



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo



UNIVERSIDAD DE OVIEDO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO DE FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

**ECUACIONES DE ESTADO PARA
MATERIALES PLANETARIOS**

DAVID SÁNCHEZ SÁNCHEZ

TUTORES:

ALBERTO OTERO DE LA ROZA

JOSÉ MANUEL RECIO MUÑIZ

JULIO 2022



RESUMEN

Usando ecuaciones de estado apropiadas para cada material y a partir de una composición química dada, proponemos modelos diferenciados de estructura en capas para una variedad de objetos planetarios dentro y fuera de nuestro sistema solar. El estudio abarca planetas fríos, planetas rocosos como La Tierra, Super-Tierras, Super-Mercurios y planetas oceánicos, además de planetas gaseosos como Júpiter y sub-Neptunos y planetas ricos en carbono. Investigamos la relación existente entre la masa y el radio de estos planetas y la estructura interna de los mismos. Utilizamos los materiales constituyentes habituales en la propuesta de los distintos tipos de planetas: hierro, silicatos, agua, helio e hidrógeno. Para simular planetas ricos en carbono hemos utilizado distintos polimorfos de carburo de silicio. Encontramos que es una buena aproximación no contemplar los efectos térmicos en la simulación de los modelos planetarios. Hemos comprobado que tampoco es necesario introducir datos sobre la composición de las atmósferas para poder discriminar entre distintas propuestas de composición y estructura interna de un planeta cuando se utilizan datos de su masa y radio. Nuestros modelos han sido primero contrastados con los ya conocidos en los planetas del sistema solar y después son extendidos a exoplanetas particulares que muestran alguna peculiaridad. Sugerimos un modelo planetario basado en componentes de carbono para exoplanetas que se encuentran en la órbita de enanas blancas e incluso púlsares



Índice de contenido

Índice de contenido	4
Índice de figuras	7
Índice de tablas	9
1. Introducción	11
2. Metodología	15
2.1. Modelos y métodos numéricos	15
2.2. Ecuaciones de estado	16
2.2.1. Ecuaciones de estado a bajas presiones	17
2.2.2. Ecuaciones de estado a altas presiones	18
2.3. Materiales	20
2.3.1. Hierro	21
2.3.2. Agua	22
2.3.3. Silicatos	22
2.3.4. Hidrógeno y Helio	23
2.3.5. Carbono	23
3. Resultados y discusión	25
3.1. Relaciones entre el radio y la masa	25
3.2. Validación en el Sistema Solar	27
3.2.1. La Tierra	27
3.2.2. Mercurio, Venus y Marte	29
3.2.3. Júpiter y Saturno	32
3.2.4. Urano y Neptuno	34
3.2.5. La Luna, Europa y Calisto	36
3.3. Modelos planetarios	38
3.3.1. Planetas de silicatos	39
3.3.2. Planetas gaseosos	40
3.3.3. Planetas oceánicos	44



3.3.4. Planetas ricos en carbono	49
4. Modelización de exoplanetas	60
4.1. Sistema Trappist-1	60
4.2. HD 149026 b	60
4.3. Gliese 436-b	61
4.4. 55 Cancri e, CoRoT-7 b, Kepler-9 d y Kepler-10 b	63
5. Resumen y conclusiones	69
Bibliografía	72



Índice de figuras

2.1. Diagrama de fases del agua	22
3.1. Relaciones masa-radio.	27
3.2. Perfil de la presión del interior de la Tierra.	29
3.3. Perfil de la presión de la densidad de la Tierra.	30
3.4. Estructura interna de la Tierra.	30
3.5. Estructura interna de Mercurio.	32
3.6. Estructura interna de Venus.	33
3.7. Estructura interna de Marte.	33
3.8. Relaciones radio-masa para Marte.	34
3.9. Estructura interna de Urano.	35
3.10. Estructura interna de Neptuno.	36
3.11. Estructura interna de la Luna.	37
3.12. Estructura interna de Europa.	37
3.13. Estructura interna de Calisto.	38
3.14. Relaciones masa-radio para planetas de silicatos.	41
3.15. Presión vs Radio. Composición como la Tierra.	41
3.16. Presión vs Radio. Composición como Mercurio.	42
3.17. Densidad vs Radio. Composición como la Tierra.	42
3.18. Densidad vs Radio. Composición como Mercurio.	42
3.19. Relaciones masa-radio para planetas gaseosos.	44
3.20. Presión vs Radio. Sin envoltura.	44
3.21. Presión vs Radio. Con envoltura.	45
3.22. Densidad vs Radio. Sin envoltura.	45
3.23. Densidad vs Radio. Con envoltura.	45
3.24. Relaciones masa-radio para planetas oceánicos.	49
3.25. Relaciones masa-radio para planetas gigantes helados.	50
3.26. Estructura interna con una composición completa de $MgSiO_3$ de un planeta con la masa de la Tierra	51
3.27. Estructura interna con una composición de 65 % Fe y 35 % H_2O de un planeta con la masa de la Tierra	51



3.28. Diagrama ternario para tres planetas de 1, 1.125, 1.25 R_{\oplus} con masas iguales a la de la Tierra. Los planetas están ordenados de derecha a izquierda. . . .	52
3.29. Diagrama ternario para seis planetas de 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5 R_{\oplus} con masas de 15 M_{\oplus} . Los planetas están ordenados de abajo a arriba.	52
3.30. Relaciones masa-radio para el satélite Europa.	53
3.31. Relaciones masa-radio para el $MgSiO_3$ y el SiC.	56
3.32. Relaciones masa-radio para el $MgSiO_3$ y el <i>Grafito/Diamante</i>	57
3.33. Comparación de los perfiles de densidad de $MgSiO_3$ y SiC.	57
3.34. Estructura interna de un planeta de carbono (SiC) con una masa como de la Tierra y un núcleo de hierro como el de la Tierra.	58
3.35. Estructura interna de un planeta de carbono (<i>Grafito</i>) con una masa como de la Tierra y un núcleo de hierro como el de la Tierra.	58
3.36. Estructura interna de un planeta oceánico con una masa como de la Tierra y un núcleo de hierro como el de la Tierra.	59
4.1. Relaciones radio-masa para el sistema Trappist-1.	61
4.2. Relaciones radio-masa para el planeta HD 149026 b.	62
4.3. Relaciones radio-masa para el planeta Gliese 436-b.	62
4.4. Relaciones radio-masa para el sistema Trappist-1.	64
4.5. Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de $MgSiO_3$. .	64
4.6. Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de SiC. . . .	65
4.7. Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de $MgSiO_3$. .	65
4.8. Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de SiC. . . .	66
4.9. Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de $MgSiO_3$. .	66
4.10. Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de SiC	67
4.11. Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de $MgSiO_3$. .	67
4.12. Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de SiC. . . .	68
4.13. Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de <i>Grafito/Diamante</i> . 68	



Índice de tablas

2.1.	Valores de los coeficientes γ_{in}	19
2.2.	Valores de los parámetros para las ecuaciones de estado a baja presión . . .	21
3.1.	Valores de las masas y radios de los planetas y lunas del Sistema Solar . . .	28
3.2.	Valores del coeficiente β de la relación masa-radio $R \sim M^\beta$ para diferentes composiciones de planetas de silicatos	40
3.3.	Valores del coeficiente β de la relación masa-radio $R \sim M^\beta$ para diferentes composiciones de planetas gaseosos	43
3.4.	Valores del coeficiente β de la relación masa-radio $R \sim M^\beta$ para diferentes composiciones de planetas oceánicos	48
3.5.	Valores del coeficiente β de la relación masa-radio $R \sim M^\beta$ para diferentes composiciones de planetas de carbono	56
4.1.	Valores de las masas y radios de los exoplanetas del sistema Trappist-1. . .	61
4.2.	Valores de las masas y radios de los exoplanetas 55 Cancri e, CoRoT-7 b, Kepler-9 d y Kepler-10 b	63



1. Introducción

El número de exoplanetas descubiertos a lo largo de estas dos últimas décadas ha aumentado hasta superar el número de 5000 exoplanetas detectados [1]. Fundamentalmente se utilizan dos métodos para su detección. Uno es el método de la velocidad radial que usa el desplazamiento Doppler en el movimiento de la estrella provocado por el planeta que orbita. El segundo es el método de tránsito que usa la caída periódica del brillo de la estrella provocado por el movimiento a su vez periódico del exoplaneta en su órbita, lo que hace que se produzca una disminución del brillo de la estrella cuando el planeta pasa entre ella y la fuente de observación.

