



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

MEDIDAS DE SIMILARIDAD PARA CONJUNTOS DIFUSOS INTERVALO-VALUADOS

María Fernández Cruz

Dirigido por
Agustina Bouchet y Susana Montes

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Facultad de Ciencias
Grado en Matemáticas

Junio de 2022

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Motivación	3
1.2. Objetivos	4
1.3. Estructura del trabajo	5
2. Conceptos básicos	6
3. Medidas de similaridad	14
3.1. Medidas de similaridad en conjuntos difusos intervalo-valuados	14
3.2. Relaciones de orden entre las medidas de similaridad	34
4. Aplicación al procesamiento de imágenes	43
4.1. Modelado de las imágenes	43

4.2. Descripción del experimento	44
4.3. Resultados	48
4.4. Modelado alternativo de la imagen	53
5. Conclusiones	60
Bibliografía	61

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

En la teoría de conjuntos clásica, un elemento pertenece a un conjunto o no pertenece, es decir, su grado de pertenencia es cero o uno. En cambio, los conjuntos difusos permiten valores intermedios de pertenencia y permiten formalizar expresiones ambiguas. Una de las principales aplicaciones de los conjuntos difusos es en el campo de la toma de decisiones ya que son útiles para modelar el criterio humano el cual es, en muchos casos, impreciso. Por ejemplo, un número pertenece o no pertenece a *la clase de los números pares*, es algo objetivo. En cambio, *la clase de los números grandes* es subjetivo ya que dependerá de lo que se considere como *grande*.

La teoría de conjuntos difusos fue enunciada por primera vez por Lotfi Zadeh [23] en 1965. Zadeh afirmó que en el mundo físico real hay clases que no tienen un criterio de pertenencia definido de forma precisa, fue así como definió los objetos con grados de pertenencia continuos a los que se les asigna un número entre cero y uno. Los conjuntos difusos han sido ampliamente utilizados en muchos campos como en el procesamiento de imágenes y, como se mencionó anteriormente, en la toma de decisiones.

Una generalización de los conjuntos difusos son los conjuntos intuicionísticos propuestos por Atanassov [1]. Mientras que los conjuntos difusos sólo asignan un valor de pertenencia, los conjuntos intuicionísticos complementan este con un valor que representa

el grado de no pertenencia que, evidentemente, está relacionado con el de pertenencia. No es esta la única forma de generalizar los conjuntos difusos y, por tanto, permitir modelar problemas con incertidumbre respecto a la función que modeliza la pertenencia al conjunto. Con un objetivo similar surgieron los conjuntos difusos intervalo-valuados, en los que el grado de pertenencia no es un valor concreto en el intervalo unidad, sino un intervalo donde se supone que está ese valor de pertenencia, sin que sea posible precisar el mismo [10]. Ambas generalizaciones están directamente relacionadas y se podría trabajar, desde un punto de vista matemático, con cualquiera de las dos. No obstante, por ser en general más intuitivos, este trabajo está centrado en los conjuntos difusos intervalo-valuados.

La comparación de objetos, descritos mediante conjuntos difusos o cualquiera de sus extensiones, es un tópico de estudio muy habitual por sus aplicaciones en muchas áreas, como segmentación de imágenes [17], teoría de la decisión [13, 21] o reconocimiento de patrones [12, 14]. Una de las herramientas más importante para realizar dichas comparaciones son las medidas de similaridad, que permiten medir el grado de similaridad entre dos conjuntos. Tradicionalmente estas medidas dan como resultado un valor entre 0 y 1, donde 0 indica que los elementos comparados son completamente distintos y 1 indica que dichos elementos son idénticos. Muchos autores han propuesto diversas medidas de similaridad, por lo cual el objetivo principal de este trabajo es encontrar diferencias y similitudes entre ellas, haciendo un análisis completo de las mismas y analizando sus propiedades y posibles aplicaciones al procesamiento de imágenes.

1.2. Objetivos

Para este trabajo se proponen tres objetivos principales, los cuales se enumeran a continuación:

- Presentar los principales conceptos, operaciones y propiedades de los conjuntos difusos intervalo-valuados.
- Definir medidas de similaridad para comparar conjuntos intervalo-valuados y buscar relaciones entre ellas.
- Aplicar las medidas de similaridad al procesamiento de imágenes, analizando su influencia en el procesamiento de imágenes, tanto por la familia de similaridades elegida, como por los parámetros de la misma.

1.3. Estructura del trabajo

Derivado de todo lo anterior, este trabajo se estructura como sigue:

1. En el capítulo dos, tras una breve introducción de la teoría de conjuntos clásica, se introducen los conceptos necesarios para comprender el resto del trabajo y se fija la notación utilizada. Se introduce la definición de conjunto difuso, conjunto intuicionístico y conjunto difuso intervalo-valuado, relacionando dichos conceptos. Se explican las operaciones básicas entre conjuntos difusos intervalo-valuados a partir de ejemplos y gráficas. Por último, se enuncian y demuestran distintas propiedades entre este tipo de conjuntos.
2. En el capítulo tres se define el concepto de medida de similaridad para conjuntos difusos intervalo-valuados. Se propone una metodología que permite generar medidas de similaridad y, en concreto, familias de medidas. Estas tienen como casos particulares medidas para las que existe una correspondencia biunívoca con algunas medidas de similaridad dadas en la literatura por diversos autores para conjuntos intuicionísticos. Se estudian las propiedades y relaciones entre ellas.
3. En el capítulo cuatro se introduce la definición de imagen y se presentan dos enfoques para modelar una imagen a partir del uso de conjuntos difusos intervalo-valuados. Se analiza la sensibilidad de las medidas de similaridad estudiadas en el capítulo previo frente al ruido. Para ello se desarrolla un experimento el cual consiste en agregar ruido gaussiano a las imágenes para luego medir la similaridad entre la imagen original y la imagen inmersa en ruido.
4. Por último, en el capítulo cinco se presentan las conclusiones principales del trabajo, así como algunos puntos abiertos derivados del mismo.

Capítulo 2

Conceptos básicos

En este capítulo se presentan las nociones de conjunto difuso, conjunto intuicionístico y conjunto difuso intervalo-valuado y se explica la relación entre ellos. Se definirán las operaciones de los conjuntos intervalo-valuados ejemplificando de forma gráfica y numérica, así como también, se enunciarán y probarán distintas propiedades entre este tipo de conjuntos. En particular, se demostrarán dos propiedades básicas sobre la unión e intersección de conjuntos intervalo-valuados.

En la teoría de conjuntos clásica, dado un referencial X , un conjunto A se define a partir de su función característica denotada por χ_A . Esta función asigna un 1 a los elementos de X que pertenezcan al conjunto A y un 0 a los que no pertenezcan, es decir, los clasifica en pertenecientes al conjunto y no pertenecientes de la siguiente manera:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

En los conjuntos difusos se generaliza esta función de pertenencia de forma que a cada elemento del referencial X se le asigna un número entre 0 y 1 según su grado de pertenencia al conjunto A .

Definición 2.1. [23] Sea X el referencial, un conjunto difuso A se define como:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in X\}$$

donde $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ es la función de pertenencia que a cada $x \in X$ le asigna el grado de pertenencia de x en A .

En muchas ocasiones el pensamiento humano implica incertidumbre o imprecisión y, a veces, los conjuntos difusos no son suficientes para modelarlo ya sea debido a la presencia de vacilación o incertidumbre o el desconocimiento en la definición de la función de pertenencia. Es sabido que la teoría de conjuntos difusos asigna un grado de pertenencia a cada elemento y el grado de no pertenencia se calcula clásicamente como uno menos el grado de pertenencia, es decir, la no pertenencia de un elemento x al conjunto A se define como $1 - \mu_A(x)$. Los conjuntos intuicionísticos permiten que la no pertenencia no sea directamente una función del grado de pertenencia, aunque evidentemente está relacionada con ella. Teniendo en cuenta este hecho, Atanassov [2] introdujo el concepto de conjunto intuicionístico, que pretende reflejar el hecho de que la suma del grado de pertenencia y el de no pertenencia no siempre es igual a uno, pudiendo existir cierta imprecisión en la descripción del conjunto, que viene medida por lo que se llamará grado de vacilación.

Definición 2.2. [19] Sea X el referencial, se define un conjunto intuicionístico A como:

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle / x \in X \}$$

donde las funciones $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ y $\nu_A : X \rightarrow [0, 1]$ definen el grado de pertenencia y no pertenencia del elemento x en el conjunto A , respectivamente, y para todo x en X se satisface que: $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$.

El grado de incertidumbre o vacilación π_A , que surge debido a la falta de conocimiento de la función de pertenencia, se calcula como:

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$$

Otro enfoque distinto que generaliza la idea de conjunto difuso, permitiendo modelar situaciones en las que no sea posible describir con precisión el grado de pertenencia son los conjuntos difusos intervalo-valuados. Ahora no se dará un grado de pertenencia, sino que se dirá que el mismo está entre dos posibles valores. Más en concreto,

Definición 2.3. [24] Sea X el referencial. Un conjunto difuso intervalo-valuado de X es una aplicación $A : X \rightarrow L([0, 1])$ tal que $A(x) = [\underline{A}(x), \overline{A}(x)]$ para cualquier $x \in X$, donde $L([0, 1])$ es la familia de intervalos cerrados y no vacíos contenidos en el intervalo unidad $[0, 1]$. Un conjunto difuso intervalo-valuado se representa como sigue:

$$A = \{ (x, [\underline{A}(x), \overline{A}(x)]) / x \in X \}$$

Un conjunto difuso intervalo-valuado A queda caracterizado por las funciones $\underline{A} : X \rightarrow [0, 1]$ y $\overline{A} : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\underline{A}(x) \leq \overline{A}(x)$ para todo $x \in X$. Estas funciones representan respectivamente el extremo inferior y superior de los correspondientes intervalos.

Por lo tanto, si $\underline{A}(x) = \overline{A}(x) \forall x \in X$, entonces A es un conjunto difuso clásico, es decir, los conjuntos difusos son casos particulares de los conjuntos difusos intervalo-valorados.

De aquí en adelante se denotara por IVFS a un conjunto difuso intervalo-valorado por su sigla del ingles *Interval-Valued Fuzzy Sets*. El conjunto de todos los conjuntos difusos intervalo-valorados en X se denota por $IVFS(X)$.

Ejemplo 2.1. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, un ejemplo de un conjunto difuso intervalo-valorado sería

$$A(x) = \begin{cases} [0.1, 0.5] & \text{si } x = x_1 \\ [0.4, 0.8] & \text{si } x = x_2 \\ [0.2, 0.9] & \text{si } x = x_3 \end{cases}$$

con lo que:

$$\underline{A}(x_1) = 0.1 \text{ y } \overline{A}(x_1) = 0.5$$

$$\underline{A}(x_2) = 0.4 \text{ y } \overline{A}(x_2) = 0.8$$

$$\underline{A}(x_3) = 0.2 \text{ y } \overline{A}(x_3) = 0.9$$

En la figura 2.1 se puede observar gráficamente el conjunto difuso intervalo-valorado A donde en el eje x se representan los elementos del referencial X y en el eje y se representan los intervalos que componen al conjunto A .

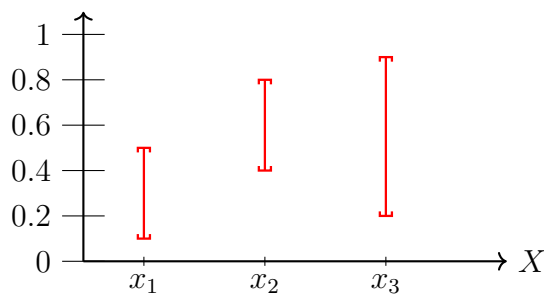


Figura 2.1: Representación gráfica del conjunto difuso intervalo-valorado A .

Aunque tienen algunas diferencias semánticas relevantes, se ha demostrado que los conjuntos intuicionísticos son formalmente equivalentes a los conjuntos intervalo-valorados [7]. Por lo tanto, existe una relación directa entre ellos como se explica a continuación. A partir de un conjunto intuicionístico cualquiera $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle / x \in X \}$ se puede definir el conjunto difuso intervalo-valorado $A' = \{ (x, [\mu_A(x), 1 - \nu_A(x)]) / x \in X \}$.

Inversamente, a partir de un conjunto intervalo-valuado $B(x) = \{[\underline{B}(x), \overline{B}(x)]/x \in X\}$ se obtiene el conjunto intuicionístico $B' = \{< x, \underline{B}(x), 1 - \overline{B}(x) > /x \in X\}$. Se puede ver a continuación un ejemplo sencillo de esta correspondencia entre conceptos.

Ejemplo 2.2. Sean $X = \{x_1, x_2\}$ un referencial y sea el conjunto intuicionístico:

$$A = \{< x_1, 0.1, 0.4 >, < x_2, 0.2, 0.6 >\}$$

El correspondiente conjunto difuso intervalo-valuado es:

$$B = \{(x_1, [0.1, 0.6]), (x_2, [0.2, 0.4])\}$$

Recíprocamente, si consideramos el conjunto difuso intervalo-valuado B , se recupera el conjunto intuicionístico A cuando se aplica el proceso anterior.

Así pues, matemáticamente, ambos conceptos son equivalentes y además generalizan a los conjunto difusos. Podríamos trabajar con cualquiera de los dos, pero se ha optado por los conjuntos difusos intervalo-valuados porque es más intuitivo ver la forma en la que se obtendría la función de pertenencia y porque además son con los que habitualmente se trabaja en el procesamiento de imágenes, que es uno de los objetivos de este trabajo.

Como consecuencia de lo anterior, ahora se van a presentar las principales propiedades de los conjuntos difusos intervalo-valuados.

Definición 2.4. Sean X un referencial e $IVFS(X)$ el conjunto de todos los conjuntos intervalo-valuados en X . Sean $A, B \in IVFS(X)$ con $A = \{(x, [\underline{A}(x), \overline{A}(x)]) / x \in X\}$ y $B = \{(x, [\underline{B}(x), \overline{B}(x)]) / x \in X\}$ se definen las siguientes operaciones:

1. *Igualdad:* $A = B \iff \forall x \in X, \underline{A}(x) = \underline{B}(x) \text{ y } \overline{B}(x) = \overline{A}(x)$
2. *Complementario:* $A^c = \{(x, [1 - \overline{A}(x), 1 - \underline{A}(x)]) / x \in X\}$
3. *Unión:* $A \cup B = \{(x, [\text{máx}(\underline{A}(x), \underline{B}(x)), \text{máx}(\overline{A}(x), \overline{B}(x))]) / x \in X\}$
4. *Intersección:* $A \cap B = \{(x, [\text{mín}(\underline{A}(x), \underline{B}(x)), \text{mín}(\overline{A}(x), \overline{B}(x))]) / x \in X\}$
5. *Inclusión:* $A \subseteq B \iff \forall x \in X, \underline{A}(x) \leq \underline{B}(x) \text{ y } \overline{A}(x) \leq \overline{B}(x)$
6. *Embebimiento:* $A \sqsubseteq B \iff \forall x \in X, \underline{B}(x_i) \leq \underline{A}(x_i) \text{ y } \overline{A}(x_i) \leq \overline{B}(x_i)$

La igualdad se verifica, por tanto, cuando la función de pertenencia en cada punto viene dada por el mismo intervalo. El complementario, la unión y la intersección generalizan las ideas clásicas de estos conceptos. También la inclusión, que significa que el grado de pertenencia de A es menor o igual que el de B en cualquier punto del referencial, puesto que la condición impuesta se traduce en que $A(x)$ sea menor o igual que $B(x)$, para todo $x \in X$, respecto al orden reticular [9]. Por contra, el embebimiento no se refiere a un valor de pertenencia menor, sino más preciso. Un conjunto está embebido en otro si la función de pertenencia en cada punto tiene menos imprecisión.

A continuación, se desarrollan ejemplos de estas operaciones.

Ejemplo 2.3. Sean $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, A el conjunto difuso intervalo-valuado introducido en el ejemplo 2.1 y $B = \{(x_1, [0.2, 0.7]), (x_2, [0.5, 0.9]), (x_3, [0.7, 0.95])\}$ con $B \in IVFS(X)$. En la siguiente tabla se puede observar el complementario, la unión y la intersección de estos dos conjuntos difusos intervalo-valorados:

X	x_1	x_2	x_3
A	[0.1, 0.5]	[0.4, 0.8]	[0.2, 0.9]
B	[0.3, 0.5]	[0.2, 0.7]	[0.4, 0.85]
A^c	[0.5, 0.9]	[0.2, 0.6]	[0.1, 0.8]
B^c	[0.5, 0.7]	[0.3, 0.8]	[0.15, 0.6]
$A \cup B$	[0.3, 0.5]	[0.4, 0.8]	[0.4, 0.9]
$A \cap B$	[0.1, 0.5]	[0.2, 0.7]	[0.2, 0.85]

En este caso se tiene que $A \not\subseteq B$ y que $B \not\subseteq A$.

