

Grado en Física

ASPECTOS DE TEORÍAS DE CAMPOS CONFORMES

Raquel Izquierdo García

Trabajo Fin de Grado

Tutor: Diego Rodríguez Gómez

Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Junio de 2022

*Las leyes de la física son un reloj
caen por su propio peso.*

Rodrigo García Marina, *Desear la casa.*

Índice general

Introducción	1
1. Teorías conformes de campos	5
1.1. Grupo conforme: algunas definiciones equivalentes	6
1.2. El álgebra conforme	7
1.2.1. Breve <i>excursus</i> sobre el caso dos dimensional	10
1.2.2. «Invariancia bajo dilataciones implica invariancia conforme» <i>easy mode</i>	11
1.2.3. Una forma particularmente iluminadora de reagrupar los generadores del álgebra conforme	12
1.3. El grupo conforme: transformaciones finitas	14
1.3.1. SCT: traslación, inversión y traslación	15
1.4. Representaciones del grupo conforme. Operadores primarios	17
1.4.1. La primera versión: imitación de lo que sí sabemos hacer en QFT	17
1.4.2. La segunda versión: nos ponemos más formales. Operadores primarios con espín	19
1.4.3. La tercera versión: una de embebimientos	20
1.5. Sobre por qué hay algo llamado <i>State-Operator correspondence</i> en CFT	23
1.5.1. Cuantización radial	24
1.5.2. Correspondencia entre operadores y estados	25
2. Sobre las funciones de correlación en las teorías conformes	28
2.1. Estructura de las funciones a 2 y 3 puntos en una CFT	29
2.1.1. Funciones a 2 y 3 puntos de operadores primarios utilizando las <i>light cone coordinates</i>	29
2.1.2. Las funciones a dos y tres puntos en representaciones arbitrarias del grupo conforme.	36

2.1.3. ¿Y las funciones a un punto? Sobre por qué no hay VEV no nulos en las CFTs (planas).	38
2.2. <i>Operator Product Expansion</i>	39
2.3. <i>Conformal bootstrap</i>	42
3. La dualidad holográfica	45
3.1. <i>Willem de Sitter</i>	46
3.1.1. Una de las versiones más sencillas (simétricas) de la relatividad general: espacio <i>AdS</i>	46
3.1.2. Estructura conforme del espacio plano: <i>Einstein's Static Universe</i>	47
3.1.3. Sobre que no hay unas coordenadas perfectas para describir <i>AdS</i>	49
3.2. La dualidad AdS/CFT	51
3.2.1. La correspondencia con palabras	52
3.2.2. El campo escalar en <i>AdS</i> quiere portarse como un operador conforme en su frontera	54
3.2.3. El cálculo holográfico de la función de correlación a 2 pt de un operador primario escalar	57
3.3. Teoría de cuerdas de tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ vs $\mathcal{N} = 4$ SYM en 4 dimensiones.	60
3.4. La aproximación geodésica	67
3.4.1. Otra nueva-vieja versión de la función a 2pt de operadores escalares primarios utilizando la aproximación geodésica	70
4. CFT con temperatura y carga finitas	73
4.1. La dualidad AdS/CFT a temperatura finita.	74
4.2. CFTs a temperatura finita	77
4.3. El lado gravitatorio del asunto	79
4.3.1. El caso isótropo	81
4.3.2. $q_1 \neq 0, q_2 = q_3 = 0$	81
4.4. Temperatura y densidad de carga finitas	82
4.4.1. Dependencia temporal	84
4.4.2. Dependencia espacial	86
4.4.3. Dependencia espacial y temporal	88
Conclusiones	90
Bibliografía	93

A. Algunas cosas de teoría cuántica de campos	98
A.1. Descubriendo QFT	99
A.1.1. (Los) osciladores armónicos clásicos	99
A.1.2. (Los) osciladores armónicos cuánticos (cuánticos)	100
A.1.3. El límite continuo: cambiar sumatorios por integrales	103
A.1.4. Breve repaso de qué hemos aprendido	103
A.2. Campo escalar real libre v2	105
A.2.1. Vienen para quedarse. Nuestros primeros infinitos	106
A.3. Campo escalar real libre v3. Richard Feynman al habla: la integral de camino	107
A.3.1. La integral de camino en mecánica cuántica no relativista	107
A.3.2. La integral de camino en teoría cuántica de campos	108
A.3.3. Lo que nos enseña la path integral sobre QFT a temperatura finita	109
A.3.4. El funcional generador	112
A.4. Una forma –no tan– heurística de convencernos de la importancia de las funciones de correlación	113
A.4.1. La fórmula LSZ. De cómo la teoría libre conspira para explicarnos (algunas cosas) de las interacciones	113
A.5. Diagramas de Feynman	114
A.6. Breve introducción a la renormalización	118
A.6.1. ¿Cuándo aparecen infinitos en nuestros diagramas?	119
A.6.2. Caso de estudio. $\lambda\phi^4$ aka. una versión fácil de un $O(N)$	120
A.6.3. Grupo de renormalización continuo y renormalización wilsoniana	122
A.6.4. El punto fijo de Wilson-Fisher	127
B. La aproximación WKB.	132
B.1. La primera versión: el límite clásico de la ecuación de Schrödinger	132
B.2. La segunda versión: la aproximación WKB en QFT.	135

Introducción

En curso estándar de **teoría cuántica de campos** (QFT) –especialmente cuando está pensado desde la física de altas energías– se aprende a calcular diagramas de Feynman, amplitudes de scattering y a renormalizarlas. Esto significa que es un estudio de las QFTs centrado en hacer desarrollos perturbativos¹. En este trabajo estaremos interesadas en un tipo particular de QFTs, las **teorías conformes de campos** (CFT). Más que escribir un lagrangiano, leer sus vértices y, a partir de él, calcular expansiones perturbativas de las funciones de correlación, pretendemos estudiar qué restricciones impone la simetría conforme a las funciones de correlación exactas.

Si bien es cierto que la QFT es el lenguaje de la naturaleza², estudiar CFTs no es deseable solamente por ser un problema técnicamente más manejable sino porque es algo presente en nuestra realidad: cuando miramos a las teorías «desde lejos» la mayor parte de detalles microscópicos pierden la importancia y se suele terminar por tener invariancia bajo cambios de escala³[1]. En particular, las CFTs son muy importantes para modelizar toda clase de fenómenos críticos en mecánica estadística y materia condensada[2]. De hecho, el *conformal bootstrap*, una filosofía que pretendemos explicar en el trabajo, da algunos de los resultados más precisos que se conocen para asuntos tan «reales» como el cambio de fase del agua [3].

Al mirar un libro de texto de teorías conformes como [4] podríamos pensar que las CFTs no tienen nada que ver con el resto de QFTs que conocemos. Esto no es cierto, en primer lugar, porque las CFT son un tipo especialmente simétrico de QFTs. Además, si seguimos las enseñanzas de Wilson y nos planteamos esto desde el punto de vista del grupo de renormalización, nos damos cuenta de que CFTs y QFTs están estrechamente relacionadas. De forma abstracta, la manera «moderna» de

¹Algo que tiene sentido, pues QFT no perturbativa es algo que no sabemos hacer, al menos en general. Se trata de uno de los problemas abiertos a los que se enfrentan las físicas de este siglo. La holografía y el bootstrap, que presentamos en este trabajo, son dos de los métodos que se utilizan para ello.

²En el sentido de que es cuántica (el principio de incertidumbre parece ser un principio) y a la vez relativista (estrictamente causal), y esto nos lleva irremediablemente a los campos cuánticos, como motivamos en el apéndice A.

³En general la covariancia Lorentz y otras condiciones terminan haciendo que casi siempre se tenga al grupo conforme completo como simetría del sistema.

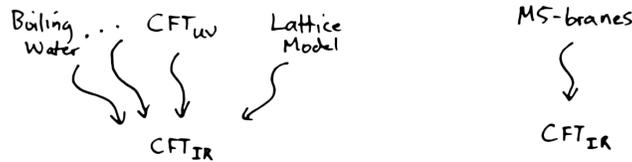


Figura 1: Representación de varias teorías distintas que llegan al mismo punto fijo en el IR. Figura 1 de [1].

entender las QFTs – en este caso las completas en el UV^4 – es identificándolas con el flujo del grupo de renormalización entre dos CFTs⁵:

$$\left. \begin{array}{l} CFT_{UV} \\ CFT_{IR} \end{array} \right\} QFT$$

Entonces, podemos pensar que los puntos fijos del grupo de renormalización –que son CFTs– pues sus funciones beta son idénticamente nulas– son las marcas en el camino que nos guiarán en el espacio de todas las teorías. Es decir, aprender CFTs nos va a ayudar a entender muchos aspectos de QFT.

Cuando pensamos en las QFT como algo que viene dado por un flujo del grupo de renormalización nos damos cuenta de que muchas teorías distintas pueden ir a parar a un mismo punto fijo. Esto, traducido a la vida real, significa que muchos problemas físicos distintos que pueden estudiarse a través de la misma CFT (el punto fijo en el IR, como se ilustra en la figura 1). En el apéndice A trabajamos continuamente con el ejemplo de la teoría $\lambda\phi^4$, que es conforme en 4 dimensiones. Estudiamos, por ejemplo, el punto fijo de Wilson-Fisher, que sirve para describir el punto crítico del modelo de Ising 3 dimensional [2]. Es sorprendente que el mismo punto crítico aparezca al trabajar con algo tan distinto al ferromagnetismo como el cambio de fase del agua[3]. Tiene que ver con entender que no nos importan los detalles microscópicos del lagrangiano sino que nos basta con saber cuál es la teoría que describe el sistema en dicho punto fijo, a esta idea se la llama **universalidad crítica**. Los ejemplos anteriores son en el euclídeo pero en signatura lorentziana tenemos la temperatura crítica del 4He superconductor [5], que viene descrita por la misma CFT. Esto es algo muy bonito: no es solo que los resultados teóricos sean compatibles con los experimentales sino que efectivamente todos coinciden, lo que nos permite, entre otras cosas, «ver» una rotación de Wick en la naturaleza.

Otro uso, quizá inesperado, de las CFTs, viene de la mano de la holografía. Igual que sabemos que la naturaleza es cuántica y relativista –y así llegamos a que los campos cuánticos aparecen sí o sí en

⁴En general, en caso de que la QFT no sea completa en el UV tendríamos que pensar esto mismo pero con un único punto fijo en el IR (no podemos pensar que a altas energías venga de ninguna otra teoría).

⁵En general, las funciones beta de una teoría representan un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden: al resolverlo encontramos trayectorias que van entre los distintos puntos fijos. De esto hablamos en el apéndice A. Esas trayectorias son precisamente lo que estamos identificando con la QFT.

nuestro día a día–, que la geometría del espaciotiempo (visto como un todo) tiene que ver con la materia y con la gravedad tal y como la observamos es un hecho indiscutible . Estos dos enfoques: el cuántico relativista y el de la relatividad general, son aparentemente contradictorios. Pero al mundo no le importa que sepamos o no describirlo: hay fenómenos relacionados con la gravedad en los que no se pueden despreciar los efectos cuánticos. Esto sucede al estudiar singularidades como las de los agujeros negros o, en cosmología, al tratar de entender el Big Bang. Si bien el problema de la estructura microscópica del espaciotiempo, el de la gravedad cuántica (QG), no está resuelto, hay consenso respecto a que QG tiene que ser holográfica, en el sentido de que magnitudes que habitualmente esperaríamos que escalaran con el volumen lo hacen con el área. Esto significa que hay ciertas evidencias de que, aunque no sepamos construir una teoría cuántica de la gravedad, esta va a ser dual –es decir, equivalente– a una teoría cuántica en la frontera de ese espacio. La mejor realización de este principio holográfico se hace en espacios AdS , donde la teoría cuántica es precisamente una teoría conforme. Entonces, aprender CFTs será también abrir la puerta a entender ciertos asuntos de QG.

El trabajo tiene tres partes diferenciadas: en la primera estudiamos CFTs en espacios planos, haciendo especial énfasis en las restricciones que imponen las simetrías conformes en la teoría mientras que en la última presentamos unos resultados nuevos sobre funciones de correlación a dos puntos en CFTs con temperatura y carga finitas, es decir, en una geometría no trivial. Esto último lo hacemos utilizando la dualidad AdS/CFT, que explicamos en la segunda parte.

Así, en el primer capítulo estudiaremos el grupo conforme de una variedad plana y sus representaciones: los operadores y estados con los que vamos a trabajar en nuestras CFTs. Aquí ya nos encontramos con muchos ejemplos de por qué una CFT es una QFT bastante especial: definimos y estudiamos los operadores primarios y los utilizamos para organizar el espectro de la teoría de una forma que no sería posible sin estas simetrías «extra». En el segundo capítulo utilizamos lo aprendido del grupo $Conf(d)$ para razonar que las funciones de correlación a dos y tres puntos están completamente fijadas por esta simetría conforme. También hablamos de la OPE y del *conformal bootstrap* para explicar cómo una CFT es una teoría dada por un conjunto pequeño (aunque infinito) de números al que llamamos *CFT data*.

En el tercer capítulo estudiamos la dualidad AdS/CFT. Primero lo hacemos desde el punto de vista de las simetrías y después explicamos una realización concreta en teoría de cuerdas [6]. Esto nos permite derivar, utilizando teorías de gravedad, algunos resultados que mostramos en los primeros capítulos. Por último, introducimos la aproximación geodésica, con la que volvemos a obtener la función de correlación a dos puntos en una CFT de una forma que podremos exportar directamente al cálculo con temperatura y carga finitas del último capítulo.

En el último capítulo estudiamos CFTs a temperatura y densidad de carga finitas utilizando holografía. Esto se corresponde con poner nuestra CFT en una geometría no trivial ($S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$), lo que hace que la estructura de las funciones de correlación sea mucho más rica. En primer lugar revisamos la realización de la dualidad holográfica a temperatura finita [7] y justificamos por qué razón el dual holográfico de estas teorías va a ser un agujero negro. En nuestro caso será una versión 5 dimensional del agujero negro de Reissner–Nordström⁶, para el que calculamos la temperatura en función de los parámetros de la métrica y hacemos un repaso de algunos resultados de CFT a temperatura finita [8].

Por último, utilizando todo lo aprendido en los capítulos anteriores, calculamos perturbativamente la función de correlación a dos puntos de un operador escalar con dimensión conforme $\Delta \gg 1$ en una CFT a temperatura y densidad de carga finitas.

⁶En realidad proviene de una reducción dimensional de una solución de SUGRA $10d$, lo vemos en la sección 4.3.

Capítulo 1

Teorías conformes de campos

Las isometrías son algo a lo que estamos muy acostumbradas: seguramente en la primera semana en la universidad escribimos una matriz de rotación y cualquiera entiende que rotar o mover las cosas no hace que su forma cambie. Sin embargo, cuando pensamos en abstracto en las simetrías conformes, las que dejan invariantes los ángulos, parece que nos resulta más difícil entender cómo funcionan, aunque en realidad sí que convivimos con ellas en el día a día al hacer *zoom* en una foto o ver patrones fractales¹ en el arte o la naturaleza (figura 1.1). El objetivo de este capítulo es aprender algunas ideas fundamentales sobre las CFTs.



Figura 1.1: Un romanescu.

Para ello necesitamos, en primer lugar, familiarizarnos con estas simetrías. Esto es lo que haremos en la primera parte del capítulo (secciones (1.1), (1.2) y (1.3)): estudiar el grupo y álgebra conformes². Después de entender las simetrías espaciotemporales de nuestras teorías tocará preguntarse cuáles son los objetos que van a formar parte de nuestras CFTs: los operadores y los campos. La respuesta a esto tiene que ver con las representaciones del grupo conforme y en particular con escoger unos números cuánticos adecuados. Además, la rica estructura del álgebra conforme hace que en estas teorías existan unos operadores «especiales» a los que llamamos **primarios**, que nos permiten organizar el espectro de la teoría de una forma particularmente sencilla. De entender esto nos encargamos en la segunda parte del capítulo (sección (1.4)). Por último explicamos la correspondencia que hay entre operadores y estados en una CFT trabajando entre medias con la cuantización radial (sección (1.5)).

¹Casi fractales: habrá una distancia que no podremos resolver. Volvemos a la idea de teoría efectiva y de distancia característica.

²Aunque algunas cosas las estudiamos en general, mayoritariamente nos centramos en el caso en que la variedad que representa nuestro espaciotiempo es plana.

1.1. Grupo conforme: algunas definiciones equivalentes

Las transformaciones que dejan invariantes localmente los ángulos se llaman **transformaciones conformes**. En este capítulo nos vamos a restringir casi absolutamente al caso plano³, pero antes vamos a sacar algunas ecuaciones interesantes para el caso general⁴ siguiendo el capítulo VIII.2. de [9]. Consideramos una métrica $g_{\mu\nu}(x)$ cualquiera, que se transformará bajo un cambio de coordenadas $x \rightarrow x'(x)$ ⁵ de tal forma que ds^2 se mantenga invariante:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma = g'_{\rho\sigma}(x') dx'^\rho dx'^\sigma.$$

La definición de transformación conforme es equivalente⁶ a que la métrica no cambie salvo por un factor *local* de escala:

$$g'_{\rho\sigma}(x') = \Omega^2(x') g_{\rho\sigma}(x'). \quad (1.1)$$

Estas transformaciones forman el grupo que queremos estudiar. Para ello, es muy inteligente⁸ empezar por entender las versiones infinitesimales: $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Como consecuencia, el factor de escala se transforma como $\Omega^2(x') = 1 + \varepsilon \kappa(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ donde $\kappa(x)$ es una función que todavía no sabemos determinar. Si desarrollamos la ecuación (1.1) hasta $\mathcal{O}(\varepsilon)$ llegamos a

$$g_{\mu\sigma} \partial_\rho \xi^\mu + g_{\rho\nu} \partial_\sigma \xi^\nu + \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\rho\sigma} + \kappa g_{\rho\sigma} = 0.$$

Si ahora contraemos con la inversa de la métrica $g^{\rho\sigma}$ y consideramos que el espacio es d -dimensional ($g_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} = d$) podemos despejar $\kappa = \frac{2}{d} \partial \cdot \xi$ y llegamos a la ecuación que describe los **vectores de**

³En realidad, hay muchas superficies cuyo grupo conforme es muy interesante. Por ejemplo, el grupo conforme de una esfera (S^2) es el **grupo de Moebius**, generado por las inversiones. Esto es particularmente interesante porque ya sabemos que $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y de hecho, las aplicaciones conformes en variable compleja no son más que los isomorfismos analíticos. Ya veremos por qué es tan sutil el caso 2 dimensional. En el último capítulo estudiaremos precisamente CFTs sobre variedades no triviales así que volveremos a esto.

⁴La palabra técnica sería grupo de transformaciones conformes de una variedad diferenciable pseudoriemanniana, que tiene una métrica g no degenerada en todo el espacio.

⁵Podemos decir que estamos considerando una transformación **pasiva**: dejamos el sistema igual y cambiamos el sistema de coordenadas.

⁶Cualquier transformación de este tipo deja invariante el producto escalar de dos vectores \equiv los ángulos entre dos cosas cualesquiera.

⁷El cuadrado en Ω es solamente una convención en la literatura. De esta definición ya se sigue entonces que forman un grupo pues $g''_{\rho\sigma}(x) = \Omega_2^2(x) g'_{\rho\sigma}(x) = \Omega_2^2(x) \Omega_1^2(x) g_{\rho\sigma}(x) = (\Omega_2(x) \Omega_1(x))^2 g_{\rho\sigma}(x)$. Cuando $\Omega = 1$ recuperamos las isometrías de la variedad.

⁸Se lo debemos a Lie por entender los grupos continuos como variedades diferenciables y, siguiendo las ideas de los creadores del cálculo infinitesimal, plantearse estudiar la versión linealizada de estos.

Killing conformes⁹:

$$g_{\mu\sigma}\partial_\rho\xi^\mu + g_{\rho\nu}\partial_\sigma\xi^\nu = -(\xi^\lambda\partial_\lambda + \frac{2}{d}\partial\cdot\xi)g_{\rho\sigma}$$

De aquí en adelante nos centraremos en el caso plano. Merece la pena sin embargo comentar una última cosa en lo que a variedades arbitrarias se refiere: como las variedades pseudo-riemannianas vienen caracterizadas por su métrica¹⁰, tiene sentido decir que dos métricas que se puedan escribir como en (1.1) están **conformemente relacionadas**. En particular, si $g_{\mu\nu}(x) = \Omega(x)^2\eta_{\mu\nu}$, diremos que esa superficie es **conformemente plana**.

1.2. El álgebra conforme

Hay muchas formas de llegar al álgebra conforme dando vueltas a las ecuaciones anteriores, utilizamos ideas de [9], [10] y [11]. En primer lugar, volvemos al espacio plano: llamaremos en general **grupo conforme** al grupo formado por las transformaciones conformes sobre \mathbb{R}^n o $\mathbb{R}^{1,d,1}$. Consideramos $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$: el espacio de Minkowski d dimensional¹¹. La ecuación (1.1) se reduce a

$$\partial_\rho\xi_\sigma + \partial_\sigma\xi_\rho = \frac{2}{d}\eta_{\rho\sigma}\partial\cdot\xi. \quad (1.2)$$

Nuestro objetivo es encontrar el álgebra de Lie del grupo conforme. Esta tendrá por base a los vectores de Killing conformes, definidos por esta ecuación. Por lo tanto, queremos escribir todos los generadores ξ^μ consistentes con (1.2). Para ello, podemos deshacer $\kappa = \frac{2}{d}\partial\cdot\xi$ y aplicar ∂_ρ a la ecuación anterior para llegar a una condición sobre κ que, recordemos, es la transformación infinitesimal de la métrica bajo una transformación conforme:

$$(d-2)\partial_\rho\partial_\nu\kappa = -\eta_{\rho\nu}\partial^2\kappa \xrightarrow{\text{Tr}} (d-1)\partial^2\kappa = 0 \xrightarrow{d \neq 1} (d-1)(d-2)\partial_\rho\partial_\nu\kappa = 0 \xrightarrow{d \neq 2} \partial_\rho\partial_\nu\kappa = 0. \quad (1.3)$$

El caso $d = 1$ es trivial pero $d = 2$ tiene mucha miga, lo comentaremos más adelante. Si suponemos $d \neq 1, 2$ tendremos que κ como mucho es lineal en x . Como $\kappa = \frac{2}{d}\partial\cdot\xi$, la condición $\partial_\rho\partial_\nu\kappa = 0$ se traduce, tras tomar la traza, en $\partial^\mu\partial_\mu(\partial\cdot\xi) = 0$. Es decir, ξ es como mucho cuadrática en x_μ .

⁹De la misma forma que los vectores de Killing preservan localmente la métrica –y forman por ello el álgebra de Lie del grupo de isometrías de la correspondiente variedad– los vectores de Killing conformes la conservan salvo por un factor de escala **local** –y forman por ello una base del álgebra de Lie del grupo de transformaciones conformes de la correspondiente variedad–. Esto se escribe entonces, en el lenguaje de la geometría diferencial, utilizando la derivada de Lie: $\mathcal{L}_X g = \lambda g$ para una función λ arbitraria.

¹⁰De forma local, claro, que es lo que interesa en la categoría de las variedades diferenciables: un cilindro y un plano no son *exactamente* lo mismo.

¹¹En realidad, esto se puede hacer fácilmente para $\mathbb{R}^{p,q}$. Algunos resultados los daremos en el caso general, las cuentas son exactamente las mismas. A dicho grupo se le denota $Conf(p, q)$.

Entonces, podemos plantear una solución general de la forma

$$\xi_\mu(x) = \alpha_\mu + \beta_{\mu\nu} x^\nu + \gamma_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho,$$

donde $\gamma_{\mu\nu\rho} = \gamma_{\mu\rho\nu}$ por construcción. Esta claro que α_μ representa las **traslaciones**. Por otra parte, si enchufamos $\xi_\mu(x) = \beta_{\mu\nu} x^\nu$ en (1.2) nos encontramos con que

$$\beta_{\mu\nu} + \beta_{\nu\mu} = \frac{2}{d} \eta^{\rho\sigma} \beta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}.$$

Podemos descomponer $\beta_{\mu\nu}$ en su parte simétrica y antisimétrica para deducir que $\beta_{\{\mu\nu\}} \propto \eta_{\mu\nu}$, es decir, $\xi_\mu(x) = \beta_{\{\mu\nu\}} x^\nu = \lambda \eta_{\mu\nu} x^\nu = \lambda x^\mu$: la parte simétrica realiza una **transformación de escala**. La parte antisimétrica $\beta_{[\mu\nu]}$ es más que conocida: son **rotaciones**¹², con $L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$ ¹³ por generadores infinitesimales.

Hasta ahora no hay nada raro: hemos recuperado las isometrías del espacio, que son en particular transformaciones conformes, y hemos visto que el álgebra conforme es más grande que la de Lorentz¹⁴. Las transformaciones que nos quedan, $\xi_\mu = \gamma_{\mu\{\rho\nu\}} x^\rho x^\nu$, se llaman **transformaciones conformes especiales** (SCT), y quedan caracterizadas, al introducirlas en (1.2) y operar un poco, por la condición $\gamma_{\{\mu\nu\}\rho} = b_\rho \eta_{\mu\nu}$, donde $b_\rho = \frac{1}{d} \gamma_{\nu\rho}^\mu$. Si descomponemos en parte simétrica y antisimétrica respecto a los dos primeros índices y recordamos que $\gamma_{\mu\nu\rho} = \gamma_{\mu\{\nu\rho\}}$ por construcción, llegamos a que

$$\gamma_{\mu\nu\rho} = b_\rho \eta_{\mu\nu} + b_\nu \eta_{\mu\rho} - b_\mu \eta_{\nu\rho}.$$

Esto permite escribir este $\xi_\mu(x)$ como función de un único parámetro b_μ ¹⁵:

$$\xi_\mu(x) = \gamma_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho = b_\rho \eta_{\mu\nu} x^\nu x^\rho + b_\nu \eta_{\mu\rho} x^\nu x^\rho - b_\mu \eta_{\nu\rho} x^\nu x^\rho = 2(b \cdot x) x_\mu - x^2 b_\mu. \quad (1.4)$$

¹²En sentido extenso. Es decir, también los *boosts*, que pueden pensarse como rotaciones que mezclan direcciones de tipo espacio y tipo tiempo. Transformaciones de Lorentz $\mathfrak{so}(1, p-1)$ o $\mathfrak{so}(p, q)$ para lectoras quisquillosas.

¹³Poner la i o no depende de si queremos que los elementos de la base del álgebra de Lie de un grupo de matrices aka. un subgrupo cerrado de algún $GL(n, \mathbb{K})$ sean hermiticos o antihermiticos. Utilizamos la convención de física: metemos la i .

¹⁴Y esto es muy importante, mientras que quedarse con un grupo más pequeño es tarea fácil, extenderla es algo altamente no trivial. Lo primero se llama contracción de Wigner-Inonu y sirve por ejemplo para recuperar el álgebra de Galileo al hacer $c \rightarrow \infty$ [12] o los corchetes de Poisson de la mecánica clásica al hacer $\hbar \rightarrow 0$ en los conmutadores cuánticos –una forma interesante de ver el principio de correspondencia–. Consiste en llevar un parámetro físico a 0 –o a ∞ – y así hacer que algún elemento del álgebra sea trivial (conmute con todos) para encontrar subgrupos no triviales. La otra historia es mucho más complicada: extender las álgebras es un trabajo duro.

¹⁵Esto es sorprendente. Una cantidad que en principio tenía 3 índices y por tanto d^3 grados de libertad ha acabado dependiendo únicamente de un vector $-d$ grados de libertad–. Es decir, las transformaciones conformes permiten solamente un tipo muy concreto de transformaciones cuadráticas.

En realidad, desde (1.3) podíamos haber propuesto $\kappa = \lambda + 2b_\mu x^\mu$. La forma más general que puede tener ξ^μ viene de integrar la ecuación de los vectores de Killing (1.2) teniendo en cuenta todas estas restricciones:

$$\xi_\mu(x) = a_\mu - \omega_{\mu\nu}x^\nu + \lambda x_\mu + 2x_\mu(b \cdot x) - b_\mu x^2, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (1.5)$$

De aquí sacamos mucha información: recoge todos los «tipos» de transformaciones conformes que fuimos planteando antes y nos deja contar la dimensión del grupo¹⁶:

- ★ a_μ es un vector: tiene d grados de libertad y representa las **traslaciones**. Su generador infinitesimal es $P_\mu = -i\partial_\mu$.
- ★ $\omega_{\mu\nu}$ es un tensor de rango 2 antisimétrico: tiene $\frac{1}{2}d(d-1)$ grados de libertad y representa las **rotaciones**. Su generador infinitesimal es $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$.
- ★ λ es un escalar: tiene 1 grado de libertad y representa las **transformaciones de escala o dilataciones**. Su generador infinitesimal es $D = -ix_\mu\partial^\mu$.
- ★ b_μ es un vector: tiene d grados de libertad, $b_\mu x^2 - 2x_\mu b_\nu x^\nu$ representa una **transformación especial conforme** (SCT). $K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial^\nu - x^2\partial_\mu)$ es su generador infinitesimal.

De aquí deducimos también que, cuando $d \neq 2$, el grupo conforme será de dimensión $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$.

Utilizando la definición del corchete de Poisson para campos vectoriales sobre variedades podemos calcular todas las relaciones de conmutación del **álgebra conforme**:

$$\begin{aligned} [D, K_\mu] &= -iK_\mu, \\ [D, P_\mu] &= iP_\mu, \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}), \\ [K_\mu, L_{\nu\rho}] &= i(\eta_{\mu\nu}K_\rho - \eta_{\mu\rho}K_\nu), \\ [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Estas relaciones de conmutación (los que no aparecen es porque son cero) definen entonces el **álgebra conforme**. Es obvio entonces que $P_\mu, L_{\mu\nu}$ forman una subálgebra –isomorfa al álgebra de Poincaré–. Algo más sorprendente es que el conjunto generado por $P_\mu, L_{\mu\nu}, D$ también es cerrado: ¿significa esto

¹⁶Porque es la dimensión del álgebra, que podemos pensar como espacio tangente a la variedad –el grupo– en el elemento neutro.

que pueden existir teorías que estén a medio camino entre la invariancia conforme y la Lorentz? A pesar de que tal grupo existe, demostraremos que si exigimos algunas condiciones físicas razonables a la teoría¹⁷ podremos demostrar –más bien motivar– que invariancia Lorentz + invariancia bajo dilataciones implica simetría bajo todo el grupo conforme¹⁸. Las dos primeras relaciones de conmutación de (1.6) nos dicen que K_μ, P_μ se comportan como operadores escalera respecto a D . Esta será la razón por la que los operadores de una CFT van a poder organizarse de una forma muy especial que veremos más adelante: en (la mayor parte de) las teorías físicas con sentido el espectro de D está acotado por debajo y existen estados suelo aniquilados por K_μ . Este es el origen de los **operadores primarios** de los que hablaremos más adelante.

1.2.1. Breve *excursus* sobre el caso dos dimensional

En todo lo que hicimos a partir de la ecuación (1.3) asumimos que $d \neq 2$. Esto está bien porque este trabajo se centra en el estudio de –algunos– aspectos de las CFTs en dimensiones $d \geq 3$ pero el caso 2 dimensional merece por lo menos un comentario. En primer lugar porque en el mundo tenemos sistemas que vienen descritos por estas teorías: fenómenos críticos y transiciones de fase en mecánica estadística y teorías interactuantes bidimensionales en materia condensada (con modelos que a veces se pueden resolver)¹⁹ son algunos ejemplos. También es relevante por ser $Conf(2)$ el grupo de las simetrías de la *worldsheet* en teoría de cuerdas [18].

Este caso es especial porque $Conf(2)$ tiene dimensión infinita. Para verlo seguimos los argumentos de [10], [11] y [19]. El caso euclídeo en 2 dimensiones se puede pensar como las transformaciones conformes (locales) del plano complejo, que son los isomorfismos analíticos (locales). Si hacemos un cambio de coordenadas a

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2,$$

la métrica se escribe como $ds^2 = dzd\bar{z}$. Entonces, dada cualquier función $f(z)$ analítica tendremos que $ds^2 = |f(z)|^2 dzd\bar{z}$, que es precisamente un rescado local de la métrica. La versión infinitesimal de la transformación conforme será $\xi^z = \xi(z)$, $\xi^{\bar{z}} = \bar{\xi}(\bar{z})$. Si introducimos esto en la ecuación de Killing

¹⁷Unitariedad

¹⁸En [13] se recogen, desde la óptica del grupo de renormalización y la holografía, los argumentos por los que se cree que la invariancia de escala 4d, bajo ciertas condiciones –unitariedad, causalidad, espectro discreto de dimensiones conformes, invariancia bajo dilataciones del vacío–, se extiende hasta invariancia conforme. En nuestra «demostración» veremos que en una teoría así la traza del tensor energía momento se anula. Un ejemplo en el que se demuestra la invariancia conforme a pesar de que el TEM no esté definido es [14]. En [15] se demuestran condiciones necesarias no triviales para la simetría conforme y se dan argumentos para demostrar que se trata de una condición suficiente salvo excepciones. Este problema tiene muchas relación con el grupo de renormalización exacto y con pensar las CFTs como puntos fijos en el IR de un cierto flujo del grupo de renormalización.

¹⁹Los *minimal models* son unas CFTs 2 dimensionales que están resultas: están clasificadas y se conocen todas las representaciones con las que construir sus observables [16]. Sobre QFT 2 dimensionales y simetrías conformes [17].

conforme (1.2) llegamos a que $\kappa = \frac{1}{2}(\xi'(z) + \bar{\xi}'(\bar{z}))$, que es la solución general de la ecuación armónica $\partial^2 \kappa = 0$. Es fácil comprobar que los monomios son una base numerable de este álgebra. De hecho, podemos pensar que las distintas ecuaciones que obtenemos de escoger los índices en (1.2) nos dicen que ξ obedece las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por otra parte, el análisis complejo nos dice que cualquier función (localmente) analítica se puede escribir como $f(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ ²⁰ así que se lo podemos aplicar en particular a $\xi(z)$. Esto nos inspira para proponer $l_n := z^{n+1} \partial_z \forall n \in \mathbb{Z}$ como generadores del álgebra conforme. Las relaciones de conmutación son

$$[l_m, l_n] = (n - m)l_{m+n},$$

y esto es claramente un álgebra de dimensión infinita. En realidad, el grupo conforme sería el producto de dos copias de esto que acabamos de describir para contar también con los generadores del $\xi(\bar{z})$. Al álgebra formada por estos operadores se la llama **álgebra de Witt**. En el caso cuántico entra en juego la extensión central del álgebra de Witt: el **álgebra de Virasoro**, dada por los L_n y una carga central c que satisfacen $[L_n, c] = 0$ y

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}.$$

1.2.2. «Invariancia bajo dilataciones implica invariancia conforme» *easy mode*

En una teoría de campos cualquiera el **tensor energía momento** (TEM) juega un papel fundamental²¹. Si nos ponemos en el caso sencillo: una teoría con un lagrangiano invariante bajo traslaciones, tendremos que el TEM está conservado. El TEM se puede definir canónicamente²² utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange y el teorema de Noether:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial^\nu \phi_\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

El teorema de Noether nos permite asignar a cada simetría continua de la teoría una corriente conservada. De hecho, en caso de que exista el TEM, la ecuación anterior nos permite escribir (por definición de corriente de Noether) que $J_\mu = T_{\mu\nu} \delta x^\nu$ para una simetría continua asociada a la transformación

²⁰En el peor de los casos tendremos singularidades esenciales y por tanto parte principal infinita pero siempre podremos hacer una expansión en serie de este tipo – ya sabemos que los coeficientes vendrán dado por derivadas para $n > 0$ y residuos para $n < 0$.

²¹A veces vamos a estar interesadas en CFTs que **no** tienen un lagrangiano porque no queremos que haya dependencia en una formulación microscópica –y otras veces sencillamente no podemos definirlo–. Aquí llegan los problemas a la hora de definir el TEM de la teoría. No vamos a trabajarlo pero existe.

²²La forma del TEM que obtenemos así ni siquiera tiene por qué ser simétrica. Aprovecharemos la simetría gauge que permitirá añadirle una divergencia (un término de frontera en las eom) para encontrar una versión simétrica.

infinitesimal $x_\nu \rightarrow x'_\nu = x_\nu + \delta x_\nu$. Nuestra estrategia va a ser demostrar que una teoría invariante bajo dilataciones y transformaciones de Poincaré –es decir, tales que las correspondientes corrientes estén conservadas– va a tener «automáticamente» conservada la corriente asociada a transformaciones conformes especiales.

El TEM canónico no tiene por qué ser simétrico pero la invariancia bajo transformaciones de Poincaré nos asegura que podemos encontrar uno equivalente que sí lo sea y que esté conservado²³. Partimos entonces de una teoría invariante Poincaré y bajo dilataciones, de forma que $J_\mu = T_{\mu\nu}\lambda x^\nu$ ($\delta x_\nu = \lambda x_\nu$) está conservado:

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \implies T_\mu^\mu = 0.$$

Hemos deducido que el tensor energía momento tiene traza nula. Si ahora consideramos el $\xi_\mu(x)$ asociado a una SCT (ecuación (1.4)) podemos ver si su corriente de Noether $J_\mu = T_{\mu\nu}\xi^\nu$ está conservada. Para ello calculamos su divergencia:

$$\partial^\mu (T_{\mu\nu}\xi^\nu) = \frac{1}{2}T_{\mu\nu}(\partial^\mu\xi^\nu + \partial^\nu\xi^\mu) = \frac{1}{d}T_\mu^\mu(\partial \cdot \xi),$$

donde para coseguir la última igualdad hemos utilizado la ecuación de Killing conforme (1.2). Como el TEM no tiene traza cuando tenemos invariancia bajo dilataciones, el lado izquierdo de la ecuación anterior se anula sin imponer nada más. Es decir, $\partial^\mu J_\mu = 0$ y, como queríamos ver, tenemos invariancia bajo todo el grupo conforme.

1.2.3. Una forma particularmente iluminadora de reagrupar los generadores del álgebra conforme

La dimensión del grupo conforme de una variedad plana d dimensional, cuando $d \neq 1, d \neq 2$, es $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$. Otro grupo que conocemos con esa misma dimensión es $SO(2, d)$ ²⁴. Aunque parezca una idea feliz, hay una forma natural de agrupar los generadores conformes en una matriz $d+2$ dimensional:

$$J_{MN} = \begin{pmatrix} L_{\mu\nu} & \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu) & -\frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu) \\ -\frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu) & 0 & D \\ \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu) & -D & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

²³La primera aplicación del teorema de Noether que aprendemos es simetría bajo traslaciones espaciales \iff conservación del momento, simetría bajo traslaciones temporales \iff conservación de la energía. Esto se escribe en relatividad especial como: cuando $\delta x_\nu = a_\nu$ tenemos que $J_\mu = T_{\mu\nu}a^\nu$ y $\partial_\mu J^\mu = 0 \implies \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Igualmente, la invariancia bajo rotaciones nos da la simetría $T_{\mu\nu} = T_{\{\mu\nu\}}$.

²⁴Pero esto no es una condición suficiente para decir que dos grupos de Lie son iguales (de hecho, hay muchas álgebras de Lie para una dimensión – como espacios vectoriales– dada).

Estos operadores cumplen

$$[J^{MN}, J^{PQ}] = -\eta^{MP} J^{NQ} - \eta^{NQ} J^{MP} + \eta^{NP} J^{MQ} + \eta^{MQ} J^{NP},$$

que son precisamente las relaciones de conmutación de $SO(2, d)$. En el caso general podemos reproducir lo anterior construyendo bloques $d \times d$ y $p \times p$ para probar $Conf(p, q) \cong SO(p+1, q+1)$.

Entonces, el grupo conforme actúa de forma muy sencilla (lineal) en $\mathbb{R}^{p+1, q+1}$ a pesar de que en $\mathbb{R}^{p, q}$ lo haga de forma «rara». Esto hará que para algunas cosas sea muy inteligente embeber $\mathbb{R}^{p, q}$ en $\mathbb{R}^{p+1, q+1}$, pues todas las reglas de transformación van a ser más sencillas. El isomorfismo de (1.7) es en realidad el más fácil que se nos puede ocurrir si pretendemos encontrar un álgebra $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ dimensional que tenga dentro a $SO(d-1)$.

Primero ponemos un bloque diagonal ($d \times d$) para los generadores $L_{\mu\nu}$ y, con lo que nos queda, vamos rellenando. Lo más razonable que podemos hacer con $J^{\mu d}$ y $J^{\mu d+1}$, teniendo en cuenta que P_μ , K_μ llevan un índice y por tanto tienen derecho a ser vectores, es asignarles su combinación simétrica y antisimétrica. Igualmente, como D es un escalar, el hecho de que J_{MN} tengan que ser antisimétricos nos fija la forma de (1.7).

Esto de ver el grupo conforme de $\mathbb{R}^{p, q}$ como subir un (1, 1) a $SO(p, q)$ es algo interesante²⁵. De hecho, nos va a ser muy útil cuando queramos etiquetar los estados de nuestras CFTs como representaciones irreducibles del grupo conforme. El objetivo será encontrar un análogo a la masa y el espín para las partículas –los estados de las QFTs que aprendemos–, que vienen de los casimires de $SO(1, 3)$, es decir, encontrar unos buenos números cuánticos para etiquetar estados de nuestras CFTs. El problema es que $P_\mu P^\mu$ ya no conmuta con los generadores²⁶: una representación del grupo conforme que contenga un estado con una energía dada contendrá también estados iguales que él pero con energía arbitraria entre 0 en ∞ . La cuestión es que según qué subgrupo de $Conf(1, 3)$ elijamos para etiquetar los estados escogeremos unos números cuánticos que representen unas cosas u otras. Una opción viene de entender que en (1.7) tenemos «escondido» un $SO(2)$ ²⁷:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu) & -\frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu) \\ -\frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

²⁵Se desarrolla esta idea, por ejemplo, en el capítulo 8 de [9] y en el anexo de [20], para el caso en el que además tenemos supersimetría.

²⁶Es natural, por otra parte. Teniendo en cuenta que nuestras CFTs tienen invariancia bajo dilataciones una energía fija puede transformarse en cualquier otro número.

²⁷Ya sabemos que un $SO(2)$ es un $U(1)$ y lo podemos ver como una rotación respecto a un eje en $SO(3)$. Además, $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}$, lo que hemos escrito es el generador de $\mathfrak{so}(3)$ que me queda.

1.3. El grupo conforme: transformaciones finitas

Ahora nos interesa encontrar la versión finita de (1.5). Gracias a Lie sabemos que los elementos del grupo –de su componente conexa con la identidad– se pueden escribir a partir de su álgebra utilizando la aplicación exponencial, que para los grupos lineales es la exponencial de matrices. En lugar de hacer esto desde el principio, pues en realidad las traslaciones o rotaciones finitas ya las conocemos bien y solo merecerá la pena hacerlo para las SCT, vamos a pensar este problema utilizando la definición de la aplicación exponencial: una aplicación que te da la curva integral asociada al vector –el generador infinitesimal– que pasa por el elemento neutro. Buscamos entonces las soluciones del problema

$$\frac{d}{dt}x_t^\mu = \xi^\mu(x_t), \quad x_0^\mu = x^\mu.$$

Puedo redefinir la derivada del ξ de (1.5) como

$$\partial_\mu \xi_\nu(x) = \kappa_\xi(x) \eta_{\mu\nu} - \hat{\omega}_{\xi\mu\nu}(x),$$

donde $\hat{\omega}_{\xi\mu\nu}(x) = \omega_{\mu\nu} - 2(b_\mu x_\nu - b_\nu x_\mu)$ y $\kappa_\xi(x) = \lambda + 2(b \cdot x)$ vienen determinadas por la transformación infinitesimal ξ_μ –el campo vectorial con cuyo flujo estamos trabajando–. Esto permite escribir algunos objetos de una forma que nos será muy útil cuando queramos calcular funciones de correlación. Con las definiciones anteriores y algunas propiedades de los corchetes de Lie de campos vectoriales²⁸ probamos que, bajo una transformación conforme infinitesimal cualquiera, dx cambia como

$$\delta_\xi dx^\mu = d\xi^\mu(x) = \kappa_\xi(x) dx^\mu + \hat{\omega}_{\xi\mu\nu}(x) dx^\nu,$$

y que, dados dos puntos x, y :

$$\delta_\xi(x - y)^2 = (\kappa_\xi(x) + \kappa_\xi(y)) (x - y)^2. \quad (1.8)$$

Entonces, si escribimos²⁹

$$dx_t^\mu = \Omega_t(x) R_t^\mu{}_\nu(x) dx_t^\nu, \quad \text{con } \det(R_t^\mu{}_\nu) = 1,$$

²⁸Los detalles están en el capítulo 2 de [10].

²⁹Para cada transformación local conforme podremos escoger una transformación ortogonal local.

se puede demostrar que las soluciones del problema de Cauchy formulado antes forman un grupo bajo la composición³⁰. Además, las ecuaciones se pueden integrar explícitamente para cada tipo de transformación, por ejemplo, para el caso de las SCT se tiene que

$$x_t^\mu = \Omega_t(x) (x^\mu + t b^\mu x^2), \quad \Omega_t(x) = \frac{1}{1 + 2t b \cdot x + t^2 b^2 x^2}. \quad (1.9)$$

La solución general para una transformación conforme de las coordenadas $x \rightarrow x'$ se escribirá como:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Omega(x) R^\mu{}_\nu(x), \quad \eta_{\mu\nu} R^\mu{}_\rho(x) R^\nu{}_\tau(x) = \eta_{\rho\tau}. \quad (1.10)$$

donde $R \in O(1, d-1)$. Con esto podemos encontrar la versión finita de (1.8), que nos dice cómo cambia la distancia entre dos puntos bajo una transformación conforme:

$$(x' - y')^2 = \Omega(x)\Omega(y)(x - y)^2, \quad (1.11)$$

precisamente con los factores locales de escala asociados a cada uno de ellos, como podíamos esperar.

