t=np.zeros(len(p))
    for i in range(len(p)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[x]))==True:
            t[i]=(-1)**(len(p[x])-len(p[i]))
    return t

# expresamos las matrices de restricciones en terminos de Bel

lhs_ineq_Bel1=np.zeros(np.shape(lhs_ineq))

for i in range(len(p)):
    for j in range(len(p)):
        lhs_ineq_Bel1[i]+=lhs_ineq[i,j]*mobius(j)

lhs_eq_Bel=np.array([np.zeros(len(p))])
lhs_eq_Bel[0][-1]=1

lhs_ineq_Bel2=np.zeros(np.shape(lhs_ineq))
rhs_ineq_Bel2=np.zeros(len(p))

for i in range(len(p)):
    lhs_ineq_Bel2[i]=mobius(i)

lhs_ineq_Bel=np.vstack((lhs_ineq_Bel1, lhs_ineq_Bel2))
rhs_ineq_Bel=np.array([np.concatenate((rhs_ineq, rhs_ineq_Bel2))])

H=2*np.identity(2*n-1)
c=-2*np.array(probs)

rhs_ineq_Bel=rhs_ineq_Bel.reshape(rhs_ineq_Bel.shape[1])
rhs_eq=rhs_eq.reshape(rhs_eq.shape[1])

#solucion optima del problema de programacion cuadratica
opt_Bel_C = solve_qp(P=H, q=c, G=-lhs_ineq_Bel, h=-rhs_ineq_Bel,
                    A=lhs_eq_Bel, b=rhs_eq, lb=None, ub=None)

for i in range(len(opt_Bel_C)):
    opt_Bel_C[i]=abs(round(opt_Bel_C[i],14))

```

```

#imprimimos por pantalla la aproximacion interior hallada y la distancia
#d_BV con respecto a la probabilidad inferior inicial, con un redondeo
#de 14 decimales
print('Aproximacion interior mediante programacion cuadratica:\n')

titulos_C=['A', 'P(A)', 'Bel']
datos_C = [titulos_C] + list(zip(p, probs, opt_Bel_C))

for i, d in enumerate(datos_C):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '
      +str(round(sum(np.subtract(opt_Bel_C, probs)),14)))
print('\n')

#-----
#Resolvemos el problema de programacion cuadratica (QP-bel)
#con las restricciones (bel1):(bel2*) y (bel-delta)
#en terminos de la probabilidad inferior
#----- matriz de la restriccion (bel-delta)-----

rhs_eq_2=np.array([round(float(dVB)+sum(probs),14)])
lhs_eq_2=np.array([np.ones(len(p))])

lhs_eq_C2=np.vstack((lhs_eq_Bel, lhs_eq_2))
rhs_eq_C2=np.concatenate((rhs_eq, rhs_eq_2))

# solucion optima del problema de programacion cuadratica
opt_Bel_C2 = solve_qp(P=H, q=c, G=-lhs_ineq_Bel, h=-rhs_ineq_Bel,
                    A=lhs_eq_C2, b=rhs_eq_C2, lb=None, ub=None)

for i in range(len(opt_Bel_C2)):
    opt_Bel_C2[i]=abs(round(opt_Bel_C2[i],14))
#imprimimos por pantalla la aproximacion interior hallada y la distancia
#d_BV con respecto a la probabilidad inferior inicial, con un redondeo
#de 14 decimales
print("""Aproximacion interior mediante programacion
cuadratica minimizando la distancia de B-V:\n""")
titulos_C2=['A', 'P(A)', 'Bel']
datos_C2 = [titulos_C2] + list(zip(p, probs, opt_Bel_C2))

for i, d in enumerate(datos_C2):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '
      +str(round(sum(np.subtract(opt_Bel_C2, probs)),14)))
print('\n')

#-----
#Buscamos soluciones optimas alternativas
#Si Bel es la aproximacion interior de \underline(P)
#hallada, seleccionamos un subconjunto A tal que Bel>\underline(P)
#y resolvemos el problema de PL con la restriccion adicional
#Bel=\underline(P). Si la distancia d_BV resultante no varia,
#hemos encontrado una aproximacion interior optima alternativa
contador_U=0

for i in range(len(probs)):
    if (probs==Bel)[i]==False:
        lhs_eq_U1=np.zeros(len(p))
        rhs_eq_U1=np.array([probs[i]])
        for j in range(len(p)):
            if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
                lhs_eq_U1[j]=1
        lhs_eq_U=np.vstack((lhs_eq, [lhs_eq_U1]))
        rhs_eq_U=np.concatenate((rhs_eq, rhs_eq_U1))
        opt_U = linprog(c=obj, A_ub=-lhs_ineq, b_ub=-rhs_ineq,
                      A_eq=lhs_eq_U, b_eq=rhs_eq_U, method="revised simplex")
        m_U=[]
        for i in range(len(opt_U.x)):
            m_U.append(round(opt_U.x[i],14))