Un gran número de exoplanetas han sido localizados por los telescopios espaciales *Kepler* (CNES; lanzado el 27 de diciembre de 2006) y *CoRoT* (NASA; lanzado en el año 2008), además de la sonda espacial *Gaia* (ESA; lanzado en el año 2011). La misión de esta última es la determinación de las distancias estelares con la mayor precisión posible, posibilitando la medición con precisión de los radios de los exoplanetas detectados por las misiones *Kepler* y *CoRoT*. Este hecho proporciona un crecimiento en el número de datos disponibles sobre la relación entre la masa y el radio en un mayor número de planetas.

El aumento de datos sugiere a su vez avanzar en la caracterización de los nuevos exoplanetas encontrados proponiendo modelos que informen sobre su composición química y su estructura interna. Es la pretensión de contribuir a esta caracterización una de las mayores motivaciones para la realización de este trabajo fin de grado. Para hacer propuestas rigurosas sobre el tipo de planeta (rocoso, gaseoso, oceánico, rico en carbono, etc.) es necesario recurrir a modelos numéricos que combinan la solución de ecuaciones diferenciales acopladas sencillas con ligaduras basadas en esos datos precisos de la masa y el radio de los planetas que están haciéndose disponibles en mayor medida en los últimos años.

Para poder determinar como una composición química determinada se distribuye en el interior de un exoplaneta a partir de los datos medidos de su masa y radio hemos investigado esta relación masa-radio para cada propuesta de composición. Proponemos diferentes mo-



delos para la estructura interna y la composición de los planetas descartando aquellos que no sean compatibles con esa relación. Básicamente, analizamos cuatro tipo de propuestas: (i) planetas formados principalmente a partir de hierro y silicatos (Super-Tierras y Super-Mercurios), (ii) planetas gaseosos (Júpiter, Neptuno) compuestos principalmente por helio e hidrógeno y otros compuestos ligeros, (iii) planetas oceánicos caracterizados por estar envueltos en una capa importante de agua y (iv) planetas ricos en carbono donde el carburo de silicio es un componente habitual propuesto para su caracterización. El resultado de nuestras exploraciones nos permite generar propuestas, a partir de la relación entre el radio y la masa de un exoplaneta, de su composición así como de sus perfiles de densidad y presión desde la superficie hasta el centro del objeto planetario.

La elección de los materiales empleados para la modelización de las posibles estructuras internas de los exoplanetas está basada en las teorías de formación planetaria [2]. Estas teorías están basadas a su vez en la condensación de las nebulosas solares formadas principalmente por hidrógeno, helio, oxígeno, carbono, hierro, silicio, magnesio y azufre [3]. Debido a la abundancia de estos elementos en las nebulosas solares, los planetas resultantes, debida a la condensación de la nebulosa, estarán formados casi en su totalidad por compuestos químicos que contienen estos elementos (agua, silicatos, hierro, etc.).

Para conocer cómo varía la densidad de los materiales que componen los planetas a medida que la profundidad a la que se encuentran avanza, realizamos una suposición que simplifica los cálculos y no introduce cambios significativos en la modelización cuantitativa ni cualitativa de la estructura interna de los planetas. Suponemos que el cambio en la densidad del material con la temperatura es despreciable frente a su cambio con la presión. En otras palabras, utilizamos ecuaciones de estado isotermas para cada material en todos los rangos de profundidad del planeta. La temperatura utilizada habitualmente en la elección de las ecuaciones de estado es la temperatura de 300 K. Esta aproximación de temperatura uniforme nos permite simplificar los cálculos en la práctica porque las ecuaciones de estado isotermas están descritas relativamente bien en la literatura científica o pueden ser calculadas de forma no costosa bien en condiciones estáticas (temperatura cero y sin contribuciones de punto cero) o a una temperatura de 300 K. Es preferible emplear esta aproximación a usar las ecuaciones de estado dependientes de la temperatura porque para los materiales de interés



estas ecuaciones son muy inciertas o incluso son desconocidas. Además, la contribución de la temperatura a los valores de la presión interna y a la densidad no es significativa y podemos despreciarla. Una discusión detallada sobre esta aproximación se encuentra en la Ref. SE08.

Conociendo qué ecuaciones de estado son las adecuadas para cada material, y conociendo los parámetros fundamentales de estos compuestos (masa, número atómico, etc.) que aparecen en las expresiones algebraicas que intervienen en el cálculo de la presión y densidad en el interior de un planeta, podemos evaluar la masa y radio del mismo para una composición dada. De esta forma, se pueden hacer propuestas razonables sobre su composición interna que sean por supuesto consistentes con la relación masa-radio medida para cada exoplaneta.

Las relaciones masa-radio nos permiten diferenciar los tipos de exoplanetas que vamos a considerar en este estudio. Por un lado tenemos los planetas denominados super-Tierras, con masas que pueden variar de entre 1 y 10 veces la masa de La Tierra y con composiciones similares a la de La Tierra. En segundo lugar, los planetas super-Mercurios con masas que pueden variar entre 1 y 10 veces la masa de Mercurio y con composiciones similares a la de Mercurio. En tercer lugar los planetas oceánicos con masas de entre 1 y 10 veces la de La Tierra y que poseen océanos acuáticos que pueden llegar a representar un 10% de su masa. En cuarto lugar los planetas gaseosos compuestos casi en su totalidad por hidrógeno y helio. Además de los tipos de exoplanetas ya mencionados, también definimos un tipo especial de exoplaneta, los planetas ricos en carbono, formados principalmente por compuestos de carbono (SiC, grafito, diamante, etc.).

La descripción de nuestro modelo es abordada en el capítulo 2. Allí presentaremos las ecuaciones de estado de bajas y altas presiones y los materiales que formarán parte de las composiciones de los diferentes exoplanetas. En el capítulo 3 se muestran diferentes relaciones radio-masa de los exoplanetas, además de presentar resultados de simulaciones de nuestro modelo con los planetas y algunos satélites del Sistema Solar. Estos resultados suponen un test para validar nuestro modelo. En el capítulo 3 también se describen los tipos de exoplanetas y en el capítulo 4 mostramos simulaciones de varios exoplanetas con estructura interna desconocida y cuya propuesta de composición genera una estructura interna resul-



tante que puede ser utilizada como propuesta para otros estudios. Por último, en el capítulo 5 se muestran las principales conclusiones de nuestro trabajo.