1.3.1. SCT: traslación, inversión y traslación

Ya hemos encontrado la forma de todas las transformaciones conformes conectadas con la identidad. La pregunta lógica, al igual que en el caso de las isometrías, es: ¿qué otras transformaciones hay en este grupo? Van a tener que ser discretas y, si pensamos por analogía al caso 2 dimensional, es fácil darse cuenta de que³¹ hay una transformación cuya generalización d dimensional va a seguir funcionando: la **inversión**

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \frac{x_\mu}{x^2} \implies \frac{\partial x'_\mu}{\partial x^\nu} = \Omega(x) I_{\mu\nu}(x) \quad \text{donde} \quad I_{\mu\nu}(x) \equiv \delta_{\mu\nu} - 2 \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}, \quad (1.12)$$

donde $I_{\mu\nu}(x)$ es el **tensor de inversiones**. Es el objeto que tenemos para implementar la inversión en los distintos tensores. En particular, de su acción en dx obtenemos, gracias a la regla de la cadena,

$$dx \rightarrow dx' = \frac{1}{x^2} I_{\mu\nu} dx^\nu \quad \text{con} \quad dx'^2 = \frac{dx^2}{(x^2)^2} \implies \eta_{\mu\nu} I^\mu{}_\alpha(x) I^\nu{}_\beta(x) = \eta_{\alpha\beta}$$

³⁰Pero ya lo sabemos porque esto es así en general: el grupo uniparamétrico dado por el flujo de un campo vectorial sobre una variedad.

³¹Los isomorfismos analíticos llevan circunferencias y rectas en circunferencias y rectas. Funciones como $1/z$ son las que permiten ir de una recta a una circunferencia, las isometrías no nos dejan «cambiar de categoría».

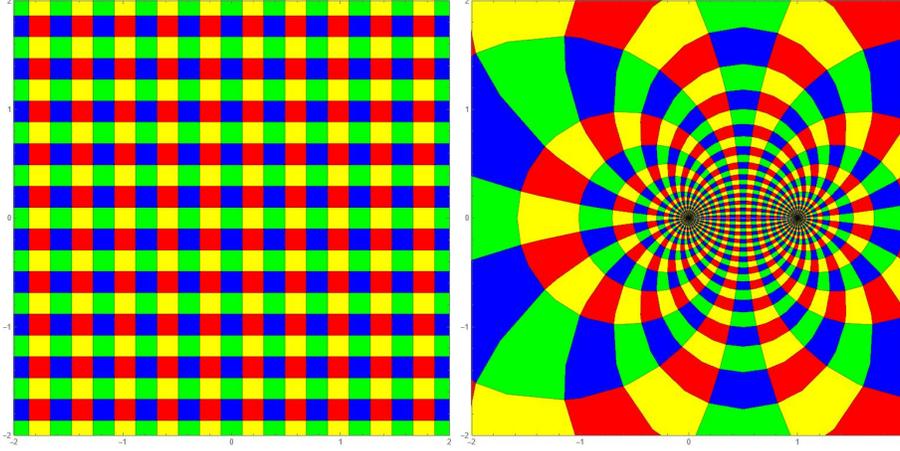


Figura 1.2: Transformación especial conforme de un mallado 2d.

Por ejemplo³², podemos recuperar así también la particularización de (1.11) para esta transformación:

$$(x - y)^2 \rightarrow (x' - y')^2 = \frac{1}{x^2 y^2} (x - y)^2.$$

La razón por la que no hemos llegado antes a la inversión es que es una transformación discreta, no la podemos «alcanzar» desde el álgebra. Sin embargo, vamos a demostrar que la composición de una inversión, una traslación y otra inversión sí está en la componente conexa de la identidad: es precisamente una transformación especial conforme³³, cuya versión infinitesimal ya conocemos. En la figura 1.2 se muestra una transformación especial conforme 2d de un mallado uniforme: la idea es pensar una generalización de esto en dimensiones arbitrarias.

Consideremos dicha composición: $x \rightarrow x' = Ix \rightarrow x'' = x' + a \rightarrow x''' = Ix''$. Si nos quedamos a primer orden en a^μ :

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu \rightarrow \left(\frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu \right) / \left(\eta_{\rho\sigma} \left(\frac{x^\rho}{x^2} + a^\rho \right) \left(\frac{x^\sigma}{x^2} + a^\sigma \right) \right) = \\ &= \left(\frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu \right) / \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2a \cdot x}{x^2} + a^2 \right) = \\ &= (x^\mu + a^\mu x^2) / (1 + 2a \cdot x + a^2 x^2) \simeq (x^\mu + a^\mu x^2) (1 - 2a \cdot x) + O(a^2) = \\ &= x^\mu + a_\lambda \left(\eta^{\mu\lambda} x^2 - 2x^\mu x^\lambda \right) + O(a^2). \end{aligned}$$

Que es precisamente el generador de las SCT. Es una transformación un poco antiintuitiva para nuestra

³²Sin saberlo, estamos hablando de cómo transforman los vectores bajo transformaciones conformes.

³³De hecho, si la teoría fuera invariante bajo paridad podríamos hacer la composición de una inversión y una reflexión y también estaría conectada con la identidad. La inversión y la reflexión son conjugadas en $SO(2, d)$. Pero igual que nos pasa en QFT: a pesar de que la reflexión está en el grupo de Poincaré hay muchas teorías que rompen paridad, tendremos muchas teorías en las que la inversión no sea una simetría. Es mejor entonces quedarse con la otra idea, que además es más general.

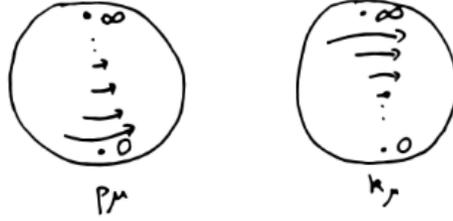


Figura 1.3: Imagen cualitativa de cómo actúa una SCT. Figura 7 de [1].

mente acostumbrada a lo lineal: las traslaciones funcionan justo al revés, como se muestra en la figura 1.2. La idea es que mandamos en punto en el que estamos al infinito, allí hacemos una traslación y después devolvemos el infinito al origen. Como último comentario sobre el grupo conforme merece la pena decir que se puede generar mediante las traslaciones, las rotaciones y la inversión. Se trata además del mayor subgrupo de dimensión finita del grupo de difeomorfismos.

1.4. Representaciones del grupo conforme. Operadores primarios

En mecánica cuántica aprendimos que dada una simetría del sistema, un conjunto de operadores –sus cargas conservadas– que conmutan con el hamiltoniano, merece la pena agrupar los estados estacionarios de la teoría (el espectro de H) en representaciones del grupo de simetría –de cuya álgebra son generadores las cargas–. En teoría de campos esto se traducía en que nuestros objetos iban a ser representaciones irreducibles unitarias³⁴ del grupo de simetría del espaciotiempo, que iban a venir etiquetados, en el caso de una QFT con grupo de Poincaré, por el casimir cuadrático (la masa/energía $P_\mu P^\mu$) y el cuadrado del vector de Pauli-Lubanski ($W^2 = W_\mu W^\mu$, el espín).

Ahora que conocemos cómo actúan las transformaciones conformes estamos en condiciones de intentar hacer algo parecido a esto para nuestras CFTs.

1.4.1. La primera versión: imitación de lo que sí sabemos hacer en QFT

Nuestra estrategia ahora –la de [1]– para clasificar los operadores en representaciones del grupo conforme va a ser empezar por repasar los objetos que transforman bien bajo los índices correspondientes a Poincaré, después añadir las dilataciones y ya al final entender las representaciones del grupo conforme completo.

El primer punto corresponde a QFT relativista: donde los operadores locales en el origen transfor-

³⁴Lo podemos pensar como que son los bloques más pequeños que se transformen adecuadamente que podemos proponer para construir la teoría.

man respecto a alguna representación irreducible de $SO(1, d - 1)$:

$$L_{\mu\nu}\mathcal{O}^a(0) = (S_{\mu\nu})_b^a \mathcal{O}^b(0),$$

donde $S_{\mu\nu}$ satisfacen el álgebra de Lorentz y a, b son índices para la representación de $SO(1, d - 1)$ en la que esté \mathcal{O} . Nos interesa entender cómo sucede esto cuando nos movemos del origen, para ello basta con aplicar una rotación a $\mathcal{O}(x)$, utilizar la definición de traslación y la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}\mathcal{O}(x) &= L_{\mu\nu}e^{ix\cdot P}\mathcal{O}(0) = \\ &= e^{ix\cdot P} (e^{-ix\cdot P}M_{\mu\nu}e^{ix\cdot P}) \mathcal{O}(0) = \\ &= e^{ix\cdot P} (-x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu + L_{\mu\nu}) \mathcal{O}(0) = \\ &= (S_{\mu\nu} - (x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu)) e^{x\cdot P}\mathcal{O}(0) = \\ &= (\omega_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}) \mathcal{O}(x) \end{aligned}$$

Ahora queremos hacer lo mismo con todo el grupo conforme. Empezamos por las dilataciones. La cosa cambia un poco la cosa porque el D es un escalar y resultado de diagonalizar D en el origen será $D\mathcal{O}(0) = \Delta\mathcal{O}(0)$. Podemos hacer exactamente lo mismo que antes y demostrar que

$$D\mathcal{O}(x) = -i(\Delta + x^\mu\partial_\mu)\mathcal{O}(x)^{35}.$$

Diremos que Δ es la **dimensión conforme** del operador \mathcal{O} . Para las SCT partimos de $K_\mu\mathcal{O}(0) = k_\mu\mathcal{O}(0)$. Podríamos hacer lo mismo que con las rotaciones: desarrollar $e^{-ix\cdot P}k_\mu e^{ix\cdot P}$ con la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff y llegaríamos a algo como

$$k_\mu\mathcal{O}(x) = (k_\mu + 2x_\mu\Delta - 2x^\nu S_{\mu\nu} - 2ix_\mu(x^\nu\partial_\nu) + ix^2\partial_\mu)\mathcal{O}(x).$$

Pero necesitamos que las «versiones actuando en el origen» de los generadores conformes cumplan las relaciones de conmutación de (1.6). En particular, $[\Delta, k_\mu] = -i\Delta k_\mu$ pero, como hemos argumentado que Δ se puede escoger diagonal, tendremos que $k_\mu = 0$.

Ya habíamos visto en (1.6) que P_μ, K_μ actuaban como operadores escalera respecto a D . Lo vemos aquí de nuevo:

$$k_\mu D\mathcal{O}(0) = (\Delta - 1)k_\mu\mathcal{O}(0).$$

³⁵Veremos que esta ecuación ya es suficiente para fijar la forma de las funciones a dos puntos de operadores escalares.

Tiene sentido preguntarse entonces si habrá –como en el resto de problemas físicos razonables que se resuelven utilizando operadores escalar –un «estado suelo»³⁶ que sea aniquilado por K_μ ³⁷. Estos serán los **operadores primarios**. Si aplicamos P_μ a un operador primario tendremos otro con dimensión conforme una unidad mayor que *no* tiene por qué ser primario de nuevo. Estos operadores, las derivadas de operadores primarios, se llaman **descendientes**.

Se puede demostrar que cualquier producto de operadores locales de una CFT se va a poder escribir utilizando primarios y descendientes: eso llevará una sección completa y se llama OPE.

1.4.2. La segunda versión: nos ponemos más formales. Operadores primarios con espín

Introducimos las definiciones de operadores primarios y derivados tal y como se hace en [10], que nos permite hacerlo de forma general incluso para el caso espinorial. Además, nos llevará de forma «directa» a demostrar que la estructura de las funciones a 2 y 3 puntos está completamente determinada por la simetría conforme de la teoría. La idea intuitiva nos la da el apartado anterior: vamos a etiquetar los campos por la representación del subgrupo $SO(1, d - 1)$ de $Conf(1, d - 1)$ y por la dimensión conforme³⁸.

Consideremos un objeto ϕ_I que transforma en una representación I de $SO(1, d - 1)$. Diremos que es un **operador primario** si bajo una transformación conforme $x \rightarrow x'$ con $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Omega(x)R_\nu^\mu(x)$ se transforma como

$$\phi_I \rightarrow \phi'_I, \quad \phi'_I(x') = \Omega(x)^{-\Delta} \mathcal{R}_I^J(x) \phi_J(x), \quad (1.13)$$

donde Δ es la **dimensión conforme** de ϕ_I y $\mathcal{R}_I^J(x)$ es la matriz correspondiente a R_ν^μ en la representación I de $O(1, d - 1)$. En el caso concreto de que R_ν^μ corresponda a una inversión la ecuación anterior se escribe como

$$\phi'_I(x_i) = (x^2)^\Delta \mathcal{I}_I^J(x) \phi_J(x). \quad (1.14)$$

Donde \mathcal{I}_I^J es el tensor de inversiones con tantos índices como la representación I requiera. En realidad, transformar como (1.13) o (1.14) es equivalente y diremos de los campos que lo hacen que son **primarios**. Sin embargo, como la inversión no está conectada con la identidad, puede que haya teorías en que dicha transformación no esté bien definida y necesitemos (1.13). La versión infinitesimal de (1.13)

³⁶En realidad, todavía no hemos hablado de ningún espacio de Hilbert, de ningún espacio de estados (lo haremos), estamos construyendo una teoría como algo que tiene unos ciertos operadores que transforman de una cierta forma bajo el grupo conforme.

³⁷La existencia de dicha cota inferior para Δ no viene impuesta por la simetría conforme sino por exigir que la teoría se comporte bien desde el punto de vista físico. Por ejemplo, que sea unitaria.

³⁸Esto se podría hacer análogamente para $Conf(p, q)$.

es, para una transformación $\delta x_\nu = \xi_\nu$, utilizando la notación introducida en (1.3):

$$\delta_\xi \phi_I = -\xi^\mu \partial_\mu \phi_I - \sigma_\xi \Delta \phi_I + \frac{1}{2} \hat{\omega}_\xi^{\mu\nu} (L_{\mu\nu})_I^J \phi_J \quad (1.15)$$

donde $(L_{\mu\nu})_I^J$ será la representación correspondiente para el subálgebra de Lorentz $SO(1, d-1)$ de $Conf(1, d-1)$. Si la representación R de $SO(1, d-1)$ en la que estamos es irreducible el Casimir será $\frac{1}{2} (L_{\mu\nu} L^{\mu\nu})_I^J = -C_R \delta_I^J$. Escribimos explícitamente el ejemplo de un vector A_ρ :

$$(L_{\mu\nu})_\lambda^\rho = \delta_\mu^\rho \eta_{\nu\lambda} - \delta_\nu^\rho \eta_{\mu\lambda}, \quad C_R = C_V = d-1.$$

1.4.3. La tercera versión: una de embebimientos

En este apartado vamos a embeber el espacio en el que tenemos nuestra teoría $\mathbb{R}^{1,d-1}$ en uno mayor para explotar $Conf(p, q) = SO(p+1, q+1)$. Esto se expone en el capítulo 3 de [10] o en el capítulo 2 de [11]. Vamos a encontrar las representaciones del grupo conforme de $\mathbb{R}^{1,d-1}$ introduciendo las *light-cone coordinates*³⁹. Será muy útil para poder argumentar intuitivamente la forma que deben tener las funciones a dos y tres puntos de los operadores escalares –y el caso de espín arbitrario es conceptualmente equivalente–.

Inspiradas por (1.7) podemos intentar obtener, a partir de la acción lineal de $Conf(1, d-1)$ sobre $\mathbb{R}^{2,d}$, una manera más sencilla de entender como funcionan las transformaciones conformes sobre los operadores de $\mathbb{R}^{1,d-1}$. En lugar de las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^{2,d}$, vamos a utilizar las *light cone coordinates*⁴⁰. Dado un punto $X^M = (x'_0, x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) \in \mathbb{R}^{2,d}$, hacemos una rotación para considerar $(X^+, X^-, X^\mu) \in \mathbb{R}^{2,d}$, donde

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_0 \pm x_d), \quad X^\mu = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}).$$

Nos vamos a fijar en los vectores del *cono de luz*: $X^2 = 0$ ⁴¹, lo que quita uno de los grados de libertad que nos sobran. Nos falta imponer aún otra condición: escogemos una sección del cono de luz dada por una función arbitraria f que se comporte lo suficientemente bien: $X^+ = f(X^\mu)$ ⁴².

³⁹Un pariente de esto lo utilizaremos en el capítulo de AdS/CFT, donde embeberemos AdS_{d+1} en $R^{2,d}$, lo que hará explícita su simetría $SO(2, d) \cong Conf(1, d-1)$.

⁴⁰En realidad una generalización de las de relatividad especial, que hacen que x^+, x^- sean coordenadas tipo luz y x_2, x_3 de tipo espacio. En realidad no estamos haciendo más que una rotación de 90° en el plano formado por dos coordenadas de tal forma que ciertos aspectos de la física se manifiesten de forma más sencilla: es una extensión de la idea de relatividad especial. Esto se utiliza también en teoría de cuerdas u otros sitios con redundancias gauge que debemos fijar para quitarnos grados de libertad no físicos.

⁴¹No hay problema con hacer esto porque esta condición es invariante conforme.

⁴²Está claro que la f más sencilla es la que define implícitamente secciones circulares. Veremos finalmente que esa es la que necesitamos.

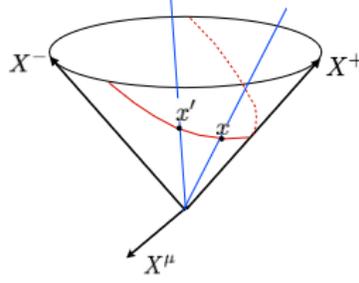


Figura 1.4: Acción de $SO(2, d)$ sobre $x^\mu \in \mathbb{R}^{1, d-1}$. Figura 2.1 de [10].

Es importante darse cuenta de que dado un punto $(X^+, X^-, X^\mu) \in \mathbb{R}^{2, d}$, las dos condiciones que hemos impuesto hasta ahora se traducen en

$$(X^+, X^-, X^\mu) = (f(x), \frac{x^2}{2f(x)}, x^\mu).$$

Como f es, aunque desconocida, una función fija, hemos reducido los grados de libertad a d . Entonces, esta sección –que denotamos como \mathcal{S} – se puede parametrizar con X^μ coordenadas de $\mathbb{R}^{1, d-1}$, es decir, $\mathcal{S} \cong \mathbb{R}^{1, d-1}$

La forma en que una transformación de $SO(2, d)$ actúa sobre el $\mathbb{R}^{1, d-1}$ que hemos escogido se ilustra en la figura 1.4: un punto $X^\mu \in \mathcal{S}$ define una recta en $\mathbb{R}^{2, d}$ al unirlo con el origen. Al aplicar una transformación $\Lambda_N^M \in SO(2, d)$ este punto se mueve hasta un $\tilde{x}^\mu \in \mathbb{R}^{2, d}$ que no está necesariamente en \mathcal{S} . Sin embargo, nos definirá otra recta que pase por el origen, que cortará a \mathcal{S} en un punto X'^μ ⁴³. Se puede demostrar que ds^2 –la restricción de la métrica a la sección \mathcal{S} – queda invariante salvo por un factor local de escala:

$$ds^2 = dx^2 - 2 dX^+ dX^- \Big|_{X^+=f(x), X^-=x^2/2f(x)} = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu,$$

Efectivamente estamos haciendo, mediante una transformación lineal, una transformación conforme en una sección de $\mathbb{R}^{2, d}$ isomorfa al $\mathbb{R}^{1, d-1}$ sobre el que tenemos nuestra teoría. Esto es natural cuando pensamos la acción de $SO(2, d)$ en $\mathbb{R}^{1, d-1}$ como transformación Lorentz + dilatación: el punto X^μ se transforma (Lorentz) para llegar a \tilde{X}'_μ . Como este último no tiene por qué estar de nuevo en \mathcal{S} nos interesa hacer una dilatación: nos mantenemos dentro de la recta que lo une con el origen (en azul en la figura 1.4) pero cambiando el módulo hasta colocarse en \mathcal{S} . Como la primera transformación es una isometría, ds^2 no cambia. Solo necesitamos entender cómo afecta la dilatación. Si $\lambda(X)$ es la función

⁴³Como la transformación de $SO(2, d)$ es una rotación propia en $\mathbb{R}^{2, d}$ podemos pensar que hemos transformado la recta al completo y que x^μ es el punto en que la recta transformada corta a \mathcal{S} .

que reescala el segundo paso del proceso anterior, tenemos que

$$(d(\lambda(X)X))^2 = (\lambda dX + X(\nabla\lambda \cdot dX))^2 = \lambda^2 dX^2,$$

ya que $X^2 = 0$, $X \cdot dX = 0$. Entonces, $ds'^2 = \lambda(X)^2 ds^2$ y para que esta transformación sea conforme necesitaremos que ds^2 corresponda entonces a una métrica plana, es decir, $f(x) \propto 1$. Se puede escoger $f(x) = 1$, de forma que

$$(x^+, X^-, x^\mu) = (1, \frac{x^2}{2}, x^\mu).$$

Ahora podemos pensar, desde este punto de vista, cómo afectan las transformaciones conformes a los campos: hacemos una transformación de Lorentz a un campo definido en $\mathbb{R}^{2,d}$ y decimos que el campo de $\mathbb{R}^{1,d-1}$ coincide con el campo en \mathcal{S} . Hacemos el caso escalar: sea $\phi(X)$ campo de $\mathbb{R}^{2,d}$ tal que $X \rightarrow X' \implies \phi'(X') = \phi(X)$. La idea es asumir que transforma de forma homogénea en X : $\phi(\lambda X) = \lambda^{-\Delta} \phi(X)$ –respetando las dilataciones–, de forma que al hacer

$$\phi(X)|_{\mathcal{S}} = \phi(x) \in \mathbb{R}^{1,d-1}, \quad \phi(x') = b(x)^{-\Delta} \phi(x),$$

se transforme de la manera deseada ($b(x)$ es precisamente la dilatación del segundo paso de la transformación anterior).

Una sutileza sobre la inversión a la vista de las *light cone coordinates*

Una razón por la que muchas veces trabajamos solamente con la componente conexas con la identidad de un grupo de simetría incluso cuando partimos de teorías lagrangianas explícitamente invariantes respecto al grupo completo es que es muy fácil que las simetrías discretas se rompan o sean anómalas en teorías físicas perfectamente razonables. Esto hace que a veces sea un poco temerario comprobar las cosas solamente con la inversión cuando estamos estudiando transformaciones conformes. Ahora hablamos un poco de esta transformación desde el punto de vista $2 + d$ dimensional.

Buscamos una transformación (lineal) en $\mathbb{R}^{2,d}$ que consiga llevarnos un punto $x^\mu \in \mathbb{R}^{1,d-1}$ a x^μ/x^2 . Va a ser una transformación discreta también: la reflexión en las coordenadas «extra»:

$$X^d \rightarrow -X^d \iff X^+ \rightarrow X^-,$$

de forma que al proyectar a la sección \mathcal{S} tendremos que un punto $X^M = (1, x^2, x^\mu)$ se transformará en $\tilde{X}^M = (x^2, 1, x^\mu)$. Si ahora hacemos un cambio de escala llegamos a $(1, 1/x^2, x^\mu/x^2)$, justo lo que

queríamos: una inversión en la componente d dimensional. De hecho, es fácil entender que desde el punto de vista $d + 2$ dimensional una reflexión $X^0 \rightarrow -X^0$ está en la misma componente conexas que la inversión $X^d \rightarrow -X^d$. Esto significará que una CFT que no rompa paridad tendrá como simetría a la inversión pero, alternativamente, una CFT quirral no tendrá la inversión como simetría.

1.5. Sobre por qué hay algo llamado *State-Operator correspondence* en CFT

De la misma forma que en QFT tiene sentido tomar ordenados temporales de nuestros operadores compuestos, en las CFTs tiene sentido tomar **ordenados radiales**. Esto tiene que ver con cómo escogemos los espacios de Hilbert sobre los que definimos nuestros estados al hacer QFT. Cuando la QFT sea conforme (es decir, una CFT) habrá una elección particularmente útil. Para ver esto vamos a pensar en una teoría cualquiera, por ejemplo el campo escalar libre en un espacio plano dado en coordenadas polares $ds^2 = -dt^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2$. Entonces,

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS},$$

y sabemos que el Hamiltoniano es el operador que hace las veces de evolución temporal: $H = i\partial_t$. Si ahora hacemos una rotación de Wick tendremos que

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E} \quad \text{y} \quad ds^2 = dx_E^2 = dt_E^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 = r^2 \left(\frac{dr^2}{r^2} + d\Omega_{d-1}^2 \right) = e^{2\tau} (d\tau^2 + d\Omega_{d-1}^2)$$

Como la teoría es conforme y lo único que le ha pasado a la métrica es un reescalo tendremos que la nueva acción será también la de un campo escalar libre pero en una geometría $d\tau^2 + d\Omega_{d-1}^2$ con un nuevo tiempo τ ⁴⁴. Y si deshacemos la rotación Wick tenemos:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\hat{S}_E} \xrightarrow{\text{des-Wick}} \int \mathcal{D}\phi e^{i\hat{S}}.$$

De forma que tenemos un nuevo hamiltoniano: $\hat{H} = i\partial_\tau$ que se corresponde con haber cuantizado la teoría en una S^{d-1} aprovechando la invariancia conforme. Esta es la idea de la **cuantización radial**, que explicamos siguiendo [1] y [11] en el siguiente apartado y después utilizamos para justificar la correspondencia operador-estado en teorías conformes.

⁴⁴En el euclídeo no hay ninguna ambigüedad pero cuando tenemos signatura Lorentz es distinto insertar los operadores en distintos tiempos a en distintos puntos del espacio (lo sabemos por ejemplo porque las Wilson Lines espaciales y temporales con cosas muy diferentes). Esto sucederá también en las CFTs.

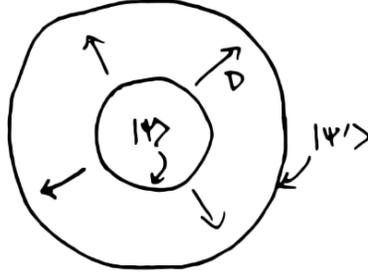


Figura 1.5: El operador D nos mueve de una esfera a otra, en la que tenemos nuestros espacios de Hilbert (en los que están los estados). Figura 11. de [1].

1.5.1. Cuantización radial

En el apéndice de QFT calculamos funciones de correlación relacionadas con ciertos scatterings de partículas. Para ello considerábamos un proceso ordenado temporalmente: un conjunto de partículas descritas por un vacío cuántico en $t = -\infty$ chocan en un cierto instante de tiempo y en $t = \infty$ volvemos a encontrarnos otra configuración descrita por el mismo vacío cuántico.

Esto lo podemos pensar como que hemos hecho una foliación del espacio tiempo: cada hipersuperficie definida por $t = t^*$ era un cierto espacio de Hilbert ($d - 1$ dimensional) en el que vivían nuestros estados y la forma de pasar de un espacio de Hilbert a otro es utilizando el operador evolución temporal

$$U(t) = e^{iHt}.$$

Podemos creer que esto no es muy «justo» desde el punto de vista relativista, porque estamos tratando al tiempo y al espacio de forma distinta pero en realidad lo que hacemos es aprovecharnos de la invariancia Lorentz para escoger precisamente una foliación que respeta la simetría de nuestra teoría. Esto hace, por ejemplo, que todos los espacios de Hilbert sean en realidad isomorfos (cosa que no sería cierta si H dependiera del tiempo, por ejemplo, con lo que ya no tendríamos una teoría relativista).

La idea es que cuantizamos la teoría –imponemos unas ciertas relaciones de conmutación– en cada uno de esos espacios $d - 1$ dimensionales. En este caso tendríamos que en cada espacio de Hilbert los estados se organizarán en multipletes del resto de las simetrías de la teoría, es decir, en primer lugar por las energías/momentos y todas las demás cargas que podamos tener. Y aunque nos gustaría importar toda esta maquinaria para nuestras CFTs: teorías en las que en lugar de exigir invariancia Lorentz exigimos invariancia conforme, vemos ya que hay cosas que fallarían desde el principio pues, en primer lugar, la energía (pensada como el autovalor de $P_\mu P^\mu$) no es un buen número cuántico.

En cambio, dada una teoría invariante bajo dilataciones, es razonable hacer la foliación del espacio

tiempo considerando espacios de igual radio respecto al origen⁴⁵: en cada S^{d-1} tendremos un espacio de Hilbert \mathcal{H} . De manera análoga al caso de QFT, para pasar de una esfera a otra (figura 1.5) utilizaremos el operador de dilatación⁴⁶

$$U = e^{iD\tau} \quad \text{donde } \tau = \log r,$$

es el **tiempo conforme** que ya escribimos antes. Esto se llama **cuantización radial**.

La idea es que vamos a poder «preparar» un estado en uno de estos espacios insertando un operador en la superficie de esa S^{d-1} . En particular, las simetrías conformes nos aseguran que –como mínimo– podremos clasificar los operadores por su dimensión conforme y su representación de $SO(d)$. Esto es lo que hay detrás de la correspondencia operador estado pensada desde este punto de vista.

Siguiendo con la analogía, de la misma forma que nos interesaban las versiones *ordenadas temporales* de las funciones de correlación ahora consideraremos que nuestros operadores dentro de las funciones de correlación están *ordenados radiales*⁴⁷:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle &= \langle 0 | \mathcal{R} \{ \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \} | 0 \rangle = \\ &\equiv \theta(|x_n| - |x_{n-1}|) \cdots \theta(|x_2| - |x_1|) \langle 0 | \phi(x_n) \cdots \phi(x_1) | 0 \rangle \\ &+ \text{permutaciones.} \end{aligned}$$

Claramente esta idea no es invariante, por ejemplo, bajo traslaciones: el origen es un punto absolutamente privilegiado desde este punto de vista. Sin embargo, esto no tiene importancia: podríamos tomar esferas alrededor de cualquier $x \in \mathbb{R}^d$ y obtendríamos algo completamente equivalente, igual que sucede al cambiar de observador inercial en una teoría relativista, como aprendimos con Einstein. Las funciones de correlación **no** pueden depender de esta elección⁴⁸.

A la vista de esto, todo lo que hicimos en la sección (1.4.1) se podrá entender de forma mucho más sencilla cuando veamos al estado $|\phi\rangle$ como el resultado de haber insertado ϕ en el origen.

1.5.2. Correspondencia entre operadores y estados

Asociado a cada operador tenemos un estado.

Nuestro objetivo es, dado un radio r , preparar un estado en el espacio de Hilbert de una S^{d-1} con dicho radio. Lo más sencillo es empezar por el vacío, pues se corresponde a considerar que no hemos

⁴⁵De aquí en adelante trabajamos en el euclideo. Todo se puede pasar a una signatura lorentziana haciendo una prolongación analítica y teniendo cuidado en los sitios adecuados.

⁴⁶Es decir, D juega ahora el papel del hamiltoniano.

⁴⁷Y esto tiene sentido porque los operadores en una misma S^{d-1} conmutan de la misma forma que lo hacen a igual tiempo los operadores insertados en distintos puntos espaciales.

⁴⁸Esto va a salir de nuevo cuando desarrollemos la OPE.

insertado nada dentro de esa esfera (o que hemos insertado la identidad). La dimensión conforme de este estado $|0\rangle$ es nula y se trata de un estado invariante bajo todas las simetrías conformes.

La idea es que si insertamos un operador \mathcal{O}_Δ en el origen $x = 0$ podemos decir que crea un estado en la esfera con «energía»⁴⁹ Δ : $|\Delta\rangle = \mathcal{O}_\Delta(0)|0\rangle$:

$$\begin{aligned} D|\Delta\rangle &= D\mathcal{O}_\Delta(0)|0\rangle = [D, \mathcal{O}_\Delta(0)]|0\rangle + \mathcal{O}_\Delta(0)D|0\rangle = \\ &= i\Delta\mathcal{O}_\Delta(0)|0\rangle = i\Delta|\Delta\rangle. \end{aligned}$$

Si en lugar de insertar \mathcal{O}_Δ en el origen lo hiciéramos en $x \neq 0$ tendríamos que el estado resultante **no** es un autoestado de D –que va a cambiar el punto $x \rightarrow x' \neq x$ – pero se podrá escribir como una combinación de autoestados de D :

$$\mathcal{O}_\Delta(x)|0\rangle = e^{iPx}\mathcal{O}_\Delta(0)e^{-iPx}|0\rangle = e^{iPx}|\Delta\rangle = \sum_n \frac{1}{n!}(iPx)^n|\Delta\rangle.$$

Esto también se puede pensar, quizá de forma más sencilla, *à la path integral*: al meter un operador dentro de la esfera e integrar sobre todos los campos consigues un operador definido en su frontera.

Asociado a cada estado tenemos un operador.

Si consideramos los autoestados⁵⁰ $|\mathcal{O}_i\rangle$ del operador de dilataciones podemos utilizarlos también como operadores. Dado un estado $|O\rangle$ la idea es escoger una esfera S^{d-1} y decir que \mathcal{O} actúa de forma que al insertarlo dentro de ella nos diera el estado $|O\rangle$ en su superficie.

Esto se puede repetir para muchos puntos y la función de correlación se comporta exactamente como debe: consideramos B_i esferas centradas en x_i distintos y tales que las esferas no se cortan⁵¹. Podemos «pegar» los estados $|\mathcal{O}_i\rangle$ y hacer las integrales sobre el espacio total sin los agujeros y de forma que los campos en las fronteras vienen definidos por esos estados:

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \int \prod_i D\phi_{b_i} \langle \phi_{b_i} | \mathcal{O}_i \rangle \int_{\phi_{\partial B_i} = \phi_{b_i}, x \notin B_i} D\phi(x) e^{-S}.$$

Donde ϕ_{b_i} son los campos definidos en la frontera de las bolas B_i .

⁴⁹Nos referimos a *energía desde el punto de vista de la cuantización radial*, i.e. el autovalor del operador dilatación.

⁵⁰Si D no fuera diagonalizable la teoría no sería unitaria pero incluso en ese caso podríamos considerar representaciones finitas al hacer su descomposición en bloques de Jordan.

⁵¹Esto tendrá que ver con el radio de convergencia de la OPE.

¿Operador \iff estados?

Si decimos que un operador *local* de una CFT es un autoestado de D , todo lo que hemos argumentado antes se resume en

$$\mathcal{O}(0) \iff \mathcal{O}(0)|0\rangle \equiv |\mathcal{O}\rangle.$$

Así, las reglas de transformación de los campos primarios que dimos en la sección (1.4.1) se traducen reglas de transformación de los estados de cuantización radial bajo transformaciones conformes:

$$\begin{aligned} [K_\mu, \mathcal{O}(0)] = 0 & \iff K_\mu|\mathcal{O}\rangle = 0, \\ [D, \mathcal{O}(0)] = \Delta\mathcal{O}(0) & \iff D|\mathcal{O}\rangle = \Delta|\mathcal{O}\rangle, \\ [L_{\mu\nu}, \mathcal{O}(0)] = \mathcal{S}_{\mu\nu}\mathcal{O}(0) & \iff M_{\mu\nu}|\mathcal{O}\rangle = \mathcal{S}_{\mu\nu}|\mathcal{O}\rangle. \end{aligned}$$

Donde la primera de las ecuaciones nos dice que efectivamente los **operadores primarios** son aquellos aniquilados por K_μ . Además, dado un estado primario $|\mathcal{O}\rangle$, podemos actuar sobre el con P_μ para obtener nuevos estados a los que llamamos **descendientes**. Esto se corresponde precisamente con insertar las derivadas en el origen del correspondiente operador \mathcal{O} . En general, la expresión que escribimos antes de la inserción de \mathcal{O} en $x \neq 0$ puede pensarse ahora como una combinación lineal de infinitos estados descendientes (todos en el mismo **multiplete conforme**).

Por otra parte, sabemos que P_μ y K_μ actúan como operadores escalera: los descendientes forman una torre de estados con dimensión conforme que va aumentando en una unidad por cada vez que le vamos aplicando P_μ y, queremos pensar que, dado un estado cualquiera $|\psi\rangle$, se podrá actuar con K_μ suficientes veces como para llegar a aniquilarlo –al menos cuando el espectro de D esté acotado por debajo, que desde el punto de vista de la cuantización radial tiene que ver con un valor mínimo de energía– y por tanto como para haber llegado justo antes a un operador primario. Todo el espectro de las teorías conformes se puede organizar con operadores primarios y derivados.

Capítulo 2

Sobre las funciones de correlación en las teorías conformes

Uno de los papers que supusieron el nacimiento de las teorías conformes como rama de estudio en la física teórica fue [21], en el que Polyakov demostraba dos puntos clave: los puntos críticos del grupo de renormalización son invariantes bajo todo el grupo conforme así que vienen descritos por CFTs y las funciones de correlación a 3 puntos están completamente fijadas por la simetría. Sobre este segundo punto trata este capítulo.

Ya sabemos que las restricciones impuestas por la simetría conforme hacen que aspectos –por ahora– intratables de las QFTs se vuelvan mucho más sencillos en una CFT¹. En este capítulo pretendemos ver cómo esto sucede en el caso de las funciones de correlación: las funciones a 1pt son idénticamente nulas y a 2 y 3 puntos tienen una estructura completamente determinada por la simetría conforme. Esto es algo a lo que no podemos aspirar en una QFT arbitraria².

Por otra parte, en una QFT los operadores tienen una cierta estructura algebraica –y esto fue algo sobre lo que se investigaba en física teórica en el siglo pasado y a lo que los matemáticos se siguen dedicando–, que en el caso particular de las CFTs es mucho más robusta. En este capítulo queremos explicar dos de los conceptos más importantes al tratar de definir qué es una CFT y de entender su estructura: la OPE y el *conformal bootstrap*. El objetivo principal de este capítulo es entender que un conjunto –no tan grande como podríamos esperar– de números que satisfacen ciertas relaciones define una CFT y al menos motivar por qué razón esto es algo tan bello y sorprendente.

¹En el capítulo anterior vimos que hay una correspondencia unívoca entre operadores y estados, esto no es cierto (o no funciona tan bien) en una QFT arbitraria. Igualmente, el espectro de una CFT se organiza con los operadores primarios, cosa que no pasa en una QFT.

²Ni siquiera en una QFT con invariancia de escala.

2.1. Estructura de las funciones a 2 y 3 puntos en una CFT

En esta sección vamos a ver cuál es la forma de la función de correlación a 2 y 3 puntos para algunos operadores de las CFTs, en primer lugar para el caso más sencillo posible y después trabajando en general con las representaciones del grupo conforme.

También trataremos por último qué sucede cuando estudiamos una CFT en una variedad no trivial, a modo de aperitivo, pues en el último capítulo volveremos a hacernos esta pregunta para el caso de la CFT a temperatura y carga finitas.

2.1.1. Funciones a 2 y 3 puntos de operadores primarios utilizando las *light cone coordinates*.

Ahora presentamos una forma intuitiva de entender las restricciones que impone la simetría conforme en las funciones de correlación a 2 y 3 puntos para operadores primarios. Seguimos el planteamiento de [11] traduciendo el problema $\mathbb{R}^{1,d-1}$ dimensional a uno en el espacio $\mathbb{R}^{2,d}$ en que las transformaciones conformes actúan de forma lineal.

Operadores escalares.

Este caso es muy sencillo si utilizamos el formalismo introducido en la sección 1.4.3: la expresión más general invariante Lorentz (en $\mathbb{R}^{2,d}$) que respeta la transformación de un campo primario – en realidad nuestro campo es la restricción de este a la sección \mathcal{S} – $\phi(\lambda X) = \lambda^{-\Delta}\phi(X)$ donde Δ es su dimensión conforme es:

$$\langle \phi(X)\phi(Y) \rangle \propto \frac{1}{(X \cdot Y)^\Delta}.$$

La razón por la que no escribimos algo dependiente de X^2 o Y^2 , que en principio transforma como deseamos, es que nos vamos a restringir al cono de luz y van a anularse. Como lo que nos interesa es la función de correlación de los campos de $\mathbb{R}^{1,d-1}$ tenemos que proyectar cada punto $X, Y \in \mathbb{R}^{2,d}$ a la sección \mathcal{S} isomorfa a $\mathbb{R}^{1,d-1}$. Obtenemos entonces, operando como en la sección anterior, que

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \propto \frac{1}{(x-y)^{2\Delta}}. \quad (2.1)$$

En realidad, esto no podía haber sido de otra forma: si pensamos $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = f(x,y)$ podemos aplicar argumentos de simetría para restringir la forma de f . En primer lugar, que nuestros campos sean primarios significa que las imponemos unas reglas de transformación concretas (1.13), que en el

caso de los escalares son particularmente sencillas:

$$\phi(x) = \Omega(x)^{-\Delta} \phi_1(x').$$

Como consecuencia, el propagador de dicho campo escalar primario se tendrá que transformar como

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \Omega(x_1)^{-\Delta} \Omega(x_2)^{-\Delta} \langle \phi(x'_1) \phi(x'_2) \rangle, \quad ^3$$

cuando hacemos una transformación conforme en las coordenadas $x \rightarrow x'$. De la invariancia bajo rotaciones y traslaciones obtenemos, como en QFT, que $f = f(|x - y|)$. Por otra parte, si hacemos una dilatación $x' = \lambda x$ llegamos a que $f(|x - y|) = \lambda^{-2\Delta} f(\lambda|x - y|)$, como deseamos.

Desde el punto de vista de las *light cone coordinates* es obvio que esta forma funcional es covariante bajo cualquier transformación conforme –pues hemos escogido el único término covariante escalar bajo $SO(2, d)$ –pero a simple vista no sabemos argumentar por qué razón (2.1) se va a comportar razonablemente respecto a una SCT o una inversión⁴. Pero nosotras vamos con ventaja pues ya vimos como se transformaba $(x - y)^2$ bajo una transformación conforme infinitesimal cualquiera en la ecuación (1.8).

Una pregunta natural ahora es: qué sucede con las funciones de correlación de distintos operadores escalares (con dimensión conforme diferente). Desde el punto de vista de las *light cone coordinates* es obvio que no se puede construir una cantidad análoga a $X \cdot Y^{-\Delta}$ si tuviéramos un $\Delta_1 \neq \Delta_2$. Desde el mundo d dimensional es un poco más difícil de argumentar pero las dilataciones nos restringirían la forma a $f(|x - y|) = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} f(\lambda|x - y|)$, es decir, $f(|x - y|) \propto \frac{1}{|x - y|^{\Delta_1 + \Delta_2}}$. Ahora debemos imponer la simetría bajo SCT:

$$(k_{1\mu} + k_{2\mu}) \frac{1}{|x - y|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = (\Delta_1 + \Delta_2) (x_\mu + y_\mu) \frac{1}{|x - y|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \implies (\Delta_2 - \Delta_1) (x_\mu - y_\mu) \frac{1}{|x - y|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = 0,$$

de donde se deduce que $\Delta_1 = \Delta_2$.

En general, si $\{\phi_i\}$ son los campos escalares primarios con dimensión conforme Δ de nuestra teoría, sus funciones de correlación a dos puntos se podrán escribir como

$$\langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle = \frac{M_{ij}}{(x - y)^{2\Delta}}$$

³Los $\Omega(x)$ los podemos pensar como el jacobiano de la transformación conforme: $\Omega(x_1)^{-\Delta} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{\Delta}$.

⁴Es cierto que ya vimos que sí lo hace bajo una dilatación pero eso no es suficiente.

donde la matriz M_{ij} se podrá escoger en teorías unitarias proporcional a la identidad, lo que podemos pensar como una especie de base ortonormal de operadores escalares primarios.

De forma análoga se fija la forma de la función a 3 puntos para operadores primarios escalares; buscamos la expresión invariante Lorentz más general que podemos construir dados tres puntos $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{2,d}$ –en el cono de luz: $X^2 = Y^2 = Z^2 = 0$ – que sea compatible con la transformación homogénea de los campos bajo dilataciones espaciotemporales. Esto es, dados $\phi_i : i = 1, 2, 3$ con dimensiones conformes Δ_i :

$$\langle \phi_1(X) \phi_2(Y) \phi_3(Z) \rangle \propto \frac{1}{(XY)^{\alpha_{123}} (XZ)^{\alpha_{132}} (YZ)^{\alpha_{231}}}.$$

Para que esto sea consistente con las dilataciones necesitamos que se satisfaga⁵

$$\alpha_{123} + \alpha_{132} = \Delta_1,$$

$$\alpha_{123} + \alpha_{231} = \Delta_2,$$

$$\alpha_{132} + \alpha_{231} = \Delta_3.$$

Este sistema tiene una solución única

$$\alpha_{ijk} = \frac{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}{2}$$

que hace que la función de correlación a 3pt esté también completamente determinada. Igual que hicimos antes, nos interesa conocer las funciones de correlación en $\mathbb{R}^{1,d-1}$ así que proyectamos el resultado anterior a \mathcal{S} :

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{\lambda_{123}}{|x_{12}|^{2\alpha_{123}} |x_{13}|^{2\alpha_{132}} |x_{23}|^{2\alpha_{231}}}, \quad (2.2)$$

donde $x_{ij} = x_i - x_j$ y λ_{123} es un parámetro libre, característico de la teoría, que tendrá mucha importancia más adelante cuando introduzcamos la OPE y el conformal bootstrap. Por ahora lo podemos pensar como un análogo a las constantes de acoplo de un cierto lagrangiano⁶. Esto lo demostró Polyakov en 1970 [21] y se dice que fue el inicio del auge del estudio de las CFTs. Este resultado es muy importante porque restringir tanto –absolutamente– la forma funcional de las funciones de correlación a tres puntos es algo sorprendente. En una QFT arbitraria la invariancia Lorentz es algo mucho más

⁵Que salga al final un $X^{-\Delta_1}, Y^{-\Delta_2}$ etc. para que la función de correlación se transforme de forma análoga a como vimos en el caso de la función a 2pt solo que ahora con tres jacobianos.

⁶Aunque en realidad pensar en la teoría a partir de los operadores y sus funciones de correlación nos permite no tener que partir de una definición microscópica, que nos interesa bastante en este contexto.

general y por tanto muy difícil de controlar. Incluso si impusiéramos simetría bajo dilataciones tendríamos aún infinitas opciones posibles (todas las que cumplieran $\alpha_{123} + \alpha_{132} + \alpha_{231} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$)⁷. Este resultado hará que las CFTs sean aún más potentes cuando entendamos lo que es la OPE: todas las cantidades físicas se podrán determinar en base a las funciones a tres puntos.