        Bel_U=np.zeros(len(m_U))

        for i in range(len(m_U)):
            for j in range(len(m_U)):
                if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:

```



```

        Bel_U[j]+=m_U[i]
    for i in range(len(Bel_U)):
        Bel_U[i]=round(Bel_U[i],14)
dVB_U=str(round(sum(np.subtract(Bel_U, probs)),14))
if float(dVB_U)==float(dVB):
    contador_U+=1
    print("""La solucion optima del problema de programacion lineal
no es unica. Una solucion optima alternativa es: """)
    titulos_U=['A', 'P(A)', 'm', 'Bel']
    datos_U = [titulos_U] + list(zip(p, probs, m_U, Bel_U))
    for i, d in enumerate(datos_U):
        line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
        print(line)
        if i == 0:
            print('-' * len(line))
    break
if contador_U==0:
    print('La solucion mediante programacion lineal es unica')

```

A.5. Búsqueda de aproximaciones exteriores completamente monótonas

```

#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools
from scipy.optimize import linprog
import sys
from qpsolvers import solve_qp

n = int(input("Introduzca el cardinal de su espacio: "))
x = np.arange(1,n+1)
tol=10E-6 # tolerancia numerica. Si |a-b|<tol consideramos a=b

def powerset(L): # construimos el conjunto potencia
    P = set()
    for n in range(len(L) + 1):
        for sset in itertools.combinations(L, n):
            P.add(sset)
    return P

p=sorted(list(powerset(x)),key=lambda x: (len(x),x))

probs=[]

for i in p: # se pide por pantalla la medida de cada subconjunto
    probs.append(np.round(float(eval(input('Introduzca la medida del conjunto '
+ str(i)+': '))),10))

#---comprobacion normalizacion
if probs[0]!=0:
    sys.exit('La probabilidad inferior del suceso imposible debe ser 0')
if probs[-1]!=1:
    sys.exit('La probabilidad del suceso seguro debe ser 1')

probs.remove(probs[p.index(())]) #eliminamos el conjunto vacio
p.remove(p[p.index(())])

#---comprobacion coherencia
#se realiza del mismo modo que en el codigo del Apendice A.1
for i in range(len(p)):
    obj_C=np.zeros(n)
    lhs_ineq_C=np.zeros((len(p),n))
    rhs_ineq_C=np.array(probs)
    lhs_eq_C=[np.ones(n)]
    rhs_eq_C=np.array([[1]])
    for j in range(n):
        if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
            obj_C[j]=1
    for k in range(len(p)):
        if set(p[j]).issubset(set(p[k]))==True:

```

```

        lhs_ineq_C[k,j]=1
    opt_C = linprog(c=obj_C, A_ub=-lhs_ineq_C, b_ub=-rhs_ineq_C,
                  A_eq=lhs_eq_C, b_eq=rhs_eq_C, method="revised simplex")
    if abs(opt_C.fun-probs[i])>tol:
        sys.exit('La probabilidad inferior introducida no es coherente')
#-----
#Resolvemos el problema de PL (LP.bel) con las restricciones
#(bel1):(bel2) en terminos de la inversa de Mobius m
obj=np.zeros(len(p)) # definimos la funcion objetivo

lhs_ineq=np.zeros((len(p),len(p)))

for i in range(len(p)): # lado izquierdo de la restriccion (bel.1)
    for j in range(len(p)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            obj[i]+=1
            lhs_ineq[j,i]=1

rhs_eq=np.array([[1]]) # lado derecho de la restriccion (bel.2)
rhs_ineq=np.array(probs) # lado derecho de la restriccion (bel.2)
lhs_eq=[np.ones(len(p))] # lado izquierdo de la restriccion (bel.1)

# solucion optima del problema de programacion lineal

opt = linprog(c=-obj, A_ub=lhs_ineq, b_ub=rhs_ineq, A_eq=lhs_eq,
             b_eq=rhs_eq, method="revised simplex")

m=[] #valores optimos redondeados a 14 decimales
for i in range(len(opt.x)):
    m.append(round(opt.x[i],14))