2. Metodología

2.1. Modelos y métodos numéricos

En los cálculos de composición de los exoplanetas supondremos que son esféricamente simétricos. Esta aproximación es razonable mientras no existan deformaciones significativas causadas por la velocidad de rotación, fuerzas de marea, u otras causas. Si además suponemos que el interior del exoplaneta se encuentra en equilibrio, debemos resolver tres ecuaciones que determinan la masa contenida en un radio r ($m(r)$), la presión $P(r)$ y la densidad $\rho(r)$ [4]. Las tres ecuaciones son:

- La relación entre la masa y la densidad de un planeta esférico:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.1)$$

- La ecuación de equilibrio hidrostático para la capa a radio r :

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \quad (2.2)$$

- La ecuación de estado del interior del planeta:

$$P(r) = f(\rho(r), T(r)) \quad (2.3)$$

donde f es una función que depende de la naturaleza del material presente a radio r . Las diferentes ecuaciones de estado utilizadas en este trabajo están descritas en la sección 2.2.

La ecuación diferencial determinada por las expresiones (2.1) y (2.2) se integra numéricamente desde el centro del planeta $r = 0$ hasta el punto R_p en el cual la masa integrada es igual a la masa del planeta M_p , la cual conocemos a partir de observaciones astronómicas. Las condiciones de frontera son:



- La masa a radio cero (en el centro del planeta) es igual a cero, dado que integramos de $r = 0$ a $r = R_p$: $m(0) = 0$.
- La presión en la superficie del planeta es cero: $P(R_p) = 0$.

La presión en el centro del planeta es $P(0) = P_{\text{centro}}$ y la masa en la superficie del planeta es igual a su masa total $M_p = m(R_p)$. El radio del planeta R_p se determina también a partir de observaciones astronómicas.

Las condiciones de frontera se aplican al principio y al final del intervalo de integración y, por lo tanto, no se puede resolver este sistema de ecuaciones diferenciales como un problema de valor inicial. En su lugar, integramos las ecuaciones (2.1) y (2.2) para diferentes valores de P_{centro} y encontramos el valor que hace cumplir la condición de frontera $P(R_p) = 0$. Este proceso se lleva a cabo por un método de bisección.

De esta forma, el input para nuestro método consiste en la masa total del planeta (M_p) y la secuencia de materiales que componen el planeta, cada una con su propia ecuación de estado, así como sus abundancias porcentuales. Nuestro método resuelve las ecuaciones diferenciales indicadas arriba y el resultado es una predicción del radio del planeta (R_p), la presión en el centro del planeta (P_{centro}), así como un perfil de composición, densidad ($\rho(r)$) y presión ($P(r)$) en función de la profundidad.

2.2. Ecuaciones de estado

La ecuación de estado (“EOS” en inglés) de un material describe la relación entre la presión, la densidad y la temperatura del material en equilibrio termodinámico. En comparación con el efecto de la presión, los cambios en la densidad del material causados por la temperatura son relativamente menores [4], por lo que no tendremos en cuenta la variable temperatura, lo que es equivalente a suponer que el planeta se encuentra a una temperatura baja y uniforme (por ejemplo, temperatura ambiente). Utilizaremos en general las ecuaciones de estado de 300 K, que tendrán la forma $P(r) = f(\rho(r))$.



2.2.1. Ecuaciones de estado a bajas presiones

Para presiones por debajo de ≈ 10000 GPa, emplearemos en general las ecuaciones de estado de Vinet [5] y de Birch-Murnaghan (BM) [5]. Los parámetros en ambas ecuaciones se obtienen mediante ajustes empíricos a datos experimentales.

La ecuación de Vinet es:

$$P = 3K_0\gamma^{2/3} \left(1 - \gamma^{-1/3}\right) \exp \left[\frac{3}{2}(K'_0 - 1)(1 - \gamma^{-1/3}) \right] \quad (2.4)$$

Existen ecuaciones de Birch-Murnaghan de distintos órdenes. Por ejemplo, la ecuación de Birch-Murnaghan de tercer orden (BM3) es:

$$P = \frac{3}{2}K_0 \left(\gamma^{7/3} - \gamma^{5/3}\right) \left[1 + \frac{3}{4}(K'_0 - 4)(\gamma^{2/3} - 1) \right] \quad (2.5)$$

mientras que la ecuación de cuarto orden (BM4) [4] es igual a la de BM3 más el término:

$$+ \frac{3}{2}K_0 \left(\gamma^{7/3} - \gamma^{5/3}\right) \frac{3}{8}K_0 \left(\gamma^{2/3} - 1\right)^2 \left[K_0K''_0 + K'_0(K'_0 - 7) + \frac{143}{9} \right] \quad (2.6)$$

En estas ecuaciones, γ es el cociente entre la densidad del material a presión P (ρ) y a presión cero (ρ_0):

$$\gamma = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2.7)$$

mientras que $K_0 = -V(\partial P/\partial V)_T$ es el módulo de compresibilidad y $K'_0 = (\partial K_0/\partial P)_T$ es su primera derivada respecto a la presión. Además, K''_0 es la segunda derivada del módulo de compresibilidad respecto a la presión y K'_∞ es la aproximación de la segunda derivada de K''_0 cuando el valor de la presión tiende a infinito.

Comparando estas ecuaciones de estado, la ecuación de Vinet es más apropiada que las de Birch-Murnaghan para la extrapolación a presiones altas debido a que la ecuación de BM se obtiene mediante un desarrollo de la energía potencial elástica en función de la presión a baja presión, mientras que la ecuación de Vinet es derivada de un potencial empírico [5]. La ecuación de Vinet da buenos resultados para sólidos relativamente compresibles. [5] En



general, utilizaremos los K_0 y K'_0 con la ecuación de estado para la que fueron determinados.

Además de las ecuaciones de Vinet y Birch-Murnaghan, utilizaremos dos EOS adicionales para presiones bajas: la ecuación de estado logarítmica y la de Keane [6]. La ecuación de estado logarítmica es:

$$P = K_0 \gamma^{-1} \log(\gamma^{-1}) \quad (2.8)$$

y la ecuación de Keane es:

$$P = K_0 \left(\frac{K'_0}{K'_\infty} (\gamma^{K'_\infty}) - 1 \right) - \left(\frac{K'_0}{K'_\infty} - 1 \right) \log(\gamma) \quad (2.9)$$

2.2.2. Ecuaciones de estado a altas presiones

Las ecuaciones de estado presentadas en la sección anterior son válidas a presiones bajas e intermedias. A altas presiones (aproximadamente a partir de 1000 GPa, dependiendo del material), todos los materiales tienden al límite del gas de electrones homogéneo, cuya ecuación de estado es conocida teóricamente [7]. La ecuación de estado del gas de electrones homogéneo se conoce como la EOS de Thomas-Fermi-Dirac (TFD), y permite representar el comportamiento de los materiales en el límite de presión infinita. Dado que las presiones en el interior de los exoplanetas masivos supera los 1000 GPa fácilmente, es necesario que las EOS de todos los materiales que utilicemos tengan el comportamiento de TFD en el límite de alta presión.