La función a cuatro puntos: primeras complicaciones

Aunque la función a 4pt será materia de la OPE y el *conformal bootstrap*, vamos a hacer algunos comentarios útiles siguiendo la filosofía de esta sección. Consideramos el caso de cuatro campos escalares iguales por simplicidad. En el cono de luz la cantidad invariante Lorentz que transforme respetando la dimensión conforme de los campos más general que podemos construir es⁸

$$\frac{1}{(X_1 \cdot X_2)^\Delta (X_3 \cdot X_4)^\Delta}.$$

El «problema» es que con cuatro puntos del espacio tiempo podemos formar cantidades **invariantes** conformes:

$$u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = u|_{2 \leftrightarrow 4} = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2},$$

a las que llamamos *conformally invariant cross-ratios*⁹. Merece la pena pararnos un segundo en esto: **¿cuáles son las cantidades invariantes conformes de las que nuestras funciones de correlación van a poder depender?**¹⁰

Consideremos la función de correlación a n puntos $\{x_i\}$. Entonces, las rotaciones y traslaciones nos reducen el problema a considerar funciones de las distancias entre los puntos $r_{ij} = |x_i - x_j|$. La invariancia bajo dilataciones hace que solo podamos tener funciones de cocientes r_{ij}/r_{kl} y las SCT nos impondrán que las cantidades sean en realidad de la forma

$$\frac{r_{ij} r_{kl}}{r_{ik} r_{jl}}.$$

Podemos preguntarnos, de vuelta al problema en 4pt, cuantas cantidades distintas va a haber. Desde

⁷Por esto es tan importante entender bien cuáles son las condiciones suficientes para que SI + Lorentz implique conforme.

⁸En realidad, nada nos impide escoger agrupar $X_1 X_3$ y $X_2 X_4$, que no es equivalente (en principio a lo anterior). La imposición de que lo sea tendrá que ver con la *crossing symmetry* de la que hablaremos después.

⁹Puede ser que esto fuera Polyakov dijera cuantas hay?? en la review esa de Ginsparg pone esa referencia pero como que me parece raro que no lo dijera nadie antes??

¹⁰Esta pregunta nos la podemos hacer en abstracto y tiene sentido. En [22] se hace al partir de una definición axiomática de las CFTs, que parte de unas reglas de transformación de las funciones de correlación de operadores primarios (igual que nosotras).

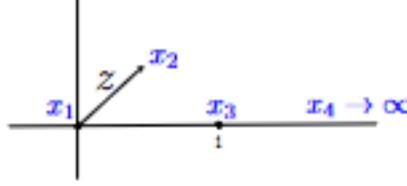


Figura 2.1: Configuración de cuatro puntos cualesquiera tras utilizar las transformaciones conformes. Figura en 4.3.2 de [11].

el mundo $2 + d$ dimensional la cuestión no es tan difícil:

$$u = \frac{(X_1 \cdot X_2)(X_3 \cdot X_4)}{(X_1 \cdot X_3)(X_2 \cdot X_4)}, \quad v = u|_{2 \leftrightarrow 4} = \frac{(X_1 \cdot X_4)(X_2 \cdot X_3)}{(X_1 \cdot X_3)(X_2 \cdot X_4)}.$$

Para entender por qué solo son dos utilizamos la invariancia conforme para poder colocar cuatro puntos x_1, x_2, x_3, x_4 tal y como se muestra en la figura, que representa una configuración claramente parametrizada con dos grados de libertad: Llevamos $x_4 \rightarrow \infty$ utilizando una inversión, después movemos $x_1 \rightarrow 0$ con una traslación y con transformaciones de Lorentz $x_3 \rightarrow (1, 0, \dots)$. Por último, podemos dejar x_3 fijo y mover, con una rotación, $x_2 \rightarrow (x, y, 0, \dots)$. La configuración está fija entonces salvo por dos parámetros reales x, y . De hecho, si evaluamos aquí los *cross-ratios* anteriores encontramos que

$$u = z\bar{z}, \quad v = (1 - z)(1 - \bar{z}),$$

donde $z = x + iy$.

Entonces, la forma más general para la función a cuatro puntos que buscamos es, en el lenguaje $d + 2$ dimensional:

$$\langle \phi(X_1) \phi(X_2) \phi(X_3) \phi(X_4) \rangle = \frac{1}{(X_1 \cdot X_2)^\Delta (X_3 \cdot X_4)^\Delta} f(u, v),$$

En la sección \mathcal{S} esto se traduce en una expresión sencilla pero que no está completamente fija: esto es porque $(X_1 \cdot X_2)^{-\Delta} (X_3 \cdot X_4)^{-\Delta}$ transforma de la forma adecuada así que f tiene libertad de ser cualquier función. El resultado entonces es:

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \rangle = \frac{1}{x_{12}^{2\Delta} x_{34}^{2\Delta}} f(u, v) \quad (2.3)$$

En realidad f sí que tendrá algunas restricciones. Esto lo podemos ver como que la forma en la que agrupamos los puntos para hacer los productos escalares $d + 2$ dimensionales fue arbitraria y hay,

en realidad, dos formas diferentes de hacerlo: podíamos haber agrupado los puntos como $x_{14} x_{32}$, de manera que

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_1) \rangle = \frac{1}{x_{14}^{2\Delta} x_{32}^{2\Delta}} f(\tilde{u}, \tilde{v}) \implies \left(\frac{v}{u}\right)^\Delta f(u, v) = f(v, u),$$

donde la última igualdad viene de que tras hacer $2 \leftrightarrow 4$, los *conformally invariant cross-ratios* serán $\tilde{u} = v, \tilde{v} = u$. Cuando introduzcamos la OPE veremos que además esta f tiene que ver con las funciones de correlación a 3pt. En ese contexto veremos que esta simetría respecto a qué puntos juntar va a ser algo muy poderoso, que restringirá aún más la forma de los observables de cualquier CFT consistente: acabamos de derivar la *crossing symmetry*.

Operadores con espín.

Queremos derivar unas expresiones como las de (2.1), (2.2) para campos primarios que tengan espín –definidos por sus propiedades de transformación en (1.13)–. Para ello vamos a asociar, de forma análoga a lo anterior, $\phi_{\mu\nu\lambda\dots}(x) \leftrightarrow \phi_{MNL\dots}(X)$. El problema que tenemos es que cada índice va a llevar dos componentes de más así que necesitaremos imponer más condiciones que antes. En primer lugar nos quedamos con el cono de luz X^2 y también imponemos que allí los campos sean transversos: $X^M \phi_{MNL\dots}(X) = 0$. Nos vamos a restringir al caso en que los campos sean simétricos y sin traza; esto es arbitrario, por sencillez: la forma general la derivaremos de forma «algebraica» más adelante. Esto significa que los campos de $\mathbb{R}^{2,d}$ van a ser también simétricos y sin traza. Los campos primarios de nuestra CFT se relacionarán con estos a través de una proyección a la sección \mathcal{S} que utilizamos antes, parametrizada por d coordenadas x^μ :

$$\phi_{\mu\nu\lambda\dots}(x) = \phi_{MNL\dots}(X) \frac{\partial X^M}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^N}{\partial x^\nu} \dots,$$

Donde, como antes, hemos fijado $X^+ = 1, X^- = x^2$ hace que $\frac{\partial X^M}{\partial x^\nu} = (0, 2x_\nu, \delta_\nu^\mu)$. Se puede demostrar que esta asignación conserva la condición de no tener traza, de ser simétrica y hace que cualquier cosa proporcional a X^M se anule, ya que, al estar \mathcal{S} en el cono de luz, $X^2 = 0 \implies X^M \frac{\partial X^M}{\partial x^\mu} = 0$.

Podemos pensar entonces que la ecuación anterior relaciona los campos de $\mathbb{R}^{2,d}$ con los campos de nuestra teoría (en $\mathbb{R}^{1,d-1}$) de forma unívoca salvo por una redundancia gauge residual: añadir un tensor proporcional a X^M .

Ahora podemos razonar igual que con los escalares: en $\mathbb{R}^{2,d}$ los campos transforman de forma

covariante Lorentz:

$$\phi'_{MNL\dots}(X') = \Lambda_M^{M'} \Lambda_N^{N'} \dots \phi_{M'N'L'\dots}(X),$$

Y la condición de ser primarios se traduce en homogeneidad bajo las dilataciones espaciotemporales:

$$\phi'_{\dots}(\lambda X) = \lambda^{-\Delta} \phi_{\dots}(X).$$

Viendo como transforma el elemento de línea y su producto escalar con el campo podemos demostrar que en general:

$$\phi'_{\mu\dots}(x') = \frac{1}{b(x)^\Delta} M_\mu^\nu(x) \dots \phi_{\nu\dots}(x).$$

Donde $M\dots$ serán las matrices de la representación de $SO(1, d-1)$ correspondientes a cada uno de los índices, es decir, la definición que impusimos en (1.13).

Calculamos la función a dos puntos para un campo vectorial A_M . La cantidad invariante Lorentz más general que podemos construir que sea además consistente con la homogeneidad de los campos bajo dilataciones (si tenemos en cuenta que no puedo hacer nada proporcional a X^2, Y^2 o X_M, Y_M pues se anularían o bien porque la sección \mathcal{S} está en el cono de luz o bien porque consideramos campos transversos y X_M se proyecta a 0) es

$$\langle \phi_M(X) \phi_N(Y) \rangle = \frac{\eta_{MN} + \alpha \frac{Y_M X_N}{XY}}{(XY)^\Delta}.$$

Como partimos de campos transversos, tendremos que imponer

$$X^M \langle \phi_M(X) \phi_N(Y) \rangle = Y^N \langle \phi_M(X) \phi_N(Y) \rangle = 0,$$

lo que fija el valor de $\alpha = -1$. Igual que antes, nos interesa la función de correlación para los campos de $\mathbb{R}^{1,d-1}$, así que proyectamos el resultado anterior a la sección \mathcal{S} :

$$\langle \phi_\mu(x) \phi_\nu(y) \rangle = \frac{I_{\mu\nu}(x-y)}{(x-y)^{2\Delta}},$$

donde $I_{\mu\nu}$ es el tensor de inversión que introdujimos en (1.12) para codificar cómo se transforman los vectores bajo una inversión. Igual que en el caso de los escalares primarios, la imposición de transformar covariantemente bajo el grupo conforme y no solo bajo las dilataciones es lo que restringe tanto la forma permitida. En caso de que solo exigiéramos homogeneidad (d dimensional) bajo dilataciones,

tendríamos un tensor con un grado de libertad:

$$\tilde{I}_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + \beta \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}.$$

2.1.2. Las funciones a dos y tres puntos en representaciones arbitrarias del grupo conforme.

Después de haber dado la motivación intuitiva para casos concretos sobre por qué la función a dos y tres puntos tiene una forma funcional completamente fijada por la simetría conforme. Repasamos (brevemente) los resultados de [23] explotando las cosas a las que llegamos en los apartados anteriores.

Consideramos una CFT euclídea d dimensional. Partimos un operador $\mathcal{O}(x)$ primario con dimensión conforme Δ (escribimos explícitamente todos los índices de la definición (1.13)) que se transforma, bajo $x \rightarrow x'(x) \equiv (gx)_\mu$ conforme, como

$$(T(g)\mathcal{O})^i(x') = \Omega^g(x)^\eta D_j^i(\mathcal{R}^g(x)) \mathcal{O}^j(x), \quad (2.4)$$

donde $\mathcal{R}^g(x)$ es la transformación local ortogonal (como estamos en \mathbb{R}^a , así que se tratará de un elemento de $O(d)$) que le podemos asociar la transformación conforme mediante

$$\mathcal{R}_{\mu\alpha}^g(x) = \Omega^g(x) \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}, \quad \mathcal{R}_{\mu\alpha}^g(x) \mathcal{R}_{\nu\alpha}^g(x) = \delta_{\mu\nu}$$

y el índice i se denota la representación de $O(d)$. Entonces, dada una matriz de rotación $R_{\mu\nu}$, $\mathcal{D}_j^i(R)$ es un elemento en esta representación que actúa sobre los campos \mathcal{O}^* .

Función de correlación a 2pt para operadores primarios arbitrarios.

Consideramos dos campos primarios $\mathcal{O}_1^{i_1}$, $\mathcal{O}_2^{i_2}$ (de espín arbitrario: eso va codificado en la representación de $SO(d)$ correspondiente a los índices i_1, i_2). Queremos calcular la forma más general de $\langle \mathcal{O}_1^{i_1}(x_1), \mathcal{O}_2^{i_2}(x_2) \rangle$ y para ello utilizamos la invariancia bajo transformaciones conformes. De forma análoga a lo que hicimos en el caso anterior se justifica que, con los puntos x_1, x_2 solo podemos construir una cantidad que se transforme de la forma requerida: $|x_{12}|^{-2\Delta}$ donde Δ es la dimensión conforme de ambos operadores y $x_{12} = x_1 - x_2$. Se puede definir

$$\langle \mathcal{O}_1^{i_1}(x_1) \mathcal{O}_2^{i_2}(x_2) \rangle = \frac{1}{(x_{12}^2)^\Delta} P^{i_1 i_2}(x_{12}).$$

Y la invariancia conforme obliga a que $P^{i_1 i_2}(x)$ cumpla:

$$D_1^{i_1 j_1}(\mathcal{R}(x_1)) D_2^{i_2 j_2}(\mathcal{R}(x_2)) P^{j_1 j_2}(x_{12}) = P^{i_1 i_2}(x'_{12}), \quad P^{i_1 i_2}(\lambda x) = P^{i_1 i_2}(x).$$

La ecuación (1.11) nos dice cómo se transforma x_{12}^2 , lo que lleva a proponer la siguiente solución:

$$P^{i_1 i_2}(x_{12}) = D_1^{i_1 j_1}(I(x_{12})) g^{j_1 i_2}, \quad (2.5)$$

donde $g^{i_1 i_2}$ es un tensor invariante para las representaciones D_1 and D_2 en las que transforman los operadores. Es decir, $D_1^{i_1 j_1}(R) D_2^{i_2 j_2}(R) g^{j_1 j_2} = g^{i_1 i_2}$ para cualquier $R \in O(d)$. Con estos ingredientes se puede demostrar que (2.5) es correcto¹¹. En caso de que sean distintas no se podría construir ningún $g^{i_1 i_2}$ y la función a dos puntos se anulará.

El resultado final viene dado por

$$\langle \mathcal{O}_1^{i_1}(x_1) \mathcal{O}_2^{i_2}(x_2) \rangle = \frac{1}{(x_{12}^2)^\Delta} D_1^{i_1 j_1}(I(x_{12})) g^{j_1 i_2}. \quad (2.6)$$

Utilizando la misma filosofía que cuando bautizamos a los ξ como *vectores de Killing conformes*, podemos pensar que $D(I(x_{12}))$ actúa sobre x_1, x_2 como un transporte paralelo para las transformaciones conformes locales.

Función de correlación a 3pt para operadores primarios arbitrarios.

De la misma forma que antes, cuando queremos calcular la función de correlación a tres puntos nos damos cuenta de que con x_1, x_2, x_3 solo se puede construir un objeto que se transforma como debe –para que las funciones de correlación sigan las reglas derivadas de las de sus campos– bajo el grupo conforme. Esto lo podemos pensar como que el grupo conforme nos permite llevar esos tres puntos a otros cualesquiera de R^d , es decir: no existe ninguna forma de construir una forma invariante conforme.

Sean tres campos $\mathcal{O}_1^{i_1}, \mathcal{O}_2^{i_2}, \mathcal{O}_3^{i_3}$ con representaciones de $O(d)$ etiquetadas por i_1, i_2, i_3 y dimensiones conformes $\Delta_i, i = 1, 2, 3$. La ecuación (2.6) puede servir de inspiración para plantear que la función de correlación a tres puntos tendrá la forma de:

$$\langle \mathcal{O}_1^{i_1}(x_1) \mathcal{O}_2^{i_2}(x_2) \mathcal{O}_3^{i_3}(x_3) \rangle = \frac{1}{(x_{12}^2)^{\delta_{12}} (x_{23}^2)^{\delta_{23}} (x_{31}^2)^{\delta_{31}}} \times D_1^{i_1 j_1}(I(x_{13})) D_2^{i_2 j_2}(I(x_{23})) t^{j_1 j_2 i_3}(X_{12}), \quad (2.7)$$

donde $t^{i_1 i_2 i_3}(X)$ es un tensor homogéneo en X que se porta bien respecto a las transformaciones de

¹¹Los detalles en [23]. (bueno, detalles...)

$O(d)$:

$$D_1^{i_1 j_1}(R) D_2^{i_2 j_2}(R) D_3^{i_3 j_3}(R) t^{j_1 j_2 j_3}(X) = t^{i_1 i_2 i_3}(RX) \quad \forall R \in O(d), t^{i_1 i_2 i_3}(\lambda X) = \lambda^q t^{i_1 i_2 i_3}(X),$$

y definimos

$$X_{12} = -X_{21} = \frac{x_{13}}{x_{13}^2} - \frac{x_{23}}{x_{23}^2}, \quad X_{12}^2 = \frac{x_{12}^2}{x_{13}^2 x_{23}^2}.$$

Las reglas de transformación (2.4) hacen que, para que la función de correlación a 3pt. se transforme de la forma adecuada bajo dilataciones, se tenga que satisfacer:

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 + q), \\ \delta_{23} &= \frac{1}{2} (\eta_2 + \eta_3 - \eta_1 - q), \\ \delta_{31} &= \frac{1}{2} (\eta_3 + \eta_1 - \eta_2 - q) \end{aligned}$$

Se puede comprobar que, tras imponer todas estas cosas, la función de (2.7) se comporta como debe. Esta expresión parece que en principio no es simétrica bajo el intercambio de los índices 1, 2, 3 de los operadores pero se puede comprobar que en realidad sí lo es ya que el tensor de inversiones, que sobre el vector «relevante» de la ecuación anterior actúa como $I_{\mu\nu}(x_3) X_{12\nu} = \frac{1}{x_3} X'_{12\mu}$, cumple la propiedades necesarias para que la expresión anterior sea simétrica bajo $1 \rightarrow 2$ o $2 \rightarrow 3$.

2.1.3. ¿Y las funciones a un punto? Sobre por qué no hay VEV no nulos en las CFTs (planas).

En una teoría unitaria el operador D va a ser diagonalizable y su espectro va a estar acotado por debajo, de tal forma que exista un estado con menor *energía conforme*. Esto hace, en particular, que el único operador con dimensión conforme nula sea la identidad. De ello se deduce que las funciones de correlación a un punto (o los valores esperados en el vacío de los campos, si queremos verlo así) se anulen para cualquier operador que no sea la identidad. En primer lugar, al igual que en una QFT cualquiera: los únicos campos que pueden tener un VEV no nulo serán los escalares pues lo contrario rompería la invariancia Lorentz. Además, la invariancia bajo traslaciones hace que tenga que tener un valor constante. Por último, las dilataciones fijan ese número a cero. Esto se puede pensar también como que un VEV no nulo de un campo estaría introduciendo una escala de energía en la teoría, que inmediatamente rompería la invariancia conforme.

Sin embargo, cuando introducimos un defecto o ponemos nuestra CFT en una topología no trivial esto cambia y salen resultados muy interesantes, que continúan estudiándose y sirven además para

modelar multitud de fenómenos físicos relevantes. En el segundo caso, la escala característica viene de la topología y podrán construirse cantidades utilizándola. De esto nos encargaremos en el último capítulo, en el que estudiamos CFTs a temperatura y densidad de cargas finitas.

2.2. *Operator Product Expansion*

Una pregunta lógica que nos podemos hacer cuando nos dan un conjunto de operadores de una QFT es: ¿qué pasa cuando los multiplico?. La respuesta para $\mathcal{O}(x)\mathcal{O}(x')$ nos la da, en el régimen perturbativo, la fórmula LSZ y los diagramas de Feynman. Pero tenemos un problema cuando queremos hacer $x \rightarrow x'$: los propagadores tienen singularidades cuando van de un punto a él mismo. La idea es utilizar la OPE para salvar este tipo de patologías. La existencia de esta propiedad es al final equivalente al hecho de que los operadores formen una cierta álgebra asociativa. La idea es hacer una especie de polinomio de Taylor que tiene al final un número finito de términos singulares –que además contienen mucha información relevante–

$$\mathcal{O}^i(x)\mathcal{O}^j(x') = \sum_k f_k^{ij}(x, x', x'')C^k(x''),$$

donde en realidad deberíamos escribir ordenados normales si estamos en una teoría cuántica. Esto lo podemos reescribir pensando esas constantes de estructura como unas ciertas funciones de los campos y sus derivadas:

$$:\mathcal{O}(x)::\mathcal{O}(x') := \sum_s :\mathcal{O}_s(x') : D_s(x - x').$$

Donde $D_s(x - x')$ es un operador diferencial en $x - x'$. Lo importante es que esta expansión tendrá un radio de convergencia no nulo. En el caso de las CFTs motivaremos que el dominio de convergencia solo tiene que ver con los puntos en los que estamos insertando los operadores. Quizá se pueda pensar toda esta verborrea como que, en principio, parece razonable pensar que cuando dos operadores se insertan muy cerca tiene que haber una manera de escribir eso como una serie de operadores insertados en el punto medio (figura 2.3). Todo este lenguaje parece preparado entonces para utilizar la cuantización radial.

Consideremos dos operadores $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ insertados en \mathbb{R}^d de tal forma que podemos preparar un estado $|\psi\rangle$ en una esfera que los rodee al origen y a x , como se ilustra en la figura 2.2¹². Como explicamos en

¹²Hemos puesto unos de ellos en el origen pero podríamos no haberlo hecho sencillamente haciendo cuantización radial alrededor de otro punto.

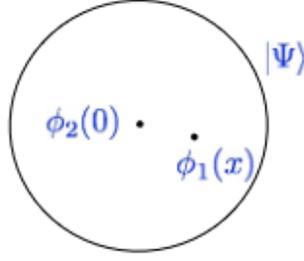


Figura 2.2: Dos operadores insertados dentro de una esfera B que generan un estado $|\psi\rangle$ en su frontera ∂B . Figura 3.7 de [11].

la sección 1.5.2 tendremos una base de autoestados de D que permitirá escribir

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle, c_n = c_n(x).$$

La correspondencia entre operadores y estados en una CFT nos permite decir que para cada $|E_n\rangle$ tendremos un operador que será un primario o un descendiente. De esto se sigue que

$$\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0) = \sum_k C_{ijk}(\tilde{x}, \partial_\mu) |_{\tilde{x}=0} \mathcal{O}_k(0), \quad (2.8)$$

donde debemos pensar que $C_{ijk}(x, \partial_\mu)$ es un operador diferencial (una serie de potencias en ∂_μ ¹³ que codifica la información del operador primario \mathcal{O}_k y de todos sus descendientes, es decir, del k multiplete conforme.

Esta fórmula, igual que su prima de QFT, se puede pensar como una ecuación cierta en dentro de su radio de convergencia. Desde el punto de vista de la path integral, la condición de convergencia será que todos los demás operadores estén insertados fuera de la esfera B (esta idea se muestra en la figura 2.2).

Hemos construido una herramienta muy poderosa: no es un resultado asintótico para el límite en el que los operadores están insertados en el mismo puntos sino algo que funciona a una separación estrictamente finita. Además, podríamos haber hecho la OPE sobre un tercer punto y que estuviera dentro de B y no habría ningún problema: conceptualmente es exactamente lo mismo: haríamos la cuantización radial alrededor de otro punto y buscaríamos otra base de autoestados... Todo se sigue de la misma forma hasta llegar a

$$\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0) = \sum_k C_{ijk}(\tilde{x}, \partial_\mu) |_{\tilde{x}=y} \mathcal{O}_k(y).$$

¹³O, alternativamente, en P_μ , como ya habíamos escrito en el capítulo anterior.

Figura 2.3: Representación gráfica de la OPE. Necesitamos que todos los demás operadores estén insertados fuera de B , o visto de otra forma: que exista un B en estas condiciones.

No hemos especificado los índices de $SO(d)$ pero para los casos con espín se procede de forma análoga: podemos considerar que los dos operadores transforman en (distintas) representaciones dadas por los índices a, b :

$$\mathcal{O}_i^a(x) \mathcal{O}_j^b(0) = \sum_k C_{ijk}^{ab}(x, \partial_\mu) \mathcal{O}_k^c(0).$$

Ahora queremos ver, igual que hicimos con las funciones a dos y tres puntos, qué restricciones impone la simetría conforme en los coeficientes de la OPE. Para ello, vamos a contraer con un tercer operador \mathcal{O}_k por la izquierda (asumimos que $|x_{23}| \geq |x_{12}|$ para que la OPE sea válida y consideramos operadores escalares) :

$$\langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \mathcal{O}_k(x_3) \rangle = \sum_{k'} C_{ijk'}(x_{12}, \partial_2) \langle \mathcal{O}_{k'}(x_2) \mathcal{O}_k(x_3) \rangle$$

Sabemos que el lado de la izquierda está completamente fijado por la simetría conforme y, como ya dijimos en el capítulo anterior, en una teoría unitaria se puede escoger una base ortonormal de los operadores escalares de forma que $\langle \mathcal{O}_k(x_2) \mathcal{O}_{k'}(x_3) \rangle = \delta_{kk'} x_{23}^{-2\Delta_k}$. Esto hará que la suma tenga un único término

$$\frac{f_{ijk}}{x_{12}^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k} x_{23}^{\Delta_j + \Delta_k - \Delta_i} x_{31}^{\Delta_k + \Delta_i - \Delta_j}} = C_{ijk}(x_{12}, \partial_2) x_{23}^{-2\Delta_k}.$$

Es decir, C_{ijk} es proporcional a f_{ijk} y a un operador diferencial que solo depende de las dimensiones conformes. Para encontrar exactamente su expresión tendríamos que expandir a ambos lados cerca de $x = x_2$ e igualar término a término.

Esta idea se puede aplicar a un problema más general: nos permite reducir una función de correlación a n puntos a una combinación de funciones a $n - 1$. Aplicando este principio de forma recursiva terminaríamos dejándolo todo en términos de funciones a 2 o 3 puntos [24] [21], que están completamente determinadas funcionalmente a causa de la simetría conforme.

Esto lo podemos ver como que con muy poca información podemos calcular todas las funciones de correlación y por tanto especificar por completo nuestra teoría. El conjunto mínimo de información con el que nos podremos quedar será:

- ★ El *espectro de operadores primarios* con sus dimensiones conformes Δ y sus representaciones bajo $SO(d - 1)$. Cualquier otro operador puede encontrarse aplicando P_μ (es decir, derivando) un número finito de veces y haciendo operaciones con otros operadores. Además, la correspondencia operador-estado nos asegura que estamos así consiguiendo llegar a todos los estados posibles de la teoría.
- ★ Como la OPE nos permite reducir cualquier función de correlación a combinaciones de funciones a dos puntos, completamente fijadas salvo constantes. Además, las constantes f_{ijk} que salen en la función a tres puntos –que no pueden ser calculadas utilizando cinemática, tienen información sobre la teoría– son precisamente las mismas que salen en la OPE. Esto se puede ver al escribir $\phi_1(x)\phi_2(0)|0\rangle = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{12\mathcal{O}}[\mathcal{O}(0) + \text{descendientes}]$ ¹⁴. Estas constantes de estructura se llaman también **coeficientes de la OPE** y son características de cada teoría.

Estas dos cosas juntas se llaman **OPE data** y nos permiten reescribir cualquier función de correlación como una serie convergente –siempre que pueda conseguir separar los dos puntos sobre los que hago la OPE en cada paso de todos los demás–. Una vez visto que una teoría viene completamente caracterizada por su *OPE data*, tiene sentido hacernos la pregunta inversa: ¿qué condiciones tiene que cumplir un conjunto de números para definir una *OPE data* consistente, es decir, que defina una CFT? De esto precisamente se encarga el *conformal bootstrap*, que explicamos en la sección siguiente.

2.3. Conformal bootstrap

Si bien es cierto que la simetría conforme reduce mucho el problema de describir la teoría en comparación con lo que sucede en una QFT ordinaria, sigue siendo muy difícil calcular explícitamente los operadores primarios con sus dimensiones conformes y **todos** los coeficientes de las funciones a tres puntos entre ellos. La idea entonces es plantearse el camino contrario: intentar imponer unas condiciones de consistencia que nos permitan clasificar todas las soluciones de forma que al final podamos encontrar a cuál de ellas se refiere nuestra teoría¹⁵. Así se consiguió resolver en los años 80 un conjunto de CFTs 2 dimensionales que se llaman *minimal models* [17]. Este enfoque es muy importante por ser completamente **no** perturbativo: a veces es la única «técnica» que podemos utilizar para intentar entender una teoría en un régimen en que el resto de métodos (mayoritariamente perturbativos) fallan.

¹⁴Una versión de 2.8 en la que escribimos el operador diferencial actuando en \mathcal{O} y evaluado en $x = 0$ como una serie en \mathcal{O} y descendientes.

¹⁵Y aparece aquí implícitamente la idea de universalidad crítica de nuevo: no nos importa tanto la descripción microscópica de nuestro sistema sino encontrar una teoría que lo describa.

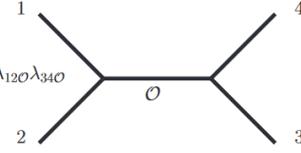
$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{12\mathcal{O}}\lambda_{34\mathcal{O}}$$


Figura 2.4: Representación diagramática de la función a 4pt utilizando la OPE y agrupando las inserciones como (12)(34). Llamamos a esto [11] expansión en *conformal partial waves*(CPW).

Consideremos la función de correlación a 4pt de cuatro operadores escalares primarios iguales. Vimos en 2.3 que la simetría conforme restringe mucho su forma. A la vista del apartado anterior, tiene sentido plantearnos utilizar la OPE para reducir primero esta función a cuatro puntos a una suma de funciones a tres puntos, cuya forma está completamente determinada por la simetría conforme. Para hacer esto decidimos en primer lugar agrupar los operadores como (12)(34), figura 2.4. El resultado será:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \rangle &= \\ &= \sum_{\mathcal{O}, \mathcal{O}'} f_{\phi\phi\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}'} C_a(x_{12}, \partial_2) C_b(x_{34}, \partial_4) \langle \mathcal{O}^a(x_2) \mathcal{O}'^b(x_4) \rangle = \\ &= \sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 C_a(x_{12}, \partial_2) C_b(x_{34}, \partial_4) \frac{I^{ab}(x_{24})}{x_{24}^{2\Delta_{\mathcal{O}}}} = \\ &= \frac{1}{x_{12}^{\Delta_{\phi}} x_{34}^{\Delta_{\phi}}} \sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 g_{\Delta_{\mathcal{O}}, \ell_{\mathcal{O}}}(x_i), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que podemos considerar una «base ortonormal» de operadores primarios en el sentido de que

$$\langle \mathcal{O}^a(x) \mathcal{O}'^b(0) \rangle = \delta_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} \frac{I^{ab}(x)}{x^{2\Delta_{\mathcal{O}}}} \text{ }^{16}$$

y hemos definido los *conformal blocks* $g_{\Delta, \ell}(x_i)$:

$$g_{\Delta, \ell}(x_i) \equiv x_{12}^{\Delta_{\phi}} x_{34}^{\Delta_{\phi}} C_a(x_{12}, \partial_2) C_b(x_{34}, \partial_4) \frac{I^{ab}(x_{24})}{x_{24}^{2\Delta_{\mathcal{O}}}},$$

y aunque no es obvio por su definición se puede probar que solo dependen de u, v .

Tenemos todo el derecho del mundo a repetir el proceso anterior agrupando los puntos de otra forma no equivalente: (14)(23) y el resultado debe ser el mismo: la función a 4 puntos. Esta idea se muestra en la figura 2.5 y tiene que ver con que las «expansiones» como las de 2.4 no se deben pensar como un diagrama de Feynman: uno solo de estos diagramas contiene toda la información de la función a 4 puntos, no necesitaremos escribir los canales s, t, u que conocemos de QTF sino que impondremos

¹⁶Donde $I^{ab}(x) = I^{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l}(x)$ es una extensión del tensor de inversión que mostramos para el caso vectorial para cuantos índices de $SO(d)$ sean necesarios.

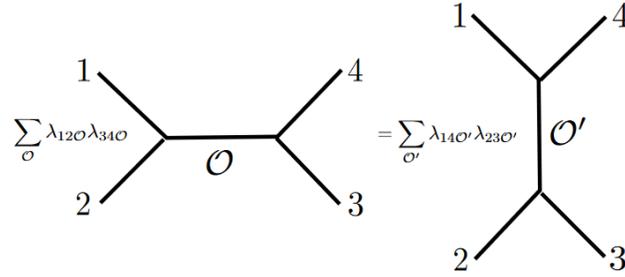


Figura 2.5: Representación diagramática de la *crossing symmetry* para las funciones a 4 puntos: los dos canales representan formas no equivalentes de aplicar la OPE que deben ser iguales si la teoría es consistente. Figura de [11].

que sean iguales. Esta condición es lo último que nos queda para definir una CFT y en la literatura se llama *OPE associativity*, *crossing symmetry* o *conformal bootstrap*.

La función a cuatro puntos tiene estos dos «canales» e imponer que ambos resultados sean iguales restringe los valores de los coeficientes de la OPE y las dimensiones conformes, que dijimos formaban la *CFT data*. Análogamente, para funciones de más puntos se tendrán que ver todas las posibles descomposiciones y sacar de ello un sistema de condiciones a imponer a los datos. En el mejor de los casos las restricciones impuestas tanto por las simetrías del sistema como por estas relaciones de consistencia nos permitirán resolver completamente una teoría pero en otros casos nos permitirán al menos restringir el posible espacio de teorías compatibles con ello.

Capítulo 3

La dualidad holográfica

La teoría cuántica de campos es la mejor herramienta que tenemos para describir el mundo de forma microscópica, pero hay multitud de evidencias, tanto experimentales como teóricas, de que, al menos hasta el punto en que la entendemos ahora, lo que sabemos de QFT no es suficiente para explicar la naturaleza completamente. En particular, no tenemos aún una teoría cuántica de la gravedad. Esto es un problema porque al estudiar fenómenos que se dan a distancias del orden de l_P , los efectos cuánticos de la gravedad son relevantes.

En su curso de la escuela TASI en 2010, Joseph Polchinski contaba [25] que frente a quienes proponían la identidad de Euler o las ecuaciones de Maxwell como la ecuación más importante de la historia, él propondría la conjetura de Maldacena:

$$AdS = CFT, \tag{3.1}$$

pues «contiene» los conceptos centrales de la física fundamental –el electromagnetismo y sus generalizaciones no abelianas, la mecánica cuántica, la QFT y la relatividad general– y además podría ser, no una mera coincidencia sino un ejemplo concreto de otro conjunto mayor de dualidades gauge/gravedad que nos podrían permitir enfrentarnos a algunos de los problemas más profundos a los que la física teórica lleva intentando dar respuesta en los últimos cien años –o toda la historia–. En particular, estas dualidades tienen que ver con algo que se cree cierto en la comunidad de la física teórica: la gravedad cuántica funciona de forma **holográfica**.

El principio holográfico se refiere a la idea de que los grados de libertad cuánticos no escalan con el volumen, como podríamos pensar por analogía a un gas clásico, sino con el área. Todo esto está basado en el trabajo de Bekenstein sobre la entropía de los agujeros negros [26], donde demostró que si queremos que los agujeros negros respeten la segunda ley de la termodinámica es necesario que la

entropía máxima de una región del espacio venga dada por su área (en unidades de Planck) y no por su volumen. De aquí nace la idea de que «el mundo es un holograma» [27], de que en la frontera de un espacio con gravedad hay una teoría de campos que la describe.

Hemos encontrado una nueva razón por la que merece la pena estudiar CFTs: puede ayudarnos a entender cómo funciona la gravedad cuántica y, con ello, la estructura microscópica del espaciotiempo.

En este capítulo intentamos hacer una introducción a la dualidad AdS/CFT, destacando el valor que tiene lo que hemos aprendido en los anteriores capítulos y en cómo se traduce a través del «diccionario» de la dualidad. En la primera sección hacemos un repaso de los espacios *AdS* en relatividad general, centrándonos especialmente en la compactificación de variedades de Einstein, pues en la frontera del espacio va a ser donde «estará» nuestra teoría de campos. En la segunda motivamos la dualidad AdS/CFT centrándonos en las simetrías y calculamos la función a 2 puntos utilizando el dual holográfico¹ y por último revisamos de forma simplificada la dualidad original que descubrió Maldacena.

3.1. *Willem de Sitter*

Estamos interesadas en entender la dualidad AdS/CFT y, llegado este punto, sabemos algunas cosas sobre teorías conformes pero nada sobre lo que significa AdS. De hecho, no hemos hablado en ningún momento de poner nuestras teorías en un espaciotiempo dinámico. En esta sección hacemos un repaso breve sobre qué son los espacios **Anti de Sitter** y en por qué la dualidad holográfica se realiza precisamente en ellos² En particular, veremos los dos hechos que van a motivar la parte «geométrica» de la dualidad: las isometrías de AdS_{d+1} coinciden precisamente el grupo conforme $Conf(d)$ y, a diferencia del caso plano, la compactificación de un espacio *AdS* es una variedad con borde, lo que nos permitirá definir una teoría en su frontera.

3.1.1. Una de las versiones más sencillas (simétricas) de la relatividad general: espacio *AdS*

AdS_{d+1} es la solución maximalmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica negativa:

$$S = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x \sqrt{|g|} (R - \Lambda),$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R = -\frac{\Lambda}{2} g_{\mu\nu}.$$

¹Que es lo que pretendemos hacer para un caso más general en el capítulo siguiente.

²Al menos en sus versiones más «sencillas».

Si tomamos la traza en la ecuación de movimiento nos damos cuenta de que $R = \frac{d+1}{d-1}\Lambda$ ³ de forma que el Ricci es proporcional a la métrica⁴, como podíamos saber por ser esta una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. La condición de ser maximalmente simétrico se traduce en

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{\Lambda}{d(d-1)}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}).$$

En general, las geometrías maximalmente simétricas solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío se pueden escribir como soluciones de ecuaciones cuadráticas en una dimensión más con una ligadura que relaciona el «radio» del espacio L con la curvatura. Estas ecuaciones describen un embebimiento de dichas geometrías en $R^{2,d}$. Para el caso de AdS esto es:

$$-X_0^2 - X_1^2 + \sum_{i=2}^{d+1} X_i^2 = L^2, \quad L^2 = -\frac{d(d-1)}{\Lambda}. \quad (3.2)$$

Esta condición es particularmente iluminadora porque nos hace explícitas las isometrías de este espacio: $O(2, d) \cong Conf(1, d-1)$, ¡el grupo conforme de un espacio plano d dimensional! La dualidad holográfica explotará ampliamente que estos grupos sean en realidad el mismo pero no se contentará con ello⁵. En lo que queda de capítulo resumimos el capítulo correspondiente a espacios AdS de [28], [20], [29] para recoger las herramientas que necesitaremos para formular la dualidad AdS/CFT.

3.1.2. Estructura conforme del espacio plano: *Einstein's Static Universe*

Lo que llevó a Einstein a introducir la constante cosmológica fue precisamente proponerse aplicar la relatividad general para modelizar un universo estático. Podemos pensar que al querer estudiar la estructura causal del espaciotiempo necesitamos llevarlo a algo parecido a un intervalo, **compactificarlo**. Esta es la idea del **universo estático de Einstein** –que podemos pensar como una extensión de «si a \mathbb{R}^n le añadimos el infinito tenemos una S^n »– que repasamos ahora.

Consideramos Minkowski $d+1$ dimensional en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2,$$

donde $d\Omega_{d-1}$ es el elemento de línea de una S^{d-1} unitaria. Si hacemos un par de cambios de coordenadas

³En realidad aquí se pueden seguir distintos convenios que cambian en factores 2 y reescriben esta acción de forma ligeramente distinta. Utilizamos la de [20]. La cuestión es que la curvatura (escalar) es la constante cosmológica (salvo por un prefactor) y que nuestro espacio AdS es una especie de hiperboloide con signatura de Minkowski.

⁴A veces a las geometrías que cumplen esto se las llama **variedades de Einstein**.

⁵Sobre la estructura/compactificación conforme de estas soluciones/espaciotiempos se sabía mucho antes de la propuesta de Maldacena, que va mucho más allá.

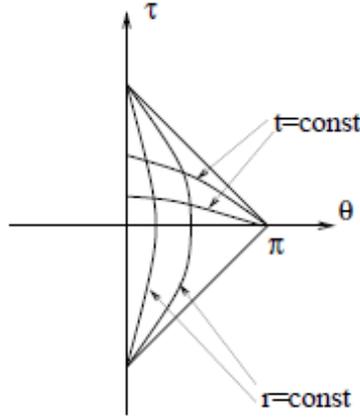


Figura 3.1: Transformación conforme del plano $t - r$ a una región triangular del plano $\tau - \theta$. Figura de [28].

sucesivos $u_{\pm} = t \pm r$, $u_{\pm} = \tan \tilde{u}_{\pm}$ y $\tilde{u}_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \theta)$ llegamos a que:

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \tilde{u}_+ \cos^2 \tilde{u}_-} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2),$$

y después de un reescalo de la métrica –una transformación conforme– podemos escribir:

$$ds'^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2.$$

Tal y como se ve en la figura 3.1, si fijamos las coordenadas de S^{d-1} , el semiplano definido por las coordenadas t, r ⁶ se transforma en una región triangular del plano τ, θ , ya que:

$$\tau = \arctan(t+r) + \arctan(t-r), \quad \theta = \arctan(t+r) - \arctan(t-r).$$

Tenemos todo el derecho del mundo a hacer una continuación analítica y extender el dominio al espacio más grande posible, en este caso a $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\infty < \tau < \infty$, de forma que hemos llegado a la geometría de $\mathbb{R} \times S^d$ –el famoso universo estático de Einstein–⁷. La regla de la cadena nos dice que:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{2} (1 + u_+^2) \frac{\partial}{\partial u_+} + \frac{1}{2} (1 + u_-^2) \frac{\partial}{\partial u_-},$$

lo que se puede ver también como que el generador de las traslaciones temporales H en $\mathbb{R} \times S^d$ es $H = \frac{1}{2} (P_0 + K_0) = J_{0,p+2}$ donde P_0 y K_0 son los generadores del momento y las transformaciones

⁶ $t \in \mathbb{R}, r \in (0, \infty)$

⁷ $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ son el polo norte y sur de la S^d respectivamente.

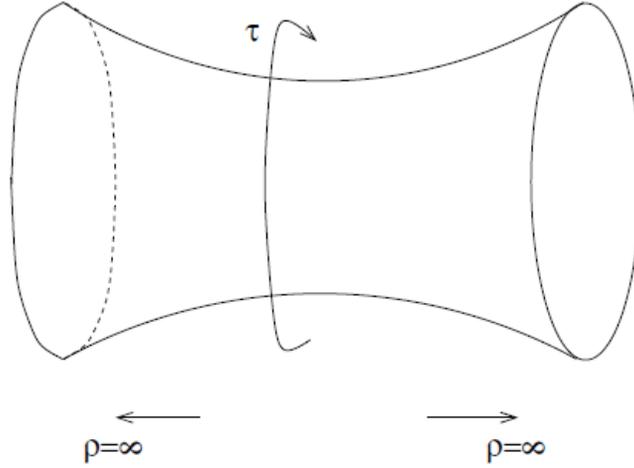


Figura 3.2: AdS_{d+1} como un hiperboloide en $\mathbb{R}^{2,d}$. Figura de [28].

especiales conformes en $\mathbb{R}^{1,d}$. Precisamente esta combinación lineal era la que escribíamos en (1.7) cuando veíamos de qué forma el grupo conforme $Conf(p, q)$ actuaba linealmente⁸ en $\mathbb{R}^{p+1, q+1}$.

3.1.3. Sobre que no hay unas coordenadas perfectas para describir AdS

En esta sección vamos a dar distintas coordenadas para describir el espacio Anti de Sitter que definimos antes. Hacemos especial énfasis en la compactificación del espacio pues es allí donde vamos a «aplicar» la dualidad. Partimos ahora del embebimiento de AdS_{d+1} en $\mathbb{R}^{2,d}$ que nos da la ecuación (3.2). Esta construcción hace explícitas las isometrías de AdS_{d+1} : $SO(2, d)$. Para encontrar unas coordenadas que «resuelvan» (3.2) podemos plantear

$$\begin{aligned} x_0 &= L \cosh \rho \cos \tau, \\ x_1 &= L \cosh \rho \sin \tau, \\ x_i &= L \sinh \rho \Omega_i \quad i = 1, \dots, p+1, \quad \sum_i \Omega_i^2 = 1, \end{aligned}$$

de forma que la métrica nos queda escrita como:

$$ds^2 = L^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega^2), \quad (3.3)$$

donde las coordenadas $\rho \in \mathbb{R}^+, 0 \leq \tau < 2\pi$ cubren el hiperboloide completamente, como se muestra en la figura 3.2, lo que hace que se las llame **coordenadas globales**.

El problema viene cuando tomamos el límite $\rho \rightarrow 0$: es fácil ver que hay curvas cerradas de tipo

⁸En realidad se va a identificar el subgrupo $SO(2) \times SO(d+1)$ de $SO(2, d+1)$ con las isometrías del espacio.

tiempo en la dirección τ porque la solución la topología de $S^1 \times \mathbb{R}^d$. Y, si bien en otro contexto nos pueden interesar las máquinas del tiempo, esto no representa una geometría causal con la que podamos estudiar nuestro universo. Una solución es desenrollar el S^1 y quedarnos con el recubrimiento universal de AdS_{d+1} ⁹. Igual que en el apartado anterior, el subgrupo compacto maximal de las simetrías de AdS_{d+1} será $SO(2) \times SO(d)$: las traslaciones en la dirección τ y las rotaciones de la S^d (que no aparece dibujada en la figura). Si ahora hacemos otro cambio de coordenadas $r = L \sinh \rho$ y $t = L \tau$ llegamos a la expresión de la métrica de AdS que utilizaremos más habitualmente¹⁰ y a la que nos referiremos cuando hablemos de AdS en coordenadas globales:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad f(r) = 1 + \frac{r^2}{L^2}. \quad (3.4)$$

Sin embargo, estas no son las mejores coordenadas para entender la estructura causal de AdS , es mejor hacer un cambio de variables que nos deje algo semejante al *Einstein's static universe*, que sí sabemos como compactificar. Consideramos $\tan \theta = \sinh \rho$ con $0 \leq \theta < \pi/2$. Entonces,

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega^2),$$

que después de una transformación conforme se escribe como:

$$ds'^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega^2.$$

Hemos llegado a la misma expresión que en el caso plano: a la métrica del *Einstein static universe*. Sin embargo, en esta ocasión tenemos que $0 \leq \theta < \pi/2$: ¡solo cubrimos la mitad del espacio! De hecho, en el ecuador ($\theta = \pi/2$) tenemos una frontera que topológicamente es un S^{d-1} . En física tenemos muy claro que tener una frontera significa que vamos a tener que imponer sobre ella unas condiciones de contorno. Esto nos va a suceder con el $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ que tenemos en $\theta = \pi/2$, que resulta ser precisamente la compactificación conforme de un $\mathbb{R}^{1,d-1}$. Este punto va a ser vital al entender la «parte» geométrica de la dualidad holográfica. En general, de cualquier espacio cuya compactificación conforme tenga la pinta de **la mitad** del *Einstein's static universe* se dice que es **asintóticamente Anti de Sitter**.