#calculamos Bel a partir de las inversas de Mobius
#obtenidas resolviendo el problema de PL

Bel=np.zeros(len(m))

for i in range(len(m)):
    for j in range(len(m)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            Bel[j]+=m[i]

for i in range(len(Bel)):
    Bel[i]=round(Bel[i],14)
    probs[i]=round(probs[i],14)

titulos=['A','P(A)','m','Bel']
datos = [titulos] + list(zip(p, probs, m, Bel))

#calculamos la distancia d_{BV} entre la aproximacion y
#el modelo original. Si es 0 concluimos que la prob. inferior
#inicial ya es completamente monotona

dVB=str(round(sum(np.subtract(Bel, probs)),14))
dVB1=str(-float(dVB))

if float(dVB)==0:
    sys.exit('La probabilidad inferior introducida ya es funcion de creencia')
print('\n Aproximacion exterior mediante programacion lineal:\n')
#pasamos por pantalla los resultados
for i, d in enumerate(datos):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '+dVB1)
print('\n')

#Resolvemos el problema de programacion cuadratica (QP-bel)
#con las restricciones (bel1):(bel2) en terminos de Bel

def mobius(x): #definimos la inversa de mobius en forma de funcion
    t=np.zeros(len(p))
    for i in range(len(p)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[x]))==True:
            t[i]=(-1)**(len(p[x])-len(p[i]))
    return t

# expresamos las matrices de restricciones en terminos de Bel

lhs_ineq_Bel1=np.zeros(np.shape(lhs_ineq))

for i in range(len(p)):
    for j in range(len(p)):

```

```

        lhs_ineq_Bel1[i]+=lhs_ineq[i,j]*mobius(j)
lhs_eq_Bel=np.array([np.zeros(len(p))])
lhs_eq_Bel[0][-1]=1

lhs_ineq_Bel2=np.zeros(np.shape(lhs_ineq))
rhs_ineq_Bel2=np.zeros(len(p))

for i in range(len(p)):
    lhs_ineq_Bel2[i]=mobius(i)

lhs_ineq_Bel=np.vstack((lhs_ineq_Bel1,-lhs_ineq_Bel2))
rhs_ineq_Bel=np.array([np.concatenate((rhs_ineq,rhs_ineq_Bel2))])

H=2*np.identity(2**n-1)
c=-2*np.array(probs)

rhs_ineq_Bel=rhs_ineq_Bel.reshape(rhs_ineq_Bel.shape[1])
rhs_eq=rhs_eq.reshape(rhs_eq.shape[1])

#solucion optima del problema de programacion cuadratica
opt_Bel_C = solve_qp(P=H, q=c,G=lhs_ineq_Bel, h=rhs_ineq_Bel,
                    A=lhs_eq_Bel, b=rhs_eq, lb=None,ub=None)

for i in range(len(opt_Bel_C)):
    opt_Bel_C[i]=abs(round(opt_Bel_C[i],14))

#imprimimos por pantalla la aproximacion interior hallada y la distancia
#d_BV con respecto a la probabilidad inferior inicial, con un redondeo
#de 14 decimales
print('Aproximacion exterior mediante programacion cuadratica:\n')

titulos_C=['A','P(A)','Bel']
datos_C = [titulos_C] + list(zip(p,probs,opt_Bel_C))

for i, d in enumerate(datos_C):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '
      +str(round(sum(np.subtract(probs,opt_Bel_C)),14)))
print('\n')

#-----
#Resolvemos el problema de programacion cuadratica (QP-bel)
#con las restricciones (bel1):(bel2*) y (bel-delta)
#en terminos de la probabilidad inferior
#----- matriz de la restriccion (bel-delta)-----

rhs_eq_2=np.array([round(float(dVB)+sum(probs),14)])
lhs_eq_2=np.array([np.ones(len(p))])

lhs_eq_C2=np.vstack((lhs_eq_Bel,lhs_eq_2))
rhs_eq_C2=np.concatenate((rhs_eq,rhs_eq_2))

# solucion optima del problema de programacion cuadratica
opt_Bel_C2 = solve_qp(P=H, q=c,G=lhs_ineq_Bel, h=rhs_ineq_Bel,
                    A=lhs_eq_C2, b=rhs_eq_C2, lb=None,ub=None)

for i in range(len(opt_Bel_C2)):
    opt_Bel_C2[i]=abs(round(opt_Bel_C2[i],14))