Una expresión analítica para la ecuación de estado de TFD fue propuesta por Salpeter y Zapolsky en 1967 [7]. En este trabajo, los autores calcularon y parametrizaron la energía de correlación del gas de electrones uniforme. La ecuación de estado de TFD requiere únicamente como parámetros la composición atómica del material, en particular el número atómico de todos los átomos en el sistema. También hay que indicar que la EOS de TFD tiene un valor máximo de presión para la que es válida, aunque este valor no es alcanzado por ningún exoplaneta, debido a que el valor es demasiado alto como para que puede ser alcanzado por un exoplaneta, por lo tanto, no lo tendremos en cuenta para la realización del trabajo.



n	γ_{0n}	γ_{1n}	γ_{2n}	γ_{3n}	γ_{4n}
2	$1,512 \times 10^{-2}$	$8,955 \times 10^{-2}$	$1,090 \times 10^{-1}$	5,089	-5,980
3	$2,181 \times 10^{-3}$	$-4,015 \times 10^{-1}$	1,698	-9,566	5,980
4	$-3,328 \times 10^{-4}$	$5,167 \times 10^{-1}$	-2,369	$1,349 \times 10$	$-1,427 \times 10$
5	$-1,384 \times 10^{-2}$	$-6,520 \times 10^{-1}$	3,529	$-2,095 \times 10$	$2,264 \times 10$

Tabla 2.1: Valores de los coeficientes γ_{in}

Con la modificación mencionada presente tenemos las siguientes funciones relacionadas con la ecuación de estado en el modelo de TFD (Zapolsky y Salpeter 1967)¹[7]:

$$\varepsilon = \left(\frac{3}{32\pi^2 Z^2} \right)^{1/3} \quad (2.10)$$

$$\phi = \frac{3^{1/3}}{20} + \frac{\varepsilon}{4 \cdot 3^{1/3}} \quad (2.11)$$

$$\alpha = 1/(1,941 \times 10^{-2} - 6,277 \times 10^{-2} \varepsilon^{1/2} + 1,076 \varepsilon) \quad (2.12)$$

$$\xi = \left(\left(\frac{P}{9,524 \times 10^{13}} \right) Z^{-10/3} \right)^{1/5} \quad (2.13)$$

$$x_0(0) = 1/(8,884 \times 10^{-3} + 4,988 \times 10^{-1} \varepsilon^{1/2} + 5,2604 \times 10^{-1} \varepsilon) \quad (2.14)$$

Los coeficientes β_i se calculan:

$$\beta_1 = x_0(0)\phi - 1 \quad (2.15)$$

$$\beta_2 = \beta_1 \alpha \frac{1 + \beta_1}{\phi} \quad (2.16)$$

$$\beta_n = 1/(\gamma_{0n} + \gamma_{1n} \varepsilon^{1/2} + \gamma_{2n} \varepsilon + \gamma_{3n} \varepsilon^{3/2} + \gamma_{4n} \varepsilon^2)^{i+1} \quad (2.17)$$

y los valores de los coeficientes γ_{in} se muestran en la Tabla 2.1 [7].

Con los coeficientes β_i , podemos obtener la expresión de la EOS de TFD para presiones altas:

$$x_0(\xi) = \frac{1}{\xi + \phi} (1 + e^{-\alpha \xi} (\beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \xi^2 + \beta_4 \xi^3 + \beta_4 + \beta_6 \xi^5)) \quad (2.18)$$

¹En el artículo de Salpeter y Zapolsky (1967) hay un error en la ecuación (40), el exponente del término Z debería ser positivo en vez de negativo, además que en la expresión de la función de ϕ el término $4 \cdot 3^{1/3}$ es en realidad $4 \cdot 3^{1/3}$



En TFD, el radio del átomo es:

$$R = \left(\frac{9\pi^2}{180} \right)^{1/3} Z^{-1/3} x_0(\xi) a_0 \quad (2.19)$$

donde a_0 es el radio de Bohr. Con el radio atómico, podemos calcular su contribución a la densidad:

$$\rho = \frac{3AM\mu}{4\pi R^3} = \frac{AZ}{x_0^3} \cdot 3,886 \text{ [g/cm}^3\text{]} \quad (2.20)$$

donde A es el peso atómico y Z es el número atómico. Finalmente, para el caso de un material compuesto por n_i átomos con números atómicos Z_i y pesos atómicos A_i , la EOS de TFD es:

$$\rho = \frac{\sum n_i A_i}{\sum n_i x_{0i}^3 / Z_i} \cdot 3,886 \text{ [g/cm}^3\text{]} \quad (2.21)$$

2.3. Materiales

Para poder estudiar las composiciones de los diferentes exoplanetas, necesitamos proponer las EOS para los distintos materiales que vamos a emplear tal y como lo hizo S. Seager en 2007 [4]. Además, los distintos materiales pueden sufrir cambios de fase al incrementar la presión por lo que es necesario tener en cuenta las EOS para cada una de sus fases de alta presión.

A muy altas presiones, utilizamos TFD para la ecuación de estado de todos los materiales considerados. Para ello, necesitamos determinar la presión a la que los distintos materiales transitan desde su comportamiento de baja presión (dado por las EOS de Vinet, BM, etc.) al modelo TFD. Llevamos a cabo el cálculo de la presión de transición utilizando el método propuesto por Seager y colaboradores [4]: la presión de transición es el punto de corte de la EOS de baja presión con el modelo TFD.

Los valores de los parámetros de las ecuaciones de estado de baja y alta presión para los distintos materiales se muestran en las tabla 2.1.



Material	ρ [g/cm^3]	K_0 [GPa]	K'_0 [·]	EOS	Ref.
Fe (α)	7,86	162,2	5,5	Vinet	[1]
Fe (ϵ)	8,30	156,2	6,08	Vinet	[1]
FeS (Triolita)	4,77	35	5	BM3	[1]
H ₂ O (Líquido)	1,00	2,28	— ^a	EOS Log	[2]
H ₂ O (Hielo VII)	1,46	23,7	4,15	BM3	[1]
MgSiO ₃ (Enstatita)	3,22	125	5	BM3	[1]
MgSiO ₃ (Perovskita)	4,1	247	3,97	BM4	[1]
MgSiO ₃ (Post – Perovskita)	4,06	203	5,35	Keane	[3]
H	0,079	0,162	6,81	Vinet	[4]
He	0,29	0,225	7,35	Vinet	[4]
SiC (3C)	3,21	227	4,1	BM3	[5]
SiC (B1)	3,2	218	4,19	BM3	[5]
C (Grafito)	2,25	33,8	8,9	BM3	[1]
C (Diamante)	3,51	444	4	BM3	[1]

a: No necesitamos conocer el K'_0 para el agua líquida porque utilizamos la ecuación de estado logarítmica (ecuación (2.6)) y no utiliza el parámetro K'_0

Referencias: [1] Ahrens (2000) [8]; [2] Halliday et al. (2003) [9]; [3] Sakai et al. (2016) [10]; [4] Loubeyre, P. et al. (1996) [11]; [5] Nisr, C. (2017) [12]

Tabla 2.2: Valores de los parámetros para las ecuaciones de estado a baja presión

2.3.1. Hierro

La fase de baja presión del hierro es la fase α , con estructura cúbica centrada en las caras (bcc, por sus siglas en inglés). Emplearemos la EOS de Vinet hasta los 16 GPa, donde el hierro cambia a la fase ϵ y adquiere una estructura hexagonal compacta (hcp), para la cual también empleamos la EOS de Vinet. A 23229 GPa, la EOS de la fase ϵ interseca TFD, y utilizamos esta EOS a partir de esta presión.

Debido a que el hierro es el principal elemento que componen los núcleos de los planetas, para los modelos algunos solo necesitamos emplear el hierro ϵ ya que la presión que se alcanza en el núcleo es mucho mayor que 22 GPa y la estructura del hierro α no es posible que se de por la alta presión en el núcleo.

Además del hierro puro, también consideramos el mineral triolita (FeS). Para la triolita utilizamos la ecuación BM de tercer orden hasta 12084 GPa donde transita a TFD.