Por último vamos a introducir las **coordenadas de Poincaré**, que se llaman así porque nos enseñarán que podremos ver AdS como una foliación en la que las láminas son espacios de Minkowski

⁹De hecho, siempre que hablemos de AdS en holografía estaremos en realidad pensando en su recubrimiento universal.

¹⁰Lo que vamos a utilizar de verdad es esta versión después de hacer $z = 1/r$, pues como veremos ahora mismo, la frontera conforme de AdS se encuentra en $r \rightarrow \infty$ y los cálculos son mucho más manejables en $z \rightarrow 0$.

de una dimensión menos¹¹. Para ello, tomamos

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{2u} (1 + u^2 (L^2 + \vec{x}^2 - t^2)), \\x_1 &= L u t \\x^i &= L u x^i \quad (i = 2, \dots, d) \\x^{d+1} &= \frac{1}{2u} (1 - u^2 (L^2 - \vec{x}^2 + t^2)),\end{aligned}$$

donde $u \in \mathbb{R}^+$, de forma que la métrica queda:

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + u^2 (-dt^2 + d\vec{x}^2) \right)$$

Más adelante utilizaremos esta métrica pero con un cambio de variable $z = 1/u$ pues será más útil localizar la frontera en $z = 0$. Además, al radio de AdS lo denotaremos R en lugar de L :

$$ds^2 = \eta_{MN} dx^M dx^N = \left(\frac{R}{z} \right)^2 (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) \quad (3.5)$$

De esta forma se hace natural ver que la frontera conforme está donde el **factor de escala** R/z diverge. Además, con esta elección de coordenadas se hace explícito que el grupo de Poincaré d dimensional es un subgrupo de las isometrías de AdS_{d+1} , al igual que las rotaciones $SO(1, 1)$ que identificaremos con las dilataciones en la teoría del borde al hacer AdS/CFT¹³.

3.2. La dualidad AdS/CFT

La versión «original» de esta dualidad, propuesta por Maldacena en 1997 [6] es supergravedad de tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ ¹⁴ dual a una teoría versión con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías de Yang-Mills 4 dimensional. En la siguiente sección intentaremos explicar esta realización concreta mientras que ahora nos centraremos en motivar por qué, al fijarnos en las cosas adecuadas, podemos «leer» la relación natural entre teorías de gravedad en espacios AdS_{d+1} y CFTs d dimensionales. El contenido de esta está basado en [20], [28] y [29].

¹¹Aunque estas coordenadas solo cubrirán la mitad del hiperboloide.

¹²En la siguiente sección reservaremos los índices griegos para los índices d dimensionales.

¹³Esto no puede sorprendernos pues ya hablamos de las realizaciones lineales de las simetrías conformes y nos indicaban precisamente esto.

¹⁴Vista como el límite a bajas energías de una teoría de cuerdas de tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$.

3.2.1. La correspondencia con palabras

Por lo que hemos estudiado hasta ahora, lo «único» que nos parece bien la ecuación (3.1) es que las simetrías concuerdan: hay un $O(2, d)$ a cada lado del igual. Como las dos teorías que vamos a plantear, una teoría gravitatoria en AdS_{d+1} y una teoría de campos –sin gravedad– en d dimensiones, viven en espacios distintos es muy difícil plantearnos cómo vamos a conseguir encontrar una descripción que las haga equivalentes. El objetivo entonces es, además de encontrar una manera de asignar los observables de un lado a los del otro, proponer una forma en la que comparar las cantidades físicas y las funciones de correlación¹⁵ de ambas teorías.

Llamaremos a los campos/operadores de la CFT **campos del borde** y asumiremos que tenemos un lagrangiano L_{CFT} que describe esta teoría d dimensional¹⁶. Como estudiamos en los capítulos anteriores, una CFT viene completamente determinada por los operadores primarios con sus dimensiones conformes y los coeficientes de la OPE¹⁷. Aunque en realidad, los observables del lado de la teoría de campos serán **operadores compuestos** pues la invariancia gauge te exige que tus observables sean singletes y, salvo para el caso abeliano, esto nos exigirá tomar trazas.

La idea de la dualidad es asociar un campo h de la teoría gravitatoria a un operador de la CFT que tenga sus mismos números cuánticos y cuyo valor en la frontera de AdS sea precisamente el que actúa como fuente para darnos dicho operador de la teoría conforme. Esto, si lo pensamos *à la path integral*, quiere decir que a un operador \mathcal{O} de la CFT le asociamos una fuente h ¹⁸:

$$L_{CFT} + \int d^d x h(x) O(x)$$

Entonces, las funciones de correlación a n puntos del operador \mathcal{O} , utilizando (A.11), vienen dadas por:

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \left. \frac{\delta^n Z[h]}{\delta h(x_1) \dots \delta h(x_n)} \right|_{h=0} \quad (3.6)$$

donde $Z[h]$ es el funcional generador¹⁹. Entonces, la idea de la dualidad AdS/CFT es que la fuente $h(x)$ puede pensarse como el valor en la frontera de un campo $d + 1$ dimensional $\hat{h}(x, x_{d+1})$ que es solución de –las ecuaciones de movimiento de– una teoría gravitatoria descrita por una acción S_{AdS} ²⁰.

¹⁵Que, como motivamos en el apéndice A, representarán amplitudes de probabilidad de un cierto proceso físico en esas teorías.

¹⁶Esto no es necesario, de hecho la dualidad AdS/CFT se utiliza en teorías que no pueden describirse en términos de un lagrangiano.

¹⁷O, dicho de otra manera, una *CFT data* consistente.

¹⁸Por ahora una fuente/campo de fondo respecto al que derivaremos para encontrar las funciones de correlación.

¹⁹Alternativamente lo podíamos haber hecho con la versión conexas de esto, más adelante lo utilizaremos de esa forma.

²⁰Este problema de Cauchy no está del todo bien definido: las ecuaciones de movimiento de un campo escalar son de segundo orden y solo estamos imponiendo una condición de contorno. Esto se arregla imponiendo otra condición sobre el

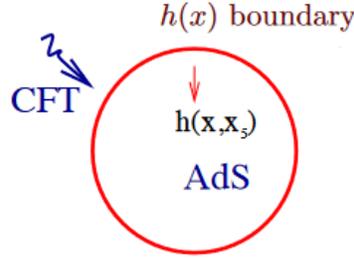


Figura 3.3: Relación entre las fuentes de los operadores de la CFT y los campos en AdS . Figura de [20]

En el lado gravitatorio tendremos una teoría efectiva interactuante cuyo vacío se corresponde con un AdS_{d+1} , descrita por una acción

$$S_{AdS}(g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi, \dots)$$

donde a los campos de los que depende los llamaremos **campos del interior** (*bulk fields*). Hemos incluido campos gauge, la métrica y escalares pero en la mayoría de las aplicaciones de esta dualidad, que suelen tener supersimetría, habrá también fermiones y otras estructuras tensoriales. Al escribir el lagrangiano necesitaremos que el potencial de los campos escalares sea de tal forma que la constante cosmológica sea negativa y así en el vacío tengamos verdaderamente un espacio AdS .

La correspondencia está ofreciéndonos un diccionario $h(x) \iff \hat{h}(x, x_{d+1})$. Es además, puramente cuántica y se puede pensar como una relación entre las funciones de partición, que sabemos contiene toda la información sobre las correspondientes teorías, y se representa como

$$e^{Z[h]} = \left\langle e^{\int h \mathcal{O}} \right\rangle_{QFT} = e^{S_{AdS}(\hat{h})}.$$

Es muy importante insistir en que en el lado de la izquierda tenemos que las configuraciones d dimensionales de los campos están *off-shell* mientras que en el lado de la derecha lo que evaluamos es la acción *on-shell* a la que le hemos impuesto además como condiciones de contorno que \hat{h} se vaya a h en la frontera. Esto se muestra en la figura 3.3.

Al igual que nos pasó en los capítulos anteriores, las cuentas son considerablemente más sencillas en el euclídeo así que haremos una rotación de Wick y trabajaremos allí. Después deberíamos justificar en cada caso cuándo y de qué forma tiene sentido hacer una continuación analítica de nuestros resultados para poder encontrar los resultados para el caso con signatura Lorentz pero no tendremos espacio para horizonte de AdS (escrito en coordenadas globales). Lo discutiremos más adelante. Ni siquiera esto último es cierto del todo: las métricas que hemos escrito en (3.3), (3.5) divergen en la frontera así que en realidad tendremos que imponer ciertas condiciones de regularidad y tunear las funciones un poco para poder explicar exactamente cómo la dinámica del borde se traduce en gravedad –o viceversa–.

poder dedicarnos a esto.

Antes de concretar cómo funciona la dualidad «técnicamente» es interesante pensar un poco en cómo va a ser la asignación de campos y operadores. Está claro que los detalles dependerán de las teorías concretas pero lo que sabemos sobre el grupo conforme y sobre AdS , es decir, que sus simetrías coinciden, nos da ya algunas pistas. En primer lugar, \hat{h} y \mathcal{O} se transformarán en la misma representación bajo $O(2, d)$. El ejemplo sencillo en el que podemos pensar es el las corrientes conservadas: consideremos un campo gauge de fondo A_μ en la teoría de campos :

$$L_{CFT} + \int d^d x \sqrt{g} (g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + A^\mu J_\mu + \phi F_{\mu\nu}^2 + \dots),$$

podemos entonces, fijándonos en los acoplos, hacernos la siguiente cábala: el gravitón irá con el tensor energía momento y el campo gauge de AdS será una corriente en la CFT²¹.

Además, vemos por vez primera uno de los puntos clave de la dualidad: **las simetrías globales en la teoría de campos se corresponden con simetrías gauge de la teoría con gravedad**. La invariancia gauge –aquí en el lenguaje de la *path integral* se verá en el $Z[J]$ – se traduce en ecuaciones de conservación para las corrientes y el TEM. En realidad esto no es absolutamente cierto pero sí lo más común en 4 dimensiones donde los $U(1)$, el electromagnetismo, son libres en el IR. En principio un A_μ campo gauge $d + 1$ dimensional podría acoplarse tanto a una corriente global J_μ en la frontera como tener una parte dinámica (sucede cuando $d = 3$) a_μ . La pregunta inversa: ¿puede existir una simetría global en el lado de la gravedad? es algo en lo que se trabaja ahora mismo y parece que la respuesta es no si queremos tener teorías cuánticas de la gravedad consistentes.

3.2.2. El campo escalar en AdS quiere portarse como un operador conforme en su frontera

Ahora vamos a estudiar el caso más sencillo posible: un campo escalar masivo en AdS , dual a un operador \mathcal{O} de CFT que va a vivir en su frontera. Consideramos la acción del campo escalar libre con la métrica de AdS_{d+1} dada por (3.5):

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{d+1} x \sqrt{-g} (\partial_M \phi \partial^M \phi + m^2 \phi^2), \quad (3.7)$$

²¹Hemos escrito también el término Yang-Mills puro que tienen todas las teorías gauge pues casi todos nuestros ejemplos tendrán que ver con esto y su pariente en cuerdas –la fuente ϕ – será el dilatón.

cuyas ecuaciones de movimiento son

$$\partial_z^2 \phi - \frac{d-1}{z} \partial_z \phi + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - \frac{m^2 R^2}{z^2} \phi = 0. \quad (3.8)$$

La invariancia de Poincaré explícita en estas coordenadas nos deja una ecuación diferencial perfecta para hacer una transformada de Fourier en esas d componentes:

$$\phi(z, k) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_k(z) e^{ikx} \implies \phi_K'' - \frac{d-1}{z} \phi_K' - k^2 \phi_K - \frac{m^2 R^2}{z^2} \phi_k = 0.$$

En lugar de aplicar directamente²² la condición *on-shell*²³ de $M^2 = -k^2$ vamos a empezar por estudiar el modo fundamental $k = 0$ que nos da mucha información muy fácilmente. Se puede resolver utilizando el ansatz $\phi_0(z) = z^\lambda$ y al resolver la ecuación anterior encontramos una relación entre el exponente de la solución y la masa del campo:

$$\lambda_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2} = \frac{d}{2} \pm \nu^{24}. \quad (3.9)$$

La solución general para este modo será de la forma $\phi_0 = a_0 z^{\lambda_-} + b_0 z^{\lambda_+}$, lo que nos aporta información sobre el comportamiento asintótico de todos los demás, como vamos a ver ahora.

La solución general (escribimos dependencia en M para que sean variables reales en lugar de imaginarias) se escribe de forma sencilla utilizando funciones de Bessel:

$$\phi_M = a_M z^{d/2} Y_\nu(Mz) + b_M z^{d/2} J_\nu(Mz). \quad (3.10)$$

Y podemos estudiar su comportamiento asintótico en $z \rightarrow 0$:

$$\phi_M \sim z^{\lambda_+} \left(\frac{2^{-\nu} M^\nu (b_M + a_M \cot(\pi\nu))}{\Gamma(\nu+1)} + O(z) \right) + z^{\lambda_-} \left(-\frac{2^\nu a_M M^{-\nu} \Gamma(\nu)}{\pi} + O(z) \right).$$

Esto hace que sea razonable exigir que cerca de la frontera nuestros campos se comporten como

$$\phi(x, z) \simeq a(x) z^{\lambda_-} + b(x) z^{\lambda_+},$$

lo que ya empieza a tener la pinta que buscamos: estamos consiguiendo «separar» la dependencia de las

²²Aunque esto es lo que hacen en [28]: la ecuación diferencial se resuelve utilizando hipergeométricas y es equivalente a lo que vamos a plantear.

²³Esta M no es la misma m del campo escalar sino la energía de cada modo.

²⁴Aún no lo sabemos pero acabamos de encontrar la primera relación entre cantidades físicas a un lado y otro de la dualidad: la masa y la dimensión conforme.

coordenadas d dimensionales y de la z radial de AdS ¡en un segundo comprobaremos que $a(x), b(x)$ se comportan como operadores primarios de una CFT! A la vista de este *spoiler*, tiene sentido preguntarnos cómo cambian los coeficientes $a(x), b(x)$ cuando hacemos una dilatación²⁵ $z \rightarrow cz, x^\mu \rightarrow cx^\mu$. El campo $d+1$ dimensional ϕ es un escalar así que no puede cambiar bajo ninguna isometría del espacio: $\phi'(x', z') = \phi(x, z)$ y si imponemos esto a primer orden en $z \rightarrow 0$, al aproximarnos a la frontera conforme, llegamos a que

$$a'(cx) = c^{-\lambda_-} a(x), \quad b'(cx) = c^{-\lambda_+} b(x),$$

tal y como hacen dos operadores primarios de dimensión conforme $\Delta_- = \lambda_-$ y $\Delta_+ = \lambda_+$ en una CFT d dimensional.

Hasta ahora no nos hemos preocupado de cómo de buenas eran las soluciones de (3.10) pero ahora que queremos asociar los coeficientes en la frontera (las condiciones de contorno) a operadores conformes²⁶ esta cuestión nos preocupa un poco más. La idea es descubrir cuáles de los modos que hemos ido construyendo pueden utilizarse para construir un espacio de Hilbert y cuáles no. La ecuación para los modos ϕ_M se puede reescribir con la forma de un problema de Sturm-Liouville con

$$p(z) = \frac{R^{d-1}}{z^{d-1}}, \quad q(z) = -\frac{m^2 R^2}{z^{d+1}}, \quad \lambda = M^2 R^2 \text{ y peso } w(z) = \frac{1}{z^{d-1}}$$

Esto significa que nuestros modos ϕ_M eran autofunciones de un operador diferencial y, en particular, que tendremos un producto escalar con un espacio de Hilbert (1-dimensional, en la dirección z):

$$\langle \phi_M, \phi_{M'} \rangle = \int_0^\infty dz w(z) \phi_M^*(z) \phi_M(z).$$

La primera pregunta es si esta integral está bien definida. La respuesta rápida es que no, pero no nos sirve: las funciones que hagan que este producto escalar esté bien definido serán precisamente las que consideremos admisibles. Pero solo estamos interesadas en saber cómo funcionan las cosas en $z \rightarrow 0$ pues en realidad lo que buscamos es definir operadores en la frontera conforme, así que podemos utilizar las expresiones asintóticas para ϕ_M , que no dependen del modo: el integrando va a ir con $z^{\nu+\nu'+1}$ así que si queremos evitar tanto divergencias logarítmicas como potenciales necesitaremos que que $\nu + \nu' + 1 > -1$ y $|\nu| = |\nu'|$.

Cuando $\nu, \nu' > 0$ –las soluciones de tipo z^{λ_+} , las que van con $b(x)$ – tenemos la convergencia asegurada pero si $\nu, \nu' < 0$ –las soluciones de tipo z^{λ_-} , las que van con $a(x)$ –, necesitamos que $|\nu| < 1$,

²⁵La isometría del $SO(1, 1)$ de AdS que identificamos con la inversión en las d dimensiones.

²⁶Seguimos exactamente la idea que presentamos antes: queremos ver las fuentes de los operadores conformes como los valores que toman campos $d+1$ dimensionales en la frontera conforme del espacio.

que se traduce en una condición sobre la masa m del campo escalar: $m^2 R^2 < 1 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$. En particular, esto significa que podemos tener estados con $m^2 < 0$ siempre y cuando se satisfaga la condición anterior: la **cota de Breitenlohner-Freedman** [30] [31]. Esto tiene que ver con que nuestro espacio no es plano, esos estados no son taquiónicos: la contribución a la energía será positiva al final.

Toda esta discusión ha sido para justificar que nos vamos a quedar con las soluciones de la forma

$$\phi_M(z) = b_M z^{d/2} J_\nu(Mz), \quad (3.11)$$

que formarán una base ortonormal respecto al producto escalar que definimos antes. Por último, quedarnos con esta solución significa que podemos escribir explícitamente a partir de (3.9) la relación entre la dimensión conforme del operador dual Δ_+ y la masa del campo escalar de la teoría gravitatoria:

$$m^2 R^2 = \Delta(\Delta - d) \quad (3.12)$$

3.2.3. El cálculo holográfico de la función de correlación a 2 pt de un operador primario escalar

Estamos viendo que la idea de AdS/CFT es partir de una acción efectiva S_{AdS} de una teoría gravitatoria $d + 1$ dimensional para construir una CFT d dimensional dual a ella. Por otra parte, en los capítulos de CFTs hicimos especial énfasis en que para conocer una CFT basta con conocer sus funciones de correlación a dos y tres puntos así que lo que más nos va a interesar es tratar de calcularlas con «técnicas» holográficas.

Esto es especialmente bonito y útil porque vamos a calcular funciones de correlación de CFTs, algo que es intrínsecamente no perturbativo y fuertemente acoplado, haciendo cuentas en una teoría de la gravedad, en el régimen perturbativo. Nosotras vamos a hacer, como siempre, el caso más sencillo de todos, que ya es por sí mismo enormemente instructivo: función a dos puntos de un operador escalar primario.

Para calcular las funciones de correlación utilizaremos (3.6): la idea es que el funcional generador de la CFT se encuentra evaluando la acción *on-shell* del lado gravitatorio con las condiciones de contorno dadas por el campo que actúa como fuente su operador dual de la teoría de campos. Como vamos a hacer tantas derivadas funcionales como campos metamos en la función de correlación, para el caso a dos puntos solo necesitamos llegar hasta términos cuadráticos, así que no nos preocupamos por los términos interactuantes que se pueden (y deben) escribir en casos más complejos.

La ecuación (3.8) la podemos pensar como una ecuación para el propagador: si $j(x)$ es la fuente

del operador \mathcal{O} dual al campo ϕ se tiene que cumplir que

$$\phi(x, z) = \int d^d x' K(x, x'; z) j(x'), \text{ donde } \left(\partial_z^2 - \frac{d-1}{z} \partial_z \phi + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - \frac{m^2 R^2}{z^2} \right) K(x, x'; z) = 0. \quad (3.13)$$

Diremos que $K(x, x'; z)$ es el *bulk-to-boundary propagator*. Todo lo que sabemos sobre la solución general de la eom del campo escalar en AdS nos sirve ahora: el propagador querría comportarse como una delta de Dirac, así como el del campo libre d dimensional, pero va a tener una dependencia de tipo potencia en z (al menos en el límite $z \rightarrow 0$ que es el que nos interesa). Si introducimos el ansatz

$$K(x, x'; z) = z^\lambda f((x - x')^2 + z^2),$$

en (3.13) llegamos a²⁷

$$4z^\lambda (z^2 + x^2) f'' + 4(\lambda + 1) z^\lambda f' + (\lambda(\lambda - d) - m^2 R^2) z^{\lambda-2} f = 0.$$

Y si escogemos que $\lambda = \Delta$, la dimensión conforme del operador \mathcal{O} dual al campo ϕ , nos damos cuenta de que aparece la condición (3.9) de forma que la ecuación en f se simplifica mucho:

$$(z^2 + x^2) f'' + (\Delta + 1) f' = 0.$$

Si denotamos $u^2 = x^2 + z^2$, las únicas soluciones posibles son $f(u)$ constante y $f(u) = u^{-\Delta}$, así que como queremos una solución no trivial, nos quedamos con la segunda:

$$K(x, x'; z) = C_{\Delta, d} \frac{z^\Delta}{((x - x')^2 + z^2)^\Delta}.$$

Entonces, el campo escalar en el interior se podrá calcular a partir de la fuente $j(x)$ del operador \mathcal{O} como:

$$\phi(x, z) = \int d^d x' C_{\Delta, d} \frac{z^\Delta}{((x - x')^2 + z^2)^\Delta} j(x'). \quad (3.14)$$

Para calcular $C_{\Delta, d}$ utilizamos que el valor del campo al acercarnos a la frontera $z \rightarrow 0$ tiene que ser precisamente la fuente $j(x)$ –salvo por una dependencia en z que tiene que ver con la dimensión conforme de \mathcal{O} que calculamos en el apartado anterior– $\phi: \phi(x, z) \sim j(x) z^{d-\Delta}$. Las cuentas en el

²⁷Las derivadas respecto a z se denotan con $'$.

euclídeo son más sencillas así que hacemos una rotación de Wick:

$$\begin{aligned}\phi(x, z) &= \int d^d x' C_{\Delta, d} \frac{z^\Delta}{((x - x')^2 + z^2)^\Delta} j(x') = \\ &= C_{\Delta, d} z^{d-\Delta} \int d^d u \frac{j(x + zu)}{(1 + u^2)^\Delta} \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} C_{\Delta, d} z^{d-\Delta} \left(\int d^d u \frac{j(x)}{(1 + u^2)^\Delta} + \mathcal{O}(z) \right).\end{aligned}$$

De aquí sacamos la forma completa del *bulk-to-boundary propagator*:

$$K(x, x'; z) = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta - d/2)} \frac{z^\Delta}{((x - x')^2 + z^2)^\Delta}. \quad (3.15)$$

Ahora que ya tenemos la forma del campo en el interior asociado a un operador de la teoría conforme solo necesitamos encontrar la acción *on-shell* para imponer la condición de contorno dada por la fuente $j(x)$ y poder calcular las funciones de correlación. Para hacer esto utilizamos el siguiente truco: integramos por partes la acción de (3.7) de forma que al evaluar en las ecuaciones de movimiento lo que nos quede sea un término de frontera:

$$S_{on-shell} \sim \int_{\partial AdS} \sqrt{g} \phi \partial^M \phi + \int \sqrt{g} \phi (-\partial^M \partial_M + m^2) \phi.$$

En nuestro caso,

$$S_{on-shell} \sim \int d^d x \sqrt{g} g^{zz} \phi \partial_z \phi |_{z=\varepsilon}.$$

La frontera conforme de *AdS* se encuentra en $z = 0$ cuando utilizamos las coordenadas de Poincaré (la métrica de (3.5)) pero si intentáramos evaluar la acción *on-shell* allí nos saldrían términos con divergencias. La idea es trabajar explícitamente con un *cut-off* que terminaremos mandando al infinito; en este caso poner un muro en $z = \varepsilon$ en la dirección radial de *AdS* y terminar por hacer explícitamente $\varepsilon \rightarrow 0$.

El resultado final (finito) es [32]

$$S_{on-shell} \propto \int d^d x d^d x' \frac{j(x) j(x')}{|x - x'|^{2\Delta}}. \quad (3.16)$$

Lo que nos dice que, como podíamos esperar, las funciones a un punto se anulan siempre. Pero si miramos la ecuación (3.14) en $z \rightarrow 0$ nos damos cuenta de que $v(x)$, la «parte» de ϕ que va con z^Δ , es precisamente algo proporcional a $j(x)$:

$$K(x, x'; z) \underset{x \neq x', z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^\Delta}{(x - x')^{2\Delta}}, \quad \phi(x, z) \underset{z \rightarrow 0}{\rightarrow} z^\Delta \int d^d x' C_{\Delta, d} \frac{1}{(x - x')^{2\Delta}} j(x').$$

por lo que, como esperábamos para un operador de una CFT: las funciones a un punto son idénticamente nulas. De forma análoga podemos buscar la función a 2pt:

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(x') \rangle = \frac{\delta^2 S_{o-s}}{\delta j(x)\delta j(x')} \Big|_{j=0} = -\frac{\delta \langle \mathcal{O} \rangle(x)}{\delta j(x')} \Big|_{j=0} = (2\Delta - d)R^{d-1} \frac{\delta v(x)}{\delta j(x)} \Big|_{j=0} \propto \frac{1}{(x-x')^{2\Delta}}, \quad (3.17)$$

que coincide con el resultado de (2.1). Estudiando el campo escalar en un sistema gravitatorio *clásico* $d + 1$ dimensional llegamos a un resultado (no perturbativo) de CFTs d dimensionales. Esta será la estrategia de aquí en adelante: resolver los problemas en el lado de la dualidad en que sean más sencillos y utilizarla para explorar cosas que aún no entendemos como funcionan.

3.3. Teoría de cuerdas de tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ vs $\mathcal{N} = 4$ SYM en 4 dimensiones.

En la sección anterior hemos hablado de la dualidad AdS/CFT desde el punto de vista de las simetrías/isometrías. Ahora queremos dar un ejemplo concreto de esto: una teoría de gravedad completa en el UV a la que aplicar todo lo anterior. Lo hizo Maldacena [6] con una teoría de cuerdas de tipo IIB y ahora nosotras pretendemos explicar de forma cualitativa algunas de las ideas más importantes de su razonamiento. Además de todos los avances que se estaban haciendo en teoría de cuerdas, otro punto de partida para el «descubrimiento» de la dualidad AdS/CFT fue el **límite de 't Hooft**: en [33] 't Hooft proponía que una teoría de Yang-Mills con grupo gauge $SU(N)$ se simplificaba mucho en el límite $N \gg 1$, donde se puede organizar la expansión de los diagramas de Feynman por el *genus* de la superficie en que se pueden dibujar. El límite $N \rightarrow \infty$ se corresponde con quedarse tan solo con los diagramas planares y es por eso que la teoría se simplifica tanto. Esto es muy parecido a las expansiones diagramáticas de teoría de cuerdas, donde $g_s \sim 1/N$. De aquí sale la idea de que cualquier teoría gauge con $N \gg 1$ va a poder verse como el límite de una teoría de cuerdas libre.

En el lado de la gravedad tenemos una teoría de cuerdas de tipo IIB en un espacio $AdS_5 \times S^5$ donde el flujo a través de la S^5 de la 5-forma autodual F_5 está cuantizado por $N \in \mathbb{N}$ y los radios de AdS_5 y S^5 vienen dados por

$$R^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2,$$

donde g_s es la constante de acoplamiento de la cuerda. En el lado de la CFT tenemos una teoría de Yang-Mills con grupo gauge $SU(N)$ maximalmente supersimétrica ($\mathcal{N} = 4$, 16 supercargas) en 4 dimensiones, que es conforme, con $g_{YM}^2 = g_s$.

Por cuestiones de extensión, en este trabajo no vamos a poder «hacer» nada de teoría de cuerdas,

supergravedad, supersimetría o siquiera teorías gauge no abelianas, así que todo este capítulo es una introducción rápida a algo que merece la pena exponer en muchísimas páginas. Para ello, nos basamos en [25], [29], [20] y [34].

Empezamos con una teoría de cuerdas de tipo IIB en 10 dimensiones²⁸ que a bajas energías va a ser de forma efectiva supergravedad de tipo IIB cuya acción y contenido de materia vienen completamente fijados por la supersimetría. Los campos bosónicos son la métrica $g_{\mu\nu}$, el dilatón ϕ , un tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$ y tres 0-, 2-, 4- potenciales C_0, C_2, C_4 . La acción se escribe como²⁹

$$S_{IIB} = \frac{1}{(2\pi)^7 (\alpha')^4} \int dx^{10} \sqrt{g} e^{-2\phi} \left(R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\tau}^2 \right) \quad (3.18)$$

$$- \frac{\sqrt{g}}{2} \left((F_\mu)^2 + \frac{\tilde{F}_{\mu\nu\tau}^2}{3!} + \frac{\tilde{F}_{\mu\nu\tau\rho\sigma}^2}{5!} \right) \quad (3.19)$$

$$- \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{10}} C_{\mu_1 \dots \mu_4} H_{\mu_5 \dots \mu_7} F_{\mu_8 \dots \mu_{10}} + \text{fermiones} . \quad (3.20)$$

donde $H_{\mu\nu\tau}$ es la curvatura del $B_{\mu\nu}$, $F_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ las de los potenciales C_p y $\tilde{F}_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = F_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} - B_{\{\mu_1 \mu_2} F_{\mu_3 \dots \mu_{p+1}\}}$. Esta es la acción efectiva de una teoría de cuerdas de tipo IIB a bajas energías, lo que significa que es la acción de ST a dos derivadas y quedándonos solo con los modos sin masa. Nos interesa relacionar los parámetros que aparecen en (3.18) con los que nos hablan de la física de la cuerda: en primer lugar $2\pi\alpha' = 1/M_s^2$ donde M_s es la masa de la cuerda³⁰ y además $g_s = \langle e^\phi \rangle$ donde g_s es la constante de acoplo de la cuerda³¹ que por ahora es arbitraria pues ϕ no tiene término de potencial.

Objetos extensos: branas en teorías de cuerdas con dimensiones extra

La idea de esta dualidad es que vamos a tener un objeto 4 dimensional en el lado de la gravedad en el que vamos a «poner» nuestra teoría de campos: esto son las **branas**, objetos donde podrán y empezar las cuerdas abiertas de nuestra teoría. En las teorías de cuerdas de tipo IIB tenemos unos objetos cargados, las **p-branas**, que son extensos en p-dimensiones espaciales y son fuentes de los C de (3.18), de forma que podemos asignarles una acción

$$S_{\text{p-brana}} = \tau \int dx^{p+1} \sqrt{g} + q \int dx^{p+1} A_{p+1}, \quad (3.21)$$

²⁸En 10 dimensiones hay dos teorías de cuerdas maximalmente supersimétricas: tipo IIB y tipo IIA.

²⁹En realidad la supersimetría exige que C_4 sea autodual así que no se puede dar la teoría mediante una acción. Sin embargo, si a esto le añadimos la ecuación anterior tenemos las ecuaciones de movimiento de SUGRA IIB así que la damos por buena.

³⁰De forma que los modos de la cuerda tendrán masas $m^2 \sim 1/\alpha'$.

³¹Que controla las interacciones, las correcciones cuánticas de la teoría.

donde las integrales son en el *worldvolume* de la brana.

Para pensar el porqué de esta acción podemos acudir al caso 1 dimensional: sabemos que la acción de la partícula libre relativista se puede pensar como $\int ds$: integramos sobre la *worldline* de la partícula –una geodésica–. De forma análoga, cuando los objetos fundamentales son cuerdas se plantea la **acción de Nambu-Goto** como una integral sobre la *worldsheet*, la superficie que describe la cuerda al moverse por el espaciotiempo. El primer término es una generalización de esto para un objeto que se extiende en más dimensiones: la idea es que es un objeto masivo y su relación con la gravedad tendrá que ver con minimizar el volumen que recorre. El segundo tiene que ver con que el objeto está **cargado**: necesitamos acoplarlo a una forma A_{p+1} ³² y la intensidad con la que lo hace viene dada por la carga de la brana q . De la misma forma que en el electromagnetismo clásico, lo que vamos a hacer es «medir» el flujo a través de las direcciones espaciales transversas:

$$\int_{S^{8-p}} *F_{p+2} = N$$

donde N está cuantizado por razones a la condición de cuantización de Dirac en el electromagnetismo.

Buscamos entonces una solución de $S_{IIB} + S_{p-brana}$ que preserve todas las simetrías que necesitamos. Por construcción, no tendremos ningún problema con las isometrías del espacio, y al pedir conservar toda la supersimetría encontraremos una relación entre la carga y la energía de la configuración³³. Estas son las *extremal p-branes*. La métrica de una p-brana de este tipo que se extiende en las primeras $p + 1$ direcciones es

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-1/2}(r)dx_\mu^2 + H^{1/2}(r)d\vec{y}^2 \\ A_{0\dots p} &= H(r) \\ e^\phi &= g_s H(r)^{(3-p)/4} \\ H(r) &= 1 + \frac{cg_s N (\alpha')^{(7-p)/2}}{r^{7-p}}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde c es una constante e y_i son las direcciones transversas a la brana (con r la distancia radial a esta) y la H será función armónica en \mathbb{R}^{9-p} ³⁴. Se puede generalizar esto para que en lugar de tener una brana de carga N en $\vec{y} = 0$ tengamos N branas de carga 1 situadas en \vec{y}_n , esto se llama *multi-center*

³²Si nos sirve el argumento geométrico: no podía ser otra cosa si queremos integrarlo en $p + 1$ dimensiones.

³³Podemos pensar esto como una generalización de lo que pasa con los agujeros negros cargados: para asegurarnos de que no hay singularidades desnudas necesitamos que haya un horizonte de sucesos y eso relaciona los parámetros de masa y carga mediante una desigualdad, los valores para los que se cumpla la igualdad se corresponden con soluciones con aún más simetrías.

³⁴Hemos puesto la brana en el origen, lo que se traduce en una delta en la ecuación diferencial en el punto en que está colocada la brana.

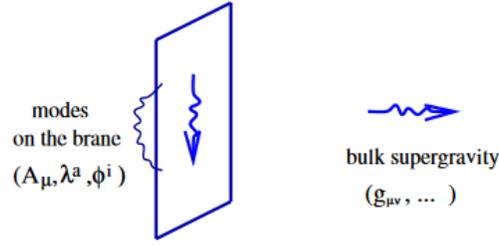


Figura 3.4: Representación cualitativa del sistema brana-gravedad en AdS que estamos estudiando. Figura de [20]

solution. El hecho de que la energía y las cargas de las branas estén relacionadas –por ser la solución extremal– hace que podamos mover nuestro sistema en las $8 - p$ dimensiones con coste cero de energía.

La siguiente pregunta es: ¿cómo son los objetos que pueden vivir en estas branas? Si escribimos la acción de Nambu-Goto para la p -brana situada en $\phi^{p+2}, \dots, \phi^{10}$ y estudiamos las pequeñas oscilaciones alrededor de este punto terminamos llegando a una acción efectiva para los campos gauge que viven en ella, que podemos adivinar gracias a las restricciones que impone la supersimetría que respeta nuestra p -brana como solución. La idea de lo que estamos haciendo se representa en la figura 3.4: tenemos una teoría gravitatoria consistente en una brana colocada en un vacío de AdS y sus excitaciones se comportan como campos gauge sobre ella. Al final del día ϕ y C_0 serán parámetros relacionados con la constante de acoplamiento y el ángulo θ de la teoría de Yang-Mills al otro lado de la dualidad.

Construir una teoría gauge a partir de N D-branas

Con los argumentos que acabamos de dar, la solución de (3.22) se puede interpretar como N branas con carga uno superpuestas en $\vec{y} = 0$ y la teoría de cuerdas nos ha dicho ya que vamos a poder pensar los campos gauge –del supermultiplete que corresponda– sobre ella como el resultado de cuantizar cuerdas abiertas que empiezan/terminan en dicha brana:

- ★ Las cuerdas abiertas que empiezan y acaban en la misma D-brana serán multipletes vectoriales sin masa. Estos llevarán una simetría $U(1)$.
- ★ Las cuerdas abiertas que empiecen en una D-brana distinta a en la que terminen tendrán asociada una masa relacionada con la tensión de la cuerda, ya que ahora su longitud será no nula. De hecho, como la tensión irá con $1/\alpha'$ y las branas las colocamos en $\vec{\phi}_i$ tendremos que $m \sim |\vec{\phi}_1 - \vec{\phi}_2|/\alpha'$

Desde este punto de vista, separar las D-branas es romper una simetría (mecanismo de Higgs) mientras que juntarlas equivale a aumentar la simetría (mecanismo de Higgs inverso) y esto es algo que podemos

hacer solo porque mover las branas tiene coste de energía cero, por ser estas branas extremales (estados BPS). La idea entonces es construir una teoría gauge en las $p + 1$ dimensiones de la brana mediante reducción dimensional desde las $10d$ de la teoría gravitatoria. Lo hacemos con una teoría conocida: la versión no abeliana del electromagnetismo que además tenga el mayor número de supersimetrías posible en las dimensiones en las que estemos (32 ahora que estamos en 10d).

La parte bosónica de la acción solo tiene el término cinético del campo gauge³⁵

$$\int d^{10}x \operatorname{Tr} F^2$$

y la reducción dimensional se hace separando el campo gauge 10 dimensional en otro vector A_μ , $\mu = 0, \dots, p+1$ y $9-p$ escalares $\phi^i = A_i$, $i = p+2, \dots, 10$. La acción de los campos escalares, cuyo espectro queremos estudiar para entender las fluctuaciones de la brana, viene dada por

$$\sum_{i=p+2}^{10} \operatorname{Tr} (\partial_\mu \phi^i + i [A_\mu, \phi^i])^2 + \sum_{i,j=p+2}^{10} \operatorname{Tr} [\phi^i, \phi^j]^2.$$

Esta forma tan sencilla tiene que ver con que hemos cogido un sistema especialmente simétrico. De hecho, la configuración de mínima energía vendrá dada por $[\phi^i, \phi^j] = 0$. Sabemos que los bosones gauge transforman en la adjunta del grupo así que si consideramos una teoría $U(N)$, los ϕ^i serán matrices hermíticas que podremos diagonalizar simultáneamente al ser conmutantes si satisfacen la condición de mínima energía. El vacío cuántico de la teoría vendrá dado entonces por $\phi^i = \operatorname{diag}(\phi_1^i, \dots, \phi_N^i)$: precisamente las posiciones de las N branas, así que tener estos autovalores distintos se puede pensar como una ruptura espontánea de la simetría: $U(N) \rightarrow U(1)^N$. La simetría que queda tiene que ver con las cuerdas que abiertas que comienzan y terminan en cada brana: si pensamos las A_μ^{pq} ³⁶ 10 dimensionales como matrices hermíticas $N \times N$ tendremos que las componentes diagonales se anulan y no tienen término de masa mientras que los términos no diagonales serán de la forma:

$$|A_\mu^{pq}|^2 \sum_{i=p+2}^{10} |\phi_p^i - \phi_q^i|^2,$$

que, como ya habíamos predicho, representan masas proporcionales a la separación entre las branas. Entonces, hemos podido relacionar los estados de las cuerdas con los de una teoría de campos sobre el *worldvolume* de la brana. Ahora vamos a ser más concretas con estas relaciones con el caso que nos

³⁵Donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu]$.

³⁶ μ es un índice espaciotemporal y p, q son índices de la representación adjunta del $U(N)$, que se puede pensar como fundamental x antifundamental.

ocupa: la teoría de campos 4 dimensional.

Mirar de cerca a N D3-branas será una teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo gauge $U(N)$

Escribamos la acción de esta teoría de campos, que es conforme a todos los órdenes en teoría de perturbaciones³⁷:

$$S = \frac{1}{g_{YM}^2} \int dx^4 \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 - i \bar{\psi}^a D \psi_a - (D_\mu \phi^i)^2 + C_i^{ab} \psi_a [\phi^i, \psi_b] + [\phi^i, \phi^j]^2 \right), \quad (3.23)$$

cuyo contenido de materia viene dado por el multiplete vectorial de $\mathcal{N} = 4$: A_μ^a campos gauge, seis campos escalares ϕ^i que parametrizan la posición de la D3-brana en las direcciones transversas y cuatro espinores de Weyl ψ_a ³⁸. La teoría tiene cuatro supercargas Q_α^a y por ello una simetría $SU(4)_R$ que corresponde con rotarlas entre sí. Los fermiones están en la representación $\underline{4}$ y los escalares en la $\underline{6}$. Así, C_i^{ab} son los coeficientes de Clebsch-Gordan de la descomposición $\underline{4} \times \underline{4} \rightarrow \underline{6}$. En el lagrangiano anterior se ve explícitamente tanto la simetría $SU(4)_R$ como la invariancia Lorentz y esto se corresponde precisamente con las simetrías globales de la D3-brana en 10 dimensiones: $SO(1,3) \times SO(6)$. Los parámetros a ambos lados de la dualidad se relacionan como

$$\theta = C_0, \quad g_s = \frac{g_{YM}^2}{4\pi} \quad \text{o} \quad \tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g_{YM}^2} = \frac{C_0}{2\pi} + \frac{i}{g_s}. \quad (3.24)$$

La dualidad original en la forma en que la planteó Maldacena se puede motivar a través del límite $\alpha' \rightarrow 0$ en las dos teorías que hemos expuesto hasta ahora: la teoría de campos en la D3-brana y esta última como sistema gravitatorio que interacciona con campos 10 dimensionales en un vacío de AdS.

Vamos a buscar en primer lugar la teoría de campos. Para ello utilizamos las relaciones entre los parámetros de $U(N)$ y los de la cuerda. La acción del sistema formado por los campos que viven en la brana, ella misma, vista como objeto en un espacio curvo –con gravedad–, y la interacción entre ambos, puede escribirse con una expansión en potencias de $1/\alpha'$ ³⁹:

$$\frac{1}{g_s} \int d^4 x F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{\alpha'^4} \int d^{10} x \sqrt{g} R e^{-2\phi} + \dots$$

Entonces, al hacer $\alpha' \rightarrow 0$ la teoría de la brana se desacopla de la gravedad y encontramos el $\mathcal{N} = 4$ SYM que buscábamos. Cualitativamente esto se puede pensar como que estamos mirando a las branas

³⁷Sus funciones beta son idénticamente nulas.

³⁸En realidad podemos llegar a una expresión más sencilla si escribimos el multiplete vectorial de $\mathcal{N} = 4$ como multipletes de $\mathcal{N} = 1$: tres quirales y uno vectorial.

³⁹Equivalente a la expansión en derivadas superiores de la teoría de gravedad: $\alpha' = l_s^2$ es una constante dimensional así que para que la acción efectiva siga siendo escalar (estamos en dimensión 10) hace falta meter más derivadas.

de tan cerca que solo vemos esas interacciones y no la gravedad. Pero esto hay que hacerlo con un poco de cuidado: $g_s, N, \phi^i = r^i/\alpha'$ se mantienen constantes mientras hacemos $\alpha' \rightarrow 0$.

Por otra parte, si nos centramos ver qué pasa en el límite $\alpha' \rightarrow 0$ en el lado gravitatorio nos encontramos que la métrica de (3.22) –una 3-brana cargada bajo C_{4-} queda de la forma

$$ds^2 \sim \alpha' \left(\frac{R^2}{\alpha'} \frac{(d\phi)^2}{\phi^2} + \frac{\alpha' \phi^2}{R^2} (dx)^2 + \frac{R^2}{\alpha'} \Omega_5 \right), \quad R^2 = \alpha' \sqrt{g_{YM}^2 N},$$

el producto $AdS_5 \times S^5$ donde ambos espacios tienen el mismo radio –el único parámetro dimensional, que podemos gracias a la dualidad escribir en términos de las constantes del lado de campos–. Esto es sorprendente porque la métrica de la brana era asintóticamente plana y tomando un cierto límite físico razonable para nuestra teoría hemos llegado a un espacio curvo. Lo equivalente al mirar a la brana de cerca en el lado de la teoría de campos al hacer $r \rightarrow 0$ es que ahora el 1 del $H(r)$ en la métrica (3.22) es despreciable y la parte asintóticamente plana se desacopla del resto de la métrica. Esto se llama tomar el **near brane/near horizon limit**.

Ahora podemos comprobar que las simetrías a ambos lados de la dualidad son las mismas y, aunque es cierto que se trata de una condición necesaria pero no suficiente, es interesante explicar por fin por qué sí es natural que estos grupos, en principio no relacionados, terminen por ser el mismo. Empezamos por la obvia identificación del grupo conforme 4 dimensional $Conf(1,3)$ con las isometrías de AdS_5 : $O(2,4)$. La supersimetría de ambas teorías hace que en realidad tengamos un $SU(2,2|4)$, en el lado de la gravedad porque paríamos de una teoría de cuerdas con 32 supercargas (maximalmente supersimétrica) y en la teoría de campos a las 16 supercargas del $\mathcal{N} = 4$ SYM hay que añadirle las supersimetrías que se necesitan para que el álgebra superconforme sea cerrada. Por otra parte, la R -symmetry de la teoría de campos tiene que ver con las isometrías de las dimensiones extra respecto a las que nuestras configuraciones de branas son invariantes: $SU(4)_R$ frente a las isometrías de S^5 : $SO(6) = SU(4)$ ⁴⁰.

Por último, un aspecto relevante de la dualidad AdS/CFT es que cuando a un lado tenemos una teoría fuertemente acoplada, en el otro el acoplo es débil y nos sirven las expansiones perturbativas y viceversa. Esto se ve si le echamos un vistazo a los parámetros de las dos teorías: en la gravitatoria tenemos el radio del espacio $R^2 = \alpha' \lambda_{YM}$ donde $\lambda_{YM}^2 = g_{YM}^2 N$ ⁴¹. La descripción efectiva de la teoría de cuerdas a bajas energías, supergravedad, se corresponde con $g_s \rightarrow 0$ y $\alpha'/R^2 \rightarrow 0$ ⁴² que es a su vez el *large N limit* fuertemente acoplado $\lambda_{YM} \rightarrow \infty$ de la teoría de campos.

⁴⁰De hecho, esto nos asegura que la simetría no sea anómala.

⁴¹O equivalentemente $4\pi g_s = \frac{\lambda_{YM}^2}{N}$, $\frac{R^2}{\alpha'} = \lambda_{YM}$ en términos de las constantes de la cuerda.