Si consideramos el conjunto difuso intervalo-valuado C definido por

$$C = \{(x_1, [0.2, 0.7]), (x_2, [0.5, 0.9]), (x_3, [0.7, 0.95])\}$$

se tiene que:

$$\underline{A}(x_1) = 0.1 \leq \underline{C}(x_1) = 0.2 \text{ y } \overline{A}(x_1) = 0.5 \leq \overline{C}(x) = 0.7$$

$$\underline{A}(x_2) = 0.4 \leq \underline{C}(x_2) = 0.5 \text{ y } \overline{A}(x_2) = 0.8 \leq \overline{C}(x_2) = 0.9$$

$$\underline{A}(x_3) = 0.2 \leq \underline{C}(x_3) = 0.7 \text{ y } \overline{A}(x_3) = 0.9 \leq \overline{C}(x_3) = 0.95$$

Por lo tanto $A \subseteq C$.

La figura 2.2 muestra la inclusión de A en C .

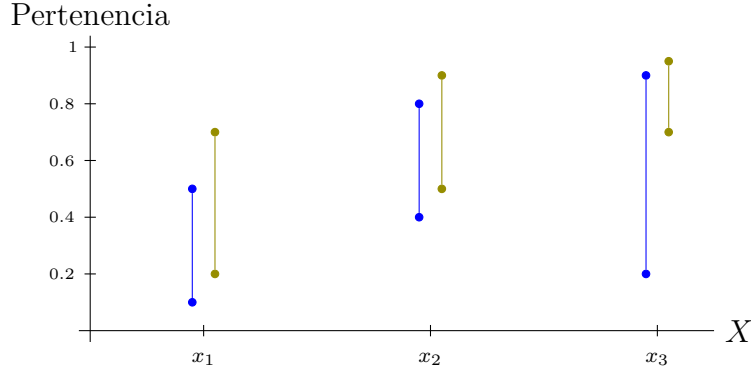


Figura 2.2: Representación gráfica de los conjuntos intervalo-valorados A y C .

Ahora bien, es evidente que ni A está embebido en C , ni C lo está en A .

Por último, considerando el conjunto

$$D = \{(x_1, [0.1, 0.7]), (x_2, [0.3, 0.9]), (x_3, [0.2, 0.95])\}$$

se tiene que:

$$\underline{D}(x_1) = 0.1 \leq \underline{A}(x_1) = 0.1 \text{ y } \overline{A}(x_1) = 0.5 \leq \overline{D}(x) = 0.7$$

$$\underline{D}(x_2) = 0.3 \leq \underline{A}(x_2) = 0.4 \text{ y } \overline{A}(x_2) = 0.8 \leq \overline{D}(x_2) = 0.9$$

$$\underline{D}(x_3) = 0.2 \leq \underline{A}(x_3) = 0.2 \text{ y } \overline{A}(x_3) = 0.9 \leq \overline{D}(x_3) = 0.95$$

Por lo tanto $A \sqsubseteq D$, pero ni A está contenido en D , ni D en A .

La figura 2.3 muestra el embebimiento de A en D .

Del ejemplo anterior se deduce que en general el contenido y el embebimiento son conceptos distintos, aunque pueden coincidir bajo determinadas circunstancias. En concreto, se observa que $A \subseteq B$ si y solo si $\underline{A}(x) \leq \underline{B}(x)$ y $\overline{A}(x) \leq \overline{B}(x)$, $x \in X$. En cambio, si $A \sqsubseteq B$, se sigue dando que $\overline{A}(x) \leq \overline{B}(x)$, pero ahora $\underline{B}(x) \leq \underline{A}(x)$, $\forall x \in X$. Así pues un conjunto A está contenido y embebido en B si y solo si $\underline{A}(x) = \underline{B}(x)$, $\forall x \in X$. En cualquier otro caso, si se da una de las relaciones, no se verifica la otra. Para terminar con estas dos relaciones, se puede observar que ambas son relaciones de orden parcial en $IVFS(X)$.

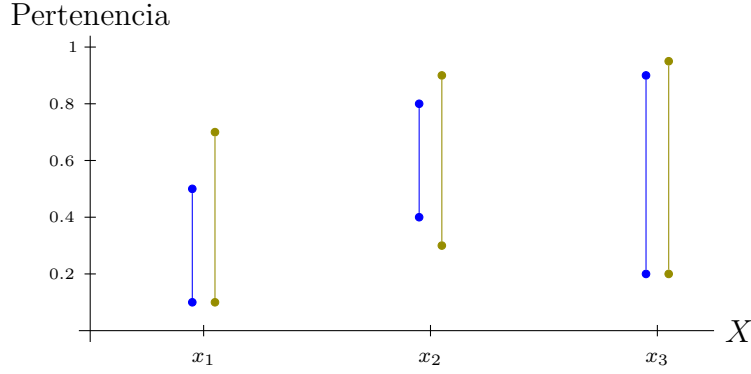


Figura 2.3: Representación gráfica de los conjuntos intervalo-valorados A y D .

A partir de las operaciones definidas, se pueden establecer ciertas relaciones como se observa en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.4. Sean $A = \{(x, [\underline{A}(x), \overline{A}(x)]) / x \in X\}$ y $B = \{(x, [\underline{B}(x), \overline{B}(x)]) / x \in X\}$ dos elementos de $IVFS(X)$, entonces $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ y $A \cup B$ es el conjunto más pequeño que contiene a A y B .

Demostración. Por la operación de unión dada en la definición 2.4:

$$A \cup B = \{(x, [\max(\underline{A}(x), \underline{B}(x)), \max(\overline{A}(x), \overline{B}(x))]) / x \in X\}$$

Es evidente que $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} \underline{A}(x) &\leq \max(\underline{A}(x), \underline{B}(x)) \\ \overline{A}(x) &\leq \max(\overline{A}(x), \overline{B}(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \subseteq A \cup B$.

De la misma forma se prueba que $B \subseteq A \cup B$.

Se verá ahora que $A \cup B$ es el conjunto más pequeño que contiene a ambos. Para ello, se supone que existe otro conjunto $C \in IVFS(X)$ tal que:

$$C = \{(x, [\underline{C}(x), \overline{C}(x)]) / x \in X\}$$

Si $A \subseteq C \implies \underline{A}(x) \leq \underline{C}(x)$ y $\overline{A}(x) \leq \overline{C}(x) \forall x \in X$ y si $B \subseteq C \implies \underline{B}(x) \leq \underline{C}(x)$ y $\overline{B}(x) \leq \overline{C}(x) \forall x \in X$. Entonces, $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} \max(\underline{A}(x), \underline{B}(x)) &\leq \underline{C}(x) \\ \max(\overline{A}(x), \overline{B}(x)) &\leq \overline{C}(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \cup B \subseteq C$ y $A \cup B$ es el conjunto más pequeño que contiene a A y B . \square

Proposición 2.5. Sean $A = \{(x, [\underline{A}(x), \overline{A}(x)]) / x \in X\}$ y $B = \{(x, [\underline{B}(x), \overline{B}(x)]) / x \in X\}$ con $A, B \in IVFS(X)$, entonces $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ y $A \cap B$ es el mayor conjunto contenido en A y B .

Demostración. Considerando el concepto de intersección introducido en la definición 2.4:

$$A \cap B = \{(x, [\min(\underline{A}(x), \underline{B}(x)), \min(\overline{A}(x), \overline{B}(x))]) / x \in X\}$$

Es evidente que $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} \min(\underline{A}(x), \underline{B}(x)) &\leq \underline{A}(x) \\ \min(\overline{A}(x), \overline{B}(x)) &\leq \overline{A}(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \cap B \subseteq A$.

De la misma forma se prueba que $A \cap B \subseteq B$.

Se verá ahora que $A \cap B$ es el mayor conjunto contenido en ambos. Para ello, se supone que existe otro conjunto $C \in IVFS(X)$ tal que:

$$C = \{(x, [\underline{C}(x), \overline{C}(x)]) / x \in X\}$$

Si $C \subseteq A \implies \underline{C}(x) \leq \underline{A}(x)$ y $\overline{C}(x) \leq \overline{A}(x) \forall x \in X$ y si $C \subseteq B \implies \underline{C}(x) \leq \underline{B}(x)$ y $\overline{C}(x) \leq \overline{B}(x) \forall x \in X$. Entonces, $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} \underline{C}(x) &\leq \min(\underline{A}(x), \underline{B}(x)) \\ \overline{C}(x) &\leq \min(\overline{A}(x), \overline{B}(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C \subseteq A \cap B$ y $A \cap B$ es el mayor conjunto contenido en A y B . □

Una vez definidos los conceptos básicos y presentadas las principales operaciones entre conjuntos difusos intervalo-valorados, en el siguiente capítulo, se introduce la herramienta que permite comparar el parecido entre dos conjuntos difusos intervalo-valorados de forma cuantitativa, las medidas de similaridad.

Capítulo 3

Medidas de similaridad

En este capítulo se presenta la definición de medida de similaridad. Se obtendrán distintos tipos de ellas como casos particulares de una familia de medidas. Se darán algunos ejemplos que se podrían obtener a partir de las medidas para conjuntos intuicionísticos definidas por varios autores, teniendo en cuenta la correspondencia que existe entre ambos tipos de conjuntos. Se estudiarán las ventajas y desventajas de cada una de ellas de forma comparada y se ilustrarán estos conceptos con la ayuda de ejemplos y gráficas.

3.1. Medidas de similaridad en conjuntos difusos intervalo-valuados

Una forma habitual de comparar dos IVFS es mediante las medidas de similaridad. Una medida de similaridad es una función que determina el grado de similitud entre dos objetos, donde cero significa que ambos objetos son completamente diferentes y uno significa que son idénticos. Más precisamente,

Definición 3.1. [6] Una función $S : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ es una medida de similaridad si satisface las siguientes propiedades, para todo $A, B, C \in IVFS(X)$:

$$S1. S(A, B) = 1 \Leftrightarrow A = B$$

$$S2. S(A, B) = S(B, A)$$

$$S3. S(A, C) \leq S(A, B) \text{ y } S(A, C) \leq S(B, C) \text{ si } A \subseteq B \subseteq C.$$

Para el caso de referenciales finitos, muy habitual en muchas aplicaciones prácticas, se puede obtener una medida de similaridad en $IVFS(X)$ trabajando punto a punto, es decir, comparando los grados de pertenencia en cada punto y luego promediando de forma conveniente los mismos. Este método es introducido en la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función decreciente con $g(x) = 1 \iff x = 0$ y sea $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función que verifica las siguientes propiedades:*

1. $f(x, y) = 0 \iff x = y = 0$
2. $f(x, y) = f(-x, -y)$
3. f es creciente en ambas componentes en $(0, 1]$.

Dada una familia de pesos $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ tales que $\omega_i > 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, la función

$$S_{fg}(A, B) = g \left(\sum_{i=1}^n \omega_i f(\bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)) \right)$$

es una medida de similaridad en $IVFS(X)$.

Demostración. Es evidente que $S_{fg}(A, B)$ está bien definida, sin más que tener en cuenta los intervalos de definición de las funciones f y g , así como las condiciones de los pesos.

Se debe comprobar que verifica las tres propiedades de medida de similaridad dada en la definición 3.1:

$$S1. S_{fg}(A, B) = 1 \iff A = B.$$

⇒ Si $S_{fg}(A, B) = 1 \implies g\left(\sum_{i=1}^n w_i f(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))\right) = 1$. Aplicando la propiedad exigida a g se tiene que esto ocurre si y solo si

$$\sum_{i=1}^n w_i f(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)) = 0$$

Como la suma de números positivos solo puede ser cero si todos son nulos y los pesos son estrictamente positivos, aplicando la primera condición impuesta a la función f se tiene que:

$$\begin{cases} \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) = 0 \\ \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{A}(x_i) = \overline{B}(x_i) \\ \underline{A}(x_i) = \underline{B}(x_i) \end{cases} \implies A = B$$

⇐ Si $A = B$, como exige que $f(0, 0) = 0$ y $g(0) = 1$, se ve claramente que $S_{fg}(A, B) = 1$

S2. $S_{fg}(A, B) = S_{fg}(B, A)$.

Utilizando la hipótesis $f(x, y) = f(-x, -y)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} S_{fg}(A, B) &= g\left(\sum_{i=1}^n w_i f(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))\right) = \\ &= g\left(\sum_{i=1}^n w_i f(\overline{B}(x_i) - \overline{A}(x_i), \underline{B}(x_i) - \underline{A}(x_i))\right) = S_{fg}(B, A) \end{aligned}$$

S3. Si $A \subseteq B \subseteq C$ entonces $S_{fg}(A, C) \leq S_{fg}(A, B)$ y $S_{fg}(A, C) \leq S_{fg}(B, C)$.

Se demostrará primero que $S_{fg}(A, C) \leq S_{fg}(A, B)$.

Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces para todo $x_i \in X$ se cumple:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overline{A}(x_i) \leq \overline{B}(x_i) \leq \overline{C}(x_i) \\ \underline{A}(x_i) \leq \underline{B}(x_i) \leq \underline{C}(x_i) \end{cases} \implies \\ &\begin{cases} 0 \leq \overline{B}(x_i) - \overline{A}(x_i) \leq \overline{C}(x_i) - \overline{A}(x_i) \\ 0 \leq \underline{B}(x_i) - \underline{A}(x_i) \leq \underline{C}(x_i) - \underline{A}(x_i) \end{cases} \implies \\ &\begin{cases} \overline{A}(x_i) - \overline{C}(x_i) \leq \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) \leq 0 \\ \underline{A}(x_i) - \underline{C}(x_i) \leq \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por hipótesis se sabe que $f(x, y) = f(-x, -y)$ y que f es creciente en el intervalo $(0, 1]$. Por lo tanto, la función f es decreciente en el intervalo $[-1, 0)$. Como:

$$(\overline{A}(x_i) - \overline{C}(x_i)), (\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)), (\underline{A}(x_i) - \underline{C}(x_i)), (\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)) \in [-1, 0)$$

entonces

$$f(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)) \leq f(\overline{A}(x_i) - \overline{C}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{C}(x_i)) \leq 0$$

Como los pesos y la suma conservan el orden y g es decreciente, se tiene que:

$$\begin{aligned} & g \left(\sum_{i=1}^n w_i f(\overline{A}(x_i) - \overline{C}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{C}(x_i)) \right) \leq \\ & \leq g \left(\sum_{i=1}^n w_i f(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)) \right) \end{aligned}$$

con lo que se acaba de demostrar que:

$$S_{fg}(A, C) \leq S_{fg}(A, B)$$

La demostración de que $S_{fg}(A, C) \leq S_{fg}(B, C)$ es totalmente análoga, por lo que se van a indicar simplemente algunos pasos de la misma.

Como antes, se tiene que:

$$\begin{cases} \overline{A}(x_i) \leq \overline{B}(x_i) \leq \overline{C}(x_i) \\ \underline{A}(x_i) \leq \underline{B}(x_i) \leq \underline{C}(x_i) \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{A}(x_i) - \overline{C}(x_i) \leq \overline{B}(x_i) - \overline{C}(x_i) \leq 0 \\ \underline{A}(x_i) - \underline{C}(x_i) \leq \underline{B}(x_i) - \underline{C}(x_i) \leq 0 \end{cases}$$

Entonces, como f es decreciente en $[-1, 0)$:

$$f(\overline{B}(x_i) - \overline{C}(x_i), \underline{B}(x_i) - \underline{C}(x_i)) \leq f(\overline{A}(x_i) - \overline{C}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{C}(x_i))$$

Por ser g decreciente

$$\begin{aligned} & g \left(\sum_{i=1}^n w_i f(\overline{A}(x_i) - \overline{C}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{C}(x_i)) \right) \leq \\ & \leq g \left(\sum_{i=1}^n w_i f(\overline{B}(x_i) - \overline{C}(x_i), \underline{B}(x_i) - \underline{C}(x_i)) \right) \\ & \implies S_{fg}(A, C) \leq S_{fg}(B, C) \end{aligned}$$

Con lo que se cumplen las tres condiciones de medida de similaridad y, por tanto, la demostración queda concluida. \square

Para definir las medidas de similaridad como casos concretos de esta familia, también serán necesarios los dos siguientes resultados.