#imprimimos por pantalla la aproximacion exterior hallada y la distancia
#d_BV con respecto a la probabilidad inferior inicial, con un redondeo
#de 14 decimales
print("""Aproximacion exterior mediante programacion
cuadratica minimizando la distancia de B-V:\n""")

titulos_C2=['A','P(A)','Bel']
datos_C2 = [titulos_C2] + list(zip(p,probs,opt_Bel_C2))

for i, d in enumerate(datos_C2):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '
      +str(round(sum(np.subtract(probs,opt_Bel_C2)),14)))
print('\n')

#-----

```

```

#Buscamos soluciones optimas alternativas
#Si Bel es la aproximacion exterior de \underline(P)
#hallada, seleccionamos un subconjunto A tal que Bel<\underline(P)
#y resolvemos el problema de PL con la restriccion adicional
#Bel=\underline(P). Si la distancia d_BV resultante no varia,
#hemos encontrado una aproximacion exterior optima alternativa
contador_U=0

for i in range(len(probs)):
    if (probs==Bel)[i]==False:
        lhs_eq_U1=np.zeros(len(p))
        rhs_eq_U1=np.array([probs[i]])
        for j in range(len(p)):
            if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
                lhs_eq_U1[j]=1
        lhs_eq_U=np.vstack((lhs_eq,[lhs_eq-U1]))
        rhs_eq_U=np.concatenate((rhs_eq,rhs_eq-U1))
        opt_U = linprog(c=obj, A_ub=lhs_ineq, b_ub=rhs_ineq,
                        A_eq=lhs_eq_U, b_eq=rhs_eq_U,method="revised simplex")
        m_U=[]
        for i in range(len(opt_U.x)):
            m_U.append(round(opt_U.x[i],14))

        Bel_U=np.zeros(len(m_U))

        for i in range(len(m_U)):
            for j in range(len(m_U)):
                if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
                    Bel_U[j]+=m_U[i]

        for i in range(len(Bel_U)):
            Bel_U[i]=round(Bel_U[i],14)

        dVB_U=str(round(sum(np.subtract(Bel_U,probs)),14))

        if float(dVB_U)==float(dVB):

            contador_U+=1
            print("""La solucion optima del problema de programacion lineal
no es unica. Una solucion optima alternativa es:""")
            titulos_U=['A','P(A)','m','Bel']
            datos_U = [titulos_U] + list(zip(p,probs,m_U,Bel_U))
            for i, d in enumerate(datos_U):
                line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
                print(line)
                if i == 0:
                    print('-' * len(line))
            break

if contador_U==0:
    print('La solucion mediante programacion lineal es unica')

```

A.6. Comparación de criterios de decisión

```

#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools
from scipy.optimize import linprog
import sys

n = int(input("Introduzca el cardinal de su espacio: "))
x= np.arange(1,n+1)
tol=10E-6 # tolerancia numerica. Si |a-b|<tol consideramos a=b

def powerset(L): # construimos el conjunto potencia
    P = set()
    for n in range(len(L) + 1):
        for sset in itertools.combinations(L, n):
            P.add(sset)
    return P

p=sorted(list(powerset(x)),key=lambda x: (len(x),x))

probs=[]

for i in p: # se pide por pantalla la medida de cada subconjunto
    probs.append(float(eval(input('Introduzca la medida del conjunto ')))

```

```

+ str(i)+' : ' )))

#---comprobacion normalizacion
if probs[0]!=0:
    sys.exit('La probabilidad inferior del suceso imposible debe ser 0')
if probs[-1]!=1:
    sys.exit('La probabilidad del suceso seguro debe ser 1')

probs.remove(probs[p.index(())]) #eliminamos el conjunto vacio
p.remove(p[p.index(())])

#---comprobacion coherencia
#se realiza del mismo modo que en el codigo del Apendice A.1
for i in range(len(p)):
    obj_C=np.zeros(n)
    lhs_ineq_C=np.zeros((len(p),n))
    rhs_ineq_C=np.array(probs)
    lhs_eq_C=[np.ones(n)]
    rhs_eq_C=np.array([[1]])
    for j in range(n):
        if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
            obj_C[j]=1
            for k in range(len(p)):
                if set(p[j]).issubset(set(p[k]))==True:
                    lhs_ineq_C[k,j]=1
    opt_C = linprog(c=obj_C, A_ub=-lhs_ineq_C, b_ub=-rhs_ineq_C,
                   A_eq=lhs_eq_C, b_eq=rhs_eq_C,method="revised simplex")
    if abs(opt_C.fun-probs[i])>tol:
        sys.exit('La probabilidad inferior introducida no es coherente')