⁴²Cuando no consideramos loops/ correcciones cuánticas en las expansiones en diagramas de Witten ni términos en derivadas superiores ni modos masivos de la cuerda.

3.4. La aproximación geodésica

Nuestro objetivo en el último capítulo va a ser calcular las funciones de correlación a 2pt de operadores escalares primarios con $\Delta \gg 1$ en una CFT con temperatura y densidad de carga finitas utilizando su dual holográfico: la black brane cargada de la sección 4.3. Al final del día esto se va a reducir a calcular la acción *on-shell* para la propagación del campo desde los dos puntos de la frontera en los que insertamos los operadores. Esto es algo difícil de calcular en general, que se simplifica mucho en el límite $\Delta \gg 1$ porque nos permite aplicar una «versión gravitatoria» de la aproximación WKB, que explicamos en el apéndice B en el caso clásico de la mecánica cuántica y también para calcular una aproximación del propagador de una partícula en el euclídeo, que es una cuenta bastante parecida a la que vamos a explicar ahora: la **aproximación geodésica**.

Estas ideas se aplicaron por ejemplo en [35] [36], donde obtuvieron el propagador de la teoría de campos (de la frontera) a partir de las geodésicas en una solución de supergravedad con agujeros negros. Para calcularlo utilizaron *saddle point approximation*, como vamos a hacer al final de esta sección.

Partimos de una métrica

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left(-f(z)dt^2 + \frac{dz^2}{f(z)} + d\vec{x}_{d-1}^2 \right), \quad (3.25)$$

que nos va a servir tanto para describir un AdS_{d+1} en coordenadas globales cuando $f = 1$ como para estudiar agujeros negros asintóticamente AdS para ciertas $f(r)$.

Estamos interesadas en estudiar campos escalares duales a operadores conformes escalares primarios, que sabemos satisfacen $m^2 R^2 = \Delta(\Delta - d)$. En particular, vamos a trabajar en el límite $\Delta \gg 1$, donde $mR = \Delta^{43}$. Partimos de la acción:

$$S = \frac{1}{2} \int \sqrt{g} (\partial\phi^2 + m^2\phi^2)$$

para un campo escalar libre masivo en una geometría descrita por (3.25). Sus ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$-z^2 f^{-1} \partial_t^2 \phi + z^2 \vec{\partial}^2 \phi + z^{d+1} \partial_z \left(z^{-d+1} f \partial_z \phi \right) - \Delta^2 \phi = 0.$$

Ahora, inspiradas por la aproximación WKB planteamos $\phi = e^F$ –con el objetivo de hacer una expansión de F en potencias de $1/\Delta$ – de forma que la ecuación anterior se convierte en

$$-z^2 f^{-1} (\partial_t^2 F + \partial_t F^2) + z^2 (\vec{\partial}^2 F + \vec{\partial} F^2) + z^{d+1} \partial_z \left(z^{-d+1} f \right) \partial_z F + z^2 f \partial_z^2 F + z^2 f \partial_z F^2 - \Delta^2 = 0$$

⁴³Escribiremos $m = \Delta$ o $mR = \Delta$ de forma indistinta.

Como estamos en el límite $\Delta \gg 1$, podemos escribir $F \sim \Delta F_0 + F_1$ de lo que se derivan las siguientes ecuaciones⁴⁴:

$$\begin{aligned} -z^2 f^{-1} \partial_t F_0^2 + z^2 \vec{\partial} F_0^2 + z^2 f \partial_z F_0^2 &= 1 \\ -f^{-1} \partial_t^2 F_0 - 2f^{-1} \partial_t F_0 \partial_t F_1 + \vec{\partial}^2 F_0 + 2\vec{\partial} F_1 \cdot \vec{\partial} F_0 + z^{d-1} \partial_z \left(z^{1-d} f \right) \partial_z F_0 + f \partial_z^2 F_0 + 2f \partial_z F_1 \partial_z F_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ahora podemos proponer $F_0 = \pm i (p_t t + \vec{p}_x \cdot \vec{x} - H)$ ⁴⁵ como ansatz para F_0 , de forma que la primera ecuación de (3.26) se convierte en

$$z^2 f^{-1} p_t^2 - z^2 \vec{p}_x^2 - z^2 f \partial_z H^2 = 1,$$

que se puede resolver formalmente como

$$H = \int^z dz' \frac{\sqrt{-f(z') + p_t^2 z'^2 - \vec{p}_x^2 f(z') z'^2}}{f(z') z'}. \quad (3.27)$$

La segunda ecuación de (3.26) queda como

$$f^{-1} p_t^2 \mp 2i f^{-1} p_t \partial_t F_1 - \vec{p}_x^2 \pm 2i \vec{p}_x \cdot \vec{\partial} F_1 \mp i z^{d-1} \partial_z \left(z^{-d+1} f \right) \partial_z H \mp i f \partial_z^2 H \mp 2i f \partial_z F_1 \partial_z H = 0$$

al introducir las soluciones anteriores. Análogamente, podemos proponer $F_1 = \pm \frac{i}{2} (p_t t + \vec{p}_x \cdot \vec{x}) + \mathfrak{F}$ de forma que la ecuación anterior se reduce a

$$z^{d-1} \partial_z \left(z^{-d+1} f \right) \partial_z H + f \partial_z^2 H + 2f \partial_z \mathfrak{F} \partial_z H = 0,$$

que se puede integrar para darnos

$$\mathfrak{F} = \log \left(C \frac{z^{\frac{d}{2}}}{\sqrt[4]{(-f(z) + p_t^2 z^2 - \vec{p}_x^2 f(z) z^2)}} \right).$$

Entonces, ya estamos en condiciones de escribir nuestra solución aproximada $\phi \simeq e^{\Delta F_0 + F_1}$:

$$\phi \simeq C_{\pm} \frac{z^{\frac{d}{2}}}{\sqrt[4]{(-f(z) + p_t^2 z^2 - \vec{p}_x^2 f(z) z^2)}} e^{\pm i \Delta (p_t t + \vec{p}_x \cdot \vec{x} - H)} \quad (3.28)$$

donde H viene dado por la ecuación (3.27) y hemos hecho $\Delta \simeq \Delta + 1/2$ para despreciar una contribución

⁴⁴De igualar a cero el orden Δ^0 y Δ^1 respectivamente.

⁴⁵Que ya vemos que tiene pinta de transformada de Legendre así que queremos darle una interpretación más adelante.

en el exponente que venía de F_1 . El objetivo ahora es tunear la ecuación anterior lo suficiente como para que el nombre *aproximación geodésica* tenga sentido. Empezamos por escribir $P_{t,x} = \Delta p_{t,x}$ y $t = \int dz \dot{t}$, de forma que (3.28) se transforma en

$$\phi = C_{\pm} \frac{z^{\frac{d}{2}}}{\left(-\Delta^2 f(z) + P_t^2 z^2 - \vec{P}_x^2 f(z) z^2\right)^{\frac{1}{4}}} e^{\pm i \int^z dz' (P_t \dot{t} + \vec{P}_x \cdot \dot{\vec{x}} - \mathcal{H}(z'))},$$

donde en \mathcal{H} hacemos los mismos cambios de variables:

$$\mathcal{H}(z') = \frac{\sqrt{-\Delta^2 f(z') + P_t^2 z'^2 - \vec{P}_x^2 f(z') z'^2}}{f(z') z'},$$

lo que permite que la constante multiplicativa de (3.28) se pueda reescribir en términos de f y \mathcal{H} :

$$\phi = C_{\pm} \frac{z^{\frac{d-1}{2}}}{\sqrt{f(z)} \sqrt{\mathcal{H}(z)}} e^{\pm i \int^z dz' (P_t \dot{t} + \vec{P}_x \cdot \dot{\vec{x}} - \mathcal{H}(z'))}.$$

Si ahora interpretamos \mathcal{H} como un hamiltoniano reconocemos en el exponente de la ecuación anterior a la acción correspondiente a \mathcal{H} en el formalismo hamiltoniano. En realidad nos interesa más pasar al formalismo lagrangiano, que se lleva mucho mejor con nuestra forma de entender las cosas con la integral de camino, así que hacemos transformadas inversas de Legendre y cambiamos los $P_{x,t}$ que ahora tienen ya rol de momentos canónicos conjugados⁴⁶ por sus correspondientes velocidades hasta encontrar

$$\phi = C_{\pm} z^{\frac{d}{2}} \left(f \dot{t}^2 - f^{-1} - f \dot{\vec{x}}^2 \right)^{\frac{1}{4}} e^{\pm i S}.$$

donde la S es en realidad la acción *on-shell* de una partícula masiva moviéndose en un espaciotiempo dado por la métrica (3.25):

$$S = m \int^z dz' \frac{R}{z'} \sqrt{f(z') \dot{t}^2 - f(z')^{-1} - f(z') \dot{\vec{x}}^2}.$$

O, dicho de otra manera, de una partícula masiva que se mueve a lo largo de una **geodésica** de la geometría dada por la métrica (3.25).

⁴⁶Es decir, el ansatz de $F_0 = \pm i(p_t t + \vec{p}_x \cdot \vec{x} - H)$ era de verdad un lagrangiano.

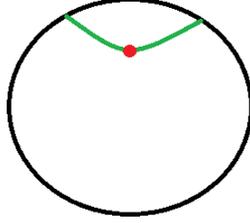


Figura 3.5: Pensamos en el *boundary-to-boundary correlator* como la yuxtaposición de dos geodésicas que se unen en un punto del interior (p_g en la ecuación (3.29)).

3.4.1. Otra nueva-vieja versión de la función a 2pt de operadores escalares primarios utilizando la aproximación geodésica

En esta sección vamos a derivar los resultados que ya vimos en el capítulo 2 de la función de correlación a 2pt para operadores escalares primarios de dimensión conforme Δ en el límite $\Delta \gg 1$. Utilizaremos la aproximación geodésica y dejaremos los cálculos hechos de forma que todo se traduzca fácilmente al caso con temperatura y carga finitas.

La idea es calcular *de nuevo* la función de correlación a 2 pt de un escalar de una CFT d dimensional utilizando la aproximación geodésica a través del diccionario de la dualidad AdS/CFT. Es decir, traducimos este problema a uno escrito en términos de su campo escalar dual en AdS . En principio, la receta que aprendimos en el capítulo anterior consistiría en: plantear la acción de un campo escalar libre masivo en AdS ⁴⁷, resolver sus ecuaciones de movimiento y evaluar en la acción con unas condiciones de contorno para el campo del interior sean tales que, salvo por un factor dependiente de z que escale tal y como sea necesario para mantener las simetrías, nos encontremos a la fuente correspondiente a una inserción del operador \mathcal{O} en la *path integral* de la CFT.

En lugar de hacerlo así, vamos a plantear que el correlador $\langle O(-\vec{x}_1) O(\vec{x}_1) \rangle$ se puede calcular a través del diagrama de Witten (figura 3.5) dado por

$$\langle O(-\vec{x}_1) O(\vec{x}_1) \rangle = \varepsilon^{-2\Delta} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}p_g G(-\vec{x}_1, p_g) G(\vec{x}_1, p_g), \quad (3.29)$$

donde $G(\vec{x}_1, p_g)$ es el *boundary-to-bulk propagator* desde el punto de la frontera \vec{x}_1 en el que hacemos la inserción del operador hasta el punto p_g sobre el que integramos en AdS_{d+1} . Además, hemos añadido un *cut-off* ε sobre la frontera que nos hará falta más adelante.

Aquí llega el punto donde utilizamos la aproximación geodésica: utilizamos $\Delta \gg 1$ para aproximar $G(\vec{x}_1, p_g) \simeq e^{-iS}$ donde S es la acción *on-shell* de una partícula de masa Δ que se propaga desde \vec{x}_1

⁴⁷En principio con $m^2 R^2 = \Delta(\Delta - d)$ pero como vamos a utilizar el límite $\Delta \gg 1$ podemos pensarlo como campo escalar con masa Δ . La razón por la que se trata de un campo escalar porque tiene los mismos números cuánticos bajo $SO(2, d)$ que su correspondiente operador dual.

hasta p_g ⁴⁸. Estar en el límite $\Delta \gg 1$ nos va a permitir calcular

$$\langle O(-\vec{x}_1) O(\vec{x}_1) \rangle = \varepsilon^{-2\Delta} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} p_g e^{-iS_{os}(-\vec{x}_1, p_g)} e^{-iS_{os}(\vec{x}_1, p_g)}, \quad (3.30)$$

utilizando *saddle point approximation*, que va a facilitar mucho las cuentas.

Podemos utilizar la invariancia $SO(d)$ del euclídeo para considerar que la partícula se mueve en la dirección x en AdS_{d+1} de forma que la acción se convierta en

$$S = i\Delta \int dz' \frac{1}{z'} \sqrt{1 + \dot{x}^2},$$

donde los puntos son derivadas en z . Como el lagrangiano no depende explícitamente de x , su momento canónico conjugado ip_x está conservado, de donde sacamos una ecuación de primer orden que se puede resolver fácilmente:

$$\dot{x}(z) = -i \frac{p_x z}{\sqrt{\Delta^2 + p_x^2 z^2}} \quad \text{y} \quad \dot{x}(z) = i \frac{p_x z}{\sqrt{\Delta^2 + p_x^2 z^2}}$$

Cada una de ellas representa la geodésica con velocidad positiva y negativa respectivamente; es decir, la que va o viene del *turning point*. Por otra parte, en estas expresiones se ve que la derivada se hace infinita en el punto dado por $\Delta^2 + p_x^2 z^2 = 0$, que va a definir precisamente el *turning point*, que por razones de simetría se va a encontrar en $(0, z^*)$ si hacemos inserciones simétricas en x_1 .

Si imponemos $x(0) = x_1$ como condición de contorno se trata de un problema con solución única:

$$x = x_1 + i \frac{\Delta}{p_x} - i \sqrt{\frac{\Delta^2}{p_x^2} + z^2}, \quad (3.31)$$

lo que nos permite reescribir tanto el momento p_x como su correspondiente velocidad \dot{x} para encontrar la acción *on-shell*⁴⁹ que buscábamos:

$$p_x = 2i\Delta \frac{(x - x_1)}{(x - x_1)^2 + z^2}, \quad S_{os} = -i\Delta \log \left(\frac{z\varepsilon}{(\vec{x} - \vec{x}_1)^2 + z^2} \right). \quad (3.32)$$

De la misma forma podemos resolver la otra geodésica, escogiendo la derivada con signo positivo e imponiendo como condición de contorno $x(0) = -x_1$, como se muestra en la figura 3.6.

⁴⁸O, visto de otra forma, la longitud de la geodésica que una esos dos puntos multiplicada por la dimensión conforme Δ .

⁴⁹Recuperamos la dependencia en \vec{x} genérica.

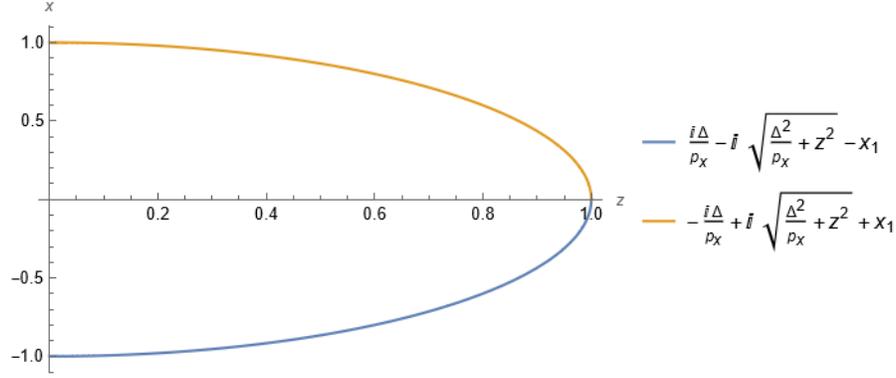


Figura 3.6: Representación de las geodésicas: (3.31) se corresponde con el brazo naranja. Hemos escogido $\Delta = p_x = 1$ para representarlo.

Entonces, el problema de (3.29) se ve reducido a calcular la siguiente integral:

$$\langle O(-\vec{x}_1) O(\vec{x}_1) \rangle = C^2 \varepsilon^{2\Delta} \int_{AdS_{d+1}} e^{\Delta \log\left(\frac{z\varepsilon}{(\vec{x}-\vec{x}_1)^2+z^2}\right) + \Delta \log\left(\frac{z\varepsilon}{(\vec{x}+\vec{x}_1)^2+z^2}\right)}$$

donde $(\vec{x}, z) = p_g$ es el punto sobre el que estamos integrando en AdS . Como el argumento de los logaritmos es siempre más pequeño que uno y estamos utilizando el límite $\Delta \gg 1$ podemos aproximar la integral por el valor de la exponencial en un extremo del exponente. En este caso la simetría del problema nos da ya las coordenadas d dimensionales de este punto, que es aquel en el que S diverge, $\vec{x} = 0$ y el valor de z se encuentra mirando a la acción en (3.32): $z = |\vec{x}_1|$. Entonces, recuperando toda la dependencia d dimensional llegamos a

$$\langle O(\vec{x}) O(\vec{y}) \rangle = \frac{C^2}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2\Delta}}.$$

Hemos obtenido la misma fórmula de (2.1), a la que habíamos llegado con métodos holográficos en (3.17). Es lógico preguntarnos cómo puede ser que recuperemos el resultado exacto⁵⁰ para cualquier Δ si explícitamente hemos utilizado el límite $\Delta \gg 1$. Esto no será así en el caso que estudiamos en el siguiente capítulo, donde poner temperatura finita complica las cosas. En ejemplos concretos como el de $\mathcal{N} = 4$ SYM [38], estos operadores de masa grande (recordemos que cuando $\Delta \gg 1$ se tiene que $\Delta \sim mR$) están protegidos por la supersimetría, no es así en general en $T \neq 0$.

⁵⁰Salvo por el coeficiente, en el que tendríamos que introducir correcciones cuánticas. Viene explicado en el apéndice A de [37].

Capítulo 4

CFT con temperatura y carga finitas

En este capítulo vamos a estudiar CFTs a temperatura y densidad de carga finita utilizando herramientas que hemos ido desarrollando a lo largo de todo el trabajo, con el objetivo de presentar algunos resultados nuevos sobre las funciones de correlación a dos puntos en estas teorías.

Estudiar CFTs temperatura finita es interesante, en primer lugar, porque el mundo real nunca está en el cero absoluto. Esto significa que para poder comparar los datos experimentales con los observables calculados teóricamente en las CFTs –aquí puntos fijos del grupo de renormalización– que representen dichos fenómenos críticos, necesitamos incluir la temperatura. Además, nos interesa estudiar QFTs en variedades distintas a \mathbb{R}^d y $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ es la geometría más sencilla no conformemente relacionada con \mathbb{R}^d que podemos estudiar¹. Además, aunque las CFTs en espacios planos son enormemente interesantes y se continúan estudiando, poner la teoría en una geometría no trivial hace que la estructura de las funciones de correlación sea mucho más rica.

Podemos pensar que poner el sistema a temperatura finita –y después también añadir densidad de carga finita– es «molestarlo»² para ver cómo se comporta en el espacio de teorías. Desde el punto de vista de AdS/CFT esto se entiende muy bien pensando que en lugar de estudiar algo cuyo dual holográfico sea *AdS* vamos a considerar métricas más generales, que aún sigan conservando la invariancia Poincaré d dimensional, como

$$ds^2 = e^{2A(z)} (dz^2 + dx_\mu dx^\mu)$$

y que asintóticamente se comporten como *AdS*³. Entonces tendremos una teoría con un punto crítico que representa un vacío de *AdS* –dual a una cierta CFT– de forma que al expandir los campos alrededor

¹En el apéndice A explicamos que compactificar el tiempo en un círculo de longitud β era equivalente a estudiar la versión a temperatura $T = 1/\beta$ de una teoría.

²Lo podemos pensar como introducir una métrica $g_{\mu\nu}$ de fondo que perturba la teoría.

³Es decir, que su frontera se corresponda con la mitad de un universo estático de Einstein.

de ese vacío podremos encontrar otras soluciones para los campos que se correspondan en el dual holográfico con perturbaciones de la CFT con operadores tales que haya una trayectoria en el grupo de renormalización hasta otro punto fijo –que será otra CFT–. Por el camino habremos roto la invariancia conforme y otras tantas simetrías pero al final llegaremos a otro punto crítico de la teoría gravitatoria, en el que los campos son distintos a los del vacío de AdS.

Como vamos a ver más adelante, el dual holográfico de estas CFTs es un agujero negro cargado. Como ya hemos dicho, un uso sorprendente, a través de la holografía, de las CFTs es la posibilidad de estudiar algunos aspectos de la gravedad cuántica. Hace poco tiempo, Grinberg y Maldacena [37] mostraban que las funciones de correlación a un punto de CFTs a temperatura finita tenían información sobre el interior del agujero negro –el tiempo propio desde la singularidad hasta el horizonte–. En [39] [40], poco después de ser propuesta la dualidad AdS/CFT, ya se planteaban de qué forma iban a traducirse las singularidades de algunas soluciones de relatividad general a la teoría de campos dual. Estas preguntas son muy interesantes y, aunque no lo hacemos en este capítulo, sería interesante estudiar qué modificaciones de nuestro cálculo podrían aspirar a contener información sobre el interior del agujero negro.

El objetivo principal de este capítulo es mostrar unos resultados nuevos sobre la función de correlación a 2pt en CFTs con temperatura y densidad de carga finita calculados utilizando holografía. Para ello, en primer lugar revisamos rápidamente el famoso paper de Witten en que estudia la dualidad AdS/CFT a temperatura finita [7] y algunos resultados muy relevantes sobre CFTs a temperatura finita [8]. En el caso que estamos estudiando el dual gravitatorio ha de ser un agujero negro cargado, cuya métrica explicamos en (4.3). Por último, utilizando la aproximación geodésica y repitiendo los cálculos de la sección (3.4.1), calculamos de forma perturbativa las funciones de correlación a 2pt de escalares en una CFT con temperatura y carga finitas.

4.1. La dualidad AdS/CFT a temperatura finita.

En esta sección vamos a explicar algunos resultados de uno de los artículos más importantes del nacimiento de la dualidad AdS/CFT: *Anti de Sitter Space, Thermal Phase Transition and Confinement in Gauge Theories* [7]. En él, Witten argumenta que fenómenos puramente cuánticos de las teorías de Yang-Mills como la ruptura espontánea de simetría, el confinamiento o el *mass gap* pueden explicarse a través de la geometría de la teoría gravitatoria dual –que además en el régimen de acoplo fuerte de la teoría de campos será clásica–. En particular, muestra que la transición de fase de Hawking-Page para los agujeros negros y la entropía de Bekenstein-Hawking se pueden entender naturalmente desde

la dualidad AdS/CFT. Nos vamos a centrar en explicar las métricas de las dos soluciones posibles a la pregunta ¿qué puedo tener en el dual de una CFT a temperatura finita? y en explicar a que regímenes de temperatura se corresponden en el lado de la CFT sin entrar a discutir cosas concretas de las teorías gauge a temperatura finita o de $\mathcal{N} = 4$ SYM pues no hay espacio para hacerlo en este trabajo y el objetivo es motivar lo que haremos en las secciones siguientes.

En general, vamos a pensar que nuestra teoría está puesta sobre un S^3 o un \mathbb{R}^3 ⁴. Para estudiar la CFT⁵ a temperatura finita lo que hacemos es calcular su función de partición con el tiempo euclídeo compactificado en un círculo. Entonces, el punto de partida en general será una geometría $S^1_\beta \times S^3_{\beta'}$ donde lo único que importará, gracias a la invariancia conforme, es la relación β/β' ⁶. Ahora toca aplicar la receta que nos da la dualidad AdS/CFT: para estudiar una CFT d dimensional sobre una variedad \mathcal{M} tenemos que considerar todas las teorías de gravedad $d + 1$ dimensionales que tengan a \mathcal{M} por frontera. Lo primero que hay que hacer entonces es identificar estas geometrías. Para el caso que estamos estudiando⁷ hay dos opciones y la forma en que se pasa de una a otra es la transición de fase de Hawking-Page [41].

Thermal AdS

Esta geometría, que vamos a denotar con X_1 , se puede ver como el espacio cociente de AdS_d por \mathbb{Z} visto como subgrupo de $SO(1, d + 1)$. Podemos escribir su métrica como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad f(r) = 1 + \frac{r^2}{R^2}, \quad (4.1)$$

donde R es el radio de AdS y $d\Omega_{d-1}^2$ el diferencial de volumen de una S^{d-1} de radio unidad. Esta solución es una variedad de Einstein, ya que las ecuaciones de movimiento de la acción de Einstein-Hilbert para esta métrica son:

$$R_{ij} = -\frac{d}{R^2}g_{ij}.$$

La coordenada t será periódica pero con periodo β_0 arbitrario, a diferencia de lo que pasará en el siguiente caso. Como buscábamos, la frontera de X_1 es $S^1 \times S^{d-1}$ ya que topológicamente es $B^{d-1} \times S^1$ ⁸ después de haber compactificado por un punto al añadir $r = \infty$ para incluir la frontera.

⁴Donde el caso de volumen infinito se encuentra como límite de S^3 .

⁵En realidad una QFT, como ya sabemos.

⁶Lo que vamos a estudiar en las próximas secciones va a ser una teoría en \mathbb{R}^3 a temperatura finita, que es hacer $\beta' \rightarrow 0$.

⁷En general, para $S^{n-1} \times S^1$

⁸Donde B^n es la bola cerrada n dimensional.

Agujero negro asintóticamente AdS

Esta geometría, que vamos a denotar por X_2 , es el resultado de haber puesto un agujero negro de Schwarzschild en un vacío de AdS . Su métrica es:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad f(r) = 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{w_d M}{r^{d-2}}, \quad (4.2)$$

donde

$$w_d = \frac{16\pi G_{d+1}}{(d-1) \text{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})}$$

con G_{d+1} la constante de Newton $d+1$ dimensional. Esta solución tiene una singularidad protegida por un horizonte que se encuentra en la mayor de las soluciones de la ecuación $f(r_H) = 0$, donde se cumple además que hay un cambio de signo en f . Vamos a estar interesadas en el *near horizon limit* de esta métrica. Nos interesa entonces

$$ds^2 \simeq f'(r_H)(r - r_H)d\tau^2 + \frac{1}{f'(r_H)(r - r_H)}dr^2 + r_H^2 d\vec{x}^2.$$

Ahora podemos escribir la parte de las coordenadas τ, r como $d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$, un plano en coordenadas polares, donde

$$\rho^2 = \frac{4(r - r_H)}{f'(r_H)}.$$

Entonces, para que no haya una singularidad cónica en $\rho = 0$ –i.e. en el horizonte– necesitamos que θ sea un ángulo: una variable con periodo 2π . Esto se traduce en una condición $\tau \sim \tau + \beta$ donde

$$\beta = \frac{4\pi}{f'(r_H)}. \quad (4.3)$$

Para la métrica de (4.2) esto se traduce en $\tau \sim \tau + \beta_0$

$$\beta_0 = \frac{4\pi R^2 r_H}{d r_H^2 + (d-2)b^2} \xrightarrow{M \gg 1} \beta_0 \sim \frac{4\pi R^2}{d(w_d R^2)^{1/d} M^{1/d}}.$$

La topología de X_2 es $B^2 \times S^{d-1}$ una vez compactificamos para incluir la frontera en $r = \infty$.

A pesar de que en principio deberíamos considerar ambas geometrías, nosotras estamos interesadas en estudiar $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ como la frontera de (4.1) o (4.2): es decir, queremos ver cómo se comporta el límite $r \rightarrow \infty$ cuando hacemos que β/β' tome unos valores u otros. Los radios de los círculos serán, aproximadamente, para un r fijo:

$$\beta \simeq \frac{r}{R}\beta_0, \quad \beta' \simeq \frac{r}{R},$$

de forma que $\beta/\beta' = \beta_0$. Entonces, para encontrar la geometría que estamos buscando $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ necesitamos hacer $\beta_0 \rightarrow 0$: el límite de temperaturas altas.

En [32] Witten comprobó cuantitativamente que $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo gauge $SU(N)$ a temperatura finita⁹, que al tomar el límite $\beta \rightarrow 0$ del radio de la S^1 se convierte en una teoría de Yang-Mills 3 dimensional «pura»¹⁰, se puede estudiar como el régimen débilmente acoplado de N D3 branas en una teoría de supergravedad sobre una geometría con topología $\mathbb{R}^3 \times S^1$ en el *near horizon limit*.

4.2. CFTs a temperatura finita

En esta sección vamos a resumir algunos resultados de [8] y [42] sobre las funciones de correlación y la OPE en CFTs a temperatura finita. Esto es muy útil porque una forma de comprobar que nuestros resultados con carga y temperatura finita van por el buen camino será recuperar estos comportamientos en los límites adecuados cuando pongamos $Q = 0$.

En la sección (2.1.3) justificamos que las funciones de correlación a un punto –o visto de otra forma los VEV de los correspondientes operadores– podían ser no nulos para operadores que no fueran la identidad, a diferencia de lo que pasa con las CFTs en \mathbb{R}^n . Esto hace, en primer lugar, que tenga más sentido que antes plantearnos aplicar la OPE de forma recursiva hasta sumar solamente sobre funciones a un punto:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle &= \sum_{k_1} C_{12k_1} \langle \mathcal{O}_{k_1} \mathcal{O}_3 \cdots \mathcal{O}_n \rangle \\ &= \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_{n-1}} C_{12k_1} C_{k_1 3k_2} \cdots C_{k_{n-2} n k_{n-1}} \langle \mathcal{O}_{k_{n-1}} \rangle. \end{aligned}$$

Pero la realidad es que esta fórmula solo es válida en general cuando consideramos que la CFT está en \mathbb{R}^d . Cuando estudiamos otra variedad \mathcal{M}^d , aunque sea conformemente plana, tendremos que tener más cuidado con los puntos en los que estamos insertando los operadores. Lo que habíamos aprendido es que el radio de convergencia de la OPE venía dado por la distancia a la que podemos rodear con un círculo (plano) cada par de operadores sin incluir en su interior ninguna otra inserción. Esto siempre es un número cuando $\mathcal{M}^d = \mathbb{R}^d$ pero la geometría puede hacer que sea imposible construir ese círculo, es decir, que el radio de convergencia sea 0. Nosotras estamos interesadas en $\mathcal{M}^d = S^1_\beta \times \mathbb{R}^{d-1}$ donde

⁹Que se hace compactificando el tiempo euclídeo e imponiendo condiciones de contorno antiperiódicas y por tanto rompiendo la supersimetría de forma que los fermiones adquieren masas (y después los escalares porque tienen *loops* de fermiones a primer orden).

¹⁰Es decir, sin más contenido de materia. Esto es porque llevamos la constante de acoplo 4 dimensional de YM a 0 a la vez que $\beta \rightarrow 0$ de forma que g_{YM}^{3d} queda fija: los escalares y los fermiones se desacoplan y nos queda el YM (no supersimétrico y no conforme).

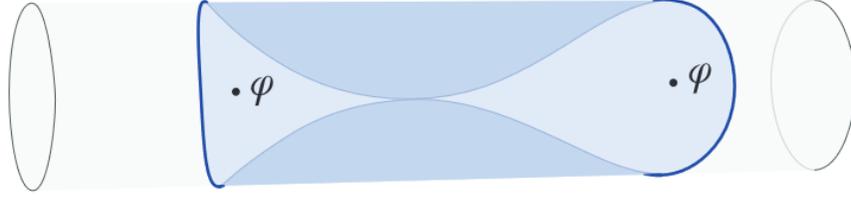


Figura 4.1: Representación de la región de convergencia de la OPE en una CFT a temperatura finita ($S^1 \times \mathbb{R}$ en este caso). Figura de [8].

esta condición se traduce para un operador insertado en el origen y otro en $x = (\tau, \vec{x})$ en que

$$|x| = \sqrt{\tau^2 + \mathbf{x}^2} < \beta,$$

ya que la mayor esfera conformemente plana que podemos construir en esa geometría tendrá diámetro β dando una vuelta completa alrededor de la S^1 , como se muestra en la figura 4.1.

Consideramos en primer lugar el problema de las funciones a un punto. Ahora nuestra teoría tiene naturalmente en su definición una cantidad dimensional que podremos utilizar para *re-escalar* de la forma deseada: la longitud del S^1 . En particular, la invariancia bajo traslaciones obliga a que los operadores descendientes no puedan tener VEV no nulo, ya que

$$\langle P^\mu \mathcal{O}(x) \rangle = \partial^\mu \langle \mathcal{O}(x) \rangle = \partial^\mu \langle \mathcal{O}(0) \rangle = 0.$$

Sin embargo, no sucede lo mismo con los primarios. Podemos pensar que ahora tenemos un factor $\beta^{-\Delta}$ que puede arreglar la transformación del campo bajo dilataciones. Es decir, para un escalar tendríamos que $\langle \mathcal{O} \rangle \propto T^\Delta$. Por cuestiones de simetría se argumenta que solo los tensores simétricos sin traza (STT) con espín par pueden tener funciones a un punto no nulas. Lo que necesitamos es que la representación de $SO(d)$, que es claramente un subgrupo del grupo conforme de $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$, contenga al singlete. En ese caso,

$$\langle \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x) \rangle_\beta = \frac{b_{\mathcal{O}}}{\beta^\Delta} (e^{\mu_1} \dots e^{\mu_l} - \text{trazas}). \quad (4.4)$$

Estos coeficientes $b_{\mathcal{O}}$ van a formar parte de la *CFT data*. Para entender hasta qué punto cambiar la geometría cambia la estructura de las funciones de correlación de una CFT vamos a mostrar la forma de la función a 2 puntos de un operador cualquiera ϕ ¹¹:

$$g(\tau, \mathbf{x}) = \langle \phi(x) \phi(0) \rangle_\beta. \quad (4.5)$$

¹¹Recordemos que en el caso plano esta estaba completamente fijada por la invariancia conforme y era no nula solo para operadores idénticos. Esto no tiene por qué ser así en una geometría no trivial pero escogemos este caso por sencillez.

Si $|x| < \beta$ podemos utilizar la OPE para escribir:

$$g(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{\mathcal{O} \in \phi \times \phi} \frac{f_{\phi\phi\mathcal{O}}}{c_{\mathcal{O}}} |x|^{\Delta - 2\Delta_{\phi} - J_{\mu_1 \dots \mu_J}} \langle \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_J}(0) \rangle_{\beta} \quad (4.6)$$

Además, las funciones de correlación a 2 puntos en general para campos con espín arbitrario se escribirán como nos permite la simetría:

$$\langle \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_J}(x) \mathcal{O}_{\nu_1 \dots \nu_J}(0) \rangle = c_{\mathcal{O}} \frac{I_{\nu_1}^{(\mu_1} \dots I_{\nu_J)}^{\mu_J)} - \text{trazas}}{x^{2\Delta_{\mathcal{O}}}}, \quad I_{\nu}^{\mu}(x) = \delta_{\nu}^{\mu} - \frac{2x_{\nu}x^{\mu}}{x^2} \quad (4.7)$$

Donde $C_{\mathcal{O}}$ es el coeficiente de la función a dos puntos de \mathcal{O} y $f_{\phi\phi\mathcal{O}}$ el de la función a tres puntos:

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_J}(x_3) \rangle = f_{\phi\phi} \frac{Z^{\mu_1} \dots Z^{\mu_J} - \text{trazas}}{x_{12}^{2\Delta_{\phi} - \Delta_{\mathcal{O}}} x_{23}^{\Delta_{\mathcal{O}}} x_{13}^{\Delta_{\mathcal{O}}}}, \quad Z^{\mu} = \frac{x_{13}^{\mu}}{x_{13}^2} - \frac{x_{23}^{\mu}}{x_{23}^2}. \quad (4.8)$$

Al introducir (4.4) en (4.6) obtenemos los polinomios de Gegenbauer, que vamos a pensar como los *conformal blocks* a temperatura finita:

$$|x|^{-J} (x_{\mu_1} \dots x_{\mu_J}) (e^{\mu_1} \dots e^{\mu_J} - \text{traces}) = \frac{J!}{2^J (\nu)_J} C_J^{(\nu)}(\eta), \quad (4.9)$$

donde $\nu = \frac{d-2}{2}$, $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ y $\eta = \frac{\tau}{|x|}$. Utilizando todo esto podemos escribir de forma cerrada la función a dos puntos de dos operadores idénticos:

$$g(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{\mathcal{O} \in \phi \times \phi} \frac{a_{\mathcal{O}}}{\beta^{\Delta}} C_J^{(\nu)}(\eta) |x|^{\Delta - 2\Delta_{\phi}}, \quad a_{\mathcal{O}} = \frac{\int_{\phi\phi\mathcal{O}} b_{\mathcal{O}}}{c_{\mathcal{O}}} \frac{J!}{2^J (\nu)_J}. \quad (4.10)$$

4.3. El lado gravitatorio del asunto

La teoría de gravedad en esta versión de la dualidad que estamos estudiando va a consistir en una generalización del agujero negro de Reissner–Nordstrom adecuada para el contexto en el que estamos trabajando. Se trata entonces de una teoría efectiva: supergravedad en 5 dimensiones con una simetría gauge que entendemos como un pariente del electromagnetismo para esta teoría supersimétrica. En esta sección resumimos los aspectos más importantes de esta solución para nuestros cálculos posteriores basándonos en [43] pero sin entrar a discutir nada sobre la estabilidad de esta solución.

La parte bosónica de la acción de esta teoría viene dada por [44]:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa^2} R + g^2 \mathcal{V} - \frac{1}{4} G_{ij} F_{\mu\nu}^i F^{\nu\omega j} - \frac{1}{2} G_{ij} \partial_{\mu} X^i \partial^{\mu} X^j + \frac{1}{\sqrt{-g} 48} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda} \varepsilon_{ijk} F_{\mu\nu}^i F_{\rho\sigma}^j A_{\lambda}^k. \quad (4.11)$$

Donde los índices $\mu, \nu, \dots = 0, \dots, 4$ y la métrica tiene signatura $diag(-1, 1, \dots, 1)$. R es el escalar de Ricci, $F_{\mu\nu}^i$ son los tensores del campo electromagnético y hay tres campos escalares X^i reales que satisfacen $\prod_{i=1}^3 X^i = 1$. El potencial al que estos se ven sometidos es

$$\mathcal{V} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{X^i}$$

Un ansatz para la métrica es

$$ds^2 = -(H_1 H_2 H_3)^{-2/3} f dt^2 + (H_1 H_2 H_3)^{1/3} (f^{-1} dr^2 + r^2 dx_\mu dx^\mu), \quad (4.12)$$

donde

$$f = -\frac{M}{r^2} + g^2 r^2 H_1 H_2 H_3, \quad H_i = 1 + \frac{q_i}{r^2}, \quad i = (1, 2, 3). \quad (4.13)$$

El radio de AdS_5 ($R = 1/g$) y la constante cosmológica están relacionadas por: $\Lambda = -6g^2 = \frac{-6}{R^2}$. De aquí en adelante fijamos $R = 1$ y lo recuperamos por análisis dimensional cuando sea necesario. El contenido de materia bosónica son los campos escalares y los campos gauge A_μ^i , de la forma:

$$X^i = H_i^{-1} (H_1 H_2 H_3)^{1/3}, \quad A_t^i = \frac{\tilde{q}_i}{r^2 + q_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Donde se fija la constante de Newton 5 dimensional $G_5 = \frac{\pi}{4}$ para que la parametrización de las cargas físicas, no las q_i que entran en la métrica sino las «medibles» Q_i al calcular el flujo

$$Q_i = \frac{\Omega_D - 2(D-3)}{16\pi G_n} \tilde{q}_i$$

queden simplificadas en $d = 5$. Esto será importante en un momento pues queremos relacionar los parámetros de la métrica con las cantidades físicas que caracterizan esta solución.

Algunos de los cálculos que vamos a presentar después están hechos para el caso general $q_1 \neq q_2 \neq q_3 \neq 0$ pero hay otros para los que escogemos versiones simplificadas (menos generales).

De aquí en adelante llamaremos a esta métrica de forma indistinta agujero negro o brana negra pero es importante tener en cuenta que el horizonte de esta geometría es plano: en 4 dimensiones solamente podíamos tener soluciones puntuales (con horizontes esféricos) pero en 5 dimensiones tenemos estos objetos cuyo horizonte es un R^3 . En realidad se puede escribir una solución como la de (4.12) pero donde el $dx^\mu dx_\mu$ sea la métrica de una S^3 modificando la función $f(r)$. No es el caso en el que vamos a estar interesadas.

4.3.1. El caso isótopo

Nos centramos en el caso isótopo: $q_1 = q_2 = q_3 = q$. Al imponer esta condición en la métrica (4.12) queda con una forma mucho más simplificada, perfecta para hacer el cambio de variables $\tilde{r}^2 = r^2 + q$

$$ds^2 = \tilde{r}^2 (-f dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 f}, \quad f = 1 - \frac{M}{\tilde{r}^4} + \frac{Q}{\tilde{r}^6}, \quad (4.14)$$

donde hemos hecho también un cambio en los parámetros: $M = \mu$, $Q = \mu q$ y $d\vec{x}^2$ representa la métrica plana en las $d - 2$ coordenadas restantes. Con esta métrica es mucho más fácil aceptar que esto es un agujero negro asintóticamente AdS: tenemos una función $f(r)$ ¹² con ceros que va multiplicando a la coordenada temporal y dividiendo a la radial y un factor r^2 que multiplica/divide a los sumandos dando cuenta de que el espacio tiene curvatura no nula. Además, la métrica tendrá horizontes en aquellos puntos en los que $f(r)$ se anule. Si llamamos r_H al mayor de estos valores sabemos que se cumple

$$M = r_H^4 + \frac{Q}{r_H^2}.$$

La forma de esta métrica es como la de (4.2) si en lugar de escribir $f(r)$ escribimos $\tilde{f}(r) = r^2 f(r)$ así que podemos utilizar directamente (4.3) para deducir

$$\beta = \frac{4\pi}{r_H^2 f'(r_H)} = \frac{2\pi r_H^6}{2Mr_H^2 - 3Q},$$

si ahora introducimos el valor del horizonte en función de M, Q llegamos a la siguiente expresión de la temperatura:

$$T = \frac{M^{4/3} \left(\sqrt{81Q^2 - 12M^3} - 9Q \right)^{2/3} \left(2^{1/3} \left(\sqrt{81Q^2 - 12M^3} - 9Q \right)^{2/3} + 3^{4/3} M \right) - 54Q \left(\sqrt{81Q^2 - 12M^3} - 9Q \right)}{\pi \left(2^{1/3} \left(\sqrt{81Q^2 - 12M^3} - 9Q \right)^{2/3} + 3^{1/3} M \right)^3},$$

que nos puede resultar un poco rara porque las Q, M no tienen las mismas unidades que en (4.13).

4.3.2. $q_1 \neq 0, q_2 = q_3 = 0$

Igualmente, podemos plantearnos cuál es la temperatura cuando solo una de las tres cargas es no nula. Esta va a ser la solución que utilizemos en el último apartado. La métrica (4.12) se puede

¹²Renombramos $\tilde{r} = r$.

reescribir como

$$ds^2 = g(r) \left(r^2 \left(d\vec{x}^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 \right) - \frac{f(r)}{h(r)} dt^2 \right), \quad (4.15)$$

donde

$$f(r) = -\mu + q_1 r^2 + r^4, \quad h(r) = q_1 + r^2, \quad g(r) = \left(1 + \frac{q_1}{r^2} \right)^{1/3}$$

Esta métrica tiene un horizonte en la solución mayor de la ecuación $f(r) = 0$:

$$r_H^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4\mu + q_1^2} - q_1 \right)$$

y podemos razonar de la misma forma que antes para encontrar la temperatura del agujero negro; escribimos el *near horizon limit* de la ecuación (4.15)

$$ds^2 \simeq g(r_H) \left(r_H^2 \left(d\vec{x}^2 + \frac{1}{f'(r_H)(r - r_H)} dr^2 \right) - \frac{f'(r_H)(r - r_H)}{h(r_H)} dt^2 \right).$$

Ahora estamos interesadas, después de hacer una rotación de Wick $\tau = it$, en que las coordenadas τ, r describan un plano $d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$:

$$\rho^2 = \frac{4(r - r_H)g(r_H)r_H^2}{f'(r_H)}$$

Para evitar que haya una singularidad cónica en $\rho = 0$ (en el horizonte, $r = r_H$) tenemos que imponer una periodicidad $\tau \sim \tau + \beta$ donde

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{2\pi \sqrt{q_1 + r_H^2}}{q_1 + 2r_H^2} = \pi \sqrt{2 \frac{\sqrt{4\mu + q_1^2} + q_1}{4\mu + q_1^2}}. \quad (4.16)$$

4.4. Temperatura y densidad de carga finitas

En esta sección calculamos la función de correlación a 2 puntos de operadores escalares primarios con $\Delta \gg 1$ en una CFT 4d a temperatura y densidad de carga finitas utilizando holografía. Su dual gravitatorio es un agujero negro cargado asintóticamente *AdS* como el que hemos presentado en (4.3). La idea entonces es repetir los cálculos que hemos hecho para el caso del vacío de *AdS* (sección (3.4.1)) con la métrica de (4.12)¹³. En este caso las ecuaciones no se podrán resolver analíticamente así que plantaremos una expansión perturbativa en la masa y la carga del agujero negro¹⁴

¹³Trabajamos con el cambio de coordenadas $z = 1/r$ para que la frontera esté en $z \rightarrow 0$.

¹⁴En realidad no son directamente la masa y la carga sino las constantes que entran directamente en la métrica (4.12).