2.3.2. Agua

Para el agua, utilizamos la EOS del agua líquida para la cual se ha propuesto la EOS logarítmica con los parámetros indicados en la tabla 1. A 2.2 GPa, el agua líquida transita a la fase hielo VII, como muestra el diagrama de fases de la Figura 2.1 [13]. En la fase hielo VII, las moléculas de agua se ordenan con simetría cúbica en lugar de hexagonal como ocurre en la fase del hielo Ih, estable en condiciones ambiente. Para la EOS del hielo VII utilizamos la ecuación de BM de tercer orden. A 10600 GPa, el hielo VII transita al comportamiento de TFD.

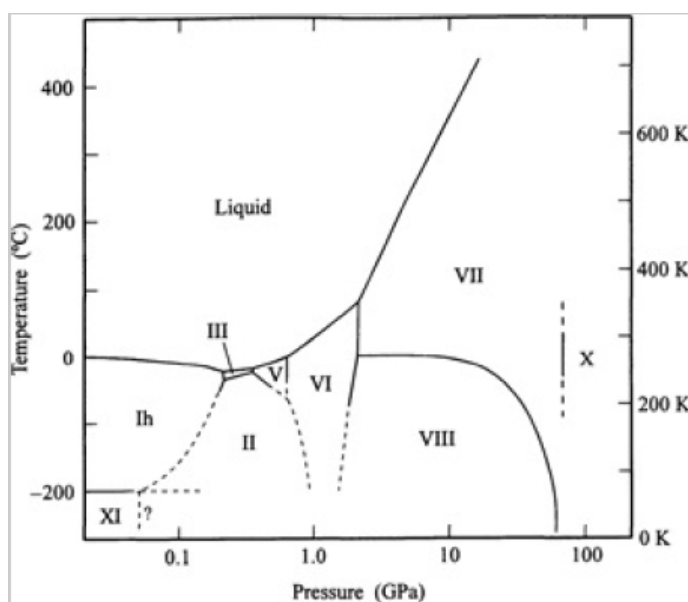


Figura 2.1: Diagrama de fases del agua [13]

En nuestros modelos hemos supuesto una temperatura de aproximadamente 300 K. A esta temperatura existe una fase intermedia entre el agua líquida y el hielo VII llamada hielo VI (Figura 2.1), que ocurre entre 1.5 GPa y 2.2 GPa. Sin embargo, dado que esta fase ocurre solo en este pequeño rango de presiones, la hemos descartado para simplificar el tratamiento de este material.

2.3.3. Silicatos

Como material representativo de la familia de los silicatos, utilizaremos el $MgSiO_3$ dado que es el material más abundante en el manto terrestre y posiblemente en el resto de



planetas rocosos del Sistema Solar. La fase de baja presión del MgSiO_3 , conocida como ensatita, es estable hasta los 22 GPa, y la representamos con una ecuación de estado de BM de tercer orden. A partir de esta presión, el MgSiO_3 adquiere estructura de perovskita, que es la forma más abundante en el interior del manto terrestre. Para esta fase, utilizamos un $K_0'' = -0,016 \text{ GPa}^{-1}$.

La fase perovskita es estable hasta los 120 GPa, momento en que el MgSiO_3 transita a la fase post-perovskita. Para esta nueva fase utilizamos la ecuación de estado de Keane con $K_\infty' = 2,19$. La EOS de la fase post-perovskita interseca la EOS de TFD a $2,67 \times 10^5$ GPa.

Después de realizar varias simulaciones de planetas formados por silicatos con masas de hasta 10 veces la masa terrestre, hemos observado que la contribución de la post-perovskita solo hace disminuir el radio calculado entre un 1 % y un 3 % en comparación con el modelo en que utilizamos solamente la fase perovskita a altas presiones. Por lo tanto, hemos descartado la fase post-perovskita lo que conlleva un cambio de la presión de transición a TFD, cuyo nuevo valor es 7800 GPa.

2.3.4. Hidrógeno y Helio

Para el hidrógeno, empleamos la ecuación de Vinet hasta que la presión alcanza 11 GPa. A esa presión, pasamos a utilizar la ecuación de estado TFD.

Para el caso del helio, empleamos la ecuación de Vinet y TFD a partir de 1,21 GPa. Dado que la presión de transición a TFD es muy baja, se puede utilizar únicamente la ecuación de estado TFD sin que el resultado varíe de forma notable.

2.3.5. Carbono

Consideramos dos materiales carbonáceos: el carbono puro, en sus formas alotrópicas grafito y diamante, y el carburo de silicio (SiC).

Para el SiC , la estructura estable en condiciones ambiente es la ZnS-3C , cuya compre-



sibilidad se puede representar por una ecuación BM de tercer orden hasta 100 GPa. A esta presión, el SiC transita a una estructura tipo cloruro de sodio (B1), para la cual también utilizamos una EOS de BM de tercer orden. La EOS de esta fase de alta presión interseca la EOS de TFD a 718.46 GPa.

Para el carbono puro, la fase estable en condiciones ambiente es el grafito, para el cual utilizamos la ecuación de BM de tercer orden. El grafito es estable hasta 500 GPa, presión a la cual transita a la fase diamante, que también se representa por una EOS de BM de tercer orden. El diamante es estable hasta la intersección con la EOS TFD del carbono, a 1198 GPa.

Por último, para los modelos en los que el carbono tiene presencia notable, también consideraremos el monóxido de carbono (CO). Para este compuesto, emplearemos únicamente la ecuación de estado TFD.



3. Resultados y discusión

3.1. Relaciones entre el radio y la masa

Tras haber expuesto las diferentes ecuaciones de estados empleadas para cada material y para cada situación determinada, además de los diferentes materiales utilizados para nuestro modelo, describimos las soluciones a las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) y a partir de estas, describimos las relaciones entre las masas y los radios de diferentes planetas teóricos con diferentes composiciones. La Figura 3.1 muestra las relaciones masa-radio de diferentes planetas homogéneos, formados en su totalidad de Hidrógeno, silicatos (MgSiO_3) y hierro, y de planetas heterogéneos, compuestos de hierro y silicatos, hidrógeno y helio, y además, planetas de hierro, silicatos y agua.

Por lo general, todos estos planetas muestran la misma tendencia general en las relaciones entre los radios y las masas de estos planetas. Para el rango de $M^1 \lesssim 100M_{\oplus}$ los radios incrementan su valor al aumentar el valor de la masa. Pero al seguir aumentando la masa, el valor del radio se sigue incrementando en menor medida hasta al punto de dejar de aumentar cuando $M_p \sim 1000M_{\oplus}$ y empieza a disminuir a partir de ese punto al seguir incrementándose la masa.