Proposición 3.2. Sean $S_1, S_2 : IVFS(X) \times IVFS(X) \longrightarrow [0, 1]$ dos medidas de similaridad. La función $S : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ definida como:

$$S(A, B) = \frac{S_1(A, B) + S_2(A, B)}{2}$$

es una medida de similaridad en $IVFS(X)$.

Demostración. Se probará que S verifica las tres axiomas de la definición 3.1.

$$S1. S(A, B) = 1 \iff A = B$$

$$S(A, B) = 1 \iff \frac{S_1(A, B) + S_2(A, B)}{2} = 1 \iff S_1(A, B) + S_2(A, B) = 2$$

Como $S_1(A, B), S_2(A, B) \in [0, 1]$ entonces:

$$S_1(A, B) + S_2(A, B) = 2 \iff \begin{cases} S_1(A, B) = 1 \\ S_2(A, B) = 1 \end{cases} \iff A = B$$

$$S2. S(A, B) = S(B, A).$$

Como S_1 y S_2 son medidas de similaridad, verifican que $S_1(A, B) = S_1(B, A)$ y $S_2(A, B) = S_2(B, A)$, entonces:

$$S(A, B) = \frac{S_1(A, B) + S_2(A, B)}{2} = \frac{S_1(B, A) + S_2(B, A)}{2} = S(B, A)$$

$$S3. \text{ Si } A \subseteq B \subseteq C \text{ entonces } S(A, C) \leq S(A, B) \text{ y } S(A, C) \leq S(B, C).$$

Como S_1 y S_2 son medidas de similaridad, se tiene que:

$$S_1(A, C) \leq S_1(A, B) \text{ y } S_1(A, C) \leq S_1(B, C)$$

$$S_2(A, C) \leq S_2(A, B) \text{ y } S_2(A, C) \leq S_2(B, C)$$

Entonces:

$$S(A, C) = \frac{S_1(A, C) + S_2(A, C)}{2} \leq \frac{S_1(A, B) + S_2(A, B)}{2} = S(A, B)$$

$$S(A, C) = \frac{S_1(A, C) + S_2(A, C)}{2} \leq \frac{S_1(B, C) + S_2(B, C)}{2} = S(B, C)$$

Por lo tanto, S es medida de similitud en $IVFS(X)$. □

Proposición 3.3. Sean $f_1 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $f_2 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ dos funciones que satisfacen las mismas condiciones que la función f de la proposición 3.1. Sean $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$. La función $\hat{f} = \alpha f_1 + \beta f_2$ también verifica las condiciones de la proposición 3.1, es decir:

1. $\hat{f}(x, y) = 0 \iff x = y = 0$
2. $\hat{f}(x, y) = \hat{f}(-x, -y)$
3. \hat{f} es creciente en ambas componentes en $(0, 1]$.

Demostración. Se tiene que \hat{f} está bien definida porque $f_1(x, y), f_2(x, y) \in [0, 1]$, para todo $x, y \in [-1, 1]$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$ con $\alpha + \beta = 1$.

Se probarán las tres propiedades:

1. $\hat{f}(x, y) = 0 \iff x = y = 0$

⇒ Si $\hat{f}(x, y) = 0$ entonces: $\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = 0$.

Se debe estudiar los siguientes tres casos:

- 1) Si $\alpha = 0$ y $\beta = 1 \implies \hat{f}(x, y) = f_2(x, y) = 0 \iff x = y = 0$
- 2) Si $\alpha = 1$ y $\beta = 0 \implies \hat{f}(x, y) = f_1(x, y) = 0 \iff x = y = 0$
- 3) Si $\alpha, \beta \in (0, 1) \implies \hat{f}(x, y) = 0 \iff \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = 0 \iff f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0 \iff x = y = 0$

⇐ Si $x = y = 0 \implies \hat{f}(0, 0) = \alpha f_1(0, 0) + \beta f_2(0, 0) = 0$.

2. $\hat{f}(x, y) = \hat{f}(-x, -y)$

Como $f_1(x, y) = f_1(-x, -y)$ y $f_2(x, y) = f_2(-x, -y)$, se tiene que:

$$\hat{f}(x, y) = \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = \alpha f_1(-x, -y) + \beta f_2(-x, -y) = \hat{f}(-x, -y)$$

3. Si f_1 y f_2 son crecientes en ambas componentes en $(0, 1]$, \hat{f} también lo es por ser $\alpha, \beta \geq 0$.

□

Así pues, en la proposición 3.2 se combinan las medidas una vez aplicado g , pero en la proposición 3.3 la combinación se hace antes de aplicar dicha función, obteniendo sendos procedimientos distintos para obtener medidas de similaridad.

Antes de pasar a analizar algunos ejemplos particularmente importantes, vamos a considerar una definición más débil de similaridad, en la que el primer axioma (axioma $S1$ en la definición 3.1) se relaja, exigiendo solo la implicación en un sentido y no la equivalencia.

Definición 3.2. Una función $\widehat{S} : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ es una medida de similaridad débil si satisface las siguientes propiedades, para todo $A, B, C \in IVFS(X)$:

$$SD1. \widehat{S}(A, A) = 1$$

$$SD2. \widehat{S}(A, B) = \widehat{S}(B, A)$$

$$SD3. \text{ Si } A \subseteq B \subseteq C \text{ entonces } \widehat{S}(A, C) \leq \widehat{S}(A, B) \text{ y } \widehat{S}(A, C) \leq \widehat{S}(B, C)$$

Es evidente que toda medida de similaridad es una similaridad débil, pero que el recíproco no es cierto.

De la misma forma que antes se puede definir una familia de medidas de similaridad débiles en $IVFS(X)$ a partir de la definición anterior:

Proposición 3.4. Sea $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función decreciente con $g(0) = 1$ y sea $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función que satisface las siguientes propiedades:

1. $f(0, 0) = 0$
2. $f(x, y) = f(-x, -y)$
3. f es creciente en ambas componentes en $(0, 1]$.

Dada una familia de pesos $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ tales que $\omega_i \geq 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, la función

$$\widehat{S}_{fg}(A, B) = g\left(\sum_{i=1}^n \omega_i f(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i), \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))\right)$$

es una medida de similaridad débil en $IVFS(X)$.

Demostración. $\widehat{S}_{fg}(A, B)$ está bien definida por los intervalos de definición de las funciones f y g y las condiciones impuestas a los pesos.

Se debe comprobar que verifica los tres axiomas de medida de similaridad débil dadas en la definición 3.2:

SD1. $\widehat{S}_{fg}(A, A) = 1$.

Por hipótesis $f(0, 0) = 0$ y $g(0) = 1$, entonces:

$$\widehat{S}_{fg}(A, A) = g \left(\sum_{i=1}^n \omega_i f(0, 0) \right) = g(0) = 1$$

Los axiomas *SD2* y *SD3* se demuestran de forma análoga a la realizada en la proposición 3.1.

□

De forma análoga a la proposición 3.2 se presenta el caso en que alguna de las medidas de similaridad es débil:

Proposición 3.5. Sean $S_1, S_2 : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ dos medidas de similaridad donde una de ellas es una similaridad débil. La función $S : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ definida como:

$$S(A, B) = \frac{S_1(A, B) + S_2(A, B)}{2}$$

es una medida de similaridad en $IVFS(X)$.

Demostración. Se probará la primera propiedad de la definición 3.1, las otras dos se demuestran de la misma forma que en la proposición 3.2.

S1. $S(A, B) = 1 \iff A = B$

\Rightarrow $S(A, B) = 1 \implies \frac{S_1(A, B) + S_2(A, B)}{2} = 1 \implies S_1(A, B) + S_2(A, B) = 2$. Como $S_1, S_2 \in [0, 1] \implies S_1(A, B) = 1$ y $S_2(A, B) = 1$. Como una de las dos es medida de similaridad, esto sólo se verifica si $A = B$

◁ Si $A = B$ se tiene $S(A, A) = \frac{S_1(A, A) + S_2(A, A)}{2} = 1$ por ser una de ellas medida de similaridad y la otra de similaridad débil.

□

Cuando ambas medidas de similaridad son débiles se presenta la siguiente proposición:

Proposición 3.6. Sean $S_1, S_2 : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ dos medidas de similaridad débiles. La función $S : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ definida como:

$$S(A, B) = \frac{S_1(A, B) + S_2(A, B)}{2}$$

es una medida de similaridad débil en $IVFS(X)$.

Demostración. Se probará la primera propiedad de la definición 3.2 ya que las otras dos se demuestran de la misma forma que en la proposición 3.2.

S1. $S(A, A) = \frac{S_1(A, A) + S_2(A, A)}{2} = 1$ por ser S_1 y S_2 medidas de similaridad débiles.

□

A partir de estas familias de medidas de similaridad en $IVFS(X)$, se procede a estudiar casos particulares.

Corolario 3.7. La función $S_C : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$S_C(A, B) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|$$

es una medida de similaridad débil en $IVFS(X)$.

Demostración. La demostración es inmediata ya que si se consideran:

$$g(x) = 1 - x, \forall x \in X$$

$$f(x, y) = \frac{|x + y|}{2}, \forall x, y \in X$$

$$\omega_i = \frac{1}{n}, \forall i = 1, \dots, n$$

se verifican las hipótesis de la proposición 3.4. □

Esta medida es una medida de similaridad débil ya que no satisface el primer axioma de la definición 3.1. En ese sentido, lleva a resultados contradictorios ya que si $S_C(A, B) = 1$:

$$1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)| = 1 \implies$$

$$\sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)| = 0 \implies \underline{A}(x_i) + \overline{A}(x_i) = \underline{B}(x_i) + \overline{B}(x_i)$$

Es decir, siempre que $\underline{A}(x) + \overline{A}(x) = \underline{B}(x) + \overline{B}(x)$, $\forall x \in X$ se obtiene que $S_C(A, B) = 1$. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

Ejemplo 3.8. Sean:

$$A = \{(x_1, [0.1, 0.9]), (x_2, [0.2, 0.4]), (x_3, [0.15, 0.65])\}$$

$$B = \{(x_1, [0.5, 0.5]), (x_2, [0.1, 0.5]), (x_3, [0.1, 0.7])\}$$

Es evidente que $S_C(A, B) = 1$, pero $A \neq B$.

Para solucionar este problema e introducir una medida de similaridad que satisfaga el primer axioma de la definición 3.1 se puede considerar la función dada por el siguiente corolario:

Corolario 3.9. La función $S_H : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$S_H(A, B) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|$$

es una medida de similaridad para $IVFS(X)$.

Demostración. Tomando:

$$g(x) = 1 - x, \forall x \in X$$

$$f(x, y) = \frac{|x| + |y|}{2}, \forall x, y \in X$$

$$\omega_i = \frac{1}{n}, \forall i = 1, \dots, n$$

se verifican las hipótesis de la proposición 3.1, por lo que se puede concluir que S_H es una medida de similitud. \square

La medida S_H lleva a casos problemáticos ya que si se consideran $A, B, C, D \in IVFS(X)$, conjuntos difusos intervalo-valorados distintos entre sí, tales que:

$$|\underline{A}(x) - \underline{B}(x)| + |\overline{A}(x) - \overline{B}(x)| = |\underline{C}(x) - \underline{D}(x)| + |\overline{C}(x) - \overline{D}(x)|$$

entonces $S_H(A, B) = S_H(C, D)$. El siguiente ejemplo muestra esta situación:

Ejemplo 3.10. Si $A = \{(x_1, [1, 1]), (x_2, [0.5, 0.6])\}$, $B = \{(x_1, [0, 1]), (x_2, [0, 0.5])\}$ y $C = \{(x_1, [0.5, 0.5]), (x_2, [0.4, 0.7])\}$ entonces $S_H(A, B) = S_H(C, B) = 0.6$.

Se puede ver en la figura 3.1 que los conjuntos A y B tienen menos valores de la función de pertenencia en común que los conjuntos C y B , sin embargo, $S_H(A, B) = S_H(C, B) = 0.6$.

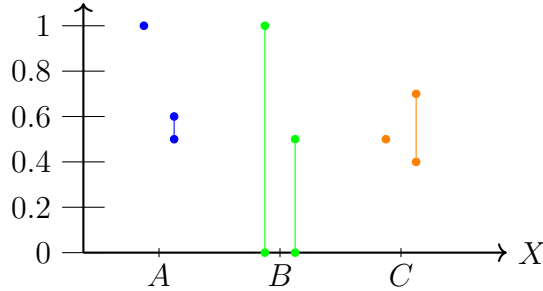


Figura 3.1: Representación gráfica de los conjuntos difusos intervalo-valorados: A , B y C .

Corolario 3.11. Sea la función $S_L : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$S_L(A, B) = \frac{S_C(A, B) + S_H(A, B)}{2}$$

donde S_C y S_H son las similitudes dadas en los corolarios 3.7 y 3.9, respectivamente. La función S_L es una medida de similitud en $IVFS(X)$.

Demostración. La demostración es inmediata ya que S_C es una medida de similaridad débil y S_H es una medida de similaridad. Por lo tanto, por la proposición 3.5 se tiene que S_L es una medida de similaridad en $IVFS(X)$. \square

Si se reemplazan S_C y S_H en la definición de S_L se obtiene la siguiente expresión:

$$S_L(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{4n} - \frac{\sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{4n}$$

En el ejemplo 3.8 se mostró el principal problema que presenta la medida de similaridad débil S_C , es decir, cuando $\underline{A}(x) + \overline{A}(x) = \underline{B}(x) + \overline{B}(x)$, $\forall x \in X$ se obtiene que $S_C(A, B) = 1$. Si en esos casos se aplica S_L , se anula el término $\frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|$, que justamente es S_C . Por lo tanto, S_L soluciona el problema de S_C .

También soluciona los problemas de S_H . En el ejemplo 3.10 se vio que S_H llega a resultados contradictorios siempre que $|\underline{A}(x) - \underline{B}(x)| + |\overline{A}(x) - \overline{B}(x)| = |\underline{C}(x) - \underline{D}(x)| + |\overline{C}(x) - \overline{D}(x)|$, ya que en esos casos se obtiene $S_H(A, B) = S_H(C, D)$. En ese ejemplo, al considerar $A = \{(x_1, [1, 1]), (x_2, [0.5, 0.6])\}$, $B = \{(x_1, [0, 1]), (x_2, [0, 0.5])\}$ y $C = \{(x_1, [0.5, 0.5]), (x_2, [0.4, 0.7])\}$ se obtuvo que $S_H(A, B) = S_H(B, C)$, lo cual no era razonable porque B y C tienen más valores de la función de pertenencia en común que A y C . Al aplicar la medida S_L a dichos conjuntos se obtiene $S_L(A, B) = 0.6$ y $S_L(B, C) = 0.725$, es decir, $S_L(A, B) < S_L(B, C)$ lo cual es razonable ya que, como se mencionó anteriormente, B y C tienen más valores de la función de pertenencia en común que A y B .

A pesar de solucionar los problemas de S_C y S_H , S_L tiene otras limitaciones [22], como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.12. Sean los conjuntos intervalo-valorados $A = \{(x_1, [0.4, 0.8]), (x_2, [0.3, 0.9])\}$, $B = \{(x_1, [0.5, 0.7]), (x_2, [0.45, 0.75])\}$ y $C = \{(x_1, [0.5, 0.8]), (x_2, [0.45, 0.8])\}$, entonces:

$$S_L(A, C) = 0.94 \text{ y } S_L(A, B) = 0.96$$

Por lo tanto, $S_L(A, C) \leq S_L(A, B)$. Este resultado no es consistente porque el conjunto intervalo-valorado C tiene más valores de la función de pertenencia en común con A que

con B y esto no se ve reflejado en los valores obtenidos en la medida de similaridad. La Figura 3.2 muestra gráficamente esta situación.

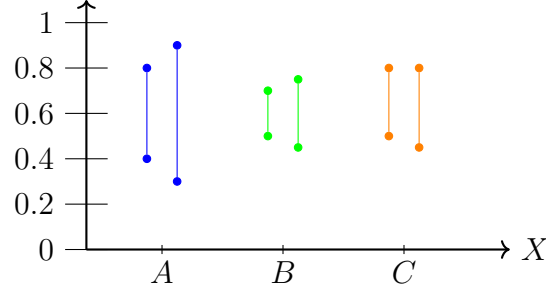


Figura 3.2: Representación gráfica de los conjuntos difusos intervalo-valuados A , B y C .