Empezamos con la métrica de la *black brane* cargada:

$$ds^2 = -\frac{f(z)}{h(z)^{2/3}}dt^2 + \frac{h(z)^{1/3}}{z^2}d\vec{x}^2 + \frac{h(z)^{1/3}}{z^4 f(z)}dz^2, \quad (4.17)$$

donde $h(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$ y $f(z)$ son las funciones de (4.13). En este caso no tenemos tanta simetría como en el *AdS* «puro» pero podemos utilizar la invariancia $SO(d-1)$ de la métrica para considerar que la partícula describe una trayectoria parametrizada por $t = t(z), x_1 = x = x(z)$ y $x_i = 0 \forall i \neq 1$. Entonces, la acción que vamos a considerar es la de la partícula libre:

$$S = i\Delta \int dz \frac{h(z)^{1/6} \sqrt{f(z)}}{z} \sqrt{\frac{1}{z^2 f(z)^2} - \frac{z^2}{h(z)} \dot{t}(z)^2 + \dot{x}(z)^2}. \quad (4.18)$$

Como el lagrangiano no tiene dependencia explícita en x ni en t , sus momentos canónicos conjugados $P_{x,t}$ estarán conservados. Si hacemos $P_{x,t} = \Delta p_{x,t}$ podemos despejar el sistema de ecuaciones y encontrar las ecuaciones de movimiento como ecuaciones de primer orden para x, t ¹⁵:

$$\begin{aligned} \dot{t}(z) &= \frac{ip_t h(z)}{z^2 f(z) \sqrt{f(z) (h(z)^{1/3} + p_x^2 z^2) - p_t^2 h(z)}}, \\ \dot{x}(z) &= \frac{ip_x}{\sqrt{f(z) (h(z)^{1/3} + p_x^2 z^2) - p_t^2 h(z)}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si ahora introducimos esto en (4.18) encontramos la acción *on-shell*, que será lo que precisamente necesitaremos para calcular el correlador:

$$S_{os} = i\Delta \int dz \frac{h(z)^{1/3}}{z^2 \sqrt{f(z) (h(z)^{1/3} + p_x^2 z^2) - p_t^2 h(z)}}. \quad (4.20)$$

Utilizando los mismos argumentos que en la sección (3.4.1), la contribución relevante de la integral (3.30) vendrá dada en el límite $\Delta \gg 1$ por el punto en que S_{os} diverja, en la solución de:

$$f(z^*) \left(h(z^*)^{1/3} + p_x^2 (z^*)^2 \right) - p_t^2 h(z^*) = 0. \quad (4.21)$$

Si miramos a las ecuaciones (4.19) nos damos cuenta de que este punto z^* se corresponde con los puntos en que las velocidades correspondientes a t, x divergen: precisamente el punto del interior en el que se unen las dos geodésicas que parten de la frontera. Como estas trayectorias tendrán que ser continuas, diferenciables etc. será una geodésica en forma de U y en el punto en el que se cambia la

¹⁵Que en este caso no se resuelven tan fácilmente como en (3.31)

trayectoria estas derivadas se harán infinitas. Cualitativamente podemos imaginarnos que la solución (proyectada a los planos (x, z) y (t, z) por separado) va a ser como la que pintamos en la figura 3.6. El valor de z^* cambia por haber introducido un agujero negro cargado: dependerá de una forma no trivial de su masa y su carga.

En el caso con temperatura y carga finitas, las ecuaciones (4.19) no pueden resolverse de forma analítica por lo que nos planteamos trabajar de forma perturbativa. Para ello haremos

$$M = \delta^2 \mu, \quad q_i = \delta \rho_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.22)$$

y estudiaremos el límite $\delta \rightarrow 0$. Si nos fijamos en la métrica (4.17) nos damos cuenta de que eso es considerar un agujero negro con «carga» y «masa» pequeñas o, equivalentemente, a considerar geodésicas que no penetran mucho en el interior de la geometría (se quedan muy cerca de $z \sim 0$).

La razón por la que escogemos precisamente esta forma de reescalar los parámetros de la métrica es la ecuación (4.16). En general, cuando tenemos tres cargas distintas la posición del horizonte viene descrita por un polinomio de grado seis cuyas raíces no podemos obtener pero se cumple que en la expresión de la temperatura aparecen términos de la forma $a\mu + bq_i^2$. Esto nos hace pensar que (4.22) sirve para estudiar un régimen en que la temperatura del agujero negro es pequeña, donde además μ y q intervienen «en las mismas condiciones». En general, sería interesante plantear distintos límites (especialmente los que no involucren $T \rightarrow 0$ pero que sean controlables) para ver si recuperamos el resto de soluciones.

4.4.1. Dependencia temporal

Incluso considerando el límite anterior las ecuaciones de (4.19) son difíciles de resolver computacionalmente así que en primer lugar vamos a restringirnos al caso en que x es constante. Entonces, $p_x = 0$ y solo tenemos una ecuación de movimiento:

$$\dot{t}(z) = \frac{ip_t h(z)}{z^2 f(z) \sqrt{f(z) h(z)^{1/3} - p_t^2 h(z)}}. \quad (4.23)$$

Queremos calcular $\langle \mathcal{O}(-t_1), \mathcal{O}(t_1) \rangle$ donde hemos escogido insertar los operadores en $(-t_1, 0, 0, 0)$ y $(t_1, 0, 0, 0)$ para explotar al máximo la simetría $SO(2)$ de la teoría y $x = 0$ ¹⁶. Esto se traduce en unas condiciones de contorno simétricas en el dual holográfico, lo que hace que las coordenadas 4 dimensionales del *turning point* sean nulas. Entonces, lo que necesitamos hacer es calcular el z^* solución

¹⁶ x es constante así que podemos fijarlo donde queramos.

de (4.21) y p_t en función de t_1 para poder encontrar una expresión de la función de correlación que solo dependa de los parámetros físicos (μ, ρ_i y la dimensión conforme del operador Δ) y los puntos en los que hemos insertado el operador. La idea es plantear una expansión perturbativa en δ

$$\begin{aligned} p_t &= a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 + a_4\delta^4 + \mathcal{O}(\delta^5), \\ z^* &= c_0 + c_1\delta + c_2\delta^2 + c_3\delta^3 + c_4\delta^4 + \mathcal{O}(\delta^5). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Al introducir esto en (4.21) encontraremos cuatro ecuaciones que vienen de igualar a cero orden a orden en δ . Igualmente, podemos resolver la ecuación diferencial (4.23) imponiendo $t(0) = t_1$ como condición de contorno –es decir, en la geodésica de la derecha– y al evaluar en z^* ya hemos argumentado por razones de simetría que $t(z^*) = 0$. Así encontraremos ocho ecuaciones con las que despejar los ocho coeficientes que tenemos. Mostramos solo el resultado final porque los cálculos son muy largos:

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{16\delta^4\tau^7}{18225} \left(891\mu^2 + 432\mu \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) + 16 \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right)^2 \right) \\ &\quad - \frac{8\delta^3\tau^5}{2835} \left(135\mu \sum_{i=1}^3 \rho_i + 4(2\rho_1 - \rho_2 - \rho_3)(\rho_1 - 2\rho_2 + \rho_3)(\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_3) \right) \\ &\quad + \frac{4}{135} \delta^2\tau^3 \left(27\mu + 2 \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) \right) - \frac{1}{\tau}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

y

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{\delta^4\tau^9}{3265920} (970704\mu^2 + 216\mu(2153 \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - 2089 \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j) + 15545\rho_1^4 + \\ &\quad + 17564\rho_1^3(\rho_2 + \rho_3) + 6\rho_1^2(28729\rho_2^2 + 12438\rho_2\rho_3 + 28729\rho_3^2) + 4\rho_1(\rho_2 + \rho_3)(4391\rho_2^2 + 14266\rho_2\rho_3 + 4391\rho_3^2) + \\ &\quad + 15545\rho_2^4 + 17564\rho_2^3\rho_3 + 172374\rho_2^2\rho_3^2 + 17564\rho_2\rho_3^3 + 15545\rho_3^4) + \\ &\quad \frac{\delta^3\tau^7}{45360} (-2916\mu \sum_{i=1}^3 \rho_i + 145\rho_1^3 + 2271\rho_1^2(\rho_2 + \rho_3) \\ &\quad + 3\rho_1(757\rho_2^2 + 38\rho_2\rho_3 + 757\rho_3^2) + (\rho_2 + \rho_3)(145\rho_2^2 + 2126\rho_2\rho_3 + 145\rho_3^2)) + \\ &\quad + \frac{\delta^2\tau^5(324\mu + 49\rho_1^2 + 86\rho_1(\rho_2 + \rho_3) + 49\rho_2^2 + 86\rho_2\rho_3 + 49\rho_3^2)}{1080} + \frac{1}{6}\delta\tau^3 \sum_{i=1}^3 \rho_i + \tau, \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde hemos introducido el tiempo euclídeo $\tau = it_1$. Por simetría está claro que la contribución de ambas geodésicas va a ser igual por lo que la función de correlación va a ser $\langle \mathcal{O}(-\tau), \mathcal{O}(\tau) \rangle = e^{iF}$

donde $F = 2S_{os}$ lo vamos a calcular también perturbativamente en δ . El resultado final es:

$$\begin{aligned}
F = & 2\Delta \log(\tau) - \frac{2\Delta\tau^4}{135} \left(27\mu + 2 \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) \right) \delta^2 + \\
& + \frac{8\Delta\tau^6}{8505} \left(135\mu \sum_{i=1}^3 \rho_i + 4 \left(2 \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{3}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i^2 \rho_j + 12\rho_1 \rho_2 \rho_3 \right) \right) \delta^3 + \\
& - \frac{4\Delta\tau^8}{18225} \left(891\mu^2 + 432\mu \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) + 16 \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right)^2 \right) \delta^4 + \mathcal{O}(\delta^5)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Podemos comprobar que si fijamos $\rho_i = 0$ y/o $\mu = 0$ recuperamos además los resultados perturbativos para el caso con temperatura finita y el caso *AdS* puro respectivamente. Por ejemplo, para el caso de temperatura finita pero sin densidad de carga podemos ver que

$$F = -2\Delta \log(\tau) + \frac{2}{5}\delta^2 \Delta \mu \tau^4 + \frac{84}{25}\delta^4 \Delta \mu^2 \tau^8 + \mathcal{O}(\delta^5). \tag{4.28}$$

Si ahora utilizáramos que en el caso $q_i = 0$ la temperatura se relaciona fácilmente con las constantes de la métrica: $M^4 = \frac{\beta}{\pi}$ llegaríamos a la ecuación 3.22¹⁷ de [45]. Igualmente, si hiciéramos $T = 0$ encontraríamos el resultado que ya hemos derivado un montón de veces: $F = -2i\Delta \log(\tau)$ o, dicho de otra forma, $\langle \mathcal{O}(-\tau), \mathcal{O}(\tau) \rangle = |2\tau|^{-2\Delta}$.

4.4.2. Dependencia espacial

De forma análoga podemos estudiar el caso en que t es constante (y entonces $p_t = 0$), donde solo tenemos una ecuación diferencial de primer grado para x :

$$\dot{x}(z) = \frac{ip_x}{\sqrt{f(z) (h(z)^{1/3} + p_x^2 z^2)}}. \tag{4.29}$$

Nos interesa entonces calcular $\langle \mathcal{O}(-x), \mathcal{O}(x) \rangle$: consideramos que $t, x_i = 0 \forall i \neq 1$ y que las inserciones se hacen simétricas de forma que, de nuevo, las coordenadas 4d del *turning point* sean idénticamente nulas. Ahora escribimos

$$\begin{aligned}
p_x &= b_0 + b_1 \delta + b_2 \delta^2 + b_3 \delta^3 + b_4 \delta^4 + \mathcal{O}(\delta^5), \\
z^* &= c_0 + c_1 \delta + c_2 \delta^2 + c_3 \delta^3 + c_4 \delta^4 + \mathcal{O}(\delta^5).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

¹⁷En realidad hay unas potencias de 2 distintas que vienen de calcular $\langle \mathcal{O}(-\tau), \mathcal{O}(\tau) \rangle$ o $\langle \mathcal{O}(-\tau), \mathcal{O}(0) \rangle = \langle \mathcal{O}(-\tau/2), \mathcal{O}(\tau/2) \rangle$.

Hacemos exactamente lo mismo que en el caso en que estudiamos solo la dependencia temporal del correlador: desarrollar perturbativamente $\dot{x}(z)$ y resolver la eom con condiciones de contorno $x(0) = x$. Entonces, con la ecuación (4.21) y con $x(z^*) = 0$ encontramos las suficientes ecuaciones como para determinar todos los coeficientes. Utilizamos la misma notación que antes: $\langle \mathcal{O}(-x), \mathcal{O}(x) \rangle = e^{iF}$ donde $F = 2S_{os}$ lo vamos a calcular también perturbativamente en δ . De nuevo, los cálculos intermedios son muy largos así que solo mostramos los resultados:

$$\begin{aligned}
p = ip_x = & -\frac{1}{x} - \frac{4x^3}{135} \left(9\mu - \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) \delta^2 + \\
& + \frac{8x^5}{2835} \left(27\mu \sum_{i=1}^3 \rho_i - 4(\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_3)(\rho_2 + \rho_3 - 2\rho_1)(\rho_1 + \rho_3 - 2\rho_2) \right) \delta^3 + \\
& + \frac{16x^7}{127575} \left(1053\mu^2 - 504\mu \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) + 56 \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right)^2 \right) \delta^4 + \mathcal{O}(\delta^5),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
z^* = x + & \frac{x^3}{6} \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i \right) \delta + \frac{x^5}{1080} \left(288\mu - 49 \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - 86 \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) \delta^2 + \\
& + \frac{x^7}{45360} \left(-2592\mu \sum_{i=1}^3 \rho_i + 145 \sum_{i=1}^3 \rho_i^3 + 2271 \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j^2 + 114\rho_1\rho_2\rho_3 \right) \delta^3 + \\
& + \frac{x^9}{3265920} \left(663552\mu^2 - 576\mu \left(575 \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{278}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) + 15545 \sum_{i=1}^3 \rho_i^4 + 17564 \sum_{i \neq j} \rho_i^3 \rho_j + \right. \\
& \left. + \frac{172374}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i^2 \rho_j^2 + 74628(\rho_1^2 \rho_2 \rho_3 + \rho_1 \rho_2^2 \rho_3 + \rho_1 \rho_2 \rho_3^2) \right) \delta^4 + \mathcal{O}(\delta^5).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

y

$$\begin{aligned}
F = 2\Delta \log(x) + & \frac{2\Delta x^4}{135} \left(9\mu - 2 \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 + \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) \delta^2 + \\
& - \frac{8\Delta x^6}{8505} \left(27\mu \sum_{i=1}^3 \rho_i - 8 \sum_{i=1}^3 \rho_i^3 + 12 \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j^2 - 48\rho_1\rho_2\rho_3 \right) \delta^3 + \\
& - \frac{4\Delta x^8}{127575} \left(1053\mu^2 - 1008\mu \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) + 112 \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right)^2 \right) \delta^4 + \mathcal{O}(\delta^5).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

4.4.3. Dependencia espacial y temporal

Ahora nos planteamos resolver el caso general, en que permitimos que la geodésica tenga coordenadas tanto en x como en t . El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es (4.19) y la ecuación que define donde se encuentra el *turning point* de la geodésica es (4.21). Las inserciones las vamos a hacer simétricas respecto al origen para que las contribuciones de cada brazo de la geodésica sean iguales y podamos decir $\langle \mathcal{O}(-x, -t, 0, 0), \mathcal{O}(x, t, 0, 0) \rangle = e^{iF}$ donde $F = 2S_{os}$. Las ecuaciones son especialmente largas al considerar esto así que lo mostramos para el caso en que $q_2 = q_3 = 0$. Entonces, siguiendo (4.22) planteamos:

$$\begin{aligned} p_t &= a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 + \mathcal{O}(\delta^4), \\ p_x &= b_0 + b_1\delta + b_2\delta^2 + b_3\delta^3 + \mathcal{O}(\delta^4), \\ z^* &= c_0 + c_1\delta + c_2\delta^2 + c_3\delta^3 + \mathcal{O}(\delta^4). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Ahora desarrollamos perturbativamente las ecuaciones de movimiento de $\dot{x}(z)$ y $\dot{t}(z)$. Al imponer como condición de contorno $x(0) = x$ $t(0) = t$ encontramos las ecuaciones que describen uno de los brazos de la geodésica. De nuevo, la simetría en las condiciones de contorno nos dice que el *turning point* va a tener todas sus coordenadas 4 dimensionales nulas. Entonces, al sustituir $x(z^*)$, $t(z^*)$ sacaremos seis ecuaciones¹⁸ y las tres que nos faltan para poder determinar los nueve coeficientes de (4.34) vendrán de imponer (4.21). Al igual que cuando estudiamos solamente la dependencia temporal, hacemos una rotación de Wick y escribimos $\tau = it$. Entonces estaremos calculando $\langle \mathcal{O}(-x, -\tau, 0, 0), \mathcal{O}(x, \tau, 0, 0) \rangle = e^{iF}$. Los resultados son:

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\tau}{\tau^2 + x^2} - \frac{4}{135} (\tau^3 (27\mu + 2\rho_1^2) + \tau x^2 (9\mu + 2\rho_1^2)) \delta^2 + \\ &+ \frac{8\rho_1\tau (\tau^2 + x^2) (\tau^2 (135\mu + 8\rho_1^2) + x^2 (27\mu + 8\rho_1^2))}{2835} \delta^3 + \mathcal{O}(\delta^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{x}{\tau^2 + x^2} - \frac{4}{135} x (\tau^2 (9\mu + 2\rho_1^2) + x^2 (2\rho_1^2 - 9\mu)) \delta^2 + \\ &+ \frac{8\rho_1 x (\tau^2 + x^2) (\tau^2 (81\mu + 8\rho_1^2) + x^2 (8\rho_1^2 - 27\mu))}{2835} \delta^3 + \mathcal{O}(\delta^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^* &= \sqrt{\tau^2 + x^2} + \frac{1}{6}\rho_1 (\tau^2 + x^2)^{3/2} \delta + \frac{1}{1080} (\tau^2 + x^2)^{3/2} (\tau^2 (324\mu + 49\rho_1^2) + x^2 (49\rho_1^2 - 288\mu)) \delta^2 + \\ &+ \frac{1}{45360}\rho_1 (\tau^2 + x^2)^{5/2} (\tau^2 (145\rho_1^2 - 2916\mu) + x^2 (145\rho_1^2 - 2592\mu)) \delta^3 + \mathcal{O}(\delta^4) \end{aligned}$$

¹⁸De igualar orden a orden a cero.

y

$$F = -\Delta \log(\tau^2 + x^2) + \frac{2}{135} \Delta (\tau^2 + x^2) (\tau^2 (27\mu + 2\rho_1^2) - x^2 (9\mu - 2\rho_1^2)) \delta^2 + \\ - \frac{8\Delta\rho_1}{8505} (\tau^2 + x^2)^2 (\tau^2 (135\mu + 8\rho_1^2) + x^2 (8\rho_1^2 - 27\mu)) \delta^3 + O(\delta^4)$$

Este último resultado, el logaritmo del propagador, se puede escribir, recuperando la dependencia en $x = (\tau, \vec{x})$ con

$$|x| = \sqrt{\vec{x}^2 + \tau^2}, \quad \eta = \frac{\tau}{|x|},$$

utilizando polinomios de Gegenbauer:

$$F = -\Delta \log(|x|^2) + \frac{2}{135} \Delta |x|^{6-2} \left(-9\mu C_2^{(1)}(\eta) - 2\rho_1^2 C_0^{(1)}(\eta) \right) \delta^2 + \\ - \frac{8\Delta\rho_1}{8505} |x|^{8-2} \left(\frac{27\mu}{2} (C_0^{(1)}(\eta) + 3C_2^{(1)}(\eta)) + 8\rho_1^2 C_0^{(1)}(\eta) \right) \delta^3 + O(\delta^4) = \\ = -\Delta \log(|x|^2) - \frac{4q_1\Delta}{8505} |x|^4 (63q_1 + (27M + 16q_1^2)|x|^2) C_0^{(1)}(\eta) - \frac{2M\Delta}{105} |x|^4 (7 + 2q_1|x|^2) C_2^{(1)}(\eta).$$

Aprovechándonos de la invariancia conforme (el resultado solo depende de la distancia entre las inserciones) podemos escribir:

$$\log\langle \mathcal{O}(x, \tau), \mathcal{O}(\vec{0}) \rangle = -i\Delta \log(|x|^2) + i\frac{1}{1080} \Delta |x|^4 \left(-9\mu C_2^{(1)}(\eta) - 2\rho_1^2 C_0^{(1)}(\eta) \right) \delta^2 + \\ - i\frac{\Delta\rho_1}{68040} |x|^6 \left(\frac{27\mu}{2} (C_0^{(1)}(\eta) + 3C_2^{(1)}(\eta)) + 8\rho_1^2 C_0^{(1)}(\eta) \right) \delta^3 + O(\delta^4) \quad (4.35)$$

Conclusiones

Uno de los mayores logros de la física del siglo XX fue «descubrir» la QFT y conseguir resolver con ella muchos de los problemas a los que se enfrentaba, por ejemplo, la física de altas energías o de la materia condensada. Esto se hizo mayoritariamente a través de métodos perturbativos, que permitieron estudiar los regímenes débilmente acoplados de muchos sistemas distintos. El problema es que no siempre se pueden utilizar estas estrategias¹⁹ y, además, queremos comprender con más detalle cómo funcionan las QFTs. Bootstrap y holografía, las técnicas de las que hablamos en este trabajo, son dos de los enfoques que se utilizan para intentar enfrentarse a este problema. En particular, aprender CFTs es importante porque son un tipo especial de QFTs que tienen muchas simetrías. Son por tanto más sencillas y, además, nos sirven como puntos de referencia (puntos fijos del grupo de renormalización) que nos guían dentro de todo el espacio de las teorías posibles.

En los dos primeros capítulos del trabajo hemos estudiado las restricciones que impone la simetría conforme a las funciones de correlación de una CFT $d \geq 3$ dimensional. En particular, tras estudiar el grupo $Conf(d)$, vimos cómo la forma de las funciones a 2 y 3 puntos está completamente determinada por la simetría y, utilizando la OPE, justificamos que había un conjunto muy pequeño de números, al que llamamos *CFT data*, que cumplía unas ciertas condiciones de consistencia —la *crossing symmetry*— y caracterizaba totalmente una CFT. Para el resto del trabajo introdujimos otra de las herramientas fundamentales de la física teórica de este siglo: la dualidad holográfica. Aquí hemos pretendido entender la dualidad AdS/CFT para estudiar el lado de la derecha, las CFTs, pero es muy interesante plantearse el camino contrario. Aplicar los conocimientos que tenemos sobre teorías conformes para aprender gravedad cuántica²⁰, otro de los retos de la física de este siglo. En el tercer capítulo recuperamos algunos de los resultados exactos a los que habíamos llegado en los anteriores a través de cálculos perturbativos en teorías gravitatorias. En particular, introdujimos la aproximación geodésica, que nos permitió calcular, de una forma que utilizaríamos después, funciones de correlación a dos puntos en el

¹⁹Por ello aún no sabemos entender cosas como la dinámica del protón.

²⁰Como esta dualidad relaciona el régimen fuertemente acoplado de la teoría de campos con el perturbativo en el lado de la gravedad (y viceversa) podremos traducir todo lo que aprendamos de CFTs al lado gravitatorio.

límite de dimensión conforme grande.

El objetivo principal de este trabajo era estudiar distintos aspectos relevantes de las teorías conformes, centrándonos especialmente en las herramientas que nos da la dualidad holográfica para entender las CFTs con temperatura y carga finita. En el último capítulo nos encargamos de estudiar la dualidad –así como lo que hay a cada lado– en estas condiciones. Además, en la sección 4.4 hemos calculado la función de correlación a dos puntos para un operador con dimensión conforme $\Delta \gg 1$ en el límite en que la temperatura del agujero negro cargado es pequeña. Al considerar la geometría de un agujero negro cargado las ecuaciones que describen las geodésicas se vuelven muy engorrosas, lo que hizo que tuviéramos que tomar este límite de baja temperatura, para poder resolver el problema de forma perturbativa en los parámetros q_i, μ de la métrica.

Comprobamos que al fijar la carga a cero se recuperaban los resultados de T finita de la literatura. En ese caso, los desarrollos perturbativos del correlador iban con potencias $(\delta^4)^n$ y el haber modificado la métrica parecía indicar que ya no se tendría que respetar esa estructura. Si bien la intuición era en parte cierta, porque ahora nos aparece un término en δ^3 , es sorprendente que no aparece nunca el orden 1: todos los resultados saltan del orden cero al cuadrático. Sería interesante estudiar qué significa esto en el lado de la teoría de campos. Además, si se pudiera ir a mayor orden sería muy positivo identificar los términos de la expansión que provienen del tensor energía momento, que van a tener relación con la termodinámica del agujero negro, para ver si los resultados son de acuerdo a lo esperado [43]. Para esto es útil reescribir todo con polinomios de Gegenbauer, con el objetivo de recuperar la estructura de los *conformal blocks* como en [45] para el caso de temperatura finita.

Por otra parte, el límite que hemos escogido no es precisamente el más interesante: equivale a tener las inserciones muy cerca y por tanto a que la geodésica no «entre» mucho dentro del agujero negro. Sería interesante repetir estos cálculos con inserciones más separadas en la frontera, de forma que quizá podamos aspirar a tener información del otro lado del horizonte, como se hizo en [37]. En ese caso Grinberg y Maldacena probaban que información geométrica del lado de la gravedad (el tiempo propio desde el horizonte hasta la singularidad) viene dada por las funciones a 1 punto de una CFT a temperatura finita. En general, estudiar cómo la información de dentro del agujero negro aparece codificada en su dual holográfico es una cuestión en la que se trabaja desde el nacimiento de la holografía. Por ello, merece la pena preguntarse qué sucede con las funciones a más puntos, para las que tendríamos que introducir términos de interacción con los que construir los vértices en el interior.

Hay aún muchos aspectos de las CFTs por explorar y, esta pregunta, la de ¿qué sucede al introducir una geometría no trivial? es muy importante. Debemos preguntarnos, como se hizo en [8] o [3] para la temperatura finita, cómo cambian las restricciones que impone la simetría conforme cuando

introducimos una geometría no plana.

Bibliografía

- [1] David Simmons-Duffin. Tasi lectures on the conformal bootstrap, 2016.
- [2] John Cardy. *Scaling and renormalization in statistical physics*, volume 5. Cambridge university press, 1996.
- [3] Sheer El-Showk, Miguel F. Paulos, David Poland, Slava Rychkov, David Simmons-Duffin, and Alessandro Vichi. Solving the 3d ising model with the conformal bootstrap. *Physical Review D*, 86(2), jul 2012.
- [4] Philippe Francesco, Pierre Mathieu, and David Sénéchal. *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] J. A. Lipa, J. A. Nissen, D. A. Stricker, D. R. Swanson, and T. C. P. Chui. Specific heat of liquid helium in zero gravity very near the lambda point. *Physical Review B*, 68(17), nov 2003.
- [6] Juan Maldacena. The large n limit of superconformal field theories and supergravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2:231–252, 1998.
- [7] Edward Witten. Anti-de sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. 1998.
- [8] Luca Iliesiu, Murat Koloğlu, Raghav Mahajan, Eric Perlmutter, and David Simmons-Duffin. The conformal bootstrap at finite temperature. *Journal of High Energy Physics*, 2018(10), oct 2018.
- [9] A Zee. *Group theory in a nutshell for physicists*. Princeton University Press, 2016.
- [10] Hugh Osborn. Lectures on conformal field theories in more than two dimensions, 2019.
- [11] Slava Rychkov. Epfl lectures on conformal field theory in d 3 dimensions, 2016.
- [12] E. Inonu and E. P. Wigner. On the contraction of groups and their representations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 39:510–524, 06 1953.

- [13] Yu Nakayama. Scale invariance vs conformal invariance, 2013.
- [14] Miguel F. Paulos, Slava Rychkov, Balt C. van Rees, and Bernardo Zan. Conformal invariance in the long-range ising model. *Nuclear Physics B*, 902:246–291, jan 2016.
- [15] Anatoly Dymarsky, Zohar Komargodski, Adam Schwimmer, and Stefan Theisen. On scale and conformal invariance in four dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2015(10), oct 2015.
- [16] Sylvain Ribault. Conformal field theory on the plane, 2014.
- [17] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 241:333–380, 07 1984.
- [18] Daniel Friedan, Emil Martinec, and Stephen Shenker. Conformal invariance, supersymmetry and string theory. *Nuclear Physics B*, 271:93–165, 06 1986.
- [19] Henrik Dreyer. The conformal group in various dimensions, 06 2013.
- [20] A. Zaffaroni. Introduction to the AdS-CFT correspondence. *Class. Quant. Grav.*, 17:3571–3597, 2000.
- [21] Alexander M. Polyakov. Conformal symmetry of critical fluctuations. *JETP Lett.*, 12:381–383, 1970.
- [22] Paul Ginsparg. Applied conformal field theory. 1991.
- [23] H. Osborn and A. Petkou. Implications of conformal invariance in field theories for general dimensions. *Annals of Physics*, 231:311–362, 05 1994.
- [24] S. Ferrara, A. F. Grillo, and R. Gatto. Tensor representations of conformal algebra and conformally covariant operator product expansion. *Annals Phys.*, 76:161–188, 1973.
- [25] Joseph Polchinski. Introduction to gauge/gravity duality, 2010.
- [26] Jacob D. Bekenstein. Entropy bounds and black hole remnants. *Phys. Rev. D*, 49:1912–1921, 1994.
- [27] Leonard Susskind. The World as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377–6396, 1995.
- [28] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz. Large n field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, 323(3-4):183–386, jan 2000.

- [29] Juan M. Maldacena. Tasi 2003 lectures on ads/cft, 2003.
- [30] Peter Breitenlohner and Daniel Z. Freedman. Positive Energy in anti-De Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity. *Phys. Lett. B*, 115:197–201, 1982.
- [31] Peter Breitenlohner and Daniel Z Freedman. Stability in gauged extended supergravity. *Annals of Physics*, 144(2):249–281, 1982.
- [32] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [33] Gerard 't Hooft. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nucl. Phys. B*, 72:461, 1974.
- [34] Eric D'Hoker and Daniel Z. Freedman. Supersymmetric gauge theories and the ads/cft correspondence, 2002.
- [35] Vijay Balasubramanian and Simon F. Ross. Holographic particle detection. *Physical Review D*, 61(4), jan 2000.
- [36] Jorma Louko, Donald Marolf, and Simon F. Ross. Geodesic propagators and black hole holography. *Physical Review D*, 62(4), jul 2000.
- [37] Matan Grinberg and Juan Maldacena. Proper time to the black hole singularity from thermal one-point functions. *Journal of High Energy Physics*, 2021(3), mar 2021.
- [38] Sangmin Lee, Shiraz Minwalla, Mukund Rangamani, and Nathan Seiberg. Three-point functions of chiral operators in $d=4$, $\mathcal{N} = 4$ sym at large n . 1998.
- [39] Per Kraus, Hirosi Ooguri, and Stephen Shenker. Inside the horizon with AdS/CFT. *Physical Review D*, 67(12), jun 2003.
- [40] Lukasz Fidkowski, Veronika Hubeny, Matthew Kleban, and Stephen Shenker. The black hole singularity in AdS/CFT. *Journal of High Energy Physics*, 2004(02):014–014, feb 2004.
- [41] S. W. Hawking and Don N. Page. Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space. *Commun. Math. Phys.*, 87:577, 1983.
- [42] Sheer El-Showk and Kyriakos Papadodimas. Emergent Spacetime and Holographic CFTs. *JHEP*, 10:106, 2012.
- [43] Mirjam Cvetič and Steven S Gubser. Phases of r-charged black holes, spinning branes and strongly coupled gauge theories. *Journal of High Energy Physics*, 1999(04):024–024, apr 1999.

- [44] Sera Cremonini, Kentaro Hanaki, James T. Liu, and Phillip Szepietowski. Black holes in five-dimensional gauged supergravity with higher derivatives. *JHEP*, 12:045, 2009.
- [45] D. Rodriguez-Gomez and J.G. Russo. Correlation functions in finite temperature CFT and black hole singularities. *Journal of High Energy Physics*, 2021(6), jun 2021.
- [46] Kenneth G. Wilson and Michael E. Fisher. Critical exponents in 3.99 dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 28:240–243, 1972.
- [47] Leonard Susskind. Structure of hadrons implied by duality. *Phys. Rev. D*, 1:1182–1186, 1970.
- [48] Paul Adrien Maurice Dirac et al. *The principles of quantum mechanics*. Number 27. Oxford university press, 1981.
- [49] Richard P Feynman and Laurie M Brown. *Feynman's thesis : a new approach to quantum theory*. World Scientific, 2005.
- [50] Michael Edward Peskin and Daniel V Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Crc Press, 2019.
- [51] Mikko Laine and Alekski Vuorinen. *Basics of Thermal Field Theory*. Springer International Publishing, 2016.
- [52] Michele Maggiore. *A modern introduction to quantum field theory*. Oxford University Press, 2013.
- [53] Matthew Dean Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [54] N. Beisert. Quantum field theory i, 2014.
- [55] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields / Volume I, Foundations*. Cambridge University Press, 2015.
- [56] A Zee. *Quantum field theory in a nutshell / monograph*. World Publishing Corporation, 2013.
- [57] W. Pauli and F. Villars. On the invariant regularization in relativistic quantum theory. *Reviews of Modern Physics*, 21:434–444, 07 1949.
- [58] Silvan S Schweber. *QED and the men who made it : Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*. Princeton Univ. Press, [Ca, 2011.

- [59] G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 44:189–213, 07 1972.
- [60] Joseph Polchinski. Renormalization and effective lagrangians. *Nuclear Physics B*, 231:269–295, 01 1984.
- [61] David Tong. Quantum field theory, 2006.
- [62] Luis Alvarez-Gaumé and M A Vázquez-Mozo. *An invitation to quantum field theory*. Springer, 2012.
- [63] Curtis G. Callan. Broken scale invariance in scalar field theory. *Physical Review D*, 2:1541–1547, 10 1970.
- [64] K. Symanzik. Small distance behaviour in field theory and power counting. *Communications in Mathematical Physics*, 18:227–246, 09 1970.
- [65] Barton Zwiebach. Quantum physics iii chapter 3: Semiclassical approximation | quantum physics iii | physics | mit opencourseware, 2018.
- [66] Michiko Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Adam Hilger, Cop, 1990.

Apéndice A

Algunas cosas de teoría cuántica de campos

Podemos decir que el lenguaje de la naturaleza, o al menos el lenguaje más cercano al de la naturaleza que es conocido, es la teoría cuántica de campos. Entender las partículas y las interacciones desde este punto de vista: como excitaciones de los campos de una cierta teoría, nos ha llevado a algunos de los más espectaculares descubrimientos de la historia de la física¹. En esta breve –y parcial– introducción a QFT pretendemos explicar la mayor parte de herramientas y conceptos que utilizaremos en el trabajo, que trata de **teorías conformes de campos**; si se quiere, unas QFT particulares.

Como no se estudia QFT durante el grado, la finalidad de este apéndice es tender un puente entre los contenidos de asignaturas como *Teoría clásica de campos* o *mecánica cuántica* y el punto de partida del resto del trabajo. Por razones de extensión solo se pueden tratar algunos temas y además de forma superficial pero pretendemos:

- ★ Mostrar como a partir de un modelo tan sencillo como el oscilador armónico se vuelve imprescindible la idea del **campo cuántico** cuando queremos estudiar una teoría de muchas partículas. Explicar a partir de ello la cuantización canónica del campo escalar e introducir también la cuantización en el formalismo lagrangiano, con la *path integral*.
- ★ Definir las funciones de correlación de una teoría, motivando su interés por su relación con las amplitudes de dispersión pero viéndolas como objetos fundamentales que caracterizan una teoría. También se introducen los diagramas de Feynman y se encuentran así las primeras divergencias en los cálculos de QFT.

¹El descubrimiento del bosón de Higgs en 2012, cuyo mecanismo se postuló en los años 60.

- ★ Explicar el concepto de renormalización, haciendo especial énfasis en el punto de vista wilsoniano así como en el concepto de teoría efectiva. Se definen las trayectorias del grupo de renormalización y las funciones beta, así como sus puntos fijos, que son teorías conformes.

Todo lo anterior se hace utilizando como ejemplo la teoría $\lambda\phi^4$, el lagrangiano no trivial más sencillo que podemos proponer, que, como se ve durante el resto del trabajo, representa sistemas físicos muy importantes. El objetivo será llegar al punto fijo de Wilson-Fisher[46], que es un ejemplo de por qué las teorías conformes son algo que merece **mucho** la pena estudiar.

The oscillator model is to the real hadron
what the tuning fork is to the violin string.

Leonard Susskind [47]

A.1. Descubriendo QFT

En esta sección nos proponemos justificar que la **teoría cuántica de campos** aparece de forma natural al plantearse cómo solucionar algunos problemas de la forma más sencilla posible. Podríamos decir que el $E = mc^2$ de la relatividad especial nos dice que se pueden crear partículas del vacío, traduciendo energía en masa. Veremos que esto nos lleva *irremediabilmente* a formular una QFT y nos habremos encontrado entonces con un fenómeno que sucede –y que detectamos– continuamente que no se puede explicar con la mecánica cuántica que aprendimos en la carrera.

Comenzamos con un modelo de juguete que nos muestra cómo una «buena» descripción de la naturaleza –sin hablar siquiera de relatividad especial– necesita del concepto de campo cuando queremos modelizar sistemas con un número indeterminado de partículas.

A.1.1. (Los) osciladores armónicos clásicos

Consideramos un sistema unidimensional de N partículas de masa m sometidas a un potencial $V = V(|x_i - x_j|)^2$. Entonces, si $\{x_i\}$ son las posiciones de las partículas³ el lagrangiano será una cosa tal que

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - \sum_{i < j} V(|x_i - x_j|).$$

²Esto quiere decir $V = V(|x_i - x_j|) = V(\{|x_i - x_j| : i, j = 1, \dots, N\})$. Parece razonable considerar un potencial que respete las simetrías del sistema. En más dimensiones esto asegura invariancia bajo rotaciones y traslaciones.

³Y, tenemos derecho a escogerlas como coordenadas generalizadas, en la jerga de mecánica clásica.

Las ecuaciones de movimiento son $m\ddot{x}_i = -V'$ $i = 1, \dots, N$.⁴ Entonces, las soluciones de mínima energía –de equilibrio estable, en las que el sistema querrá encontrarse– vendrán dadas por las posiciones $x_i = X_i$ en las que se satisfaga $V'|_{x_i=X_i} = 0$. Nos interesa entender cómo reacciona nuestro sistema cuando sufre una pequeña perturbación. Para ello, hacemos $x_i = X_i + \chi_i$ y expandimos en serie hasta orden $\mathcal{O}(\chi_i^2)$ el lagrangiano y sacamos las nuevas ecuaciones de movimiento:

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{\chi}_i^2 - \sum_{i < j} \frac{1}{2} k (\chi_i - \chi_j)^2 \quad \text{donde} \quad k = V''|_{x_i=X_i} \quad \text{y} \quad m\ddot{\chi}_i = -k(\chi_{i+1} - 2\chi_i + \chi_{i-1})^5.$$

Las coordenadas están mezcladas unas con otras, cosa que no es muy deseable a la hora de resolver el problema. Ahora podemos aplicar el procedimiento estándar de *Mecánica y ondas* para encontrar unas **coordenadas normales** que desacoplen este sistema⁶, de forma que el lagrangiano sea diagonal. Por simplicidad, vamos a considerar que nuestra dimensión espacial es finita. Esto lo podemos hacer imponiendo condiciones de contorno periódicas: $i = 0, \dots, N - 1$ y $N \equiv 0$. Así, si introducimos el Ansatz $\chi_n = \xi_m e^{i \frac{\pi m n}{N}}$, el lagrangiano en coordenadas normales será:

$$L = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m \dot{\xi}_n^2 - \frac{1}{2} m \omega_n^2 \xi_n^2, \quad \omega_n^2 = 4 \frac{k}{m} \sin^2\left(\frac{n\pi}{N}\right).^7 \quad (\text{A.1})$$

Entonces, hemos conseguido describir nuestro problema de una forma mucho más sencilla: tenemos ahora N osciladores armónicos desacoplados. Para volver a las coordenadas del principio, que representaban las posiciones de las partículas, bastará con multiplicar con las correspondientes matrices de cambio de base formadas por los autovectores como en un problema cualquiera de diagonalización. De aquí en adelante podemos pensar que nuestra teoría viene descrita por un lagrangiano como el de [A.1](#).

A.1.2. (Los) osciladores armónicos cuánticos (cuánticos)

Tenemos todas las evidencias del mundo de que la naturaleza, a nivel fundamental, es cuántica, así que necesitamos estudiar la versión cuántica de lo anterior. Nuestro problema es sencillo porque

⁴Donde ' es una derivada respecto a x_i .

⁵Esto nos puede recordar, por ejemplo, a una cadena de N electrones interactuando a primeros vecinos con el modelo tight binding. Son muchos los problemas que se pueden aproximar utilizando estos *osciladores armónicos* (ya se sabe que es lo único que sabemos hacer las físicas).

⁶Si volvemos a mirar la forma de las ecuaciones de movimiento nos damos cuenta de que no queremos más que encontrar las autofunciones de –una versión discretizada del– operador ∂_x^2 . Si escribiéramos el problema de forma matricial nos daríamos cuenta de que la matriz no es mas que la permutación de un vector de longitud N cíclicamente N veces –esto se llama matriz circulante y tiene unos autovalores especialmente sencillos–.

⁷Por aquí hay una pequeña sutileza: tenemos un modo cero que proviene de que al sistema no le cuesta energía *girar sobre sí mismo*. Esto nos puede dar algunos problemas en el siguiente apartado: sabemos que el oscilador armónico cuántico tiene una energía mínima no nula –podemos pensar que viene de que X y P ya no conmutan–. Lo ignoramos porque no es relevante para nuestra discusión.

conocemos perfectamente, por la asignatura de *Mecánica cuántica*, la cuantización del oscilador armónico simple. Vamos a hacer una cosa que se llama **cuantización canónica**⁸: cambiar la estructura simpléctica de la mecánica clásica al verla desde el formalismo hamiltoniano por un álgebra de operadores. Desde el punto de vista técnico consiste en hacer $\{A, B\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]$ ⁹. Como nosotras estamos utilizando unidades naturales, no escribiremos las \hbar salvo cuando tengamos un interés especial en ver dónde están esos factores¹⁰. Sea p_n el momento canónico conjugado a ξ_n en A.1. Entonces, haciendo una transformada de Legendre llegamos a que

$$H = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2m} p_n^2 + \frac{1}{2} m \omega_n \xi_n^2. \quad (\text{A.2})$$

Para cuantizar esto, introducimos un par de **operadores escalera** para cada oscilador¹¹:

$$\hat{\xi}_n = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_n}} (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger), \quad \hat{p}_n = -i\sqrt{\frac{m\omega_n}{2}} (\hat{a}_n - \hat{a}_n^\dagger). \quad (\text{A.3})$$

Son elementos de un álgebra de conmutadores: $[\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_m] = \delta_{n,m}$. Esto hace que el hamiltoniano se convierta en la superposición de N osciladores armónicos cuánticos:

$$\hat{H} = \sum_n \omega_i \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.4})$$

Por analogía a la lógica que conocemos de mecánica cuántica y física estadística (sabemos que al aplicar de forma sucesiva sobre el vacío el operador creación de un oscilador armónico se van creando estados con energía mayor), podemos etiquetar los estados del sistema a partir de cuantas veces hemos aplicado el cada oscilador al vacío $|0\rangle$. Entonces, los estados y sus energías serán:

$$|n_0, n_1, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_0! n_1! \dots}} (\hat{a}_0^\dagger)^{n_0} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} \dots |0\rangle, \quad E = \sum_n \omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.5})$$

⁸A veces, a lo que vamos a hacer con campos se le llama **segunda cuantización** frente a la «primera cuantización» que se hace en mecánica cuántica con operadores. Esto puede oscurecer lo que en realidad estamos haciendo que es cuantizar **una** y solo una vez el sistema.

⁹Esto lo introdujo Dirac en [48], el mismo libro en el que habló de su famosa delta e intentó construir la electrodinámica cuántica.

¹⁰En particular, ya hemos visto en muchas asignaturas que un sistema cuántico puede aproximarse por su versión clásica cuando puedo hacer $\hbar \simeq 0$, de hecho, hemos hecho esa cuenta muchas veces: pasar de la ecuación de Schrodinger a la de Hamilton-Jacobi o del teorema de Ehrenfest a las ecuaciones de Newton. A tomar $\hbar \rightarrow 0$ se lo llama considerar *el límite semiclásico*. Ya veremos quién hace aquí las veces de \hbar . (Secretamente estamos acercándonos al concepto de *teoría efectiva*, vital en la formulación moderna de la física y en este trabajo).

¹¹Denotamos por $\hat{\xi}_n$ a la versión cuantizada de ξ_n (solo mantendremos esta notación en esta sección, para enfatizar cuáles son los operadores cuánticos). Es decir, los gorros se refieren a operadores cuánticos –que actúan en estados de un cierto espacio de Hilbert que no vamos a discutir–.

Si volvemos a las coordenadas χ del apartado anterior, nos damos cuenta de que aplicar un operador creación de un cierto oscilador ξ_i tiene que ver con considerar una onda plana $e^{i\frac{2\pi n}{N}i}$ con una frecuencia (momento) determinada. Es muy ilustrativo escribir la versión cuántica de χ_j en términos de nuestros operadores escalera:

$$\hat{\chi}_j = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2m\omega_n}} \hat{a}_n e^{i\frac{2\pi n}{N}j} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2m\omega_n}} \hat{a}_n^\dagger e^{-i\frac{2\pi n}{N}j} \text{ }^{12}.$$

Esto ya empieza a tener pinta de transformada de Fourier –discreta– y, si recordamos que en el mundo clásico cada j se refería a una partícula asociada en un punto de aquel espacio 1-dimensional, ya todo empieza a indicar que por aquí tenemos escondido un campo. Si consideramos que el círculo en que pusimos la teoría tiene longitud L y que en equilibrio las partículas estaban equiespaciadas con una distancia entre ellas a ¹³, está claro que $z_j = aj$ será la posición de la partícula j en el equilibrio y podremos escribir $\frac{2\pi n}{N}j = k_n z_j$. Antes de tomar el límite continuo $N \rightarrow \infty$, que parece natural ya solo por tratar de imitar la cuerda clásica, merece la pena escribir explícitamente cómo actúa $\hat{\chi}_j$ sobre el vacío. Si denotamos como $\hat{a}_n^\dagger |0\rangle = |1_n\rangle$:

$$\hat{\chi}_j |0\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2m\omega_n}} e^{-ip_n j} |1_n\rangle$$

Esto tiene una forma muy familiar: la de la relación entre estados de posición y momento en mecánica cuántica: $|x\rangle = \int dp \langle p | x \rangle |p\rangle = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} |p\rangle$. Precisamente, esto hace natural pensar que el campo $\hat{\chi}$ actúa sobre el vacío creando *excitaciones colectivas* que se comportan (como justificaremos ahora en el límite semiclásico) como **partículas**. Acabamos de **cuantizar canónicamente el campo escalar**¹⁴. A estas excitaciones colectivas descritas por los modos normales las llamamos **fonones** en materia condensada. Podemos pensar entonces que el teorema de Bloch nos estaba contando precisamente esto: los sólidos no se pueden describir bien en términos de las posiciones de sus partículas pero sí como combinación de modos con momento fijo¹⁵.