Para explicar el motivo de esta disminución en el valor del radio, debemos explicar las fuerzas que sufren los átomos que forman las composiciones de los planetas. En el rango $M \lesssim 100 - 200M_{\oplus}$ la presión ejercida por la gravedad, es equilibrada por las fuerzas de Coulomb en equilibrio hidrostático. Este equilibrio se mantiene en este rango de masas, pero para masas mayores, la presión en el interior es lo suficientemente alta como para superar las fuerzas de Coulomb y de ionizar los átomos. De esta forma, la presión degenerada de los electrones libres mantiene el balance gravitatorio en equilibrio hidrostático, sustituyendo a las fuerzas de Coulomb, y de esta forma, cuando $M \sim 1000M_{\oplus}$, el radio del planeta comienza a disminuir. Aunque los planetas no se encuentran completamente degenerados (solo es

¹Masa del planeta



posible en la masa estelar de las enanas blancas) la presión de los electrones degenerados tienen un efecto significativo en el valor del radio cuando la masa se encuentra en el rango $M_p \gg 300M_{\oplus}$. De esta forma, el efecto que causa las fuerzas de Coulomb en la relación masa-radio es, $R \sim M^{\beta}$, donde los diferentes valores del coeficiente β para diferentes composiciones para una masa máxima de $10M_{\oplus}$ serán mostrados a lo largo de la sección 3 para un rango de $M < 10M_{\oplus}$, y el efecto de la presión de los electrones degenerados es, $R \sim M^{-1/3}$, de modo que el efecto de la presión de los electrones va teniendo más importancia que el efecto de Coulomb al aumentar la masa tal y como se puede observar en la Figura 3.1.

Las diferentes relaciones masa-radio de planetas con diferentes composiciones (Figura 3.1) pueden ser usadas para inferir en el rango de los tamaños de los planetas. Observando estas relaciones, vemos que se encuentran organizadas en función de la densidad de los elementos estudiados. La relación masa-radio de los planetas compuestos únicamente por hierro muestran el radio mínimo que los planetas pueden tener, tomando en cuenta que el hierro es el material más denso que tiene la mayor presencia durante la formación de planetas, y son los planetas formados en su totalidad con hidrógeno que muestran, en su relación radio-masa, el radio máximo de los planetas. Comparando las composiciones de los planetas, podemos categorizar dos tipos planetas en función de su composición, los planetas gaseosos, planetas cuya masa proviene, por lo general, de elementos gaseosos (hidrógeno e helio), y los planetas no gaseosos, cuya composición no presenta elementos gaseosos. En este último tipo de planeta, vemos que los planetas compuestos en su totalidad con agua (hielo VII) muestran el radio máximo de los planetas que son catalogados como planetas no gaseosos.

Hemos observado que el radio de los planetas no depende únicamente de la masa de estos, también depende de la composición de los planetas. Entonces, las relaciones masa-radio de los planetas pueden ser usadas para averiguar la composición interna de los planetas. Esto se logra ajustando las diferentes relaciones masa-radio posibles con el radio y la masa de los planetas.

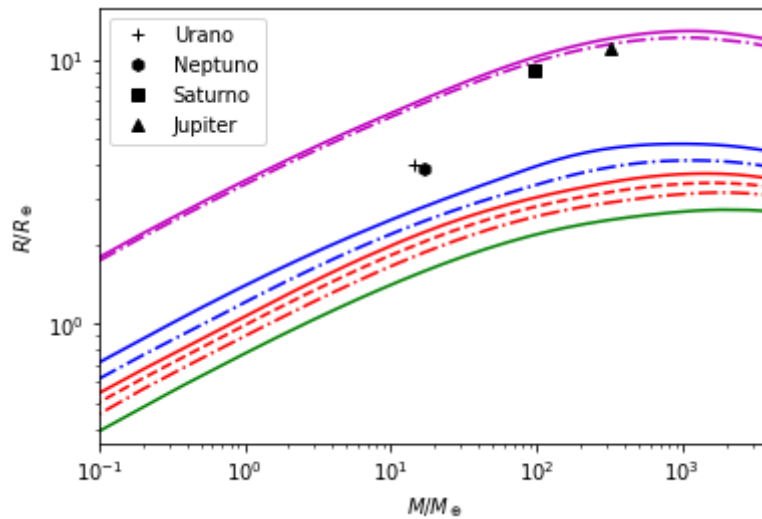


Figura 3.1: Relaciones masa-radio.

Ordenados de arriba a abajo empezando por la curva superior, 100% H; 10% He, 90% H; 100% H₂O; 10% Fe, 50% MgSiO₃, 40% H₂O; 100% MgSiO₃; 33% Fe, 67% MgSiO₃; 67% Fe, 33% MgSiO₃; 100% Fe.

3.2. Validación en el Sistema Solar

En la Figura 3.1 también están mostrados las masas y los radios de los planetas del Sistema Solar y algunas lunas junto a varias curvas que representan las relaciones masa-radio para planetas con composiciones distintas. Estos planetas pueden ser usados como una forma de validar nuestros métodos en el caso de que sus radios y masas se ajustan acorde con la realidad a las relaciones masa-radio de nuestro modelo. También, con este método podemos conocer los límites de nuestro modelo. Las masas y los radios de los planetas del Sistema Solar son mostrados en la tabla 3.1.

3.2.1. La Tierra

Dado que la composición y estructura interna de la Tierra es conocida con mayor detalle que cualquier otro objeto celeste, nuestro planeta es el mejor ejemplo donde validar nuestro método. Para ello, comparamos las predicciones de nuestro método con el modelo de referencia preliminar de la Tierra (PREM, por sus siglas en inglés), en particular los datos de Morgan y Anders (1980) [14] y de *The New Theory of the Earth*, Don L. Anderson [2].



Planeta	Masa [M_{\oplus}]	Radio [R_{\oplus}]
Mercurio	0,055	0,38
Venus	0,815	0,95
Marte	0,107	0,532
Júpiter	317,8	11
Saturno	95,16	9,14
Urano	14,54	3,98
Neptuno	17,15	3,86
La Luna (Sat. de la Tierra)	0,0123	0,27
Europa (Sat. de Júpiter)	0,008	0,245
Calisto (Sat. De Júpiter)	0,018	0,378

Tabla 3.1: Valores de las masas y radios de los planetas y lunas del Sistema Solar

Según el modelo PREM, la estructura interna de la Tierra se divide en tres capas: corteza, manto y núcleo. A grandes rasgos, la corteza y el manto, están compuestos por silicatos ricos en magnesio ($MgSiO_3$), que forman más del 90% de su masa. El resto de la masa en estas capas se compone mayoritariamente de silicatos ricos en hierro. El manto terrestre tiene una profundidad de 2891 km. Por debajo de esa profundidad se encuentra el núcleo terrestre que constituye un 32.5% de la masa del planeta y se divide en una capa externa en estado líquido y una capa interna sólida, ambas formadas en un 85% por hierro. El resto de la composición del núcleo lo constituyen mayoritariamente níquel y azufre.

Para representar la Tierra, utilizamos un modelo sencillo compuesto únicamente por $MgSiO_3$ para representar manto y corteza que representen el 67,5% de la masa total y hierro puro para el núcleo que representa la masa restante, y con una masa total del planeta de $1 M_{\oplus}$. Las Figuras 3.2 y 3.3 muestran los perfiles de densidad y presión calculados para el interior de la Tierra comparados con los perfiles propuestos por el PREM. El radio del planeta predicho por nuestro cálculo es $R_p = 0,9899 R_{\oplus}$ y difiere solamente un 1% del valor correcto ($R_p = 1 R_{\oplus}$). El radio del núcleo terrestre calculado es $R = 0,517 R_{\oplus}$ que difiere del valor propuesto en el PREM ($R = 0,546 R_{\oplus}$) en un 5%. Los perfiles de densidad y presión predichos por nuestro modelo son muy similares en la zona del manto y corteza a los propuestos por el modelo PREM. No obstante, en la zona del núcleo ambos perfiles difieren ligeramente, y el valor de la presión y la densidad en el centro del planeta son aproximadamente un 12% y 8% mayores, respectivamente, según nuestro cálculo que según el PREM.