Corolario 3.13. Dada una familia de pesos $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ tales que $\omega_i \geq 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, la función $S_{d\omega}^p : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$S_{d\omega}^p(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \omega_i \left| \frac{A(x_i) + \bar{A}(x_i)}{2} - \frac{B(x_i) + \bar{B}(x_i)}{2} \right|^p} \quad \text{con } p \geq 1$$

es una medida de similaridad débil entre $IVFS(X)$.

Demostración. Se demuestra directamente tomando:

$$g(x) = 1 - \sqrt[p]{x}$$

$$f(x, y) = \left(\frac{|x + y|}{2} \right)^p \quad \text{con } 1 \leq p$$

ya que se verifican las hipótesis de la proposición 3.4. □

Para el caso particular en que $\omega_i = \frac{1}{n}$, $\forall i = 1, \dots, n$, la medida de similaridad débil se denotará S_d^p y queda definida por:

$$S_d^p(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left| \frac{A(x_i) + \bar{A}(x_i)}{2} - \frac{B(x_i) + \bar{B}(x_i)}{2} \right|^p}$$

Nota 3.14. Es evidente que si $p = 1$, entonces $S_d^1(A, B) = S_C(A, B)$.

Por lo tanto, S_d^1 tiene un comportamiento similar al de S_C en el sentido que si:

$$\underline{A}(x) + \overline{A}(x) = \underline{B}(x) + \overline{B}(x), \forall x \in X$$

la raíz del sumatorio en S_d^1 se anula y la medida de similaridad valdrá siempre 1.

Independientemente del valor de p , S_d^p no verifica la primera propiedad de las medidas de similaridad. Siempre que $\underline{A}(x) + \overline{A}(x) = \underline{B}(x) + \overline{B}(x)$, la raíz del sumatorio de la medida S_d^p se anula y la medida de similaridad valdrá siempre 1. Por lo tanto, S_d^p verifica los axiomas que caracterizan una medida de similaridad débil.

A continuación, se estudia la influencia de los valores de p en la medida de similaridad S_d^p . Para ello, a modo de ejemplo, se consideran los conjuntos:

$$A = \{(x_1, [0.2, 0.6]), (x_2, [0.1, 0.2]), (x_3, [0.1, 0.7])\}$$

$$B = \{(x_1, [0.3, 0.4]), (x_2, [0.4, 0.9]), (x_3, [0.2, 0.8])\}$$

La siguiente tabla muestra los resultados de S_d^p para distintos valores de p :

p	1	2	4	10	20	30	40	50	100
$S_d^p(A, B)$	0.783	0.704	0.620	0.552	0.526	0.518	0.513	0.511	0.505

Se puede observar que, a medida que aumenta el valor de p , el valor de la medida de similaridad débil S_d^p disminuye, lo cual es lógico según su definición:

Sean $S_d^p = f(p)$ y $k_i = \left| \frac{\underline{A}(x_i) + \overline{A}(x_i)}{2} - \frac{\underline{B}(x_i) + \overline{B}(x_i)}{2} \right|$ con $i = 1, \dots, n$, entonces

$$f'(p) = -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^p \right)^{\frac{1-p}{p}} \sum_{i=1}^n k_i^{p-1}$$

Como $k_i \geq 0 \forall i$, $f'(p) \leq 0$, es decir, S_d^p es una función decreciente.

La figura 3.3 muestra gráficamente el comportamiento de S_d^p en función de la variación de los valores de p .

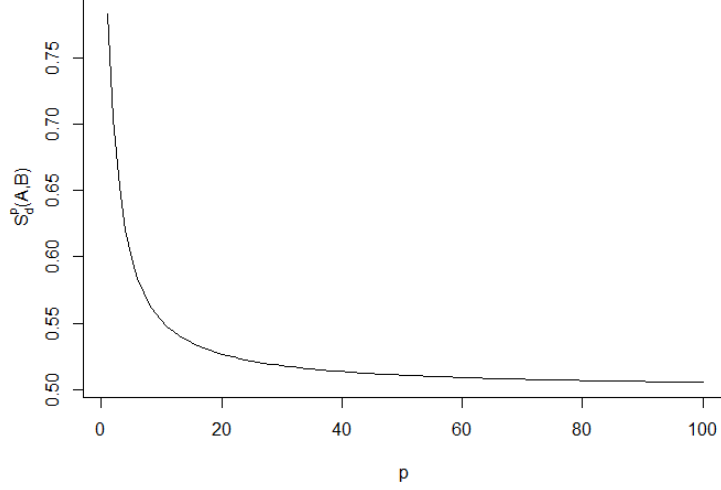


Figura 3.3: Gráfica que representa el valor de la medida de similaridad $S_d^p(A, B)$ en función de p con A y B .

Se habían propuesto dos métodos para obtener medidas de similaridad, pero siempre trabajando de forma conjunta con los extremos inferiores y superiores de los intervalos de definición del grado de pertenencia. A continuación se presenta un método nuevo de generación de este tipo de medidas, en el que trabaja con cada uno por separado.

Corolario 3.15. Sea $S_{mod}^p : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$S_{mod}^p(A, B) = \frac{1}{2}(\varphi_1(A, B) + \varphi_2(A, B)).$$

donde $\varphi_1(A, B)$ se puede interpretar como el grado de similaridad entre los conjuntos difusos generados por los límites inferiores $\underline{A}(x)$ y $\underline{B}(x)$ y $\varphi_2(A, B)$ por los límites superiores $\overline{A}(x)$ y $\overline{B}(x)$ definidas como sigue:

$$\varphi_1(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)|^p}$$

$$\varphi_2(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\overline{B}(x_i) - \overline{A}(x_i)|^p}$$

La función S_{mod}^p es una medida de similaridad débil en $IVFS(X)$.

Demostración. Tomando en la proposición 3.1:

$$\omega_i = \frac{1}{n}, \forall i = 1, \dots, n$$

y las funciones:

$$g(x) = 1 - \sqrt[p]{x}$$

$$f_1(x, y) = |y|^p \text{ y } f_2(x, y) = |x|^p$$

se tiene que S_{f_1g} y S_{f_2g} son medidas de similaridad débiles. Por la proposición 3.6, se obtiene que $S_{mod}^p = \frac{1}{2}(S_{f_1g} + S_{f_2g})$ es una medida de similaridad débil en $IVFS(X)$.

□

Nota 3.16. Si $p = 1$, $S_{mod}^1 = S_H$, por lo tanto, S_{mod}^1 tiene los mismos problemas que fueron enunciados para S_H .

Como se explicó anteriormente, siempre que $\underline{A}(x) + \overline{A}(x) = \underline{B}(x) + \overline{B}(x) \forall x \in X$, $S_d^p(A, B) = 1$, es decir, se dan casos contradictorios porque es medida de similaridad débil. Para solucionar los problemas de la medida S_d^p se considera la función dada por el siguiente corolario:

Corolario 3.17. La función $S_e^p : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$S_e^p(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)|}{2} + \frac{|\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{2} \right)^p}$$

es una medida de similaridad en $IVFS(X)$.

Demostración. Se ve claramente que tomando:

$$g(x) = 1 - \sqrt[p]{x}$$

$$f(x, y) = \left(\frac{|x| + |y|}{2} \right)^p$$

$$\omega_i = \frac{1}{n}, \forall i = 1, \dots, n$$

por la proposición 3.1, S_e^p es una medida de similaridad en $IVFS(X)$.

□

Esta familia puede ser generalizada de distintas maneras, como por ejemplo como se presenta en el siguiente resultado.

Corolario 3.18. *La función $S_s^p : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ dada por:*

$$S_s^p(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|\bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) + 3(\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))|}{8} + \frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + 3(\bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i))|}{8} \right)^p}$$

es una medida de similaridad para $IVFS(X)$.

Demostración. Tomando

$$g(x) = 1 - \sqrt[p]{x}$$

$$f(x, y) = \left(\frac{|x + 3y| + |3x + y|}{8} \right)^p$$

$$\omega_i = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

en la proposición 3.1, se tiene que S_s^p es una medida de similaridad entre $IVFS(X)$. \square

El problema de las medidas S_e^p y S_s^p es que en algunos casos no permiten diferenciar conjuntos intervalo-valuados. Se ilustrará este hecho con un ejemplo.

Ejemplo 3.19. *Sean $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ un referencial de cardinal finito y A, B, C tres elementos en $IVFS(X)$ siendo*

$$A = \{(x_1, [0.2, 0.5]), (x_2, [0.2, 0.5]), (x_3, [0.2, 0.5])\}$$

$$B = \{(x_1, [0.4, 0.7]), (x_2, [0.4, 0.7]), (x_3, [0.4, 0.7])\}$$

$$C = \{(x_1, [0.3, 0.6]), (x_2, [0.3, 0.7]), (x_3, [0.3, 0.5])\}$$

se tiene que:

$$S_s^1(A, B) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{|\bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) + 3(\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))|}{8} + \frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + 3(\bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i))|}{8} \right)$$

$$S_e^1(A, B) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)|}{2} + \frac{|\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{2} \right)$$

Por lo tanto, se obtiene que $S_e^1(A, C) = S_e^1(B, C) = 0.9$ y $S_s^1(A, C) = S_s^1(B, C) = 0.9$ cuando claramente, A y B no son iguales y además C parece más similar a B que a A .

Corolario 3.20. La función $S_h^p : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$S_h^p(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^3 \omega'_m \varphi_m(x_i) \right)^p}$$

donde:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega'_m \leq 1 \\ \omega'_1 + \omega'_2 + \omega'_3 &= 1 \\ \varphi_1(x_i) &= \frac{|\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) + 3(\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))|}{8} + \frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + 3(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i))|}{8} \\ \varphi_2(x_i) &= \left| \frac{\underline{A}(x_i) + \overline{A}(x_i)}{2} - \frac{\underline{B}(x_i) + \overline{B}(x_i)}{2} \right| \\ \varphi_3(x_i) &= \max \left(\frac{\overline{A}(x_i) - \underline{A}(x_i)}{2}, \frac{\overline{B}(x_i) - \underline{B}(x_i)}{2} \right) - \min \left(\frac{\overline{A}(x_i) - \underline{A}(x_i)}{2}, \frac{\overline{B}(x_i) - \underline{B}(x_i)}{2} \right) \end{aligned}$$

es una medida de similaridad en $IVFS(X)$.

Demostración. Tomando en la proposición 3.1 las funciones:

$$g(x) = 1 - \sqrt[p]{x}$$

$$f(x, y) = (\omega'_1 f_1(x, y) + \omega'_2 f_2(x, y) + \omega'_3 f_3(x, y))^p$$

con $0 \leq \omega'_m \leq 1$, $\omega'_1 + \omega'_2 + \omega'_3 = 1$ y

$$f_1(x, y) = \frac{1}{8}(|x + 3y| + |3x + y|)$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2}|x + y|$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|$$

y todos los pesos iguales, por la proposición 3.3, S_h^p es una medida de similaridad entre $IVFS(X)$. \square

Corolario 3.21. Si se considera el peso ω_i de todos los elementos en S_h^p , con $\omega_i > 0$ y $\sum_{i=1}^n \omega_i = 0$, se obtiene la función $S_\omega^p : IVFS(X) \times IVFS(X) \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$S_\omega^p(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \omega_i \left(\sum_{m=1}^3 \omega'_m \varphi_m(x) \right)^p}$$

la cual es una medida de similaridad en $IVFS(X)$.

Demostración. Considerando las funciones g y f dadas en la demostración anterior, por la proposición 3.1 se tiene que S_ω^p es una medida de similaridad en $IVFS(X)$. \square

En el siguiente ejemplo se puede observar como la medida S_h^p da resultados coherentes en casos que S_d^p parecía no darlos.

Ejemplo 3.22. Sean $A, B, C \in IVFS(X)$ con

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, [0.4, 0.6]); (x_2, [0.4, 0.6]); (x_3, [0.4, 0.7])\} \\ B &= \{(x_1, [0.4, 0.6]); (x_2, [0.3, 0.7]); (x_3, [0.5, 0.6])\} \\ C &= \{(x_1, [0, 1]); (x_2, [0.1, 0.9]); (x_3, [0.2, 0.8])\} \end{aligned}$$

Los tres conjuntos anteriores cumplen que:

$$\underline{A}(x_i) + \overline{A}(x_i) = \underline{B}(x_i) + \overline{B}(x_i) = \underline{C}(x_i) + \overline{C}(x_i)$$

entonces, $S_d^p(A, B) = S_d^p(A, C) = 1$.

Usando la medida de similaridad S_h^p obtenida en corolario 3.20 se procede a comparar los conjuntos difusos intervalo-valuados definidos anteriormente.

Si se calcula el valor de S_h^1 para un referencial con tres elementos en cada conjunto difuso intervalo-valuado y con $\omega'_i = \frac{1}{3}$ para todo i :

$$S_h^1(A, B) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \omega'_m \varphi_m(x_i) \right)$$

se obtiene que:

	x_1	x_2	x_3
A	[0.4, 0.6]	[0.4, 0.6]	[0.4, 0.7]
B	[0.4, 0.6]	[0.3, 0.7]	[0.5, 0.6]
φ_1	0	0.05	0.05
φ_2	0	0	0
φ_3	0	0.1	0.1
$S_h^1(A, B) = 0.967$			

	x_1	x_2	x_3
A	[0.4, 0.6]	[0.4, 0.6]	[0.4, 0.7]
C	[0, 1]	[0.1, 0.9]	[0.2, 0.8]
φ_1	0.2	0.15	0.075
φ_2	0	0	0.05
φ_3	0.4	0.3	0.15
$S_h^1(A, C) = 0.85$			

Tabla 3.1: Cálculo de $S_h^1(A, B)$ y $S_h^1(A, C)$.

Se ve claramente en la figura 3.4 que A se parece más a B que a C , pero se ha obtenido que $S_d^1(A, B) = S_d^1(A, C) = 1$, esto no es razonable puesto que los conjuntos no son iguales, no se verifica la primera propiedad de la definición 3.1. En cambio, $S_h^1(A, C) = 0.85 \leq 0.967 = S_h^1(A, B)$, es decir, S_h^p parece presentar un mejor comportamiento que S_d^p .

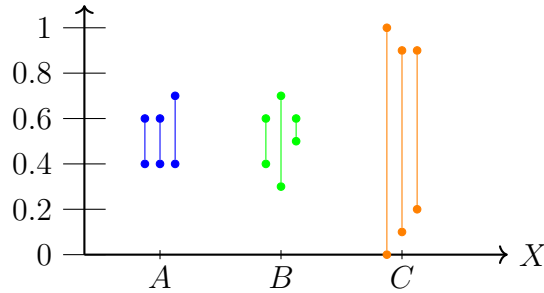


Figura 3.4: Conjuntos difusos intervalo-valuados A , B y C .

Todas las medidas de similaridad para conjuntos intervalo-valuados presentadas en este capítulo coinciden con las medidas de similaridad para conjuntos intuicionísticos dadas por ciertos autores. En particular, S_C se podría derivar de la medida propuesta por Chen [4, 5], S_H por Hong and Kim [11], S_L por Fan and Zhangyan [8], S_d^p y S_{dw}^p por Dengfeng and Chuntian [6], S_{mod}^p por Mitchell [18] y S_e^p , S_s^p , S_h^p y S_w^p por Liang and Shi [15]. Dada la analogía ya comentada entre conjuntos difusos intervalo-valuados y conjuntos intuicionísticos, este hecho apoya la bondad de los métodos propuestos para generar medidas de similaridad en $IVFS(X)$.

Sin embargo, aunque en la literatura se presentan como medidas de similaridad, S_C , S_d^p , S_{dw}^p , S_{mod}^p , definidas en 3.7, 3.13 y 3.15 respectivamente, realmente no lo son ya que no verifican la primera propiedad de las medidas de similaridad 3.1. Sí verifican la versión más débil de esta definición, es decir, son medidas de similaridad débiles.

3.2. Relaciones de orden entre las medidas de similaridad

En la sección anterior se encontraron relaciones entre algunas de las medidas de similaridad presentadas (notas 3.14 y 3.16). Así, se obtuvo que

$$S_d^1 = S_C$$

$$S_{mod}^1 = S_H$$

con lo que S_C y S_H son casos particulares de S_d^p y S_{mod}^p con $p = 1$. En esta sección se estudiarán otras relaciones con el fin de poder establecer un orden entre las distintas medidas de similaridad.