¹²Hemos sumado el conjugado porque la posición de las partículas tiene que ser real. De hecho, en A.1 hicimos trampas al escribir la exponencial, al final tendríamos que habernos quedado con la parte real pero es que todo esto se ve mejor con exponenciales que con cosenos.

¹³Si se quiere, constante de red de nuestro sólido 1d: $aN = L$.

¹⁴Ya veremos por qué escalar y qué significa esto respecto a las simetrías del problema. En algún sitio aparecieron las simetrías del espaciotiempo aka. la relatividad especial en el futuro, pero no lo sabemos aún.

¹⁵Esto no es más que el principio de incertidumbre en acción cuando queremos acercarnos a una descripción fundamental de una red.

A.1.3. El límite continuo: cambiar sumatorios por integrales

En realidad, en las últimas ecuaciones, z es una variable discreta, está en una *lattice* si queremos pensarlo así. El límite sensato es $a \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ manteniendo L fijo. Entonces, z_j deja de estar discretizado para ser una variable continua que, por estética, podemos rebautizar con una x . Entonces, podemos agrupar todos los χ_j en una función $\chi(x) = \xi_n e^{ik_n z}$. Como el límite que hemos tomado es equivalente a que $n \ll N$, podremos aproximar en la relación de dispersión el seno por su ángulo, de forma que $\omega_n^2 \simeq \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{ak}{a} n^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{T}{\rho} n^2 = c^2 k_n^2$ ¹⁶. En realidad hemos encontrado $\omega^2 = p^2 c^2$, la relación de dispersión de una partícula sin masa. Esto se ve claramente al escribir la ecuación diferencial que satisface $\chi(x, t)$ ¹⁷ (la versión continua de las ecuaciones de movimiento de A.2):

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2\right) \chi = 0$$

La conclusión es que χ_j se ha convertido en un **campo** que satisface la **ecuación de Klein-Gordon**. Ahora tenemos un campo clásico ya que nos hemos ido a unas energías lo suficientemente pequeñas como para que la cuántica no sea relevante. Lo que hemos hecho es considerar que la separación entre los átomos de la cadena es despreciable –irnos a bajas energías es lo mismo que distancias grandes– de forma que la longitud de onda de las excitaciones es mucho mayor que a . La versión continua del apartado clásico es trivial desde este punto de vista: las autofunciones de ∂_x^2 son las exponenciales: la transformada de Fourier precisamente se encarga de diagonalizar este problema.

A.1.4. Breve repaso de qué hemos aprendido

Este modelo de juguete nos muestra muchas de las cosas que necesitamos aprender. En primer lugar, hemos confirmado algo que ya decíamos, por ejemplo, en *Física estadística*: cuando el número de partículas no es fijo, la mecánica cuántica o la mecánica clásica tal y como las conocemos no nos van a dar buenos resultados¹⁸. El concepto de número de ocupación tiene que ver con los campos cuánticos –cuando entendemos que las partículas son cosas que aparecen al hacerlos actuar sobre el vacío–. También hemos visto que tomar unos límites u otros va a tener sentido y significado físico dependiendo

¹⁶Donde $m/a = \rho$ tiene dimensiones de densidad lineal y $ak = T$ de tensión. Están fijas en el límite que tomamos y son cantidades características del sistema. Así, $c = T/\rho$ es una velocidad de propagación.

¹⁷Merece la pena comentar que implícitamente hemos estado trabajando en la imagen de Schrodinger, lo que hizo que los operadores no dependieran (explícitamente) del tiempo. Podríamos haber hecho todo en la imagen de Heisenberg y entonces los operadores escalaría diferirían de los nuestros en una fase $e^{i\omega_n t}$.

¹⁸El calor específico de Debye, los condensados de Bose-Einstein, los gases de Fermi o el magnetismo son algunos ejemplos de esto.

de las cantidades físicas –dimensionales– propias de la teoría¹⁹. Así, en nuestro caso, las cosas cuánticas aparecían cuando mirábamos distancias cercanas a a : cuando éramos capaces de distinguir los átomos y darnos cuenta de que el sólido era estrictamente discreto (cuantizado, si preferimos) era precisamente a energías muy altas. Sin embargo, a grandes distancias el sistema puede ser descrito por su aproximación clásica²⁰. La pregunta lógica ahora es: ¿qué pasa a distancias mucho más pequeñas que a ?, es decir, ¿qué pasa cuando los átomos son «muy grandes» en comparación con lo que estamos mirando? La respuesta «fácil» es que no se sabe o que la pregunta no tiene sentido²¹. Esto tiene que ver con que todas nuestras teorías cuánticas de campos hay que pensarlas como **teorías efectivas**, que funcionan hasta que llegamos a una energía (distancia) máxima (mínima) a partir de las que ya no son válidas. A esa escala de energías la llamamos *cut-off*, que en nuestro caso es de forma natural la distancia entre átomos a . Por aquí vendrán los infinitos y la renormalización, pero un poco más adelante.

Podíamos haber titulado lo anterior como **cuantización canónica del campo escalar real**. El apellido «escalar» tiene que ver, cuando definimos las QFT como unas teorías de campos en las que el espaciotiempo sobre el que estos viven es el espacio de Minkowski, con que los campos –y respectivamente las partículas– que podemos tener son **representaciones (unitarias)** de las **simetrías** espaciotemporales: $SO(1,3)$. En el caso de la QFT, estas vendrán etiquetadas por los casimires que al final serán la masa y el espín. Por algunas casualidades que se dan en dimensión 4, tenemos unas relaciones entre las álgebras de Lie $\mathfrak{so}(1,3) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, lo que permitirá etiquetar los campos con, además de la masa m , que viene del $P_\mu P^\mu$, dos números cuánticos (j_1, j_2) que son las representaciones de $\mathfrak{su}(2)$ ²². Escalar significará entonces la representación trivial $(0,0)$: espín 0. Para lo que vamos a hacer nos bastará con campos escalares, pero sabemos que la naturaleza tiene otros tipos de partículas y aparecen de forma absolutamente natural al hacer QFT²³.

¹⁹Esto tiene bastante gracia porque nuestras teorías, las CFTs, serán las que precisamente no tengan dichas cantidades dimensionales: teorías que son iguales las miremos a muy altas o bajas energías.

²⁰Esto no es del todo cierto: sabemos que hay fenómenos macroscópicos de nuestro día a día que la mecánica clásica no puede explicar. Precisamente, al final de esta introducción a QFT nos daremos cuenta de que la renormalización va a dar cuenta de esto: explicará cómo la teoría cuántica (a altas energías) se codifica en una teoría efectiva a bajas energías que captura los efectos de esos grados de libertad.

²¹En realidad nosotras sabemos que los átomos no son partículas elementales sino que están descritas como un sistema complejo con otros componentes. Pero está claro que esta pregunta se puede repetir tantas veces como sea necesario para llegar a la misma paradoja: ¿qué hay por debajo de las partículas elementales?. Hemos llegado a una cuestión profunda en QFT, física y filosofía y la manera de formularla ya estuvo sesgada, al asumir que lo fundamental va a ser una *partícula*: ¿qué significa que una partícula sea puntual, qué es algo 0-dimensional? Ahora podríamos hablar de cuerdas y otras propuestas pero no tenemos páginas.

²²Además, conocemos perfectamente por mecánica cuántica como descomponer con los coeficientes de Clebsch-Gordan (j_1, j_2) en suma de representaciones irreducibles.

²³De hecho, el postulado que habla de la relación entre el espín (entero o semientero) y la estadística (conjuntos de partículas idénticas simétricos o antisimétricos bajo permutaciones) viene en QFT de estos operadores escalera que nos han aparecido. Mientras que los bosónicos hacen $[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}$ y por tanto se corresponden con funciones de onda simétricas, los operadores escalera asociados a campos fermiónicos serán anticonmutantes: $\{\hat{b}_n, \hat{b}_m^\dagger\} = \delta_{nm}$. Esto hará que $(\hat{b}_m^\dagger)^2 = 0$: hemos recuperado el principio de exclusión de Pauli.

A.2. Campo escalar real libre v2

En la sección anterior justificamos la aparición de los campos cuánticos a partir de mecánica clásica y cuántica básicas. De aquí en adelante consideraremos teorías de campos relativistas. De forma práctica esto significa que los índices $\mu, \nu \dots$ son ahora índices de objetos –tensores– en $\mathbb{R}^{1,3,24}$ que se combinarán para que las cantidades con significado físico sean invariantes Lorentz.

Partimos de la ecuación de Klein-Gordon –la ecuación de movimiento de un campo escalar masivo–:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0.$$

Esto, al hacer una transformada de Fourier se convierte en $(-p^2 + m^2) \tilde{\phi}(p) = 0$. En el espacio de momentos se resuelve fácilmente: la solución más general es $\tilde{\phi}(p) = f(p) \delta(p^2 - m^2)$, donde $f(p)$ es una función arbitraria. Es decir, solo se le pide a la solución que satisfaga $p^2 = m^2$. A satisfacer esta condición lo llamaremos estar *on-shell*²⁵. Inspiradas en esto y en nuestros conocimientos en materia de osciladores armónicos nos permiten plantear la solución²⁶:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \left[a(p) e^{-ip \cdot x} + a(p)^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[a(\vec{p}) e^{-iE_p t + \vec{p} \cdot \vec{x}} + a(\vec{p})^\dagger e^{iE_p t - \vec{p} \cdot \vec{x}} \right] \end{aligned}$$

Donde hemos escrito $\theta(p^0)$ ²⁷ para enfatizar que solo consideramos soluciones de energía positiva –si el campo $\phi(x)$ fuera complejo tendríamos soluciones de energía negativa, nuestras primeras *antipartículas*²⁸. Se puede calcular el momento canónico conjugado y de exigir $[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = i \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ ²⁹ obtendremos las relaciones de conmutación habituales para los operadores escalera $a(\vec{p}), a(\vec{p})^\dagger$. Volvemos a tener la interpretación de antes: el campo ϕ crea partículas con momento \vec{p} al actuar sobre el vacío $|0\rangle$.

²⁴En realidad, todo lo podríamos discutir en d dimensiones, y lo haremos en algún caso.

²⁵No cumplirlo, estar *off-shell* es lo que en física de partículas llamamos ser una partícula virtual.

²⁶Todos los $a(p), a(p)^\dagger$ son operadores escalera cuánticos. No escribimos \hat{a} porque de aquí en adelante todo serán operadores cuánticos. Si en algún punto hay alguna cosa diferente lo especificaremos. ϕ será igualmente un campo cuántico.

²⁷Donde $\theta(x)$ es la función escalón.

²⁸Además, hacer $p = (E_p, \vec{p})$ muestra que lo que hicimos en el apartado anterior, que terminaba siendo integrar en \vec{p} no era covariante Lorentz (la palabra técnica es *Lorentz invariant phase space*).

²⁹La versión explícitamente Lorentz covariante de esto, algo como $[\phi(x), \pi(x)]$ no es inmediata. Tiene que ver con cosas profundas aka. que las teorías con las que trabajamos son locales/microcausales. No hay propagación de información a velocidad infinita. Esta sería otra forma de ver que la QFT es la descripción correcta de la naturaleza: si intentas hacer la QM relativista llegas aquí para conservar la causalidad –i.e. el futuro no puede influir en el pasado–.

A.2.1. Vienen para quedarse. Nuestros primeros infinitos

Tiene sentido preguntarnos ahora cuál es la energía de este sistema, para ello tendríamos que calcular explícitamente la expresión del momento $\pi(x)$ y hacer una transformada de Legendre. El resultado final es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[a(\vec{p})^\dagger a(\vec{p}) + (2\pi)^3 E_p \delta(0) \right] = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} E_p a(\vec{p})^\dagger a(\vec{p}) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{p} E_p \delta(0)$$

La primera integral viene de considerar el número de partículas creadas por el campo $a(\vec{p})^\dagger a(\vec{p})$ multiplicadas por la energía de cada una E_p . La segunda es divergente y representa el valor esperado del Hamiltoniano en el estado fundamental: $\langle 0|H|0\rangle$ –es decir, la **energía del vacío**–. La divergencia tiene en realidad dos orígenes. El primero, el sencillo, es que el espacio sobre el que integramos (\mathbb{R}^3) es no compacto. Lo podemos arreglar considerando que nuestro sistema está en una caja de volumen finito V ³⁰. Pero tenemos una segunda fuente de divergencias que no desaparece al hacer eso y proviene de que estamos integrando para todos los momentos posibles $p \in (0, \infty)$. En d dimensiones esta densidad de energía sería

$$\int d^{d-1}\vec{p} \frac{1}{2} E_p = \int d^{d-1}\vec{p} \frac{1}{2} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \Omega_{d-2} \int_0^\infty dp \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + m^2},$$

que es terriblemente divergente. Una solución es poner un *cut-off* en momentos: $0 < p < \Lambda$, de tal forma que la integral anterior iría como $\sim \frac{1}{2} \Omega_{d-2} \Lambda^d$. En general vamos a ignorar esta energía del vacío y trabajar con el **ordenado normal**: $\hat{H} := \hat{H} - \langle 0|\hat{H}|0\rangle$ ³¹.

En general, se define el **ordenado normal** de un operador como el resultado de, al escribirlo como producto de operadores escalar, poner los operadores creación a la derecha y los aniquilación a la izquierda. Tendremos por definición entonces, que al contraer por ambos lados con el vacío un término ordenado normal nos dará cero. Esto será importante cuando lleguemos al **teorema de Wick**, que nos ayudará a pintar nuestros primeros diagramas de Feynman.

³⁰Lo que es equivalente a discretizar el momento y por tanto tendríamos sumatorios y no integrales, como en el modelo de juguete de la cadena.

³¹Pero esto hay veces que no se puede hacer tan alegremente. Por ejemplo, en el caso de la gravedad tendríamos que ese término tiene que ver con la constante cosmológica. Por análisis dimensional necesitaríamos que $\Lambda \sim 1/l_p$ y esto no tiene nada que ver con lo que medimos actualmente. Tenemos entonces otro ejemplo más de que la QFT es algo efectivo que no sirve a todas las energías –desde luego que no lo hace en la escala de Planck, donde la gravedad se vuelve cuántica–.

A.3. Campo escalar real libre v3. Richard Feynman al habla: la integral de camino

La cuantización canónica es muy poderosa: lo que hicimos con el campo escalar se puede repetir para cualquier otro campo clásico –en el sentido de la relatividad especial: cualquier representación del grupo de Lorentz– para entender cómo pasa a ser un operador cuántico (campo) que actúa sobre el vacío. Sin embargo, el precio que pagamos por pasar al formalismo hamiltoniano es perder –al menos aparentemente– la covariancia explícita de nuestras ecuaciones: el tiempo y el espacio juegan, en principio, papeles absolutamente distintos³². Entonces, es lógico preguntarnos, dado un lagrangiano $L(\phi, \partial_\mu \phi)$ clásico, cómo podemos hacer para cuantizar su correspondiente teoría directamente en el formalismo lagrangiano. Este fue el problema al que se enfrentó Richard Feynman en su tesis doctoral [49], que aplicó a la electrodinámica cuántica y para lo que introdujo la famosa integral de camino así como los diagramas que llevan su nombre. Para ilustrar la idea de la integral de camino vamos a comentar primero el caso no relativista.

A.3.1. La integral de camino en mecánica cuántica no relativista

En cualquier asignatura de mecánica cuántica aprendimos que el «pasar» al mundo cuántico tiene como contrapartida perder la certidumbre y tener que conformarse con las probabilidades. Entonces, una pregunta de examen podría ser: dados un estado final $|f\rangle$ y un estado inicial $|i\rangle$, ¿cuál es la probabilidad de transición de uno a otro? Sabemos que la respuesta a esto tiene que ver con el operador de **evolución temporal**. Podemos estudiar el ejemplo sencillo de la propagación de una partícula –equivalente además a que nos den un lagrangiano con una única coordenada generalizada $L(x, \dot{x})$ – desde $\vec{x}_i(t_i)$ hasta $\vec{x}_f(t_f)$. En principio, como el lagrangiano (y por tanto el hamiltoniano) puede depender explícitamente del tiempo, no podemos dar más que la solución formal

$$\langle \vec{x}_f(t_f) | \vec{x}_i(t_i) \rangle^{33} = \langle \vec{x}_f | U(t_f, t_i) | \vec{x}_i \rangle, \quad U(t_f, t_i) = T \left(-i \int_{t_i}^{t_f} dt H(t) \right). \quad (\text{A.6})$$

Dentro del ordenado temporal de la ecuación anterior las cosas conmutan. Podemos entonces dis-

³²De aquí en adelante «sea un lagrangiano» y «sea una teoría» significarán lo mismo para nosotras: se trata de un escalar de Lorentz que contiene toda la información sobre el sistema que estamos estudiando. En realidad habrá un punto en que queramos tener teorías sin necesidad de escribir un lagrangiano pero esto ya vendrá más adelante.

³³Esto lo podemos pensar entonces como el propagador de nuestra partícula/campo. La relación de este enfoque con las funciones de Green es natural y será muy útil cuando pensemos en las funciones de correlación en general, en las funciones a varios puntos y en los diagramas de Feynman.

cretizar el intervalo temporal (t_i, t_f) y convertir la integral en una suma de forma que

$$U(t_f, t_i) = e^{-i\delta t H(t_f)} e^{-i\delta t H(t_{n-1})} \dots e^{-i\delta t H(t_2)} e^{-i\delta t H(t_1)}.$$

Si utilizamos que $\{|\vec{x}\rangle\}$ es una base completa de autoestados podemos llegar, insertando la identidad en cada punto del interior del discretizado temporal, a que

$$\langle \vec{x}_f(t_f) | \vec{x}_i(t_i) \rangle = \int d\vec{x}_1 \dots \int d\vec{x}_n \langle \vec{x}_f | e^{-i\delta t H(t_n)} | \vec{x}_n \rangle \dots \langle \vec{x}_1 | e^{-i\delta t H(t_1)} | \vec{x}_i \rangle.$$

Si asumimos que el Hamiltoniano tiene un término cinético canónico: $H = \frac{P^2}{2m} + V(x, t)$ cada elemento de matriz se va a poder escribir como

$$\langle \vec{x}_{j+1} | e^{-iH(t_i)\delta t} | \vec{x}_j \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i \delta t} \right)^{\frac{d}{2}} e^{iL(\vec{x}_j, \dot{\vec{x}}_j, t)\delta t}$$

Donde lo que hemos hecho es pasar al espacio de momentos –trabajamos en d dimensiones porque será útil más adelante– y conseguir escribir la integral de forma gaussiana ³⁴ haciendo varios cambios de variable y trucos al integrar (ecuaciones 9.9-9.13 de [50]).

Entonces, podremos reescribir A.6 como

$$\langle \vec{x}_f(t_f) | \vec{x}_i(t_i) \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\vec{x} e^{i \int dt L}, \quad \mathcal{N} = \left(\frac{m}{2\pi i \delta t} \right)^{n \frac{d}{2}}. \quad (\text{A.7})$$

Donde $\int \mathcal{D}\vec{x} = \prod_{i=1}^n \int d\vec{x}_i$. Lo estamos dejando todo preparado para tomar el límite $n \rightarrow \infty$ ($\delta t \rightarrow 0$), que está bien definido. Entonces, lo que nos dice A.7 es que la probabilidad *cuántica* de pasar de un estado a otro se calcula sumando sobre **todas** las posibles configuraciones que satisfacen \vec{x}_i en t_i y \vec{x}_f en t_f , cada uno con una contribución que tiene que ver con la acción de esa configuración –en unidades de \hbar , aunque no lo hayamos puesto–³⁵. Esto se llama **integral de camino**.

A.3.2. La integral de camino en teoría cuántica de campos

Si bien es cierto que la integral de camino hace que el límite clásico de la mecánica cuántica se recupere con más naturalidad que en la cuantización canónica, tampoco ofrece muchas más ventajas.

³⁴Ya veremos que estas integrales son las únicas que sabemos hacer, lo que viene a ser que solo sabemos calcular las teorías libres.

³⁵Esto es relevante porque el límite (semi)-clásico selecciona precisamente los puntos en que la acción se hace estacionaria –podríamos discutir si mínima o máxima y cómo es la transición entre ellos: se llaman *instantones* y dan para muchas páginas–. Entonces, recuperamos el principio clásico de mínima acción a partir de esta formulación de la mecánica cuántica.

En QFT esta historia es distinta: este enfoque nos permite pensar en un campo $\phi(t, \vec{x})$ como un objeto que en cada \vec{x} describe un sistema cuántico con un grado de libertad (el de la t). El procedimiento anterior se puede repetir para $\langle \phi(t_f) | \phi(t_i) \rangle$ arbitrario, es decir, para encontrar el correlador de un campo. Un primer caso relevante será $t = \pm\infty$, que podremos utilizar para normalizar lo anterior si lo interpretamos como la amplitud de transición vacío-vacío –que más vale que sea 1–:

$$Z[0] = \mathcal{N} = \frac{1}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}}.$$

Hay múltiples razones, y algunas nos irán saliendo, por las que las **funciones de correlación** son objetos centrales en QFT. Ahora nos limitaremos a decir que tiene sentido pensar en generalizar lo anterior para el caso en el que metemos muchos más campos:

$$\langle T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS} \quad (\text{A.8})$$

La operación $T(\dots)$ se llama **ordenación temporal** y lo que hace es colocar los operadores de izquierda a derecha en orden temporal ascendente. Plantear esto así tiene que ver con pensar en foliaciones del espaciotiempo $\mathbb{R}^{1,d-1}$ en hipersuperficies de igual tiempo que van a ser espacios de Hilbert en los que viven los estados de nuestra teoría. Así, el operador evolución temporal nos pasará de una hipersuperficie a otra³⁶.

La ecuación A.8 es **exacta** para cualquier teoría y ahí reside una de las mayores ventajas de utilizar el formalismo de la path integral. En realidad, hemos hecho un poco de trampas porque no es inmediato que $Z[0]$, ni otros muchos cálculos, converjan. Tiene que ver con un $i\varepsilon$ que hay que meter en algunos sitios para poder calcular ciertas integrales complejas. Es el mismo que en el propagador de Feynman de una partícula masiva $1/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$, al final todos conspiran para que, una vez elegido el camino de integración adecuado, todo converja. Esto es algo muy profundo y en relación con la función de partición (estadística) tiene que ver con cómo se modelizan a temperatura finita en QFT³⁷.

A.3.3. Lo que nos enseña la path integral sobre QFT a temperatura finita

Merece la pena mencionar también que la relación entre mecánica estadística, QFT y fenómenos críticos, especialmente en este trabajo pues son cosas profundamente relacionadas con las CFTs. Así, muchas aplicaciones de QFT en materia condensada tienen que ver con explicar cambios de fase,

³⁶Explicaremos esto en más profundidad en la sección 1.5.1 pues en las CFTs será inteligente explotar de otra forma las simetrías de la teoría.

³⁷Las palabras clave serían *rotación de Wick* y *acción euclídea*. Aparecen en muchos otros sitios sin aparente relación –regularización dimensional, instantones...– pero son cosas muy relevantes.

donde las teorías conformes juegan un papel central³⁸. Se puede demostrar que una QFT euclídea d -dimensional es equivalente a un sistema clásico de mecánica estadística $d+1$ -dimensional a temperatura $T = \hbar$. Es decir, la QFT nos recupera el colectivo canónico. Se puede de hecho, si pensamos en la traza de la función de partición como una forma de imponer que el estado al principio y al final sean el mismo³⁹ esto se puede reformular de forma mucho más potente: una QFT euclídea en $S \times \mathbb{R}^d$ donde el círculo tiene longitud β es equivalente a un sistema cuántico estadístico $d+1$ -dimensional a temperatura $T = 1/\beta$.

Vamos a hacer esto pero empezando con un modelo de juguete de mecánica cuántica en una dimensión [51]. Nuestro objetivo va a ser escribir la **función de partición** del colectivo canónico (un sistema de muchas partículas a temperatura fija) de una forma compatible con (A.7). Utilizamos unidades naturales así que $\beta = 1/T$ y la función de partición –en el colectivo canónico– se define como

$$Z[T] = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \right) = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

donde H es el hamiltoniano del sistema. La segunda igualdad es la que estudiamos en mecánica estadística cuando discretizamos los estados de energía pero ambas cosas son equivalentes: se trata de sumar sobre todas las energías del sistema pesándolas con el factor β relacionado con la temperatura. Podemos utilizar una base de autoestados de posición para el hamiltoniano H para calcular la traza como una integral. Además, inspirándonos en la integral de camino tiene sentido «romper» el factor $e^{-\beta H}$ en N trozos, definiendo $\varepsilon = \frac{\beta \hbar}{N}$:

$$Z[T] = \text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} \right] = \int dx \langle x | e^{-\beta \hat{H}} | x \rangle = \int dx \langle x | e^{-\frac{\varepsilon \hat{H}}{\hbar}} \cdots e^{-\frac{\varepsilon \hat{H}}{\hbar}} | x \rangle.$$

Para calcular esto introducimos a la izquierda (derecha) de cada factor $e^{-\frac{\varepsilon \hat{H}}{\hbar}}$ la relación de completitud de la base de autoestados de posición (momento) con índices $i = 1, \dots, N$ (que avancen de derecha a izquierda), de forma que tengamos que considerar elementos de matriz de la forma

$$\begin{aligned} A_i &= \langle x_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | e^{-\frac{\varepsilon}{\hbar} \hat{H}(\hat{p}, \hat{x})} | x_i \rangle = e^{\frac{i p_i x_{i+1}}{\hbar}} \langle p_i | e^{-\frac{\varepsilon}{\hbar} H(p_i, x_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} | x_i \rangle \\ &= \exp \left(-\frac{\varepsilon}{\hbar} \left[\frac{p_i^2}{2m} - i p_i \frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon} + V(x_i) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \right) \end{aligned}$$

Entonces, a la derecha del todo nos queda un $\langle x_1 | x \rangle = \delta(x - x_1)$ de forma que podemos hacer la integral en dx y que nos queden N integrales en dx_i, dp_i . Igualmente, a la izquierda del todo tenemos

³⁸Todo esto será mucho más natural a la luz de la renormalización wilsoniana.

³⁹Ver la propiedad cíclica de la traza como una especie de condición de contorno periódica.

que $\langle x | = \langle x_{N+1} |$. Si además mandamos $N \rightarrow \infty$ el término $\mathcal{O}(\varepsilon)$ es despreciable y llegamos a

$$Z[T] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left[\prod_{i=1}^N \frac{dx_i dp_i}{2\pi\hbar} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^N \varepsilon \left[\frac{p_j^2}{2m} - ip_j \frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} + V(x_j) \right] \right\} \Bigg|_{x_{N+1} \equiv x_1, \varepsilon \equiv \beta\hbar/N}$$

que se puede expresar con la path integral como hacíamos en las secciones anteriores:

$$Z[T] = \int_{x(\beta\hbar)=x(0)} \mathcal{D}x \mathcal{D} \left(\frac{p}{2\pi\hbar} \right) \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left[\frac{p(\tau)^2}{2m} - ip(\tau)\dot{x}(\tau) + V(x(\tau)) \right] \right).$$

Reconocemos ya una transformada de Legendre. En primer lugar, las integrales en p_i son gaussianas así que podemos hacerlas fácilmente. En realidad, esto es un poco tramposo porque la medida diverge cuando $N \rightarrow \infty$ pero no importa mucho porque es independiente de todo lo demás, lo que nos permite hacer las cuentas con un poco de cuidado y llegar a que

$$Z[T] \propto \int_{x(\beta\hbar)=x(0)} \mathcal{D}x \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 + V(x(\tau)) \right] \right\} \quad (\text{A.9})$$

donde el factor de proporcionalidad tiene que ver con la termodinámica del sistema. Ahora vamos a ver que esto lo podemos escribir como una integral de camino como la de (A.7), que podemos reescribir (recuperando los \hbar correspondientes) como

$$Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\vec{x} e^{i/\hbar \int dt L}; \quad L = \frac{p^2}{2m} - V(x) = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x). \quad (\text{A.10})$$

Entonces, para llegar a (A.9) solo hay que seguir la siguiente receta:

1. Hacemos una rotación de Wick $\tau = it$ de forma que $d\tau^2 = -dt^2$.
2. Llamamos al lagrangiano de después de la rotación L_E y nos damos cuenta de que $L_E = -\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x)$. Entonces la integral de camino (a temperatura 0) es $\exp(-1/\hbar \int d\tau L_E)$.
3. Compactificamos el tiempo τ en un círculo de longitud β .
4. Imponemos condiciones de contorno periódicas en esta coordenada: $x(\tau) = x(\tau + \beta)$

Esto se puede hacer de forma absolutamente análoga en QFT⁴⁰ cambiando el último paso en caso de que además de bosones tengamos fermiones. En ese caso habrá que decidir si imponerles condiciones de contorno periódicas o antiperiódicas⁴¹.

⁴⁰De hecho, las cuentas que hemos hecho son las del campo escalar.

⁴¹Esto es interesante cuando tenemos teorías supersimétricas.

La lección es que una QFT euclídea en $S_\beta \times \mathbb{R}^d$ describe una teoría $d+1$ -dimensional a temperatura $T = 1/\beta$. De estudiar esto se encarga la *thermal field theory* y es algo muy importante porque sin duda nuestro mundo existe a temperatura finita.

A.3.4. El funcional generador

Podemos jugar con las integrales funcionales de A.8 y reescribir esa ecuación como

$$\langle T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) \rangle = (-i)^n \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0}, \quad Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS + i \int d^4x J(x)\phi(x)} \quad \text{(A.11)}$$

Decimos que $Z[J]$ es el **funcional generador** y nos dirige hacia la forma perturbativa de entender todo esto. A pesar de que A.8 y A.11 son fórmulas exactas para cualquier acción S , la realidad es que solo se pueden calcular cuando la teoría que tenemos es libre. Esto es un problema porque si queremos describir el mundo necesitamos entender sistemas interactuantes. Es razonable plantear $S = S_o + S_{int}$ ⁴³ y operar así hasta:

$$\langle T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) \rangle = \frac{\langle T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{-i \int f V}) \rangle_0}{\langle e^{-i \int f V} \rangle_0}, \quad \text{(A.12)}$$

donde el subíndice 0 significa que el correlador está calculado en la teoría libre. La ecuación A.12 es la **fórmula de Dyson**. Se puede encontrar también haciendo cuantización canónica, pasando antes por el teorema de Wick (que nombraremos más adelante) y por una expansión perturbativa, menos sistemática en general.

El hecho de que A.8 y A.11 sean fórmulas exactas es importante no solo porque nos permitan formular QFTs de forma consistente sino porque el mundo está lleno de fenómenos no perturbativos que no podríamos estudiar si lo único que tuviéramos a nuestro alcance fueran cosas como A.12 que solo podríamos utilizar haciendo expansiones de Taylor. Por ejemplo, los instantones en las teorías de Yang-Mills o cualquier término topológico –que puede tener una contribución no trivial a la física del sistema– se podrán definir utilizando este enfoque. Esto es crucial a la hora de entender teorías como QCD, cuyo régimen no perturbativo es responsable de cosas que nos afectan tanto en el día a día como el confinamiento.

⁴²Se puede comprobar que el $Z[0]$ de antes es efectivamente $Z[0]$.

⁴³Es decir, pensamos desde la imagen de interacción de mecánica cuántica. Concretamente, $S_{int} = - \int V$.

A.4. Una forma –no tan– heurística de convencernos de la importancia de las funciones de correlación

Lo que hemos hecho hasta ahora está muy bien pero la realidad es que la física es una ciencia experimental: esto va de medir cosas, de observar el mundo. Igual que las leyes de Kepler se ponen a prueba midiendo los periodos de las órbitas de los planetas, la relatividad especial con relojes atómicos que sufren dilatación temporal o la mecánica cuántica con la difracción de un haz de electrones, necesitamos encontrar en nuestra forma de escribir estas teorías cantidades que puedan ser contrastadas con experimentos reales⁴⁴. En realidad hay muchos ejemplos –ya hemos dicho que la QFT es el lenguaje de la naturaleza– pero vamos a quedarnos con el típico *scattering* de altas energías. Supongamos que dos partículas con momentos p_1 y p_2 chocan y que al final se llega a un estado con $n - 2$ partículas de momentos k_i . La sección eficaz diferencial⁴⁵ de este proceso viene dada por:

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |M_{fi}|^2 d\Pi_{\text{LIPS}}, \quad d\Pi_{\text{LIPS}} = (2\pi)^4 \delta\left(\sum p\right) \prod_{j=1}^{n-2} \frac{d^3\vec{p}_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}.$$

El elemento de matriz $\mathcal{M}_{fi} = \langle f|\mathcal{M}|i\rangle$ contiene entonces toda la información sobre lo que sucede cuando las partículas chocan: lo demás es cinemática relativista.

A.4.1. La fórmula LSZ. De cómo la teoría libre conspira para explicarnos (algunas cosas) de las interacciones

Una interpretación natural de $\mathcal{M}_{fi} = |\langle f|S|i\rangle|^2$ en la imagen de Schrodinger es la siguiente: estamos calculando la probabilidad de transición de un estado $|i\rangle$ en $t = -\infty$ a otro $|f\rangle$ en $t = \infty$. Entonces, S es algo así como la evolución temporal y, si asumimos que los estados inicial y final están suficientemente separados como para estar en la (misma) teoría libre, lo que aprendimos en el apartado anterior nos permite escribir:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \sqrt{2\omega_{p_1}} \sqrt{2\omega_{p_2}} a_{p_1}^\dagger(-\infty) a_{p_2}^\dagger(-\infty) |\Omega\rangle, \\ |f\rangle &= \sqrt{2\omega_{p_3}} \cdots \sqrt{2\omega_{p_n}} a_{p_3}^\dagger(\infty) \cdots a_{p_n}^\dagger(\infty) |\Omega\rangle. \end{aligned}$$

⁴⁴Reproducibles o no con la tecnología que tenemos ahora mismo, recordemos que, por ejemplo, las ondas gravitacionales se detectaron experimentalmente un siglo después de haber sido propuestas.

⁴⁵Los detalles no son relevantes, es la fórmula estándar de un *scattering* que estudiamos en *Física nuclear y de partículas elementales*.

Donde $|\Omega\rangle$ es el vacío en la imagen de Heisenberg (para que el estado sea independiente del tiempo). El considerar que tenemos la teoría libre en $t = \pm\infty$ nos permite decir que

$$i \int d^4x e^{ipx} (\partial^2 + m^2) \phi(x) = \sqrt{2\omega_p} [a_p(\infty) - a_p(-\infty)].$$

Es razonable que el elemento de matriz que vamos a calcular esté ordenado temporalmente. Considerando esto y algunos pasos más que no vamos a hacer pero que se encuentran en todos los libros, llegamos a la **fórmula LSZ**:

$$\langle f|S|i\rangle = \prod_{j=1}^n \left[i \int d^4x_j e^{-ip_j x_j} (\partial_{x_j}^2 + m^2) \right] \langle \Omega | T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | \Omega \rangle \quad (\text{A.13})$$

Esta fórmula es muy importante porque relaciona los observables naturales de la teoría –las secciones eficaces que se miden en los aceleradores de partículas – con las **funciones de correlación** ordenadas temporalmente⁴⁶, que caracterizan completamente una teoría física. Es iluminante escribir la fórmula anterior en el espacio de momentos, donde se hace aún más evidente que hay algo raro en $G(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | \Omega \rangle$:

$$\langle f|S|i\rangle = (p_1^2 - m_1^2) \cdots (p_n^2 - m_n^2) G(x_1, \dots, x_n)$$

Esperamos que los estados iniciales y finales sean físicos así que las partículas estarán *on-shell*. ¿Significa esto que todos los elementos de matriz son nulos? Esta claro que no, ni es lo que medimos ni tendría sentido. Entonces, lo que pasa es que $G(x_1, \dots, x_n)$ tiene polos en las masas físicas de las partículas⁴⁷. Precisamente, la fórmula LSZ lo que hace es decirnos que las probabilidades de transición serán los residuos en esos polos.

A.5. Diagramas de Feynman

Los diagramas de Feynman nos han aparecido ya en algunas asignaturas, aunque no supiéramos QFT. Por ejemplo, en *Teoría clásica de campos* veíamos que era útil representar gráficamente las soluciones perturbativas a ecuaciones de movimiento de campos que no se podían resolver analíticamente. Podemos pensar en aquello, donde las líneas eran propagadores –las funciones de green de los campos

⁴⁶No lo vamos a derivar pero el **teorema de Wick** nos explica como relacionar ordenación temporal y ordenación normal para el caso libre.

⁴⁷Esto cuadra perfectamente con el propagador de una partícula, que en el espacio de momentos no es más que un polo en la masa. (No hablaremos aquí del $i\varepsilon$ aunque sea muy relevante).

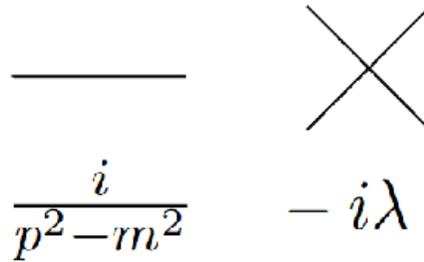


Figura A.1: Reglas de Feynman de $\lambda\phi^4$. Figura modificada de [50].

en el sentido más abstracto— y metíamos también fuentes para, por ejemplo, el campo eléctrico, como diagramas de Feynman clásicos⁴⁸. Igualmente, en *Física nuclear y de partículas elementales* dibujamos un montón de diagramas de Feynman para describir distintos procesos que se estudian en aceleradores de partículas.

El objetivo en esta sección es motivar la representación diagramática de estas expansiones perturbativas con las que vamos a trabajar en las secciones que faltan, que tratarán de dar sentido a las divergencias con las que nos encontraremos ahora. No tenemos espacio para repetir las cuentas que, aunque tediosas y eternas, (me) resultaron mucho más que instructivas. Se pueden encontrar en [50], [52],[53] o [53]. Nuestro enfoque, centrado en el ejemplo de $\lambda\phi^4$ está basado en [50].

Hemos llegado a la conclusión de que, bien motivadas por la fórmula LSZ para calcular scatterings de partículas o sencillamente porque sí, calcular funciones de correlación es algo deseable. El caso de la teoría libre se explica gracias al **teorema de Wick**, que podemos decir relaciona el ordenado temporal de un operador compuesto con una expresión en función de ordenados normales de los operadores. Escribimos en primer lugar algunos ejemplos para la teoría escalar libre:

$$\begin{aligned}
 T(\phi(x_1)\phi(x_2)) &= : \phi(x_1)\phi(x_2) : + \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} =, : \phi(x_1)\phi(x_2) : + G_F(x_1, x_2) \\
 T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)) &= : \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) : + \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)} + \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)} \\
 &\quad + \phi(x_1)\overbrace{\phi(x_2)\phi(x_3)} = : \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) : + G_F(x_1, x_2)\phi(x_3) \\
 &\quad + G_F(x_1, x_3)\phi(x_2) + G_F(x_2, x_3)\phi(x_1). \\
 T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)) &= : \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) : + \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} + \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} \\
 &\quad + \phi(x_1)\overbrace{\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} =
 \end{aligned}$$

⁴⁸Clásicos porque no había *loops*, no se permitía la creación de partículas del vacío.

En general, esto se escribe para la función de correlación a n puntos como:

$$T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) =: \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) : + \text{todas las contracciones posibles.} \quad (\text{A.14})$$

Donde con todas las contracciones nos referimos a: sumar primero todas las posibilidades distintas con **una** contracción (como en los ejemplos a 2pt y 3pt), después todas las opciones con **dos** contracciones (esto empieza a suceder a partir de la función a 4pt) y así sucesivamente⁴⁹.

Entonces, cuando contraemos con el vacío –i.e. calculamos la amplitud de dispersión de un cierto proceso– tiene sentido representar cada propagador $G_F(x_1, x_2)$ como una línea que va entre los puntos x_1 y x_2 . El caso de la teoría libre es trivial. Estamos interesadas en ver cómo funciona esto cuando hay interacciones. Para ello utilizaremos la fórmula A.12, que tiene el problema de no poder calcularse explícitamente salvo que tanto el numerador como el denominador sean integrales Gaussianas⁵⁰. Entonces, si la interacción fuera «pequeña» y la pudiéramos pensar como una perturbación sobre el vacío libre podríamos intentar un procedimiento análogo a lo que hacíamos en mecánica cuántica para calcular probabilidades de transición en problemas como el de las correcciones cuánticas del átomo de Hidrógeno, como el término de espín-órbita. Para hacer esto necesitaremos que la teoría este **débilmente acoplada**, es decir, que la constante de acoplo sea pequeña⁵¹. El primer ejemplo no libre que podemos estudiar es el modelo $\lambda\phi^4$, es decir, un sistema formado por un único campo escalar masivo con un término de autointeracción. Para estudiar esto es interesante partir de A.12 escrita en la imagen de interacción:

$$\langle \Omega | T(\phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n)) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T(\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) e^{-i \int d^d x \mathcal{V}_I}) | 0 \rangle}{\langle 0 | T(e^{-i \int d^d x \mathcal{V}_I}) | 0 \rangle}, \quad (\text{A.15})$$

donde $\phi_I = U_0^\dagger \phi_S U_0$ se comporta precisamente como un campo libre por verse como un cierto campo que evoluciona con el hamiltoniano H_0 . Entonces, en 4 dimensiones el parámetro λ es adimensional y podemos hacer expansiones en él mismo. Haremos el caso de la función a dos y cuatro puntos, que se pueden pensar respectivamente como un propagador de una partícula y un choque dos a dos.

⁴⁹Esto demuestra descomponiendo el campo libre en la parte que va como un operador de creación y la de aniquilación: $\phi = \phi^+ + \phi^-$ y desarrollando con la definición del ordenado temporal. Está hecha en 4.3 en [50]. También se puede hacer para operadores fermiónicos, pero teniendo cuidado porque sus operadores escalera anticonmutan y eso hace que salgan menos al moverlos por dentro de la expresión, esto viene hecho también en 4.7 en [50] y en en capítulo 8 de [54].

⁵⁰Es decir, cuando estemos en la teoría libre y todo de 1.

⁵¹No tiene mucho sentido decir que una cantidad dimensional sea grande o pequeña. Por eso, esto en realidad lo haremos con teorías renormalizables –cuya constante de acoplo es adimensional, como veremos más adelante– o tuneando con una escala para que la expansión tenga sentido.

Figura A.2: El propagador a primer orden en la teoría $\lambda\phi^4$. Figura modificada de [50].

La función a dos puntos

Si nos quedamos a primer orden en λ en el numerador y en el denominador en la fórmula anterior encontramos que

$$\langle \Omega | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | \Omega \rangle \sim \frac{\langle 0 | T(\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)) | 0 \rangle - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | T(\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi(x)^4) | 0 \rangle + \dots}{1 - i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | T(\phi(x)^4) | 0 \rangle + \dots}.$$

Ahora tendremos que expandir esta fracción a primer orden en λ . Como los campos en la imagen de interacción son como campos libres las funciones de correlación ordenadas temporalmente que nos salgan se podrán calcular con el teorema de Wick. Por cuestiones de espacio, escribo el resultado final que calculamos en la asignatura tal, estos cálculos aparecen en el capítulo 12.2 de [50] renormalizando directamente la teoría $\lambda\phi^4$ (la explicación de las reglas de Feynman en el capítulo 4), también en el capítulo 6 de [55].

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | \Omega \rangle &= \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} e^{-ip_2x_2} \delta(p_1 + p_2) \\ &\left[\frac{i}{p_1^2 - m^2} - \frac{i\lambda}{2} \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{p_2^2 + m^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{(q + p_1 + p_2)^2 - m^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Donde hemos pasado al espacio de momentos, utilizando las reglas de Feynman de la figura A.1. Esta integral es divergente, necesitamos aplicar un proceso de renormalización para obtener un resultado físico. De esto trata el próximo capítulo.

La idea de la descomposición del propagador se ilustra en la figura A.2. La idea es traducir A.15 a diagramas de Feynman al orden deseado, calcular las integrales correspondientes de cada término⁵² y expandir al orden deseado la división. Donde, para calcular el «número» asociado a cada diagrama tendremos que imponer la conservación del momento en cada vértice e integrar sobre los momentos que corran por los loops.

⁵²Habrà que dividir por un factor de simetría que considere de cuantas formas distintas se pueden intercambiar las patas externas.

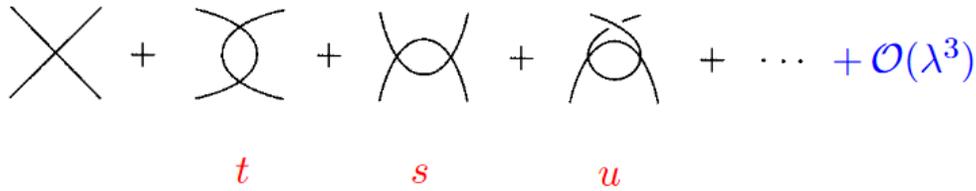


Figura A.3: figure
La función a 4 puntos en $\lambda\phi^4$. Canales s, t, u . Figura modificada de [50].

La función a cuatro puntos.

Ahora repetiremos lo anterior con la función de correlación a 4pt, que gracias a la fórmula LSZ se puede pensar como un scattering $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$. Como estamos en una teoría ϕ^4 , tenemos un vértice que une cuatro líneas. Esto hace que la primera corrección cuántica será a $\mathcal{O}(\lambda^2)$ y tendrá tres canales equivalentes, que vienen etiquetados por las **variables de Maldestam**, como se muestra en la figura A.3:

$$\langle \Omega | T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)) | \Omega \rangle = -i\lambda + \frac{1}{2}(-i\lambda)^2(I(s) + I(t) + I(u)), \quad (\text{A.17})$$

donde

$$I(u) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p - (p_1 + p_2))^2 - m^2} \frac{i}{p^2 - m^2}$$

y el 1/2 viene de que los tres canales son simétricos bajo paridad. Esta integral es divergente, necesitaremos aplicar un procedimiento de renormalización para obtener un resultado físico. De esto trata la siguiente sección.

A.6. Breve introducción a la renormalización

En algunas asignaturas, por ejemplo de física de partículas, nos han hablado del *drama de la renormalización*: resulta que después de no poder juntar la mecánica clásica y la relatividad especial más que metiendo campos cuánticos, en el momento en que intentas calcular alguna cantidad con correcciones cuánticas para comparar con los experimentos todo te da infinito. A lo largo de esta sección veremos que en realidad –como nos pasó con los campos– la renormalización no solo es necesaria sino **deseable** y natural cuando explicas las cosas de la forma adecuada.

A.6.1. ¿Cuándo aparecen infinitos en nuestros diagramas?