# codigo realizado para 4 utilidades
#--- se piden por pantalla las utilidades

J1=[]
J2=[]
J3=[]
J4=[]
J=[J1,J2,J3,J4]
for i in p[:n]: # se pide por pantalla la medida de cada subconjunto
    J1.append(float(eval(input('Introduzca la utilidad J_1 del conjunto '
                               + str(i)+' : ' )))))
for i in p[:n]:
    J2.append(float(eval(input('Introduzca la utilidad J_2 del conjunto '
                               + str(i)+' : ' )))))
for i in p[:n]:
    J3.append(float(eval(input('Introduzca la utilidad J_3 del conjunto '
                               + str(i)+' : ' )))))
for i in p[:n]:
    J4.append(float(eval(input('Introduzca la utilidad J_4 del conjunto '
                               + str(i)+' : ' )))))

J=np.array(J)

# esta funcion calcula la extension natural mediante programacion lineal
def extension(J,probs,n):
    lhs_ineq=np.zeros((len(p),n))
    for i in range(len(p)):
        for j in range(n):
            if set(p[j]).issubset(set(p[i])) == True:
                lhs_ineq[i,j]=-1
    rhs_ineq=np.array(probs)
    lhs_eq=np.ones(n)
    rhs_eq=[1]
    opt=linprog(c=np.array(J),A_ub=lhs_ineq,b_ub=rhs_ineq,
               A_eq=np.array([lhs_eq]),b_eq=np.array(rhs_eq),
               method="revised simplex")
    return opt.fun

#decision optima segun el criterio maximin
maximin=[]
for i in J:
    E_J=extension(i,probs,n)
    maximin.append(E_J)

print(np.round(maximin,6))
print('La decision optima segun el criterio maximin es la '
      +str(np.argmax(maximin)+1))

#decision optima segun el criterio maximax
maximax=[]
for i in np.array(J):
    E_J=extension(-i,probs,n)
    maximax.append(-E_J)

```

```

print(np.round(maximax,6))
print('La decision optima segun el criterio maximax es la '
      +str(np.argmax(maximax)+1))

#construimos las diferencias J-i-J-k entre las utilidades
K=[np.array(J2)-np.array(J1),np.array(J4)-np.array(J1),np.array(J1)
-np.array(J2),np.array(J4)-np.array(J2),np.array(J1)-np.array(J4)
,np.array(J2)-np.array(J4)]

#se calcula la extension natural de cada diferencia J-i-J-k
maximality=[]
for i in np.array(K):
    E,K=extension(i,probs,n)
    maximality.append(E,K)

print(np.round(maximality,6))

#decisiones optimas segun el criterio maximality
maximal=[]
for i in np.array(K):
    E,J=extension(-i,probs,n)
    maximal.append(-E,J)

print(np.round(maximal,6))

#decisiones optimas segun el criterio E-admissibility
#se resuelve el problema de programacion lineal planteado
#en el Ejemplo 4.1
def admissibility(J,Jd,probs,n):
    lhs_ineq=np.zeros((len(p),n))
    for i in range(len(p)):
        for j in range(n):
            if set(p[j]).issubset(set(p[i])) == True:
                lhs_ineq[i,j]=-1
    rhs_ineq=np.concatenate((-np.array(probs),np.zeros(len(J))))
    lhs_eq=np.ones(n)
    rhs_eq=[1]
    for j in J:
        r=j-Jd
        lhs_ineq = np.vstack((lhs_ineq,r))
    opt=linprog(c=np.array(Jd),A_ub=lhs_ineq,b_ub=rhs_ineq,
               A_eq=np.array([lhs_eq]),b_eq=np.array(rhs_eq),
               method="revised simplex")
    return opt.status
ad_opt=[]

for i in range(len(J)):
    if admissibility(J,np.array(J[i]),probs,n)!=2:
        ad_opt.append(i+1)

print(ad_opt)

```

A.7. Cálculo de las decisiones óptimas del ejemplo ilustrativo

```

#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
from scipy.optimize import linprog

#salarios
y=np.array([5000,2700,2300,1000,3500,2400,1700,2500,3000,1000,2000,3000])
b=np.array([[{1,2,3,4,5},{1,2},{1,2,3},set(),{1,5},{1,2},{1,2},{1},
             {1,2,3},{1},{1},{1,4,5}]] #beneficios

n=len(y)
S=np.zeros((n,n)) #matriz de salarios y-i - y-j
B=np.zeros((n,n)) #matriz de comparacion de subconjuntos
R1=np.zeros((n,n)) #matriz que indica los elementos pertenecientes a R1

for i in range(n): #si b-j es subconjunto de b-i entonces B[i,j]=1
    for j in range(n):
        S[i,j]=y[i]-y[j]
        if b[j].issubset(b[i])==True:
            B[i,j]=1

```