Corolario 3.23. *Sean S_C y S_H las similaridades dadas en los corolarios 3.7 y 3.9, respectivamente. Para todo $A, B \in IVFS(X)$ se verifica que:*

$$S_H(A, B) \leq S_C(A, B)$$

Demostración. Sean $A, B \in IVFS(X)$, utilizando la desigualdad triangular:

$$|\underline{A}(x) - \underline{B}(x) + \overline{A}(x) - \overline{B}(x)| \leq |\underline{A}(x) - \underline{B}(x)| + |\overline{A}(x) - \overline{B}(x)| \quad \forall x \in X$$

Por lo tanto, $S_H(A, B) \leq S_C(A, B)$. □

Además, es evidente que $S_H(A, B) \leq S_L(A, B) \leq S_C(A, B)$ porque S_L es la media entre S_C y S_H .

A continuación se presenta una condición suficiente para que se verifique la igualdad de estas tres medidas.

Corolario 3.24. *Sean S_C y S_H las similaridades dadas en los corolarios 3.7 y 3.9, respectivamente. Dados $A, B \in IVFS(X)$, si $A \subseteq B$ entonces $S_C(A, B) = S_H(A, B)$.*

Demostración. Sean $A, B \in IVFS(X)$ tales que $A \subseteq B$. Entonces $x_i \in X$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\underline{A}(x_i) &\leq \underline{B}(x_i) \\ \overline{A}(x_i) &\leq \overline{B}(x_i)\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) \leq 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}S_C(A, B) &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{2n} = \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \underline{B}(x_i) - \underline{A}(x_i) + \overline{B}(x_i) - \overline{A}(x_i)}{2n} = \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\underline{B}(x_i) - \underline{A}(x_i)| + |\overline{B}(x_i) - \overline{A}(x_i)|}{2n} = \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{2n} = S_H(A, B)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_C(A, B) = S_H(A, B)$ □

Un resultado similar se obtiene del siguiente corolario:

Corolario 3.25. Sean S_C y S_H las similaridades dadas en los corolarios 3.7 y 3.9, respectivamente. Dados $A, B \in IVFS(X)$, si $A(x_i) \leq B(x_i)$ o $B(x_i) \leq A(x_i)$, $\forall x_i \in X$ entonces

$$S_C(A, B) = S_H(A, B)$$

Demostración. Sea $x_i \in X$ tal que $A(x_i) \leq B(x_i)$ o $B(x_i) \leq A(x_i)$. Se analizarán los dos casos:

- Caso $A(x_i) \leq B(x_i)$:

$$\begin{aligned}\underline{A}(x_i) &\leq \underline{B}(x_i) \\ \overline{A}(x_i) &\leq \overline{B}(x_i)\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) \leq 0$:

$$\begin{aligned}|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)| &= \underline{B}(x_i) - \underline{A}(x_i) + \overline{B}(x_i) - \overline{A}(x_i) = \\ &= |\underline{B}(x_i) - \underline{A}(x_i)| + |\overline{B}(x_i) - \overline{A}(x_i)| = |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|\end{aligned}$$

- Caso $B(x_i) \leq A(x_i)$:

$$\begin{aligned}\underline{B}(x_i) &\leq \underline{A}(x_i) \\ \overline{B}(x_i) &\leq \overline{A}(x_i)\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) \geq 0$:

$$\begin{aligned}|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)| &= \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) = \\ &= |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|\end{aligned}$$

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos se obtiene que:

$$\begin{aligned}S_C(A, B) &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{2n} = \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|)}{2n} = S_H(A, B)\end{aligned}$$

□

Es evidente que en estos dos casos $S_C(A, B) = S_H(A, B) = S_L(A, B)$, por estar S_L definida como la media entre S_C y S_H .

Corolario 3.26. Sean S_d^p , S_e^p y S_s^p las similaridades dadas en los corolarios 3.13, 3.17 y 3.18, respectivamente. Dados $A, B \in IVFS(X)$, si $A \subseteq B$ entonces $S_d^p(A, B) = S_e^p(A, B) = S_s^p(A, B)$.

Demostración. Sean $A, B \in IVFS(X)$ tales que $A \subseteq B$. Entonces $\forall i = 1, \dots, n$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\underline{A}(x_i) &\leq \underline{B}(x_i) \\ \overline{A}(x_i) &\leq \overline{B}(x_i)\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}k_{1i} &= |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| \\ k_{2i} &= |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|\end{aligned}$$

Se pueden reescribir las medidas de la siguiente forma:

$$S_d^p(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)}{2} \right|^p} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left| \frac{-k_{1i} - k_{2i}}{2} \right|^p} = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{k_{1i} + k_{2i}}{2} \right)^p} \\
S_e^p(A, B) &= 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{2} \right)^p} = \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|-k_{1i}| + |-k_{2i}|}{2} \right)^p} = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{k_{1i} + k_{2i}}{2} \right)^p} \\
&S_s^p(A, B) = \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) + 3(\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))|}{8} + \frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + 3(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i))|}{8} \right)^p} = \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|-k_{2i} + 3(-k_{1i})|}{8} + \frac{|-k_{1i} + 3(-k_{2i})|}{8} \right)^p} = \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{(4k_{2i} + 4k_{1i})}{8} \right)^p} = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{k_{1i} + k_{2i}}{2} \right)^p}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_d^p(A, B) = S_e^p(A, B) = S_s^p(A, B)$ □

Un resultado similar al del corolario 3.25 se obtiene para $S_d^p(A, B)$, $S_e^p(A, B)$ y $S_s^p(A, B)$:

Corolario 3.27. Sean S_d^p , S_e^p y S_s^p las similaridades dadas en los corolarios 3.13, 3.17 y 3.18, respectivamente. Dados $A, B \in IVFS(X)$, si $A(x_i) \leq B(x_i)$ o $B(x_i) \leq A(x_i)$, $\forall x_i \in X$ entonces $S_d^p(A, B) = S_e^p(A, B) = S_s^p(A, B)$.

Demostración. Sea $x_i \in X$ tal que $A(x_i) \leq B(x_i)$ o $B(x_i) \leq A(x_i)$. Se analizarán los dos casos:

- Caso $A(x_i) \leq B(x_i)$:

$$\begin{aligned}
\underline{A}(x_i) &\leq \underline{B}(x_i) \\
\overline{A}(x_i) &\leq \overline{B}(x_i)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) \leq 0$:

$$|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)| = |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
& |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) + 3(\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))| + |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + 3(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i))| = \\
& = -\overline{A}(x_i) + \overline{B}(x_i) - 3\underline{A}(x_i) + 3\underline{B}(x_i) - \underline{A}(x_i) + \underline{B}(x_i) - 3\overline{A}(x_i) + 3\overline{B}(x_i) = \\
& = -4\overline{A}(x_i) + 4\overline{B}(x_i) - 4\underline{A}(x_i) + 4\underline{B}(x_i) = 4|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|
\end{aligned}$$

- Caso $B(x_i) \leq A(x_i)$:

$$\begin{aligned}
\underline{B}(x_i) &\leq \underline{A}(x_i) \\
\overline{B}(x_i) &\leq \overline{A}(x_i)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) \geq 0$:

$$|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)| = |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
& |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) + 3(\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))| + |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + 3(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i))| = \\
& = \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) + 3\underline{A}(x_i) - 3\underline{B}(x_i) + \underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + 3\overline{A}(x_i) - 3\overline{B}(x_i) = \\
& = 4|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + \overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)}{2} \right|^p} = \\
& = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{2} \right)^p} = \\
& = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i) + 3(\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))|}{8} + \frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i) + 3(\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i))|}{8} \right)^p}
\end{aligned}$$

Luego, $S_d^p(A, B) = S_e^p(A, B) = S_s^p(A, B)$. □

Es importante destacar que si consideramos el otro orden parcial en $IVFS(X)$ considerado previamente, \sqsubseteq , entonces los valores obtenidos con las medidas de similaridad mencionadas en los dos últimos corolarios no son iguales y esto se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.28. Sean $A, B \in IVFS(X)$ donde:

$$A = \{(x_1, [0.3, 0.5]), (x_2, [0.5, 0.7]), (x_3, [0.1, 0.5])\}$$

$$B = \{(x_1, [0.2, 0.6]), (x_2, [0.1, 0.8]), (x_3, [0.05, 0.7])\}$$

Se ve claramente que $A \sqsubseteq B$. Para estos conjuntos se obtienen los siguientes valores de las medidas de similaridad:

$$\begin{aligned} S_C(A, B) &= 0.925 & S_d^p(A, B) &= 0.892 \\ S_H(A, B) &= 0.842 & S_e^p(A, B) &= 0.816 \\ S_L(A, B) &= 0.883 & S_s^p(A, B) &= 0.891 \end{aligned}$$

con lo que las medidas son distintas, lo cual era esperable, puesto que ahora se está midiendo la imprecisión y no la similitud.

Para terminar se introduce una última relación entre las familias de medidas de similaridad definidas en la sección anterior.

Corolario 3.29. Sean S_H y S_{mod}^p las similaridades dadas en los corolarios 3.9 y 3.15, respectivamente. Para todo $A, B \in IVFS(X)$ se verifica que:

$$S_{mod}^p(A, B) \leq S_H(A, B)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} S_H(A, B) &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| + |\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|)}{2n} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)}{n} \right| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)}{n} \right| \right) \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ con } 1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

considerando $g = (1, \dots, 1)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)}{n} \right| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)}{n} \right| \right) \geq \\
& 1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt[p]{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)}{n} \right| \right)^p} + \sqrt[p]{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)}{n} \right| \right)^p} \right) \geq \\
& 1 - \frac{1}{2\sqrt[p]{n}} \left(\sqrt[p]{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)}{n} \right| \right)^p} + \sqrt[p]{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)}{n} \right| \right)^p} \right) = S_{mod}^p(A, B)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_{mod}^p(A, B) \leq S_H(A, B)$. □

Corolario 3.30. Sean S_d^p y S_e^p las similaridades dadas en los corolarios 3.13 y 3.17, respectivamente. Para todo $A, B \in IVFS(X)$ se verifica que:

$$S_e^p(A, B) \leq S_d^p(A, B)$$

Demostración. Reescribiendo las fórmulas de las medidas de similaridad, se tiene:

$$\begin{aligned}
S_d^p(A, B) &= 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)}{2} + \frac{\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)}{2} \right|^p} \\
S_e^p(A, B) &= 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)|}{2} + \frac{|\overline{A}(x_i) - \overline{B}(x_i)|}{2} \right)^p}
\end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular:

$$|\underline{A}(x) - \underline{B}(x) + \overline{A}(x) - \overline{B}(x)| \leq |\underline{A}(x) - \underline{B}(x)| + |\overline{A}(x) - \overline{B}(x)| \quad \forall x \in X$$

Entonces:

$$S_e^p(A, B) \leq S_d^p(A, B)$$

□

A partir de los resultados mencionados anteriormente, se ha logrado establecer relaciones entre varias de las medidas de similaridad presentadas en este capítulo. La figura 3.5 muestra gráficamente estas relaciones, donde en la parte superior se muestran las similitudes que toman valores mayores y a medida que se avanza por el diagrama, se obtienen las que toman valores menores. Todas las familias introducidas a partir de los resultados generales aparecen resumidas en la tabla 3.2.

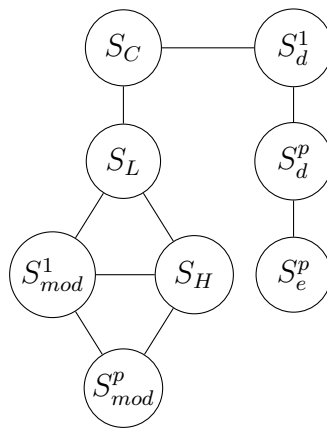


Figura 3.5: Relaciones entre las medidas de similaridad.

Medida de similaridad	Fórmula
$S_C(A, B)$	$1 - \frac{\sum_{i=1}^n A(x_i) - B(x_i) + A(x_i) - \bar{B}(x_i) }{2n}$
$S_H(A, B)$	$1 - \frac{\sum_{i=1}^n A(x_i) - B(x_i) + \bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) }{2n}$
$S_L(A, B)$	$1 - \frac{\sum_{i=1}^n A(x_i) - B(x_i) + \bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) }{4n} - \frac{\sum_{i=1}^n A(x_i) - B(x_i) + \bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) }{4n}$
$S_d^p(A, B)$	$1 - \frac{1}{\varphi^n} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left \frac{A(x_i) + \bar{A}(x_i)}{2} - \frac{B(x_i) + \bar{B}(x_i)}{2} \right ^p}, \quad 1 \leq p \leq +\infty$
$S_{d\omega}^p(A, B)$	$1 - \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \omega_i \left \frac{A(x_i) + \bar{A}(x_i)}{2} - \frac{B(x_i) + \bar{B}(x_i)}{2} \right ^p}$
$S_{mod}^p(A, B)$	$\frac{1}{2}(\varphi_1(A, B) + \varphi_2(A, B))$
	con $\varphi_1(A, B) = 1 - \frac{1}{\varphi^n} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n A(x_i) - B(x_i) ^p}$ y $\varphi_2(A, B) = 1 - \frac{1}{\varphi^n} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \bar{B}(x_i) - \bar{A}(x_i) ^p}$
$S_e^p(A, B)$	$1 - \frac{1}{\varphi^n} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{ A(x_i) - B(x_i) }{2} + \frac{ \bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) }{2} \right)^p}$
$S_s^p(A, B)$	$1 - \frac{1}{\varphi^n} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{ \bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) + 3 A(x_i) - B(x_i) }{8} + \frac{ A(x_i) - B(x_i) + 3 \bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) }{8} \right)^p}$
$S_h^p(A, B)$	$1 - \frac{1}{\varphi^n} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^3 \omega'_m \varphi_m(x_i) \right)^p}$
	con $0 \leq \omega'_m \leq 1, \sum_{m=1}^3 \omega'_m = 1, \varphi_1(x_i) = \frac{ \bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) + 3 A(x_i) - B(x_i) }{8} + \frac{ A(x_i) - B(x_i) + 3 \bar{A}(x_i) - \bar{B}(x_i) }{8}$
	$\varphi_2(x_i) = \left \frac{A(x_i) + \bar{A}(x_i)}{2} - \frac{B(x_i) + \bar{B}(x_i)}{2} \right , \varphi_3(x_i) = \max \left(\frac{ \bar{A}(x_i) - \bar{A}(x_i) }{2}, \frac{ \bar{B}(x_i) - \bar{B}(x_i) }{2} \right) - \min \left(\frac{ \bar{A}(x_i) - \bar{A}(x_i) }{2}, \frac{ \bar{B}(x_i) - \bar{B}(x_i) }{2} \right)$
$S_\omega^p(A, B)$	$1 - \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \omega_i \left(\sum_{m=1}^3 \omega'_m \varphi_m(x_i) \right)^p} dx$

Tabla 3.2: Tabla resumen de medidas de similaridad.

Capítulo 4

Aplicación al procesamiento de imágenes

En este capítulo se aplicarán los contenidos del capítulo anterior al análisis de imágenes. Se verá cómo modelar una imagen a partir de un conjunto difuso intervalo-valuado y se verá cómo los resultados obtenidos con las medidas de similaridad concuerdan con lo esperado a priori por la observación humana y, por tanto, las medidas de similaridad permitirán establecer una metodología sustitutoria que sea válida en aquellos casos en los que el método manual no sea factible. Se generarán imágenes con ruido gaussiano y se compararán estas con las originales utilizando las medidas de similaridad definidas. Se analizarán los resultados, los problemas encontrados y se propondrá una alternativa para subsanarlos.

4.1. Modelado de las imágenes

En esta sección se introduce la definición de imagen y la forma de modelar una imagen a partir de un conjunto difuso intervalo-valuado.

Definición 4.1. *Una imagen en niveles de gris es una función $I : D_I \in \mathbb{Z}^2 \rightarrow L$, donde D_I representa los elementos de la imagen y $L = \{0, \dots, 255\}$ la escala de grises, es decir, x_{ij} es un elemento o píxel de la imagen y $I(x_{ij})$ es su nivel de gris.*

Para poder aplicar las medidas de similaridad sobre las imágenes, es necesario modelarlas como conjuntos difusos intervalo-valorados, esta es una técnica ampliamente utilizada en la literatura. En cada punto de la imagen o pixel, se definen el extremo inferior y superior del conjunto difuso intervalo-valorado asociado como:

$$\underline{A}(x_{ij}) = \frac{I(x_{ij})}{255}$$

$$\overline{A}(x_{ij}) = H\left(\frac{I(x_{ij})}{255}\right)$$

con $H(x) = 1 - \frac{1-x}{1+\lambda x}$, donde \underline{A} es el valor normalizado de x_{ij} y \overline{A} se obtiene usando el generador de Sugeno [20].