Vamos a hacer ahora una cuenta que aunque sencilla y naif, nos da bastante información. Consideremos diagramas a varios puntos asociados a una teoría con un campo escalar que, en el espacio de momentos terminan siendo integrales en p que divergen –en el UV, cuando $p \in (0, \infty)$ – cuando el grado del numerador es igual o mayor al del denominador⁵³. Dada una teoría concreta, podemos pensar cuál es el *grado de divergencia*⁵⁴ de un diagrama utilizando las reglas de Feynman. Como ejemplo vamos a considerar una interacción $\lambda\phi^n$ en d -dimensiones: $D = dL - 2I$ donde L es el número de loops e I el número de líneas internas⁵⁵. Utilizando que en un vértice se juntan n líneas tenemos que precisamente $I = 1/2(nV - E)$ donde V es el número de vértices y E el número de líneas externas. Además, las dimensiones de λ son $[\lambda] = d - \frac{d-2}{2}n$. Juntando toda esta información con la relación $L = I - V + 1$ ⁵⁶ llegamos a que

$$D = d - [\lambda]V - \frac{d-2}{2}E$$

Entonces, podremos clasificar las teorías según como sean las dimensiones de sus constantes de acoplo:

- ★ Si $[\lambda] < 0$ se dice que la teoría es **no renormalizable**. Para cualquier número de patas externas –es decir, cualquier función de correlación– diverge si consideramos un número suficiente de loops. Esto significa que necesitaríamos un número infinito de contratérminos para hacer finitas las funciones de correlación. Esto hace imposible reabsorberlos en el lagrangiano original mediante una redefinición de parámetros y una teoría con infinitos parámetros libres no puede en principio ser muy predictiva. Pasa con términos como los siguientes en 4 dimensiones: $g(\bar{\psi}\psi)^2$, $g\phi^5$. También con la relatividad general en $d > 2$
- ★ Si $[\lambda] = 0$ se dice que la teoría es **renormalizable**. Solo necesitaremos un número finito de contratérminos, que van a tener además la misma estructura que los términos originales de la teoría. Se tiene como consecuencia entonces una redefinición de parámetros. Algunos ejemplos en 4 dimensiones son $\lambda\phi^4$, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ o $\lambda\phi^3$ en 6 dimensiones (y ϕ^6 en 3 dimensiones).
- ★ Si $[\lambda] > 0$ se dice que la teoría es **super renormalizable** porque solo hay divergencias para un número finito de loops. Sería el caso de $\lambda\phi^3$ en 4 dimensiones (en realidad en $d < 6$ dimensiones).

⁵³Por otra parte, cuando el grado del denominador es mayor, nos aparecen divergencias logarítmicas en el IR.

⁵⁴En algunos sitios *superficial degree of divergence*.

⁵⁵De hecho, esto que vamos a hacer se puede generalizar a otras teorías: las líneas internas bosónicas van con un p^2 en el denominador mientras que las fermiónicas con un p –lo que viene sencillamente de las derivadas que tiene un término cinético canónico– y entonces $D = dL - 2I_B - I_F$. Todo esto viene explicado en un caso más general en el capítulo 3.3 de [56] o el 10.1 de [50].

⁵⁶Que viene a ser decir que la característica de Euler de todos estos diagramas es 1, porque son planares.

Esto ha sido una forma muy conservadora de contar divergencias porque en realidad las simetrías de la teoría podrían en algunos casos protegernos un poco y hacer que algunas contribuciones se cancelaran solas. Como último comentario: ya vemos por aquí que el concepto ser renormalizable tiene mucho que ver con la dimensión en la que estemos, hay que seguir con esto en mente.

A.6.2. Caso de estudio. $\lambda\phi^4$ aka. una versión fácil de un $O(N)$

Volvemos a nuestra teoría $\lambda\phi^4$ en 4 dimensiones. Gracias a lo que acabamos de argumentar sabemos que, como $[\lambda] = 0$, la teoría es renormalizable. Es decir, al hacer teoría de perturbaciones, en el momento en que consideramos algún diagrama con *loops* los cálculos van a diverger pero vamos a poder escribir un número finito de **contratérminos** con la misma estructura que los «términos ordinarios» –a cualquier número de loops/cualquier orden en λ – de forma que las cantidades infinitas se cancelen.

Entonces, nuestra estrategia es introducir una renormalización en el campo $\phi = Z^{1/2}\phi_R$ y en los acoplos de forma que podamos separar la acción en una S_R y S_{ct} . En la acción esto se ve como

$$S = \int d^d x \frac{1}{2} \partial\phi^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \implies S = \int d^d x Z \frac{1}{2} \partial\phi_R^2 - \frac{m^2 Z}{2} \phi_R^2 - \frac{\lambda Z^2}{4!} \phi_R^4$$

Si hacemos $Z = 1 + \delta_Z$, $m^2 Z = m_R^2 + \delta_2$, $\lambda Z^2 = \lambda_R + \delta_4$, entonces

$$S_R = \int d^d x \frac{1}{2} \partial\phi_R^2 - \frac{m_R^2}{2} \phi_R^2 - \frac{\lambda_R}{4!} \phi_R^4,$$

$$S_{ct} = \int d^d x \delta_Z \frac{1}{2} \partial\phi_R^2 - \frac{\delta_2}{2} \phi_R^2 - \frac{\delta_4}{4!} \phi_R^4.$$

que diagramáticamente se representa añadiendo a los objetos de A.1 los contratérminos, tal y como se muestra en la figura A.4.

Diremos que los λ , m del primer lagrangiano son las **constantes físicas**. Necesitamos entonces escoger qué van a representar exactamente esas cantidades para poder fijar el valor de los contratérminos y calcular las funciones deseadas. A este proceso lo llamamos «escoger un **procedimiento de renormalización**⁵⁷». Como esta decisión es arbitraria, al final del día la física no puede depender de ello, deberá existir una relación entre todos ellos.

Partimos entonces de las expresiones a primer orden de las funciones a 2pt y 4pt A.16 y A.17, que son integrales divergente (en parte por tener nuestra teoría en 4 dimensiones), renormalizar/regularizar para encontrar una cantidad física.

Presentamos en primer lugar los resultados que vienen de hacer **regularización dimensional**⁵⁸.

⁵⁷ *Renormalization scheme* en la literatura en inglés.

⁵⁸ Dependiendo de a quién le preguntes, renormalización y regularización no son lo mismo.

$$\begin{aligned}
G^{(2)} &= \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&\quad \frac{i}{p^2 - m_R^2} \qquad \qquad \qquad i(\delta_4 p^2 - \delta_2) \\
G^{(4)} &= \text{---} \times \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&\quad -i\lambda_R \qquad \qquad \qquad -i\delta_4
\end{aligned}$$

Figura A.4: Función a 2pt y 4pt con la primera corrección cuántica sumando términos y contratérminos. Imagen modificada de [50].

La idea es hacer las integrales en $d = 4 - \varepsilon$ dimensiones⁵⁹, normalmente haciendo una rotación de Wick antes para trabajar en el euclídeo, y más tarde hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ ⁶⁰. Nos aparecerán polos en ε a los que les daremos un significado u otro después de escoger el procedimiento de renormalización. Escribimos el resultado final, estas integrales aparecen en cualquier libro, por ejemplo, para el propagador, (7.80)-(7.91) en [50].

$$\begin{aligned}
G^{(2)} &= \frac{i}{p^2 - \left(m_R^2 + \lambda_R \frac{(m_R^2)^{\frac{d-2}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) + \delta_2 - p^2 \delta_Z \right)}. \\
G^{(4)} &= -i\lambda_R + i \frac{\lambda_R^2}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \left(\Delta(s)^{\frac{d-4}{2}} + \Delta(t)^{\frac{d-4}{2}} + \Delta(u)^{\frac{d-4}{2}} \right) - i\delta_4.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Donde $\Lambda = -p^2 x(1-x) + m_R^2$ es el parámetro de Feynman y s, t, u son las variables de Mandelstam. Como $[\lambda] = 4 - d$, tiene sentido escribir los resultados en términos de $\lambda_R = g_4 \mu^{4-d}$ un acoplo renormalizado adimensional g_4 a partir de una escala de energía μ cualquiera⁶¹. Ahora sería el momento de escoger un criterio para renormalizar, que nos fijaría la forma de los contratérminos. Existen varios procedimientos distintos pero al final todos son equivalentes en el sentido de que explican la misma

⁵⁹Esto se puede hacer para otras teorías que sean importantes en otras dimensiones, por ejemplo, ϕ^3 en $6 - 2\varepsilon$ dimensiones.

⁶⁰Como comentario histórico está bien contar que este procedimiento fue «inventado» por Pauli y Villars en los años 50 [57], basándose en trabajos de gente como Feynman, Stueckelberg and Rivier para calcular cosas como el momento magnético anómalo del electrón [58]. Más adelante se hicieron versiones más refinadas de esto ('t Hooft y Veltman [59]), covariantes gauge, que podían utilizarse en teorías gauge no abelianas –al hacer esto a la path integral, la medida tiene una parte no trivial y nos aparecen los fantasmas de Fadeev-Popov y esto ya no funciona tan fácilmente como en QED–. A esto segundo nos solemos referir cuando hablamos de DIMREG. Entonces, $d \in \mathbb{C}$ y rezamos porque la continuación analítica esté bien definida.

⁶¹De aquí en adelante haremos $\mu = 1$ y recuperaremos el μ donde sea necesario con análisis dimensional.

física y se pueden calcular. Vamos a poner los resultados del más utilizado, \overline{MS} , en el que se escogen los contratérminos de forma que se «coman» todas las divergencias y los trozos finitos de forma que el resultado final quede de la forma más sencilla posible. Se debe recordar que todas las ecuaciones son válidas solamente en el sentido perturbativo –en nuestro caso, lo hacemos todo a primer orden, la primera corrección cuántica: nos estamos quedando a 1 *loop*–.

\overline{MS} scheme

Si cogemos las fórmulas de A.18 y, al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ nos quedamos a primer orden, encontramos que:

$$G_2 = \frac{i}{p^2 - \left(m_R^2 + \frac{g_4 m_R^2}{32\pi^2} \left(1 + \log \frac{g_4 m_R^2}{\mu^2} \right) - \frac{g_4 m_R^2}{16\pi^2 \varepsilon} + \frac{g_4 m_R^2}{32\pi^2} (\gamma_E - \log(4\pi)) + \delta_2 - p^2 \delta_Z \right)}, \quad (\text{A.19})$$

$$G_4 = -ig_4 - i \frac{g_4^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{\Delta(s)\Delta(t)\Delta(u)}{\mu^6} \right) + i \frac{3g_4^2}{16\pi^2 \varepsilon} - i \frac{3g_4^2}{32\pi^2} (\gamma_E - \log(4\pi)) - i\delta_4.$$

Entonces, podemos escoger los contratérminos de tal forma que G_2 y G_4 renormalizados nos queden de la forma más sencilla posible, es decir, que se coman las partes divergentes y finitas. Para ello, hacemos

$$\delta_Z = 0, \quad \delta_2 = \frac{g_4 m_R^2}{16\pi^2 \varepsilon} - \frac{g_4 m_R^2}{32\pi^2} (\gamma_E - \log(4\pi)), \quad \delta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2 \varepsilon} - \frac{3g_4^2}{32\pi^2} (\gamma_E - \log(4\pi)),$$

lo que nos lleva a la siguiente forma del propagador y la función a 4pt:

$$G_2^R = \frac{i}{p^2 - \left(m_R^2 + \frac{\lambda_R m_R^2}{32\pi^2} \left(1 + \log \frac{m_R^2}{\mu^2} \right) \right)}, \quad (\text{A.20})$$

$$G_4^R = -i\lambda_R - i \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{\Delta(s)\Delta(t)\Delta(u)}{\mu^6} \right).$$

donde $\tilde{\Delta}(Q) = \frac{-Q}{\mu^2} x(1-x) + \frac{m_R^2}{\mu^2}$. El nombre de esta forma de fijar las condiciones de renormalización viene de *minimal subtraction*⁶².

Se puede demostrar que, mediante redefiniciones de las escalas de renormalización, todo esto que hemos hecho puede escribirse de tal forma que al final del día la física sea la misma.

A.6.3. Grupo de renormalización continuo y renormalización wilsoniana

Hubo una época en la que se pensaba que una teoría no renormalizable iba a ser necesariamente una teoría no consistente. Sin embargo, esto no es cierto para la forma de pensar la física contemporánea:

⁶²De hecho, MS si solo quitas las cosas divergentes y dejas sumandos como el $\log(4\pi)$ y \overline{MS} si quitas tanto las divergencias como las constantes.

desde el punto de vista de las **teorías efectivas**, a cada teoría le asociamos un *cut-off* ultravioleta Λ ⁶³ que representa la energía a partir de la cual nuestra teoría no es válida⁶⁴. Desde aquí, el ser o no renormalizable tiene que ver con poder meter o no todos los efectos de este Λ en un número finito de parámetros de tal forma que al final las cantidades físicas no tengan dependencia de esa escala. En caso de que esto no sea posible tendremos sencillamente una teoría que no es válida a todas las energías sino que cuando nos acercamos al *cut-off* deja de servirnos⁶⁵ y no puede ser por tanto una *teoría del todo*, pero tampoco pasa nada.

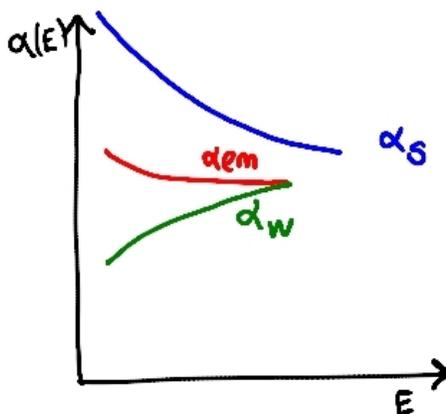


Figura A.5: Running de las constantes de acoplamiento del modelo estándar.

Entonces, la gráfica de A.5 que hemos visto en asignaturas de física de partículas se interpreta de la siguiente forma: en primer lugar, α_{EM} no es el famoso $1/137$ sino que cambia con la energía, igual que el resto de constantes de acoplamiento (ya sabemos, por ejemplo, que el hecho de que α_s diverja cuando $E \rightarrow 0$ es el causante de la hadronización, del confinamiento de los quarks). También sabemos que a la escala de Fermi –el vev del Higgs– la interacción electromagnética y la débil se unifican. Aunque desde el punto de vista wilsoniano esto hay que pensarlo de forma distinta: la teoría electrodébil –formulada a altas energías– se refleja de forma efectiva en las teorías débil y electromagnética, que percibimos como distintas. Entonces, las **teorías de gran unificación** buscarían, desde este punto de vista, una escala por encima de la de la unificación electrodébil en la que –al menos– las tres interacciones del modelo estándar se vieran como una teoría efectiva a bajas energías proveniente de otra con un único grupo de simetría interna. Un último ejemplo relevante que podemos comentar es la relatividad general: podemos pensar la acción de Einstein-Hilbert como la de una teoría efectiva: no aparecen términos en

⁶³Esto no tiene que ser siempre un *cut-off* en momentos, puede ser que venga dado por una longitud característica o de cualquier otra forma. Lo denotamos así genéricamente.

⁶⁴Lo que algunas veces se verbaliza como «no captura los grados de libertad UV».

⁶⁵Es precisamente el caso de la teoría de Fermi para las interacciones débiles.

derivadas superiores porque vienen suprimidos en potencias de $1/M_{Pl}$ ⁶⁶.

De esta forma, tendremos que nuestras constantes de acoplo dependen del *cut-off* Λ de forma que la física a bajas energías es independiente de Λ . La idea wilsoniana es pensar que los grados de libertad UV se reflejan en la física IR definiendo una teoría efectiva que describe el fenómeno en el que estamos interesadas. Esto se hace «integrando *out*» capas de momento desde $\Lambda - \varepsilon$ hasta Λ , de forma que se define un nuevo *cut-off* Λ' . Lo ilustramos con una teoría sencilla con un único campo⁶⁷

$$L[\phi] = L_0[\phi] + \sum_i g_i \mathcal{O}_i[\phi],$$

donde g_i son las constantes de acoplo asociadas a los operadores \mathcal{O}_i . Podemos escoger cualesquiera de los argumentos anteriores para decir que introducimos un *cut-off* Λ . Queremos ahora calcular la acción efectiva a una escala $\mu < \Lambda$; para ello «integramos *out*» todos los modos con energías en (μ, Λ) , que en el lenguaje de la path integral es

$$e^{iS[\phi', \mu]} = \int_{\mu < p < \Lambda} D\phi e^{iS[\phi, \Lambda]},$$

donde $S[\phi, \Lambda]$ es la acción a la escala Λ . La nueva acción depende de ϕ' , un campo renormalizado. Las constantes de acoplo también han cambiado y podremos escribir

$$S[\phi', \mu] = \int d^4x \left(L_0[\phi'] + \sum_i g_i(\mu) \mathcal{O}_i[\phi'] \right)^{68}.$$

A la luz de esto, renormalizar y hacer que nuestras constantes de acoplo dependan de la escala de energía no es solo una forma inteligente de deshacernos de los infinitos sino la forma en la que la teoría incorpora los efectos de altas energías al querer encontrar una descripción efectiva a una escala menor.

Todo esto se piensa como un *flujo* en el espacio de teorías, donde las coordenadas son las constantes de acoplo del lagrangiano⁶⁹. Así, al pasar de una escala μ a una μ' en la que, que ciertos grados de libertad ultravioletas sean «integrados *out*» para encontrar una teoría efectiva a la escala μ' , se traduce en que ciertos parámetros pasan a no aparecer en el lagrangiano⁷⁰, como se ilustra en la siguiente figura

⁶⁶Correcciones en α' si queremos pensar la relatividad general como una teoría efectiva a bajas energías de una teoría de cuerdas.

⁶⁷Esto se puede hacer con campos con espín, escribiendo los términos más generales que hagan que la acción sea un escalar y mirando a ver cuáles son –y qué dimensiones tienen– las funciones de acoplo

⁶⁸Esto es posible incluso en teorías no renormalizables porque estamos alejándonos de Λ «por debajo», es decir, yendo hacia la región *IR* donde sin duda la teoría está bien definida.

⁶⁹Aquí vendrían incluidas también las masas, que ya sabemos también se renormalizan.

⁷⁰Esto lo hacían en materia condensada al considerar *spin blocks* o en día a día cualquiera de nosotras al entender que el proceso de inflar un globo o calentar unas lentejas no tiene por qué explicarse hablando de los quarks por los que están formados. Es que la separación de escalas es una idea terriblemente intuitiva.

del paper de Polchinski [60] en que demuestra la renormalización desde este punto de vista de forma sistemática:

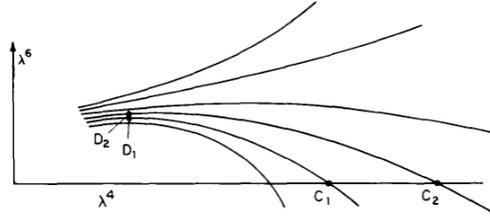


Figura A.6: Trayectorias del grupo de renormalización para una teoría escalar. [60]

Algunos apellidos más. Acoplos marginales

El flujo en el espacio de teorías va a corresponderse de verdad con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias al pensarlo de la forma que presentamos ahora: con las funciones β . Como siempre, lo ilustramos con la teoría escalar pero se podría hacer en general. Consideramos términos genéricos $\lambda_n \phi^n$ en d dimensiones. Entonces, puedo tomar $g_n = \Lambda^{d - \frac{d-2}{2}n} \lambda_n$ adimensional⁷¹. Podemos estudiar cómo cambia este acoplo adimensional cuando nos movemos en la escala de energía:

$$\beta_n = \Lambda \frac{dg_n}{d\Lambda} = m g_n + \beta_n^h$$

Lo interesante –las correcciones cuánticas que no vienen solamente del análisis dimensional– está en β_n^h , la **función beta cuántica**. Si hacemos $t = -\log(\Lambda/\Lambda_0)$ es muy fácil pensar β_n como la velocidad de g_n : t es un tiempo que avanza según Λ se va haciendo más pequeño desde $\Lambda(t=0) = \Lambda_0$. Entonces, este panorama: un vector de constantes de acoplo (g_1, \dots, g_n) y otro de velocidades $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, no es más que un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. El término flujo tiene ahora el significado de sistemas dinámicos y podemos pensar, a la manera de ecuaciones diferenciales, que las trayectorias son tangentes a $\vec{\beta}$ y parten y llegan a **puntos fijos** –donde $\vec{\beta} = 0$ ⁷²–. Antes de seguir hacemos algunas reflexiones sobre la ecuación anterior. Si $m \neq 0$ la podemos simplificar porque β_n^h va siempre de forma no lineal en λ (aparece por las interacciones) y al estar trabajando perturbativamente en la constante de acoplo, nos quedamos con el término de orden mayor:

★ Si $m > 0$ (resp. $n > 4$ en 4 dimensiones) entonces la función β clásica es la dominante y puedo

⁷¹Rebautizamos $d - \frac{d-2}{2}n = m$.

⁷²Prestemos atención a esto: si $\vec{\beta} = 0$ entonces tenemos a la teoría en un «punto» en que no depende de la escala de energía: los puntos fijos del grupo de renormalización serán de hecho ejemplos importantísimos de teorías conformes que representan precisamente donde la teoría deja de tener un carácter para tener otro. Un ejemplo son los cambios de fase. Volvemos a la relación entre fenómenos críticos y QFT. En particular, CFTs.

pensar $\frac{dg_n}{dt} \simeq -mg_n \implies g_n = g_n^0 e^{-mt}$. Según t vaya creciendo g_n se va haciendo más pequeño. Por eso, estos acoplos se llaman **irrelevantes** (en el IR).

- ★ Si $m < 0$ (resp. $n > 4$ en 4 dimensiones) entonces la función β clásica es la dominante de nuevo y puedo pensar $\frac{dg_n}{dt} \simeq mg_n \implies g_n = g_n^0 e^{mt}$. Según t vaya creciendo g_n se va haciendo mayor. Por eso, estos acoplos se llaman **relevantes** (en el IR) y son los que van a marcar la dinámica del sistema.

Cuando $m = 0$ la parte clásica lineal se anula y nos quedan solamente las correcciones cuánticas β_n^h . A estos acoplos los llamamos **marginales**. Si podemos suponer que $\beta_n^h = b_0 g_n^p$ para algún $p > 1$ entonces podemos resolver el sistema:

$$g_n = \frac{g_n^0}{\left(1 + \frac{b_0(p-1)}{g_0^{p-1}} t\right)^{\frac{1}{p-1}}}$$

Y el signo de b_0 va a ser lo que determine cómo se comporta esta teoría al tener en cuenta las correcciones cuánticas⁷³:

- ★ Si $b_0 > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} g_n = 0$. Se llaman **marginalmente irrelevantes**. Este es el caso de QED y en general de teorías que son libres en el IR: tenemos el problema de que no sabemos de donde vienen en el UV, tenemos acoplos que son muy importantes alrededor de $t = 0$ y eso no cuadra con el espíritu de nuestro método perturbativo⁷⁴.
- ★ Si $b_0 < 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} g_n = \infty$. Se llaman **marginalmente relevantes**. Esto es cuanto menos raro y de hecho, hay un t tal que $\frac{|b_0|^{p-1}}{(g_n^0)^{p-1}} t = 1$, donde el g_n diverge, que DEFINE UNA NUEVA ESCALA DE LA TEORÍA⁷⁵:

$$\Lambda = \Lambda_0 e^{-\frac{g_0^{p-1}}{(p-1)|b_0|}}.$$

De estas teorías se dice que tienen **libertad asintótica**, como sucede en QCD: a altas energías los quarks son libres pero a bajas energías el acoplo se hace muy grande y se produce el confinamiento⁷⁶. Estas teorías tienen sentido en el UV: son libres –o al menos casi libres, por comparación– y por eso se las llama **completas**.

⁷³Esto está desarrollado en todos los libros de QFT cuando explican renormalización en los análisis perturbativos de las funciones de correlación. Por ejemplo, algunas referencias son el capítulo 3. de [61], capítulo 12 de [50], el 12 de [62] o el capítulo 8 de [56]. Nuestro enfoque es el centrado en la renormalización Wilsoniana, centrándonos en la existencia de una escala propia física para cada teoría.

⁷⁴Puedo pensar ahora una nueva definición de renormalizabilidad: teorías en las que puedo mover $t = 0$ arbitrariamente hasta hacer el límite $E \rightarrow \infty$ en energías.

⁷⁵Que ya vemos es mucho más pequeña que el Λ_0 del *cut-off*.

⁷⁶Este problema es altamente no trivial. Explicarlo consistentemente es uno de los problemas del milenio.

★ Si $b_0 = 0$ entonces tenemos una teoría conforme. También se las llama **teorías finitas** y son invariantes de escala también a nivel cuántico⁷⁷.

Entonces, a pesar de que las teorías no renormalizables tienen todo el derecho a existir, desde este punto de vista también tiene sentido estudiar ampliamente las renormalizables: las que tienen acoplos marginales y relevantes.

Como comentario final diremos que esta idea es muy bonita y seguramente –junto al concepto de teoría efectiva– sea uno de los puntos clave de la física del siglo pasado pero eso no impide que los cálculos sean muy complicados. A veces tenemos una teoría conocida –pongamos que es conforme, que estamos en un punto fijo– y le añadimos un término para intentar modelizar algún fenómeno físico⁷⁸; decimos que la hemos perturbado con un cierto operador, que será relevante/irrelevante/marginalmente (ir)relevante según las dimensiones de su constante de acoplo y las dimensiones del espacio. Entonces, nos interesa entender cómo es la trayectoria del grupo de renormalización dentro del espacio de teorías. Esto es un problema altamente no trivial y es aquí en uno de los sitios donde la dualidad AdS/CFT puede ayudarnos, al convertirlo en cálculos más sencillos en el lado gravitatorio⁷⁹.

La diferencia entre pensar en el grupo de renormalización wilsoniano y el grupo de renormalización continuo es que en el segundo tenemos intención de mandar el *cut-off* a infinito. En la sección A.6.2 no tuvimos espacio para explicar cómo se obtienen las funciones β desde esa forma de entender la renormalización (quitarnos los infinitos). La idea es que para comparar con el experimento introducimos una escala –normalmente a la que vamos a renormalizar– pero al final del día exigimos que las cosas sean independientes de ella. Así se definen funciones beta para cada constante de acoplo, que en el caso de las teorías renormalizables coinciden con las que hemos definido en esta sección.

Entonces, aunque la forma adecuada de pensar la renormalización es la wilsoniana, es técnicamente más sencillo hacer regularización dimensional o cualquier otro procedimiento en el que nos planteemos «deshacernos» de los infinitos y el resultado va a ser el mismo: estamos mirando a la misma cosa desde dos puntos de vista distintos.

A.6.4. El punto fijo de Wilson-Fisher

Hemos llegado entonces a nuestros primeros ejemplos de teorías conformes. Los puntos fijos. En esta sección vamos a mostrar un ejemplo muy bonito y útil⁸⁰ que nos trae a la práctica todo lo que

⁷⁷No hay anomalías conformes ? esto? . Esto es muy importante, ya se hablará más adelante. Toda esta discusión, a la vista de las anomalías y de la simetría conforme, toma un carácter filosófico más grave pero también interesante.

⁷⁸Puede ser un defecto en materia condensada, una interacción en física de partículas...

⁷⁹Ya explicaremos lo que es esta famosa dualidad de Maldacena, solo la nombramos para ver que nos vuelven a salir las teorías conformes.

⁸⁰Se puede demostrar que el modelo de Ising no es más que una teoría escalar ϕ^4 .

hemos aprendido de campos cuánticos y renormalización: el punto fijo de Wilson-Fisher. Si escribimos

$$L = \partial\phi^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

en $d = 4 - \varepsilon$ dimensiones tenemos que $[m^2] = 2$ y $[\lambda] = \varepsilon$. Si definimos los acoplos adimensionales como $m^2 = \mu^2 g_2$ y $\lambda = \mu^\varepsilon g_4$, podemos escribir las funciones β a primer orden en ε , utilizando la versión continua del grupo de renormalización –es decir, llevando la escala de renormalización Λ a infinito en energías⁸¹–:

$$\beta_4 = \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} = -\varepsilon g_4 + \frac{3u^2}{16g_4^2}, \quad \beta_2 = \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} = -2g_2 + \frac{g_2 g_4}{16\pi^2}.$$

Entonces, si no hacemos $\varepsilon = 0$, vemos que tenemos dos puntos fijos: la teoría libre y un punto fijo (**de Wilson-Fisher**) [46] no trivial –interactuante– en el IR: $(0, 16\pi^2/3\varepsilon)$. Las trayectorias del grupo de renormalización se pueden pintar como:

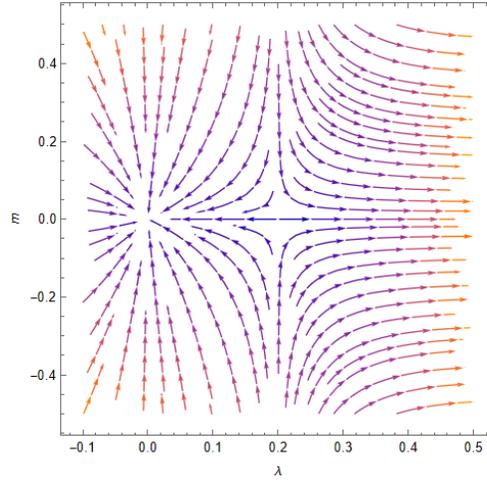


Figura A.7: Punto fijo de Wilson-Fisher con DIMREG.

Si en lugar de hacer DIMREG hubiéramos impuesto un *cut-off* físico –una longitud mínima a partir de la que no podemos resolver nada– como nos enseñó Wilson, las correcciones a la masa serían distintas⁸²:

$$\beta_2 = -2g_2 - \frac{g_4}{16\pi^2} + \frac{g_2 g_4}{16\pi^2}, \quad \beta_4 = \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} = -\varepsilon g_4 + \frac{3u^2}{16g_4^2}.$$

Desde este punto de vista, no tenemos que mandar el *cut-off* al infinito, solo tenemos que tener en cuenta que nuestra teoría no está bien definida para longitudes más pequeñas. Las funciones β representan cómo cambian los acoplos cuando vamos hacia el IR –y es que en realidad estamos manteniendo fijas

⁸¹O visto de otro modo, considerando escalas de longitud arbitrariamente pequeñas. Claramente, esto es posible porque la teoría es renormalizable.

⁸²Es que el asunto de las divergencias cuadráticas es sutil y tiene en general que ver con los problemas de jerarquías.

cosas distintas—. Las trayectorias del RG cambian un poco entonces: ¡el punto fijo corresponde ahora a una teoría con $\langle \phi \rangle \neq 0$! $(-\varepsilon/6, 16\pi^2/3\varepsilon)$ Acabamos de ver un ejemplo de ruptura espontánea de la simetría \mathbb{Z}_2 al obtener el campo un vev no nulo⁸³. Pintamos el nuevo diagrama de fases en la siguiente figura:

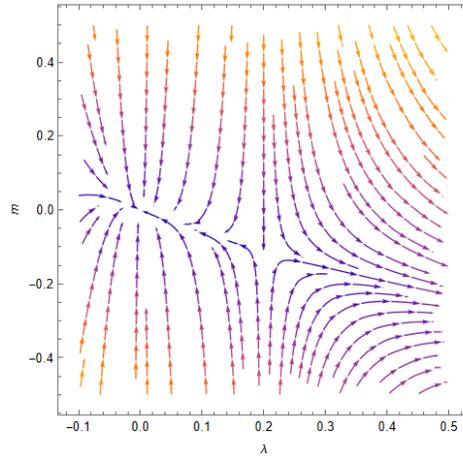


Figura A.8: Punto fijo de Wilson-Fisher a la manera wilsoniana.

Como en todo esto hemos estado trabajando con $\varepsilon \in \mathbb{R}$ pero sin llevarlo a cero (no hemos recuperado las 4d) se puede estudiar qué pasa cuando $\varepsilon \rightarrow 1$, por ejemplo. Este caso es muy interesante porque permite estudiar las transiciones de fase ferromagnéticas y, aunque en realidad hacer $\varepsilon \sim 1$ está lejos de la expansión perturbativa que planteábamos, los resultados son muy acertados.

De vuelta a las funciones de correlación. La ecuación de Callan-Symanzik

Después de esta *tournee* por el concepto de renormalización, sabemos que los acoplos y las cantidades físicas que una vez creímos constantes —la masa, la carga, las constantes de acoplo— dependen en realidad de la escala de energía a la que estemos. Lo mismo sucede con las BR de los scatterings cuando vamos más allá del *tree level*. Entonces, parece lógico preguntarse si podemos entender cómo se comportan las funciones de correlación arbitrarias $G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) \rangle$ al movernos a lo largo de una trayectoria del grupo de renormalización⁸⁴. Si el campo se renormaliza como $\phi = Z^{1/2}(\Lambda)\phi_R$, entonces la función de correlación se transformará en

$$G(x_1, \dots, x_n; \Lambda) = Z_\phi(\Lambda)^{\frac{n}{2}} G_R(x_1, \dots, x_n; \mu).$$

⁸³Si repitiéramos esto con el campo escalar complejo, que en lugar de tener una simetría discreta de paridad tiene un $U(1)$ completo.

⁸⁴Lo hacemos con una teoría escalar por simplicidad en la notación pero todo se sigue igual en el resto de casos *mutatis mutandis*.

Si tenemos en cuenta que la función de correlación renormalizada no depende del *cut-off*⁸⁵ sino de la escala μ y de los parámetros m_R, λ_R mientras que el lado de la izquierda no depende de μ . Derivando a ambos lados llegamos a que

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} - n \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z_\phi \right] G_R(x_1, \dots, x_n; \mu) = 0,$$

que se puede reescribir como

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial g} + \beta_m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma(g) \right] G_R(x_1, \dots, x_n; \mu) = 0, \quad (\text{A.21})$$

donde β_λ, β_m son las funciones beta asociadas a λ y m , que ya conocemos y $\gamma = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z_\phi$ se llama **dimensión anómala**. A A.21 se la llama **ecuación de Callan-Symanzik**, fue descubierta independientemente por Curtis Callan [63] y Kurt Symanzik [64] en 1970.

El caso de los puntos fijos. Un primer encuentro (in)esperado con una *dimensión conforme*

Para cerrar esta muy sesgada introducción a la teoría cuántica de campos, en la que hemos intentado presentar algunos conceptos relevantes haciendo especial énfasis en la importancia de las escalas de energías y algunos puntos claves que nos ayudan a justificar por qué es interesante estudiar teorías conformes, vamos a pensar qué sucede cuando estudiamos A.21 en un punto fijo del RG. Estos son por definición aquellos puntos del «espacio de teorías» en que las funciones beta se anulan. La ecuación de Callan-Symanzik nos ayuda a mostrar algunos aspectos interesantes de estos puntos. Consideramos el propagador: $G(x, 0)$:

$$\mu \partial_\mu G_R = -\gamma G_R$$

En general, γ , la dimensión anómala, depende de los acoplos y también de la escala de energía, pero en los puntos fijos los acoplos no dependen de la escala de energía así que tomará un único valor. Entonces, la ecuación anterior se puede integrar fácilmente: $G_r = \mu^{-2\gamma/2} F(x)$. La forma de G obliga a que, por análisis dimensional, $G_R \sim 1/x^{2\frac{d-2}{2}}$. Entonces,

$$G_R \sim \frac{\mu^{-\frac{2}{2}\gamma}}{x^{2(\frac{d-2}{2} + \frac{\gamma}{2})}}.$$

Esto muestra que en los puntos fijos las funciones de correlación tienen la forma de las de una teoría conforme pero en la que los operadores no tienen la dimensión de contar $\frac{d-2}{2}$ sino algo distinto: las

⁸⁵O de la escala de renormalización, si se quiere.

dimensiones reciben correcciones cuánticas:

$$\Delta = \frac{d-2}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Esto se llama **dimensión anómala**.

Apéndice B

La aproximación WKB.

En el apéndice de QFT ya hablamos de la **aproximación semiclásica** y de cómo el principio de correspondencia nos decía que tomando los límites adecuados, tanto de la mecánica cuántica como de la teoría cuántica de campos deberíamos ser capaces de recuperar la mecánica clásica. La herramienta que utilizamos en el último capítulo para calcular propagadores de campos escalares en el fondo de la *black brane*, la **aproximación geodésica**, no es más que el resultado de aplicar a nuestro problema la aproximación WKB.

La **aproximación WKB** recibe su nombre por los tres físicos que la «inventaron» de forma independiente a principios del siglo XX: Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers y Léon Brillouin¹. Se trata de un método que permite encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales ordinarias en las que la derivada de orden superior va multiplicada por un parámetro pequeño $\varepsilon \rightarrow 0$.

En este apéndice vamos a revisar dos casos relevantes: el problema original con la ecuación de Schrodinger y el propagador del campo escalar libre utilizando [65] y [66].

B.1. La primera versión: el límite clásico de la ecuación de Schrödinger

Sabemos que la mecánica clásica tiene que poder recuperarse de la mecánica cuántica cuando nuestro problema tenga correcciones cuánticas que sean despreciables, es decir, cuando las escalas de nuestra teoría sean tales que podamos tomar $\hbar \simeq 0$ ². Esto se puede pensar también utilizando la

¹En realidad, unos años antes el matemático Harold Jeffreys había desarrollado un método para resolver un tipo más general de ecuaciones diferenciales que incluía este mismo. Además, métodos semejantes habían sido propuestos por Liouville prácticamente un siglo antes.

²En realidad \hbar es una constante de la naturaleza, no podemos hacer $\hbar \rightarrow 0$, lo que estamos planteándonos es diversas teorías –o naturalezas– con valores de \hbar que hacen $\hbar \rightarrow 0$ y viendo como la mecánica clásica va siendo la descripción más acertada al tomar este límite.

longitud de onda de De Broglie: la versión clásica de una teoría será una buena aproximación cuando λ_{DB} sea muy pequeña en comparación con la escala propia del sistema que estudiamos. En particular, la aproximación WKB es válida en el régimen en que cierto pariente de λ_{DB} sea pequeño y varíe lentamente respecto a las coordenadas del problema.

Consideramos la función de onda que describe una partícula de masa m sometida a un potencial $V(\vec{x})$. Es entonces solución de la ecuación de Schrodinger³:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial^2 + V(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t).$$

Como la función de onda es una función escalar compleja nada nos impide escribirla como:

$$\Psi(\vec{x}, t) = A(\vec{x}, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, t)}$$

donde $A(\vec{x}, t)$ y $S(\vec{x}, t)$ son funciones escalares reales. Ahora podemos introducir esta expresión en la ecuación de Schrodinger para llegar a una ecuación en cada una de ellas:

$$\frac{\partial}{\partial t} S(\vec{x}, t) + \frac{[\partial S(\vec{x}, t)]^2}{2m} + V(\vec{x}, t) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 A(\vec{x}, t)}{A(\vec{x}, t)} \quad (\text{B.1})$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} A(\vec{x}, t) + \partial A(\vec{x}, t) \cdot \partial S(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} A(\vec{x}, t) \partial^2 S(\vec{x}, t) = 0 \quad (\text{B.2})$$

De hecho, si tenemos en cuenta que el módulo de la función de onda nos da la densidad de probabilidad de encontrarnos en dicho estado, la segunda de las ecuaciones anteriores no es más que la ecuación de continuidad para esta, donde la corriente asociada a la densidad de probabilidad es:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[\Psi^*(\vec{x}, t) \frac{\hbar}{im} \partial \Psi(\vec{x}, t) \right] = A(\vec{x}, t)^2 \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{m}.$$

Además, la primera ecuación, si nos quedamos a orden 0 en \hbar se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} S_0(\vec{x}, t) + \frac{(\partial S_0(\vec{x}, t))^2}{2m} + V(\vec{x}, t) = 0,$$

la **ecuación de Hamilton-Jacobi**, formulación de la mecánica clásica equivalente a todas las demás: principio de mínima acción, las ecuaciones de Euler-Lagrange o ecuaciones de Newton.

³Hemos recuperado los \hbar porque será precisamente el parámetro sobre el que hagamos una expansión.

La idea será plantear soluciones en series de potencias:

$$S = S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots,$$

e introducir esa expresión en B.1, la ecuación diferencial de segundo orden que encontramos para S , entonces podremos obtener un sistema que venga de igualar a cero orden a orden y terminaremos encontrando una solución aproximada para la función de onda. Podemos escribir rápidamente el caso unidimensional con energía conservada, donde B.1 se convierte en

$$(S'(x))^2 - i\hbar S''(x) = p^2(x),$$

donde $-\hbar^2 \partial_x^2 \Psi(x) = p^2(x) \Psi(x)$. Se puede demostrar que si $V(x)$ varía de forma continua entonces $i\hbar S''$ es pequeña. Ese será precisamente el régimen en que la aproximación WKB será válida y tendremos que estudiar cómo encontrar una solución cuando esta condición no se cumpla o, en general, para «unir» las soluciones en dominios en los que sí se cumple; esto se llama *connection formula*.

Si ahora metemos la expansión en potencias de \hbar en la ecuación –no lineal– anterior llegamos a

$$(S'_0 + \hbar S'_1 + \hbar^2 S'_2 + \dots)^2 - i\hbar (S''_0 + \hbar S''_1 + \hbar^2 S''_2 + \dots) - p^2(x) = 0.$$

Si ahora expandimos y nos quedamos a segundo orden tenemos dos ecuaciones que vienen de igualar a cero cada uno de los coeficientes en \hbar :

$$\begin{aligned} (S'_0)^2 - p^2(x) &= 0 \\ 2S'_0 S'_1 - iS''_0 &= 0. \end{aligned}$$

La primera ecuación tiene por solución $S_0(x) = \pm \int_{x_0}^x p(x') dx'$ y nos permite reescribir la segunda como $S'_1 = \frac{i}{2} \frac{p'}{p}$, que se resuelve ahora fácilmente:

$$iS_1(x) = -\frac{1}{2} \ln p(x) + C,$$

donde tanto x_0 como C son constantes de integración. Entonces, si introducimos la expresión aproximada de S en la función de onda nos encontramos con la solución WKB:

$$\Psi(\vec{x}, t) = A(\vec{x}, t) e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x') dx'}.$$

B.2. La segunda versión: la aproximación WKB en QFT.

Vamos a calcular el propagador del campo escalar masivo en d dimensiones. Hacemos la versión euclídea por sencillez pero en nuestra aproximación geodésica haremos algo semejante a esto solo que en AdS_{d+1} ($d = 4$) en lugar de en \mathbb{R}^d . La acción es

$$S = \int d^d x \partial \phi^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,$$

y las ecuaciones de movimiento, si pasamos a coordenadas esféricas, son:

$$\partial_r \left(r^{d-1} \partial_r \phi \right) + r^{d+1} \partial_{S^{d-1}}^2 \phi - r^{d-1} m^2 \phi = 0,$$

donde $\partial_{S^{d-1}}^2$ es el laplaciano en S^{d-1} .

Escribimos $\phi = e^F$ y lo introducimos en la ecuación anterior:

$$(d-1)r^{-1} \partial_r F + \partial_r F^2 + r^{d-1} \partial_r^2 F + \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \partial_i (\hat{g}^{ij}) \partial_j F + r^2 \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \hat{g}^{ij} \partial_i \partial_j F + r^2 \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \hat{g}^{ij} \partial_i F \partial_j F - m^2 = 0, \quad (\text{B.3})$$

El equivalente a \hbar en el apartado anterior va a ser $1/m$. Es decir, asumimos que m es grande y expandimos F en serie de potencias. Nos quedamos a orden $\mathcal{O}(1/m)$:

$$F = m \sum_{n=0} m^{-n} F_n \quad , \quad F \sim m F_0 + F_1 + \mathcal{O}(m^{-1}).$$

Metemos esto en B.3 llegamos a dos ecuaciones:

$$\partial_r F_0^2 + r^2 \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \hat{g}^{ij} \partial_i F_0 \partial_j F_0 - 1 = 0,$$

$$(d-1)r^{-1} \partial_r F_0 + 2 \partial_r F_0 \partial_r F_1 + \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \partial_i (\hat{g}^{ij}) \partial_j F_0 + r^2 \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \hat{g}^{ij} \partial_i \partial_j F_0 + 2r^2 \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \hat{g}^{ij} \partial_i F_0 \partial_j F_1 = 0.$$

La acción es invariante $SO(d)$ así que podemos buscar soluciones de F_0, F_1 que solo dependan de r de manera que lo anterior se simplifica mucho:

$$\partial_r F_0^2 - 1 = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$(d-1)r^{-1} \partial_r F_0 + 2 \partial_r F_0 \partial_r F_1 = 0, \quad (\text{B.5})$$

Estas ecuaciones son muy sencillas y nos dan la forma del campo ϕ :

$$F_0 = \pm r, \quad F = \log \left(Cr^{-\frac{d-1}{2}} \right) \implies \phi = C \frac{e^{\pm mr}}{r^{\frac{d-1}{2}}}. \quad (\text{B.6})$$

Ahora vamos a comprobar que esto es de hecho la aproximación a primer orden del propagador del campo escalar con $m \gg 1$.

La función de Green del campo escalar masivo es

$$G = \int d^d \vec{p} \frac{1}{\vec{p}^2 + m^2} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} = \int d^d \vec{p} \int_0^\infty dt e^{-t(\vec{p}^2 + m^2)} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

Si completamos cuadrados en el exponente

$$-t(\vec{p}^2 + m^2) + i\vec{p} \cdot \vec{x} = - \left(\sqrt{t}\vec{p} - \frac{i}{2\sqrt{t}}\vec{x} \right)^2 - \frac{\vec{x}^2}{4t} - tm^2$$

y hacemos $\sqrt{t}\vec{p} - \frac{i}{2\sqrt{t}}\vec{x} = \vec{k}$ la integral se puede calcular analíticamente (nos da una función de Bessel):

$$G = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\vec{x}^2}{4t} - tm^2} = 2^{d/2} m^{\frac{d-2}{2}} |x|^{\frac{2-d}{2}} K_{\frac{d-2}{2}} \left(\sqrt{m^2|x|^2} \right).$$

Ahora podemos hacer un cambio de variable $M = m|x|$ y tomar el límite $M \gg 1$ –que pensamos como $m \gg 1$ – y recuperar B.6:

$$G \simeq \sqrt{\pi} 2^{\frac{d-1}{2}} m^{\frac{d-3}{2}} |x|^{\frac{1-d}{2}} e^{-m|x|} \sim \frac{e^{-m|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}}.$$