```

A=np.zeros((1000,13)) # matriz de restricciones
A_eq=np.zeros((810,13))

cont=0 #contador de filas
for i in range(n): # restricciones correspondientes a R1
    for j in range(n):
        if i!=j: # descartamos el caso (a-i, a-i)
            if S[i,j]>=0 and B[i,j]==1:
                A[cont,i]+=-1 # actualizamos matriz de restricciones
                A[cont,j]+=1
                R1[i,j]=1
                cont+=1 # actualizamos contador

indices=np.where(R1==1)
I=list(zip(indices[0],indices[1]))
cont2=0 #contador matriz de igualdades

for i,j in I:
    for k,l in I:
        if B[l,j]==1 and B[i,k]==1 and S[i,j]-S[k,l]>=0:
            if S[k,l]>=S[i,j] and B[j,l]==1 and B[k,i]==1:
                A_eq[cont2,k]+=-1 # actualizamos matriz de restricciones
                A_eq[cont2,j]+=-1
                A_eq[cont2,l]+=1
                A_eq[cont2,i]+=1
                cont2+=1
            else:
                A[cont,k]+=1 # actualizamos matriz de restricciones
                A[cont,j]+=1
                A[cont,l]+=-1
                A[cont,i]+=-1
                cont+=1 #actualizar contador

A_eq=A_eq[~np.all(A_eq==0,axis=1)]
A_eq=np.unique(A_eq,axis=0)[:2] #las 2 ultimas filas son redundantes
l_eq=np.shape(A_eq)[0]
A=[~np.all(A==0,axis=1)] # eliminamos filas de ceros
A[:,-1]=1 # incorporamos el 1 correspondiente a epsilon
A=np.unique(A,axis=0)
l=np.shape(A)[0]

b_ineq=np.array(np.zeros(1)).flatten()
b_eq=np.array(np.zeros(l_eq)).flatten()
c=np.zeros(13)
c[-1]=-1 # linprog solo deja minimizar, resolvemos min - c*(u1,...,u12,e)

#comprobamos la consistencia
sol = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b_ineq, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=(0,1),
             method='revised simplex')
print(sol.x)

#criterio de A-admissibility
print('A-admisibilidad')

#puntos extremos del conjunto credal
#calculados con el codigo del Apendice A.1
ext=np.array([[0.5, 0.25, 0.25, 0.0], [0.75, 0.0, 0.25, 0.0],
             [0.75, 0.25, 0.0, 0.0]])

n_ext=len(ext)
A_adm=np.zeros((2*n_ext,n+1))
print('Para J1')
#restricciones asociadas a la A-admisibilidad
for i in range(n_ext): #para J1
    A_adm[2*i][4]=-1*ext[i]
    A_adm[2*i+1][4]=-1*ext[i]
    A_adm[2*i][4:8]=ext[i]
    A_adm[2*i+1][8:12]=ext[i]

A_ineq_adm=np.vstack((A,A_adm))
l_ineq_adm=np.shape(A_ineq_adm)[0]
b_ineq_adm=np.array(np.zeros(l_ineq_adm)).flatten()

sol_adm_1 = linprog(c, A_ub=A_ineq_adm, b_ub=b_ineq_adm, A_eq=A_eq,
                  b_eq=b_eq, bounds=(0,1),method='revised simplex')
print(sol_adm_1.x)

A_adm=np.zeros((2*n_ext,n+1))
print('Para J2')
for i in range(n_ext): #para J2
    A_adm[2*i][4:8]=-1*ext[i]
    A_adm[2*i+1][4:8]=-1*ext[i]
    A_adm[2*i][0:4]=ext[i]

```

```

A_adm[2*i+1][8:12]=ext[i]

A_ineq_adm=np.vstack((A,A_adm))
sol_adm_2 = linprog(c, A_ub=A_ineq_adm, b_ub=b_ineq_adm, A_eq=A_eq,
                   b_eq=b_eq, bounds=(0,1),method='revised simplex')
print(sol_adm_2.x)
print('Para J3')
for i in range(n_ext):
    A_adm[2*i][8:12]=-1*ext[i]
    A_adm[2*i+1][8:12]=-1*ext[i]
    A_adm[2*i][0:4]=ext[i]
    A_adm[2*i+1][4:8]=ext[i]