Estas discrepancias son razonables dado que en nuestro modelo no hemos tenido en cuenta el efecto de los elementos ligeros presentes en el núcleo terrestre como el azufre o el níquel, que hacen que la densidad (y por tanto la presión) disminuyan respecto al hierro puro.

De forma similar al trabajo de Anderson [2], consideramos también un núcleo compuesto no de hierro puro sino de sulfuro de hierro (troilita, FeS). Las figuras 3 y 4 muestran los perfiles de densidad y de presión para esta composición. Respecto al núcleo de hierro puro, la densidad en el centro del planeta disminuye y, de hecho, es un 8% menor que el valor del PREM, con una presión en el centro de la Tierra un 5% menor. El cambio de Fe por FeS no afecta significativamente el valor del radio del núcleo terrestre (con un error aproximado del 5% respecto al PREM) y tampoco el radio de la Tierra (error del 1%). La Figura 3.4² muestra la estructura interna de la Tierra calculada por el modelo.

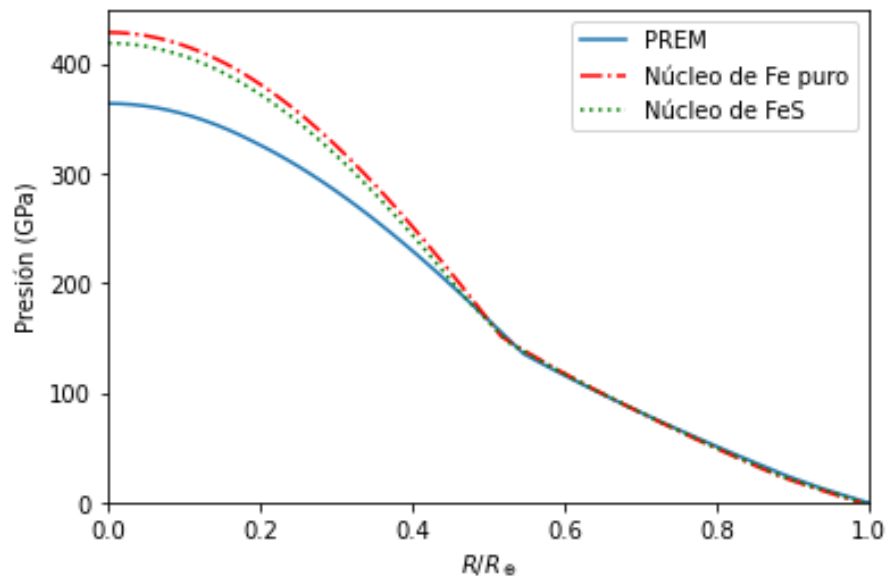


Figura 3.2: Perfil de la presión del interior de la Tierra.

3.2.2. Mercurio, Venus y Marte

Los planetas Mercurio, Venus y Marte son buenos ejemplos para comprobar la precisión de nuestro modelo para planetas rocosos compuestos de un núcleo de hierro más una capa externa de silicatos. Conocemos en buena medida la composición de estos planetas así como

²Los valores de las fronteras de las capas están marcadas con las letras a, b, c y d y su valor está expuesto en la figura. Esto es necesario para poder mostrar de forma clara los valores de estos. Este procedimiento será común en algunas figuras.

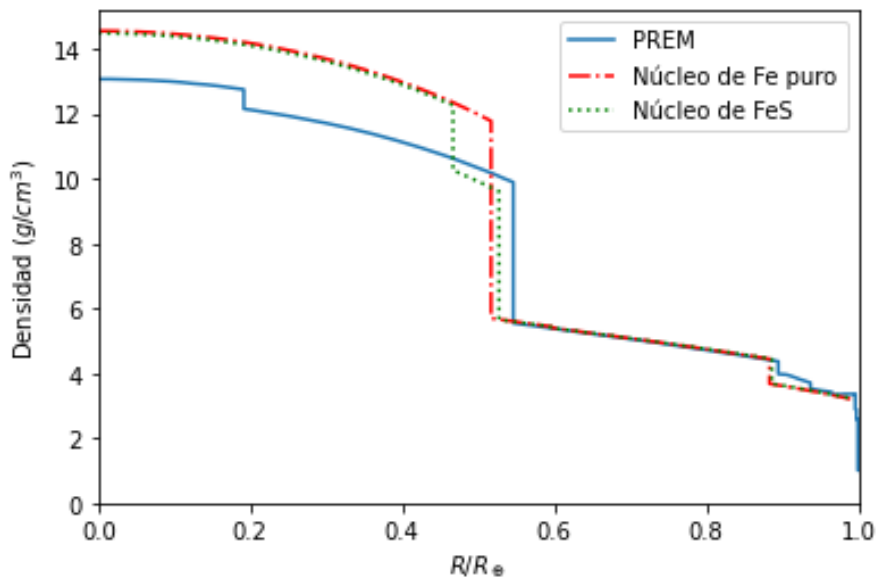


Figura 3.3: Perfil de la presión de la densidad de la Tierra.

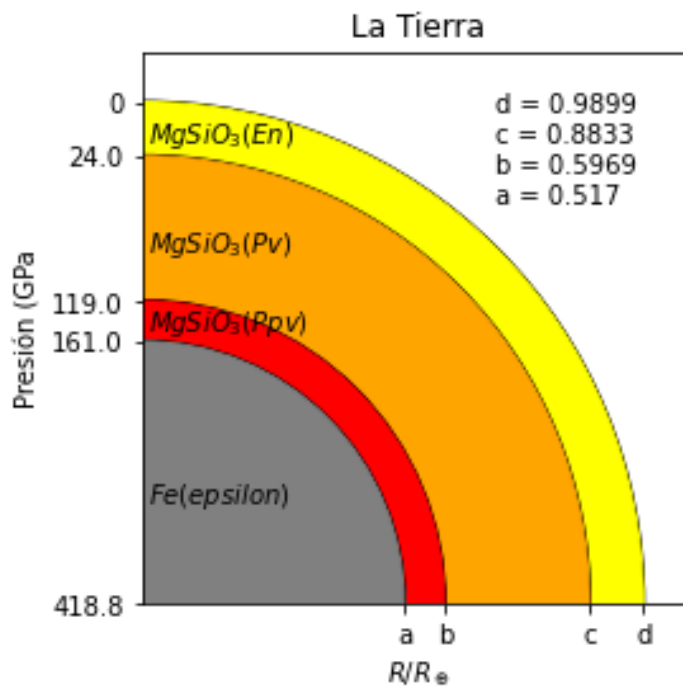


Figura 3.4: Estructura interna de la Tierra.

algunos aspectos de su estructura interna como el radio de sus núcleos.

Mercurio está formado por un manto compuesto por silicatos y un núcleo de hierro. El hierro del núcleo de Mercurio representa el 68% de la composición total [14] y el núcleo ocupa casi el 43% del volumen del planeta [15], más que en el caso de la Tierra. Por ello,



Mercurio es uno de los planetas más densos del Sistema Solar además de ser el más pequeño. Utilizando nuestro modelo, calculamos el radio de Mercurio con una composición de 68 % de hierro y 32 % de MgSiO_3 , obteniendo un valor bastante preciso para el radio del planeta de $R = 0,3729 R_{\oplus}$ con un error del 2 % respecto al valor conocido ($R = 0,38 R_{\oplus}$) a través de observaciones astronómicas. También, el volumen calculado para el núcleo es de 44 % del total del planeta, muy similar al valor conocido.