Así, se puede definir cualquier imagen como el siguiente conjunto difuso intervalo-valorado:

$$A_I = \left\{ \left(x_{ij}, \left[\frac{I(x_{ij})}{255}, H\left(\frac{I(x_{ij})}{255}\right) \right] \right) / x_{ij} \in D_I \right\}$$

Dicho conjunto queda bien definido puesto que:

$$x \leq H(x), \forall x \in [0, 1]$$

La figura 4.1 muestra gráficamente la representación de los extremos de los intervalos para cada nivel de gris con $\lambda = 0.5$. En azul se representa el extremo inferior del intervalo y en rojo el extremo superior. En ella se observa como los píxeles con un valor intermedio de gris tiene más incertidumbre, desapareciendo esta cuando el color es claramente blanco o negro.

4.2. Descripción del experimento

El experimento realizado para analizar el desempeño de las medidas de similaridad presentadas en el capítulo anterior consiste en generar ruido sobre las imágenes con el fin de distorsionarlas y luego medir la similitud entre la imagen original y la imagen inmersa en ruido. En la figura 4.2 se muestra un diagrama de este experimento. El objetivo es analizar cómo afecta el ruido en cada medida de similaridad para así poder estudiar cuál

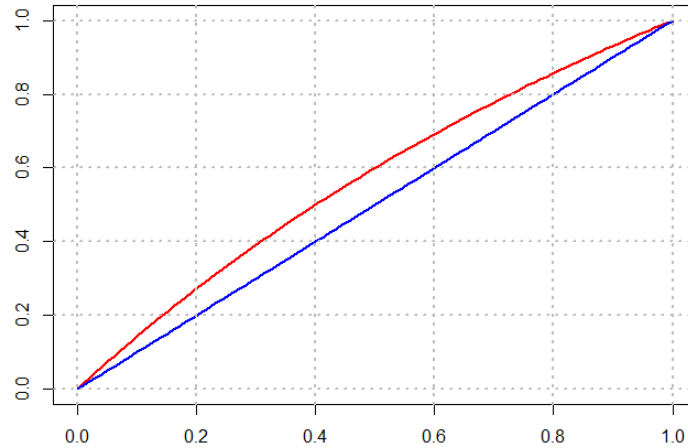


Figura 4.1: Gráfica de los extremos del intervalo para cada nivel de gris.

de ellas es más sensible frente al ruido y, por tanto, poder establecer la más recomendable según las circunstancias del estudio.

Una explicación detallada del experimento realizado puede verse a continuación, así como sus principales características.

- Imágenes: Se utilizan 25 imágenes del conjunto de datos de segmentación de Berkeley [16]. La figura 4.3 muestra seis ejemplos de estas imágenes con características diferenciadas.
- Modelado de las imágenes: Para modelar a las imágenes como un IVFS se utiliza el valor $\lambda = 0.5$ a la hora de definir el conjunto difuso intervalo-valuado que representa a la imagen.
- Ruido: Se utiliza el ruido gaussiano puesto que es uno de los modelos más utilizado en el análisis de imágenes por ser aditivo e independiente en cada píxel. Para generar este ruido se utiliza una distribución gaussiana $N(0, \sigma)$. Se utilizan 10 valores de desviaciones típicas:

$$\sigma = \{0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5\}$$

con el objetivo de estudiar distintos grados de distorsión de la imagen.

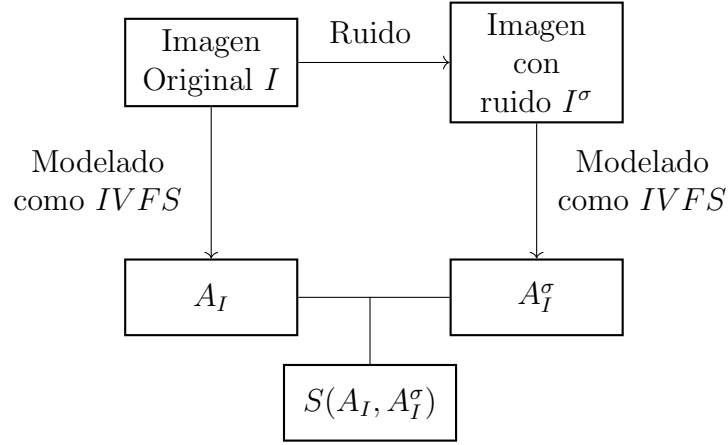


Figura 4.2: Diagrama del experimento.

En la figura 4.4 se muestra como ejemplo una imagen con diferentes niveles de ruido gaussiano con el fin de apreciar visualmente la distorsión que estos generan sobre la imagen. Se puede apreciar que a medida que se aumenta la desviación estándar utilizada para generar el ruido, la imagen muestra una mayor distorsión, como cabría esperar.

- Medidas de similitud: Se utilizan las medidas S_C , S_H , S_L , S_d^p , S_{mod}^p , S_e^p , S_s^p y S_h^p .
- Parámetros de las medidas de similitud: Algunas medidas de similitud requieren de ciertos parámetros, tal como se vio en el capítulo anterior. En este experimento se usa $p = 3$ para las medidas S_d^p , S_{mod}^p , S_e^p , S_s^p y S_h^p .
- Pesos en las medidas de similitud: Se considera el mismo peso para cada píxel de la imagen, por lo tanto, cada elemento del dominio de definición de la imagen o el conjunto difuso intervalo-valuado asociado tendrá el mismo peso. Por lo tanto, $w_i = 1/n$ donde n es el número de píxeles de la imagen o, lo que es equivalente, la cantidad de elementos en el IVFS. En el estudio se prescindirá de las medidas S_{dw}^p y S_w^p puesto que tomando igual el peso en cada elemento, éstas son iguales a S_d^p y S_h^p , respectivamente. Para S_h^p se utilizan los pesos $\omega'_m = \frac{1}{3}$, para $m = 1, 2, 3$.
- Iteraciones: Todos los cálculos se repiten 100 veces, es decir, para cada valor de σ , se genera el ruido 100 veces y cada vez se calcula la similitud entre la imagen con ruido y la imagen sin ruido. La diferencia entre distintas iteraciones reside en la aleatoriedad del ruido generado.



Figura 4.3: Ejemplos de imágenes en niveles de gris de la base de datos de Berkeley.

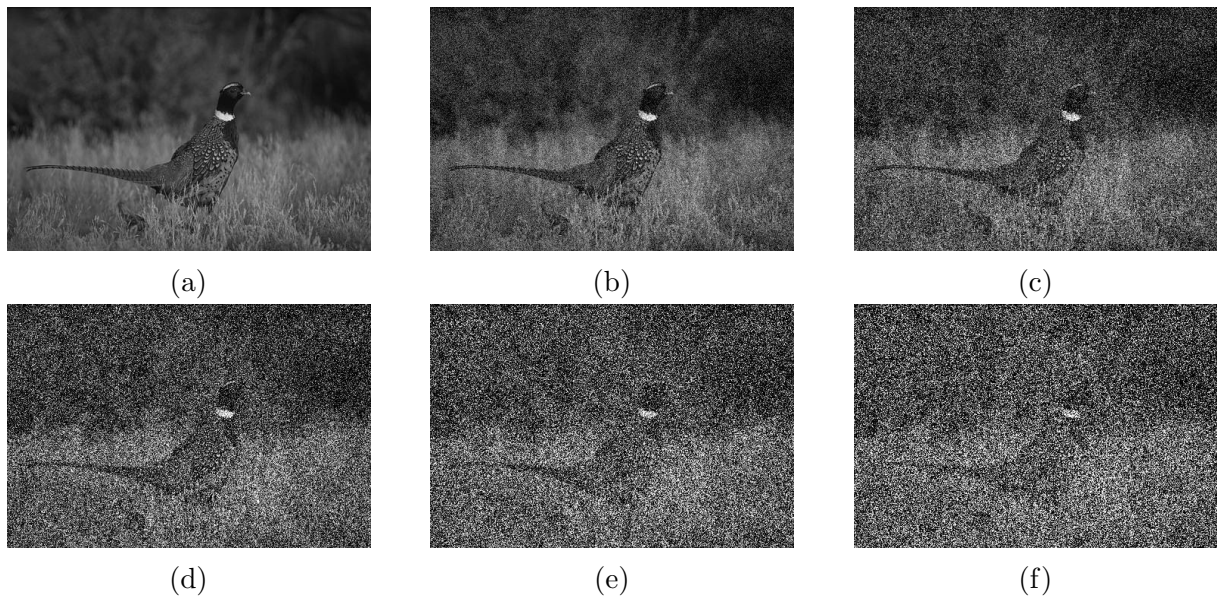


Figura 4.4: Ejemplos de imágenes con ruido gaussiano para distintos valores de σ . (a) Imagen original (imagen sin ruido). (b) $\sigma = 0.1$. (c) $\sigma = 0.2$. (d) $\sigma = 0.3$. (e) $\sigma = 0.4$. (f) $\sigma = 0.5$.

4.3. Resultados

En esta sección se presentan y analizan los resultados obtenidos. A modo de ejemplo, la tabla 4.1 muestra los valores obtenidos para cada medida de similaridad sobre una imagen (figura 4.4(a)). Estos valores se obtienen de la siguiente manera:

- Se fija un valor de σ .
- Se calcula la medida de similaridad entre la imagen original A_I y la imagen inmersa de ruido A_I^σ . Este paso se repite 100 veces, es decir, se calcula la medida de similaridad en cada iteración del experimento obteniéndose 100 valores de similaridad.
- Se calcula la media de los 100 valores obtenidos en el paso anterior. Dicho valor medio es el que se muestra en la tabla 4.1.

	σ									
	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
S_C	0.957	0.915	0.877	0.843	0.813	0.786	0.762	0.741	0.722	0.706
S_H	0.957	0.915	0.877	0.843	0.813	0.786	0.762	0.741	0.722	0.706
S_L	0.957	0.915	0.877	0.843	0.813	0.786	0.762	0.741	0.722	0.706
S_d^p	0.937	0.877	0.825	0.779	0.738	0.702	0.671	0.644	0.621	0.602
S_{mod}^p	0.936	0.877	0.824	0.778	0.737	0.700	0.669	0.642	0.619	0.600
S_e^p	0.937	0.877	0.825	0.779	0.738	0.702	0.671	0.644	0.621	0.602
S_s^p	0.937	0.877	0.825	0.779	0.738	0.702	0.671	0.644	0.621	0.602
S_h^p	0.956	0.915	0.879	0.847	0.819	0.795	0.773	0.755	0.740	0.727

Tabla 4.1: Tabla de resultados.

En la tabla 4.1 se observa, como era de esperar, que el valor de todas las medidas de similaridad decrece a medida que aumenta el valor de σ . Es decir, cuanto más distorsionada está la imagen, menos se parece a la imagen original. Además:

$$S_C = S_H = S_L$$

$$S_d^p = S_e^p = S_s^p$$

Como se mostró en los corolarios 3.25 y 3.27, la igualdad de esas medidas de similaridad se da en el caso en que un intervalo esté contenido en el otro, para todos los elementos del conjunto referencial. Esto es lo que sucede en este caso y se explica a continuación. Dado un píxel x_{ij} de la imagen original, sean las funciones de pertenencia $[\underline{A}_I(x_{ij}), \overline{A}_I(x_{ij})]$ y $[\underline{A}_I^\sigma(x_{ij}), \overline{A}_I^\sigma(x_{ij})]$ correspondientes a la imagen original y a la imagen inmersa en ruido en ese píxel, respectivamente. En la figura 4.1 se puede observar que la función que genera el extremo superior de los intervalos es una función creciente. Por lo tanto, se pueden analizar dos casos:

- Si $\underline{A}_I(x_{ij}) \leq \underline{A}_I^\sigma(x_{ij})$ entonces $\overline{A}_I(x_{ij}) \leq \overline{A}_I^\sigma(x_{ij})$
- Si $\underline{A}_I^\sigma(x_{ij}) \leq \underline{A}_I(x_{ij})$ entonces $\overline{A}_I^\sigma(x_{ij}) \leq \overline{A}_I(x_{ij})$

Como consecuencia, para cada x_{ij} en la imagen, se obtiene que un intervalo está contenido en el otro.

Por otro lado, en la tabla 4.1 se puede observar que $S_{mod}^p(A, B) \leq S_H(A, B)$ para todo σ , tal y como se demostró en el corolario 3.29.

La figura 4.5 muestra gráficamente los valores obtenidos en la tabla 4.1.

Los resultados mostrados en la tabla 4.1, se correspondían con una única imagen. Tal como se mencionó anteriormente, en el experimento se utilizaron 25 imágenes. Para mostrar los resultados obtenidos sobre todas ellas se muestran las figuras 4.6, 4.7 y 4.8.

En la figura 4.6 se muestran los resultados obtenidos para cada medida de similaridad en función del valor de σ . Para construir cada diagrama de caja, se consideraron los valores obtenidos para cada una de las 25 imágenes de la misma forma en que se obtuvieron los valores de la tabla 4.1.

Por otro lado, en las figuras 4.7 y 4.8, para cada valor de σ se representan todas las medidas de similaridad. En estas gráficas se ve claramente la igualdad entre S_C , S_H y S_L por un lado y S_d^p , S_e^p y S_s^p por otro, como se comentó anteriormente.

En ambas figuras se observa que el valor de la medida de similaridad decrece cuando aumenta el valor de σ .

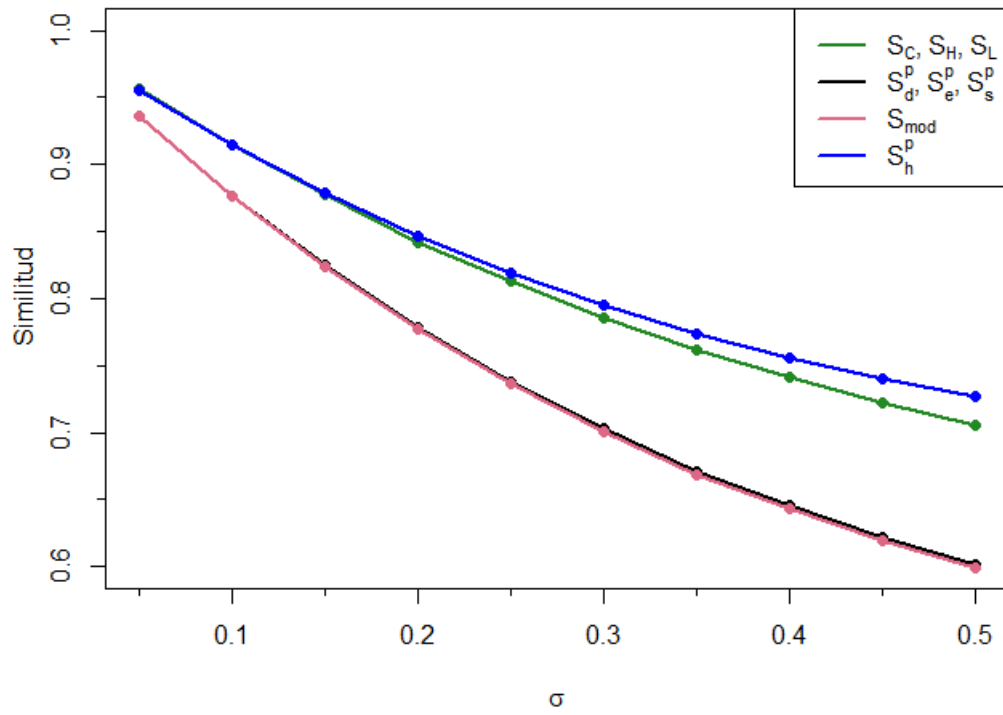


Figura 4.5: Valores obtenidos para cada medida de similaridad en función de σ .