A_ineq_adm=np.vstack((A,A_adm))
sol_adm_3 = linprog(c, A_ub=A_ineq_adm, b_ub=b_ineq_adm, A_eq=A_eq,
                   b_eq=b_eq, bounds=(0,1),method='revised simplex')
print(sol_adm_3.x)

# calculo de los intervalos de esperanza generalizados
print('Intervalos de esperanza generalizados')
delta=np.array([0,0.01,0.02,0.03,0.04,0.05]) #granularidades
A_int=np.array([[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
                [0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]])
A_eq_int=np.vstack((A_eq[:, :-1], A_int))
b_eq_int=np.array([0,0,1,0])
A_ineq_int=A[:, :-1]
print('Para J1')
for j in range(len(delta)): #Para J1
    sol_min=[]
    sol_max=[]
    b_ineq_int=-delta[j]*np.array(np.ones(1)).flatten()

    for i in range(n_ext):
        c_int=np.zeros(n)
        c_int[0:4]=ext[i]
        sol_int_min = linprog(c_int, A_ub=A_ineq_int, b_ub=b_ineq_int,
                              A_eq=A_eq_int, b_eq=b_eq_int, bounds=(0,1),
                              method='revised simplex')
        sol_min.append(sol_int_min.fun)
        sol_int_max = linprog(-c_int, A_ub=A_ineq_int, b_ub=b_ineq_int,
                               A_eq=A_eq_int, b_eq=b_eq_int, bounds=(0,1),
                               method='revised simplex')
        sol_max.append(-sol_int_max.fun)

    print(min(sol_min),max(sol_max))

print('Para J2')
for j in range(len(delta)): #Para J2
    sol_min=[]
    sol_max=[]
    b_ineq_int=-delta[j]*np.array(np.ones(1)).flatten()

    for i in range(n_ext):
        c_int=np.zeros(n)
        c_int[4:8]=ext[i]
        sol_int_min = linprog(c_int, A_ub=A_ineq_int, b_ub=b_ineq_int,
                              A_eq=A_eq_int, b_eq=b_eq_int, bounds=(0,1),
                              method='revised simplex')
        sol_min.append(sol_int_min.fun)
        sol_int_max = linprog(-c_int, A_ub=A_ineq_int, b_ub=b_ineq_int,
                               A_eq=A_eq_int, b_eq=b_eq_int, bounds=(0,1),
                               method='revised simplex')
        sol_max.append(-sol_int_max.fun)

    print(min(sol_min),max(sol_max))

print('Para J3')
for j in range(len(delta)): #Para J3
    sol_min=[]
    sol_max=[]
    b_ineq_int=-delta[j]*np.array(np.ones(1)).flatten()

    for i in range(n_ext):
        c_int=np.zeros(n)
        c_int[8:12]=ext[i]
        sol_int_min = linprog(c_int, A_ub=A_ineq_int, b_ub=b_ineq_int,
                              A_eq=A_eq_int, b_eq=b_eq_int, bounds=(0,1),
                              method='revised simplex')
        sol_min.append(sol_int_min.fun)
        sol_int_max = linprog(-c_int, A_ub=A_ineq_int, b_ub=b_ineq_int,
                               A_eq=A_eq_int, b_eq=b_eq_int, bounds=(0,1),
                               method='revised simplex')
        sol_max.append(-sol_int_max.fun)

```



```

        print(min(sol_min), max(sol_max))

# Comparaciones por parejas
print('Comparaciones por parejas')
print('Se imprime (min, max)')
A_ineq_bin=A[:, :-1]
b_ineq_bin=np.array(np.zeros(1)).flatten()
A_eq_bin=A.eq[:, :-1]
b_eq_bin=np.array([0,0])

sol_min=[]
sol_max=[]
print('Para (J1, J2)')
for i in range(n_ext):      #Para (J1, J2)
    c_bin=np.zeros(n)
    c_bin[0:4]=ext[i]
    c_bin[4:8]=-ext[i]
    sol_bin_min = linprog(c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_min.append(sol_bin_min.fun)
    sol_bin_max = linprog(-c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_max.append(-sol_bin_max.fun)

print(min(sol_min), max(sol_max))