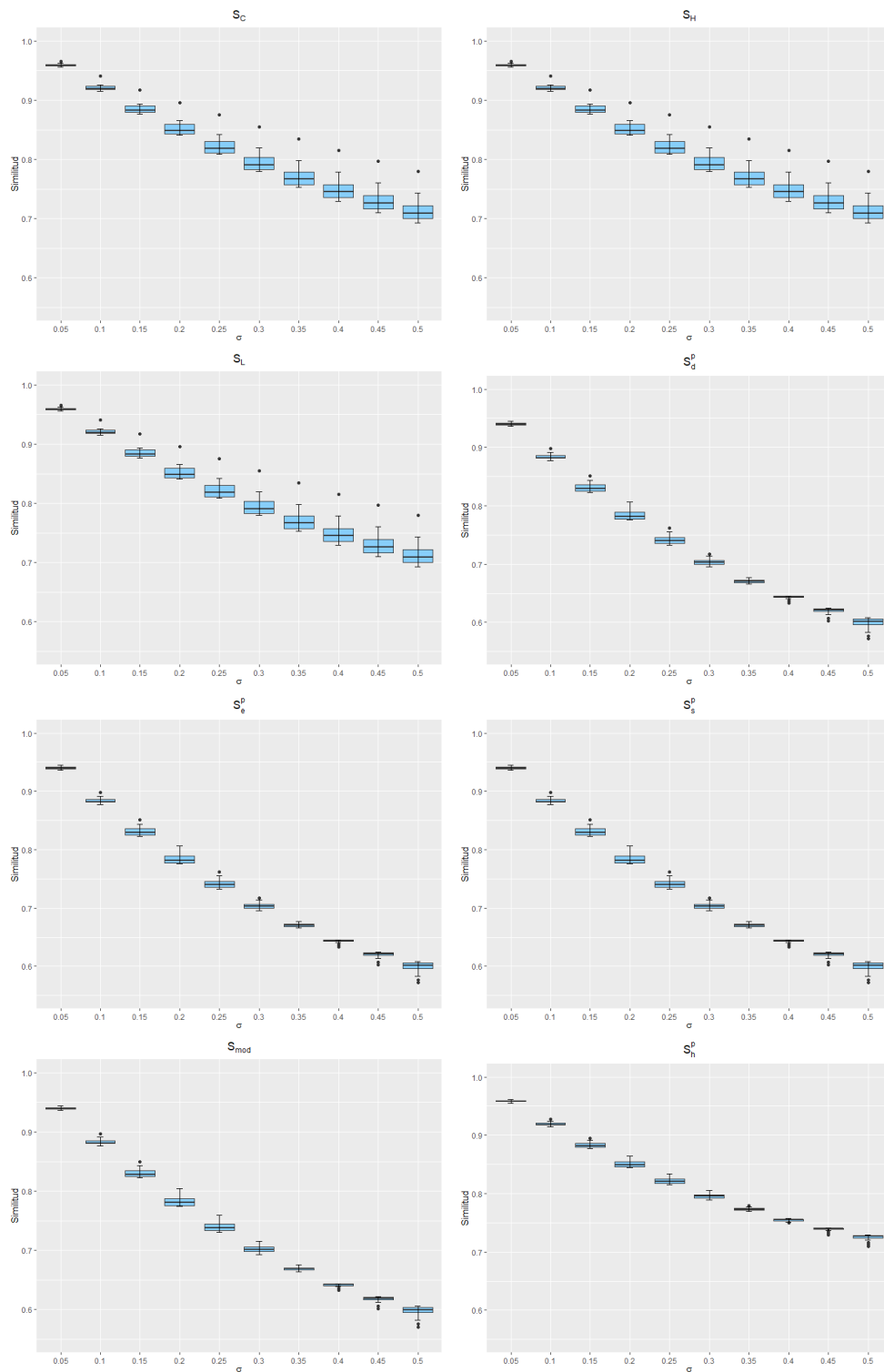


Figura 4.6: Diagramas de cajas para cada medida de similaridad mediante el primer enfoque.

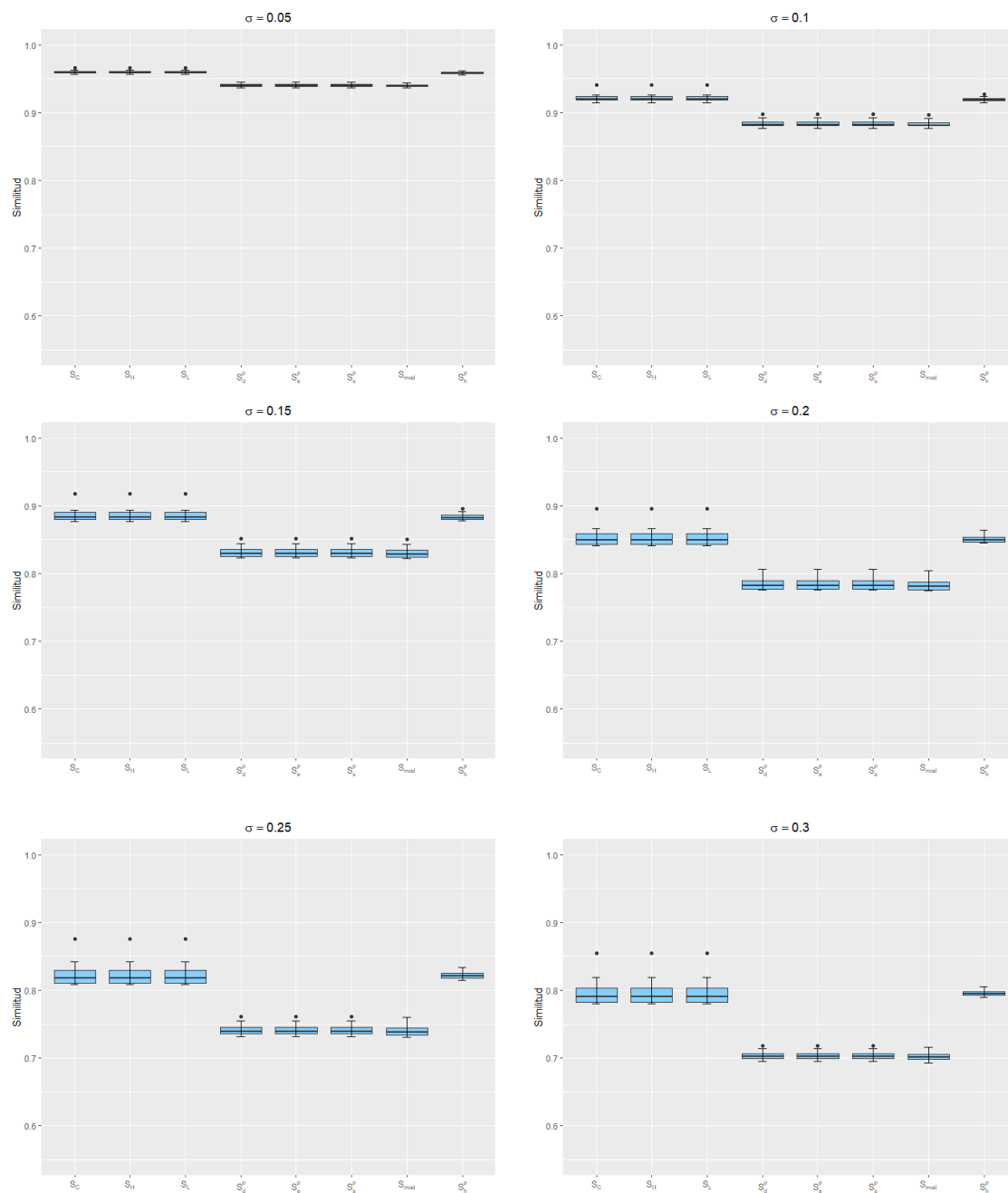


Figura 4.7: Gráficas para los distintos valores de σ con el primer enfoque.

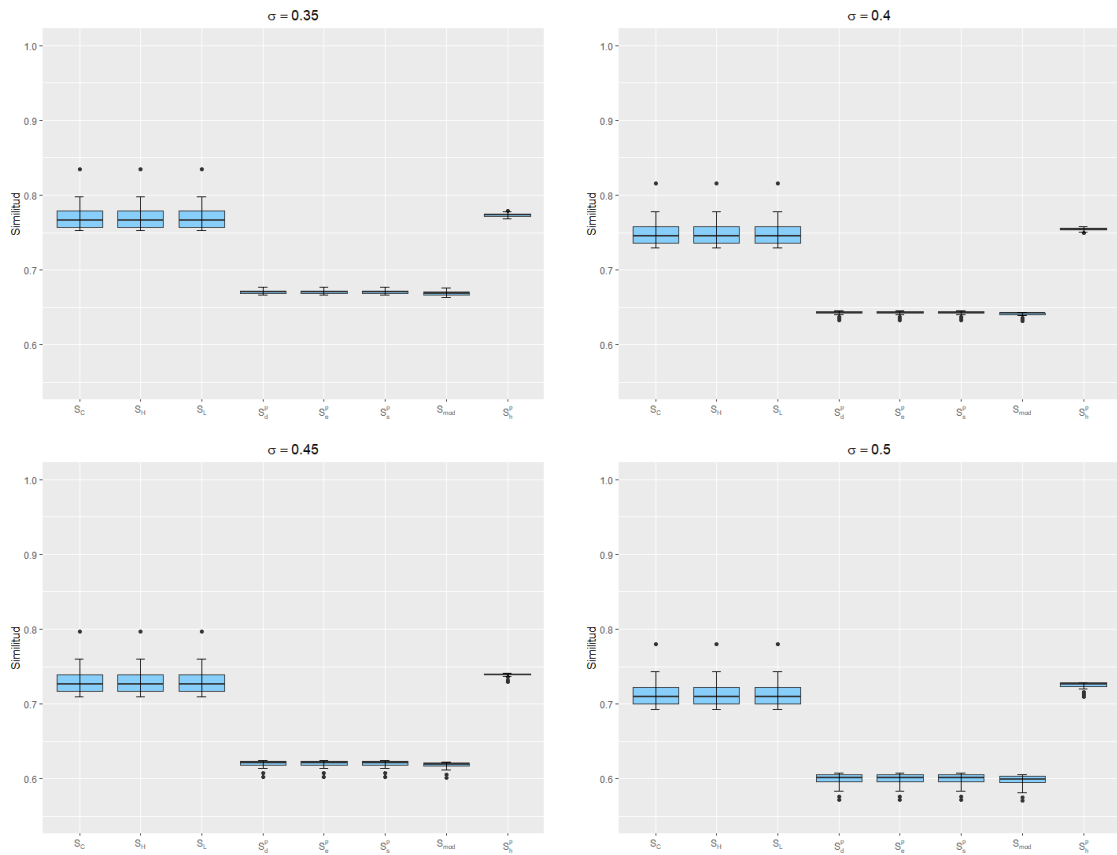


Figura 4.8: Gráficas para los distintos valores de σ con el primer enfoque (continuación).

4.4. Modelado alternativo de la imagen

En la sección anterior se vio que para varias medidas de similaridad se obtienen los mismos resultados. En esta sección se propone una alternativa para modelar una imagen con la cual se obtienen diferentes valores de la similaridad para el experimento desarrollado anteriormente.

Tal como se analizó en el ejemplo 3.28, las medidas de similaridad no serán iguales, por ejemplo, cuando un conjunto está embebido en el otro. Para modelar la imagen, se podría considerar a la función que define al extremo superior del IVFS tal que no sea creciente en todo el dominio, es decir, debe existir por lo menos un píxel x_{ij} tal que:

- Si $\underline{A}_I(x_{ij}) \leq \underline{A}_I^\sigma(x_{ij})$ entonces $\overline{A}_I^\sigma(x_{ij}) \leq \overline{A}_I(x_{ij})$
- Si $\underline{A}_I^\sigma(x_{ij}) \leq \underline{A}_I(x_{ij})$ entonces $\overline{A}_I^\sigma(x_{ij}) \leq \overline{A}_I(x_{ij})$

Para ello, se propone usar la siguiente función inspirada en el generador de Sugeno:

$$h(x) = 1 - \frac{1-x}{(1+0.5x)^2} + \sin(6\pi x) \frac{1-x}{5}$$

Al sumar la función seno se consiguen las oscilaciones necesarias para que la función h no sea creciente en todo el intervalo.

Así, se puede definir el conjunto difuso intervalo-valuado como:

$$A_I = \left\{ \left(x_{i,j}, \left[\frac{I(x_{i,j})}{255}, h\left(\frac{I(x_{i,j})}{255}\right) \right] \right) / x_{i,j} \in D_I \right\}$$

La figura 4.9 muestra gráficamente la representación de los extremos de los intervalos para cada nivel de gris. En azul se representa el extremo inferior del intervalo y en rojo el extremo superior. Se puede ver que la función que genera el extremo superior de los intervalos no es creciente y que está bien definida ya que el extremo inferior del intervalo siempre es menor que el superior, es decir, $\forall x_{i,j} \in D_I$:

$$x \leq h(x), \forall x \in [0, 1]$$

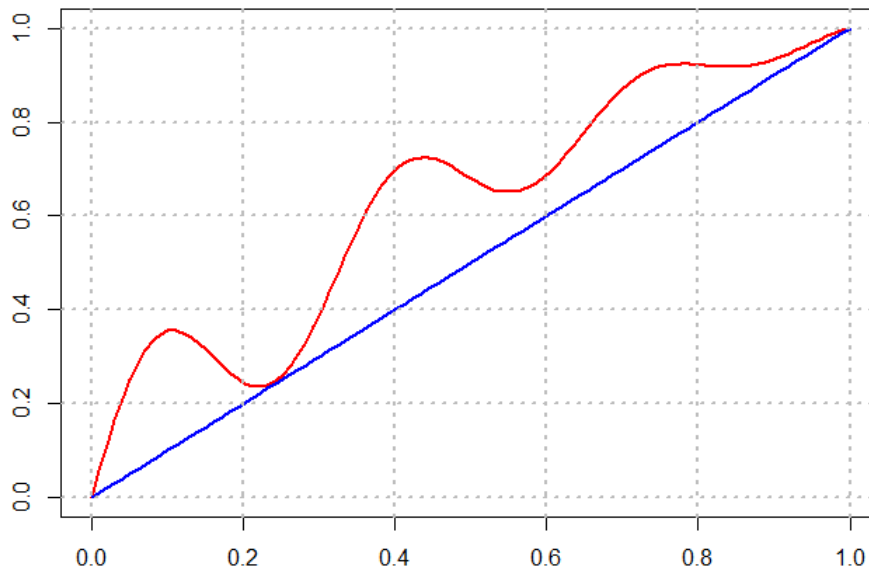


Figura 4.9: Gráfica de los extremos del intervalo.

Una vez modelada la imagen con esta nueva propuesta, se repite el experimento detallado en la sección anterior.

A modo de ejemplo, en la tabla 4.2, se muestra los valores obtenidos con este nuevo enfoque sobre la imagen de la figura 4.4(a).

Se procede a analizar la imagen dada en la figura 4.4(a) utilizando esta nueva definición del conjunto difuso intervalo-valuado asociado a la imagen. Se consideran de nuevos los mismos parámetros que en la sección anterior.

	σ									
	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
S_C	0.935	0.902	0.868	0.836	0.807	0.781	0.758	0.737	0.719	0.703
S_H	0.926	0.894	0.861	0.831	0.803	0.777	0.755	0.734	0.716	0.701
S_L	0.930	0.898	0.865	0.834	0.805	0.779	0.756	0.736	0.718	0.702
S_d^p	0.907	0.861	0.814	0.771	0.733	0.699	0.669	0.644	0.622	0.604
S_{mod}^p	0.895	0.849	0.803	0.760	0.721	0.687	0.657	0.632	0.611	0.592
S_e^p	0.904	0.859	0.813	0.771	0.732	0.698	0.669	0.643	0.622	0.603
S_s^p	0.907	0.860	0.814	0.771	0.733	0.699	0.669	0.644	0.622	0.603
S_h^p	0.919	0.890	0.859	0.831	0.805	0.782	0.762	0.745	0.730	0.718

Tabla 4.2: Tabla de resultados con el segundo modelado.

En la tabla 4.2 se puede ver que los resultados obtenidos en los corolarios 3.11, 3.23 y 3.30 se satisfacen para todos los valores de σ analizados ya que:

- S_L es la media aritmética entre S_C y S_H
- $S_H \leq S_C$
- $S_e^p \leq S_d^p$

Se realizó el mismo estudio que en la sección anterior con este nuevo enfoque, es decir, modelando a las imágenes por medio de la función h . Se obtuvieron las gráficas de las figuras 4.10, 4.11 y 4.12. En ellas se puede observar por un lado que $S_C \neq S_h \neq S_L$ y por otro que $S_d^p \neq S_e^p \neq S_s^p$. También se observa que las medidas de similaridad decrecen a medida que aumenta el nivel de ruido gaussiano, como ocurría en el primer enfoque. Como era de esperar, la distinta modelación de la imagen mediante conjuntos difusos intervalos-valorados da lugar a comportamientos diferenciados, con lo cual, ese paso es esencial en el procesamiento de imágenes.