sol_min=[]
sol_max=[]
print('Para (J1, J3)')
for i in range(n_ext):      #Para (J1, J3)
    c_bin=np.zeros(n)
    c_bin[0:4]=ext[i]
    c_bin[8:12]=-ext[i]
    sol_bin_min = linprog(c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_min.append(sol_bin_min.fun)
    sol_bin_max = linprog(-c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_max.append(-sol_bin_max.fun)

print(min(sol_min), max(sol_max))

sol_min=[]
sol_max=[]
print('Para (J2, J1)')
for i in range(n_ext):      #Para (J2, J1)
    c_bin=np.zeros(n)
    c_bin[4:8]=ext[i]
    c_bin[0:4]=-ext[i]
    sol_bin_min = linprog(c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_min.append(sol_bin_min.fun)
    sol_bin_max = linprog(-c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_max.append(-sol_bin_max.fun)

print(min(sol_min), max(sol_max))

sol_min=[]
sol_max=[]
print('Para (J2, J3)')
for i in range(n_ext):      #Para (J2, J3)
    c_bin=np.zeros(n)
    c_bin[4:8]=ext[i]
    c_bin[8:12]=-ext[i]
    sol_bin_min = linprog(c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_min.append(sol_bin_min.fun)
    sol_bin_max = linprog(-c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_max.append(-sol_bin_max.fun)

print(min(sol_min), max(sol_max))

sol_min=[]
sol_max=[]

```

```

print('Para (J3,J1)')
for i in range(n_ext):      #Para (J3,J1)
    c_bin=np.zeros(n)
    c_bin[8:12]=ext[i]
    c_bin[0:4]=-ext[i]
    sol_bin_min = linprog(c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_min.append(sol_bin_min.fun)
    sol_bin_max = linprog(-c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_max.append(-sol_bin_max.fun)

print(min(sol_min),max(sol_max))

sol_min=[]
sol_max=[]
print('Para (J3,J2)')
for i in range(n_ext):      #Para (J3,J2)
    c_bin=np.zeros(n)
    c_bin[8:12]=ext[i]
    c_bin[4:8]=-ext[i]
    sol_bin_min = linprog(c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_min.append(sol_bin_min.fun)
    sol_bin_max = linprog(-c_bin, A_ub=A_ineq_bin, b_ub=b_ineq_bin,
                          A_eq=A_eq_bin, b_eq=b_eq_bin, bounds=(0,1),
                          method='revised simplex')
    sol_max.append(-sol_bin_max.fun)

print(min(sol_min),max(sol_max))

```

Bibliografía

- [1] T. Augustin, F. Coolen, G. de Cooman y M. Troffaes (Eds). Introduction to Imprecise Probabilities. *Wiley Series in Probability and Statistics*, Wiley, 2014.
- [2] P. Baroni y P. Vicig. An uncertainty interchange format with imprecise probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, 40:147-180, 2005.
- [3] G. Choquet. Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier*, 5:131-295, 1953-1954.
- [4] T. Fine. Theories of probability. *Academic Press*, 1973.
- [5] C. Jansen, G. Schollmeyer y T. Augustin. Concepts for decision making under severe uncertainty with partial ordinal and partial cardinal preferences. *International Journal of Approximate Reasoning*, 98, 112–131, 2018.
- [6] E. Miranda y S. Destercke. Extreme points of the credal sets generated by comparative probabilities. *Journal of Mathematical Psychology*, 64-65, 44-57, 2015.
- [7] E. Miranda, I. Montes, A. Presa. Inner approximations of credal sets by non-additive measures. *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'2022)*. Milán, Julio 2022. <https://ipmu2022.disco.unimib.it/>
- [8] E. Miranda, I. Montes y P. Vicig. On the selection of an optimal outer approximation of a coherent lower probability. *Fuzzy Sets and Systems*, 424C:1-16, 2021.
- [9] I. Montes, E. Miranda y A. Destercke. Pari-mutuel probabilities as an uncertainty model. *Information Sciences*, 481:550-573, 2019.
- [10] I. Montes, E. Miranda y P. Vicig. 2-monotone outer approximations of coherent lower probabilities *International Journal of Approximate Reasoning*, 101:181-205, 2018.

- [11] I. Montes, E. Miranda y P. Vicig. Outer approximations of coherent lower probabilities with belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 101:1-30, 2019.
- [12] G. Shafer. A Mathematical Theory of Evidence. *Princeton University Press*, 1976.
- [13] M. C. M. Troffaes. Decision making under uncertainty using imprecise probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, 45(1), 17–29, 2007.
- [14] P. Walley. Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities. *Chapman and Hall*, 1991.