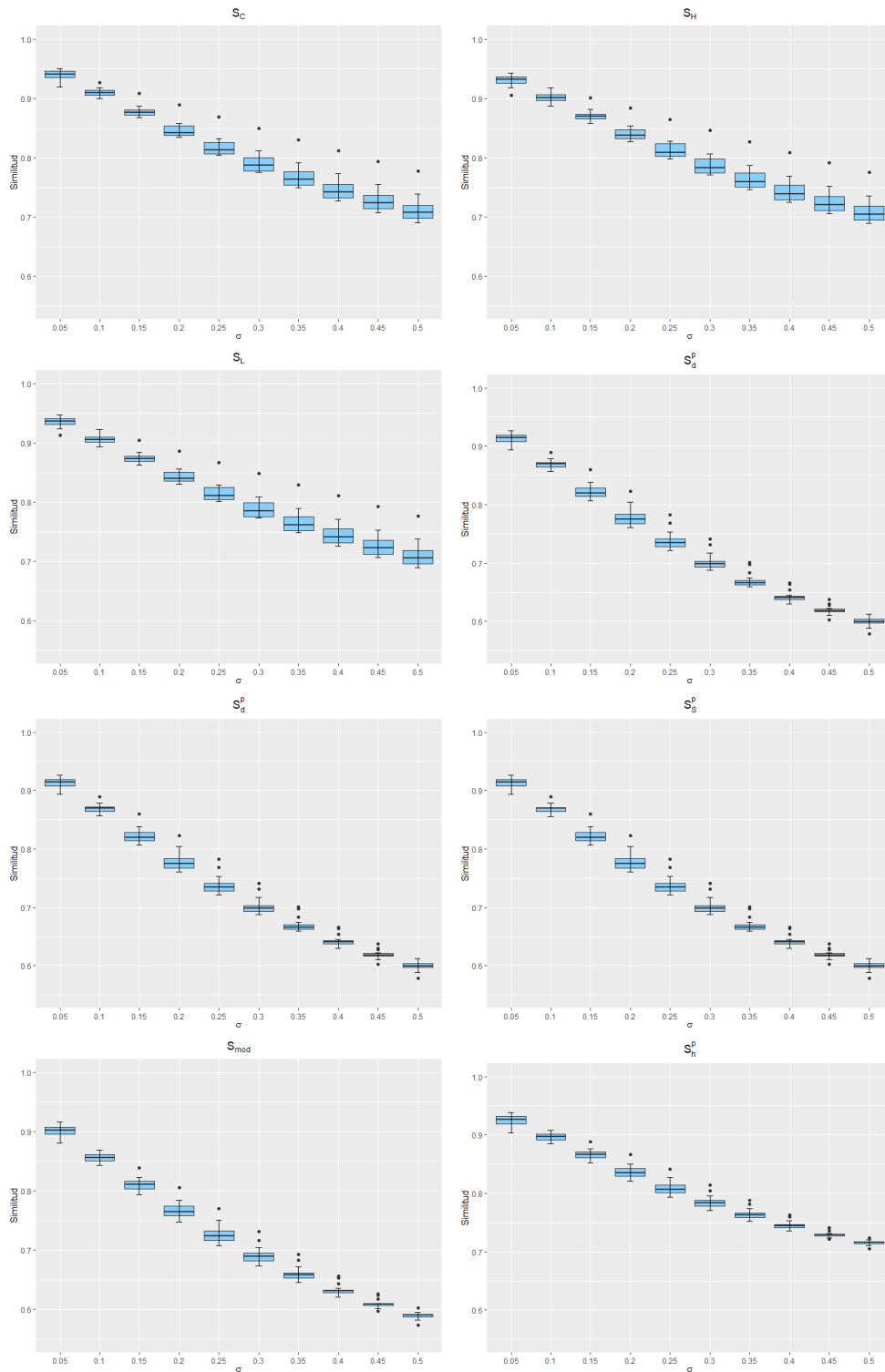


Figura 4.10: Diagramas de cajas para cada medida de similaridad mediante el primer enfoque.

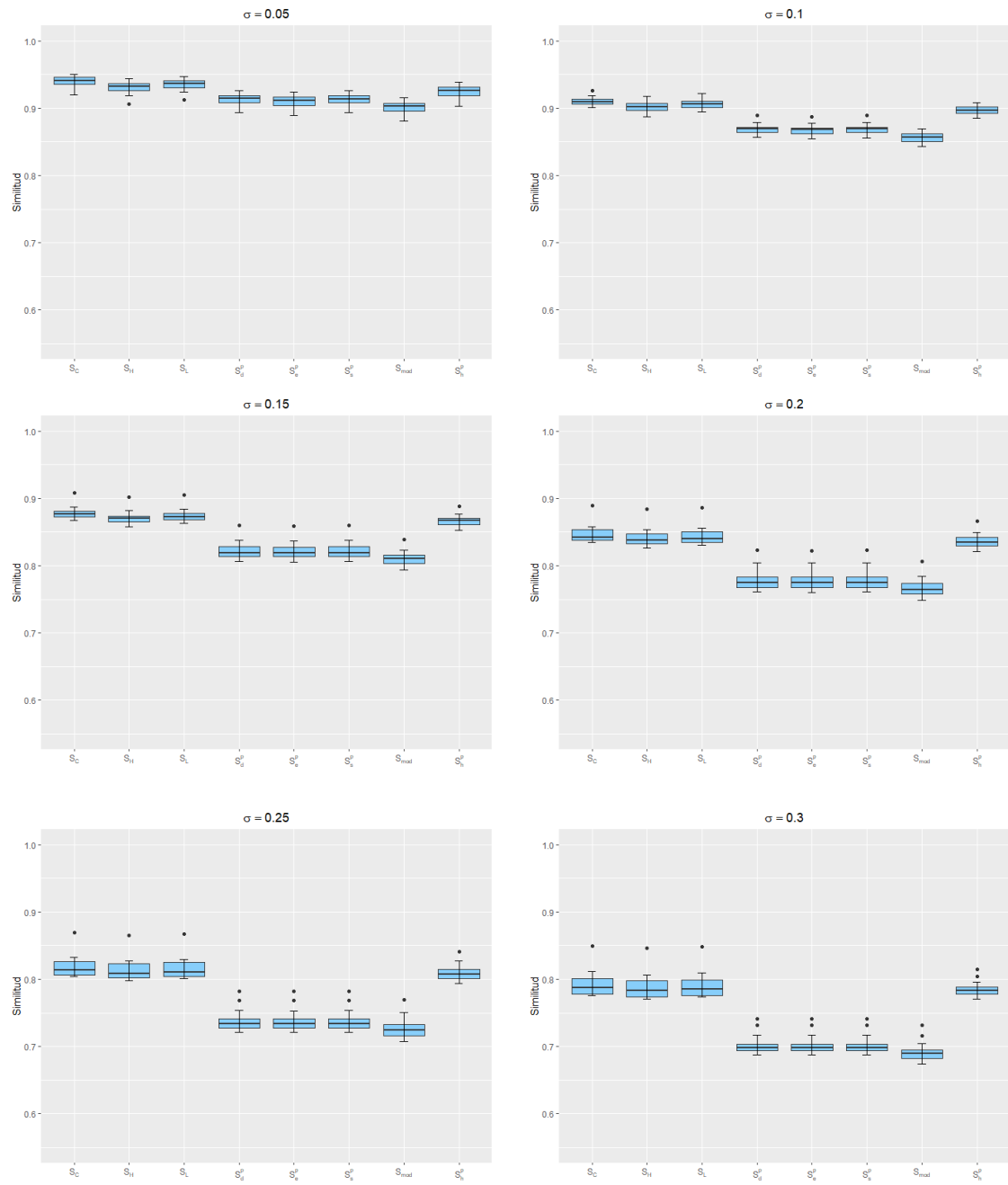


Figura 4.11: Gráficas para los distintos valores de σ con el segundo enfoque.

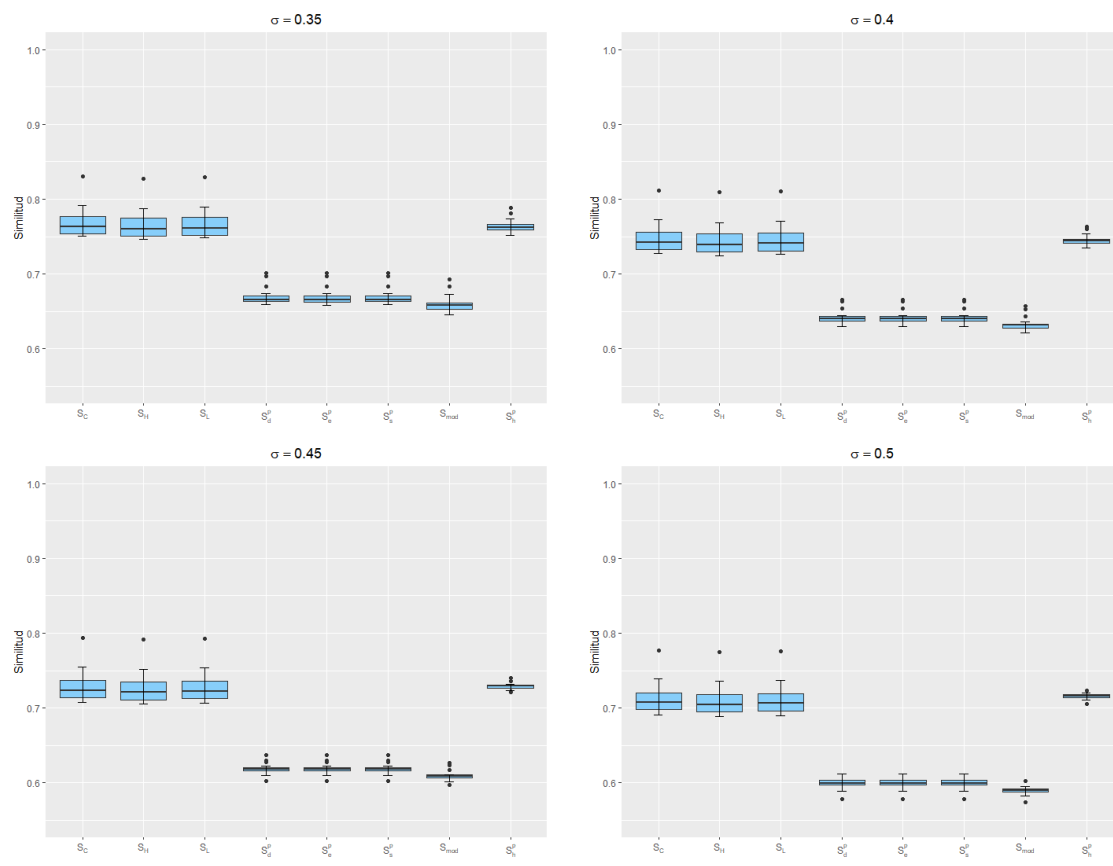


Figura 4.12: Continuación: Gráficas para los distintos valores de σ con el segundo enfoque.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se propusieron una familia de medidas de similaridad y una familia de medidas de similaridad débiles para conjuntos difusos intervalo-valuados. Se estudiaron y ejemplificaron sus propiedades. Se presentaron casos particulares de dichas medidas las cuales se corresponden con medidas de similitud dadas en la literatura para conjuntos intuicionísticos. Se estudiaron relaciones entre ellas logrando establecer interesantes ordenaciones entre las mismas.

Dado que las medidas de similaridad son ampliamente utilizadas en el procesamiento de imágenes, se eligió este campo para hacer un análisis comparativo entre su desempeño. Para ello, se diseñó un experimento en el cuál se analizó la sensibilidad de las medidas estudiadas frente al ruido gaussiano. Se presentaron dos enfoques para modelar a una imagen como un conjunto difuso intervalo-valuado. En el primero de ellos se vio que ciertas medidas de similaridad arrojaban resultados idénticos, no logrando mostrar una diferencia significativa. Se propuso un nuevo enfoque para modelar las imágenes y, a partir de él, se logró obtener distintos valores para cada medida aplicada.

En un futuro sería interesante estudiar los resultados modificando ciertos parámetros de las medidas de similaridad, como el peso y el valor de p . También se analizarán otras formas de definir las imágenes a partir de los conjuntos difusos intervalo-valuados.

La metodología desarrollada en este trabajo ha sido aceptada para su presentación en el XXI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy [3] y de ahí se espera que

surjan otros problemas abiertos que serán también abordados en el futuro.

Bibliografía

- [1] K. Atanassov, “Intuitionistic fuzzy sets”, Physica-Verlag HD, Heidelberg, 1999.
- [2] K. Atanassov , G.Gargov, “Interval valued intuitionistic fuzzy sets”. Fuzzy Sets and Systems, vol. 31, pp. 343–349, 1989.
- [3] A. Bouchet, S. Díaz-Vázquez, M. Fernández, S. Montes, “A comparative analysis of similarity measures in noisy images”. En las actas del XXI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, Toledo, España, 2022.
- [4] S.M. Chen, “Similarity measures between vague sets and between elements”, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), vol.27, pp. 153–158, 1997.
- [5] S.M. Chen, “Measures of similarity between vague sets”, Fuzzy Sets Systems, vol.74, pp. 217–223, 1995.
- [6] L. Dengfeng, C. Chuntian, “New similarity measure of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions”, Pattern Recognition Letters, vol.23, pp. 221–225, 2002.
- [7] G.Deschrijver, E.Kerre, “On the relationship between some extensions of fuzzy set theory”, Fuzzy Sets and Systems, vol.133, pp. 227–235, 2003.
- [8] L. Fan, X. Zhangian, “Similarity measures between vague sets”, J Software, vol.12, pp. 922–927, 2001.
- [9] J.A. Goguen, “L-fuzzy sets”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.18, pp. 145–174, 1967.
- [10] M.B Gorzalzany, “A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets”, Fuzzy Sets and Systems, vol.21, pp. 1–17, 1987.
- [11] D.H. Hong, C. Kim, “A note on similarity measures between vague sets and between elements”, Information Sciences, vol.115, pp. 83–96, 1999.

- [12] W-L. Hung, M. S Yang, “Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance”, *Pattern recognition Letters*, vol.25, pp. 1603–1611, 2004.
- [13] W. L. Hung, M. S Yang, “Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on L_p metric”, *International Journal of Approximate Reasoning*, vol.46, pp. 120–136, 2007.
- [14] Z. Liang, P. Shi, “Similarity measures on intuitionistic fuzzy sets”, *Pattern recognition Letters*, vol.24, pp. 2687–2693, 2003.
- [15] Z. Liang, P. Shi, “Similarity measures on intuitionistic fuzzy sets”, *Pattern Recognition Letters*, vol.24, pp. 2687–2683, 2003.
- [16] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, J. Malik, “A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics”, *Proceedings Eighth IEEE International Conference on Computer Vision*, vol. 2, pp. 416–423, 2001.
- [17] P. Melo-Pinto, P. Couto, H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernández, “Image segmentation using Atanassov’s intuitionistic fuzzy sets”, *Expert Systems with Applications*, vol.40, pp. 15–26, 2013.
- [18] H.B. Mitchell, “On the dengfeng-chuntian similarity measure and its application to pattern recognition”, *Pattern Recognition Letters*, vol.24, pp. 3101–3104, 2003.
- [19] E. Szmidt, J. Kacprzyk, “A concept of similarity for intuitionistic fuzzy sets and its use in group decision making”, *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, vol.3558, pp. 1129–1134, 2004.
- [20] M. Sugeno, “Fuzzy measures and fuzzy integrals-a survey”, in: D.Dubois, H.Prade and R.R.Yager (Eds.), *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, pp. 251–257, North Holland, Amsterdam, 1977.
- [21] Z. Xu, “Some similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol.6, pp. 109–121, 2007.
- [22] L. Yanhong, L.O. David, Q. Zhen, “Similarity measures between intuitionistic fuzzy (vague) sets: A comparative analysis”, *Pattern Recognition Letters*, vol.28, pp. 278–285, 2007.
- [23] L.A.Zadeh, “Fuzzy Sets”, *Information and Control*, vol.8, pp. 338–353, 1965.
- [24] L.A. Zadeh, “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I”, *Information Sciences*, vol.8, pp. 199–249, 1975.