Venus tiene una composición formada por un manto rocoso de silicatos y un núcleo formado principalmente por hierro. La estructura de Venus es bastante parecida a la de la Tierra, con un núcleo de hierro que representa un 32 % de la masa total, y un manto formado por silicatos que representa el restante 68 % de la masa de Venus [14]. El núcleo representa el 12,5 % del volumen total [15]. Empleando nuestro modelo y calculamos el radio de Venus con la composición descrita, y obtenemos un valor bastante preciso de $R = 0,9347 R_{\oplus}$, con un error del 1,6 % respecto al radio obtenido por observaciones astronómicas ($R = 0,95 R_{\oplus}$). El volumen del núcleo calculado es de 12,3 %, muy similar al propuesto en la literatura.

Marte presenta una estructura compuesta de un manto de silicatos que representa el 80 % de su masa total y un núcleo formado principalmente por hierro que constituye el 20 % de la masa restante [16]. El núcleo de Marte ocupa aproximadamente un 10 % del volumen total del planeta [17], bastante menor que el volumen ocupado por el núcleo de la Tierra. Utilizando nuestro modelo con la composición descrita, calculamos el radio de Marte de $0,5324 R_{\oplus}$, obteniendo un valor en excelente acuerdo con las observaciones astronómicas, con un error prácticamente nulo. El volumen ocupado por el núcleo según nuestro modelo es del 8 %, un 2 % inferior al valor aceptado.

Marte es un buen ejemplo para mostrar la importancia de diferenciar entre las diferentes fases de los materiales considerados en los distintos rangos de presiones, en este caso el MgSiO_3 . Si únicamente hubiéramos considerado la estructura de la perovskita del MgSiO_3 en Marte, el valor del radio del planeta obtenido habría disminuido hasta un 7 % en comparación con el anteriormente calculado. Además, para un planeta compuesto únicamente por MgSiO_3 con la estructura de la perovskita y con una masa igual a la de Marte, el radio calculado es 3 % menor que el conocido. Empleando únicamente la fase de la perovskita para el

$MgSiO_3$, Marte se localizaría en el diagrama de las relaciones masa-radio por encima de la curva de la relación masa-radio de una composición formada exclusivamente por $MgSiO_3$. Este hecho haría que fuese imposible que Marte pudiese tener un núcleo de hierro, e incluso de que Marte pudiese estar formado únicamente por $MgSiO_3$ teniendo que estar compuesto además por materiales aun más ligeros como el agua.

En la Figura 3.8 se compara las relaciones masa-radio de Marte para una composición formada completamente por $MgSiO_3$ en las fases de perovskita y enstatita. También, en las figuras 3.5, 3.6 y 3.7 se muestran las estructuras internas de Mercurio, Venus y Marte predichas por nuestro modelo con las composiciones ya explicadas.

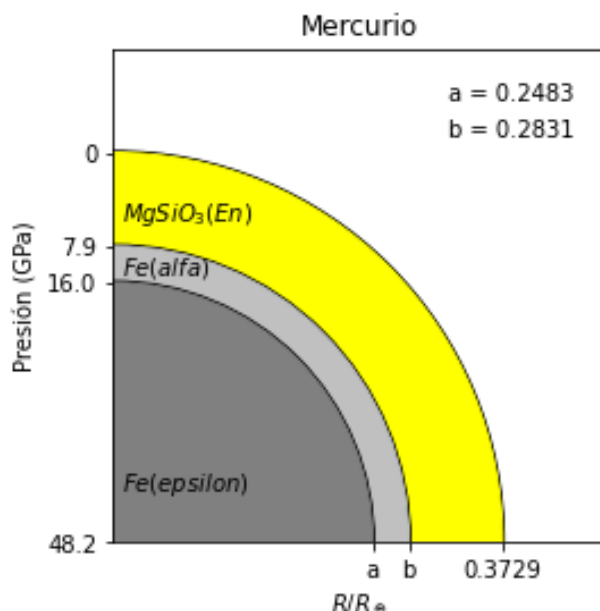


Figura 3.5: Estructura interna de Mercurio.

3.2.3. Júpiter y Saturno

Los planetas Júpiter y Saturno son buenos ejemplos para probar el funcionamiento de nuestro modelo para el caso de planetas con atmósferas significativas de hidrógeno y helio.

En el caso de Júpiter, su estructura está compuesta por una gran atmósfera formada por un 18% de helio y un 82% de hidrógeno. El núcleo de Júpiter está compuesto por materiales rocosos y hielo que representan menos del 0,1% de la masa total del planeta [18] aunque hay

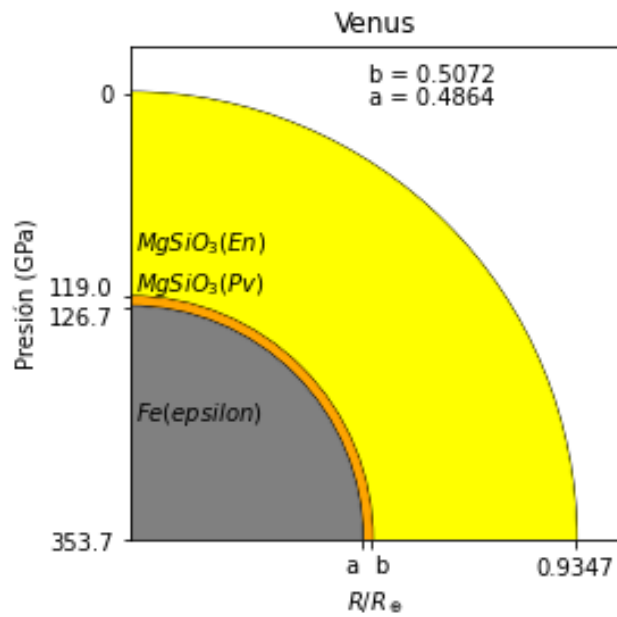


Figura 3.6: Estructura interna de Venus.

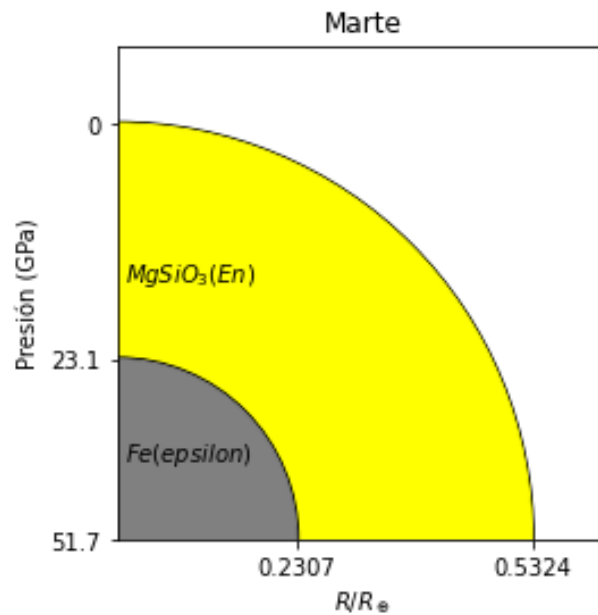


Figura 3.7: Estructura interna de Marte.

otros estudios que sostienen que Júpiter puede no tener núcleo [19]. Para calcular el radio de Júpiter, definimos una composición formada por un 18 % de helio y un 82 % de hidrógeno. No tomamos en cuenta la composición del núcleo debido a su casi nula contribución a la masa total de Júpiter. Con la composición descrita, obtenemos un valor para el radio de Júpiter de $R = 11,0341 R_{\oplus}$ que es bastante exacto con un error de menos del 0,5 % ($R = 11 R_{\oplus}$).

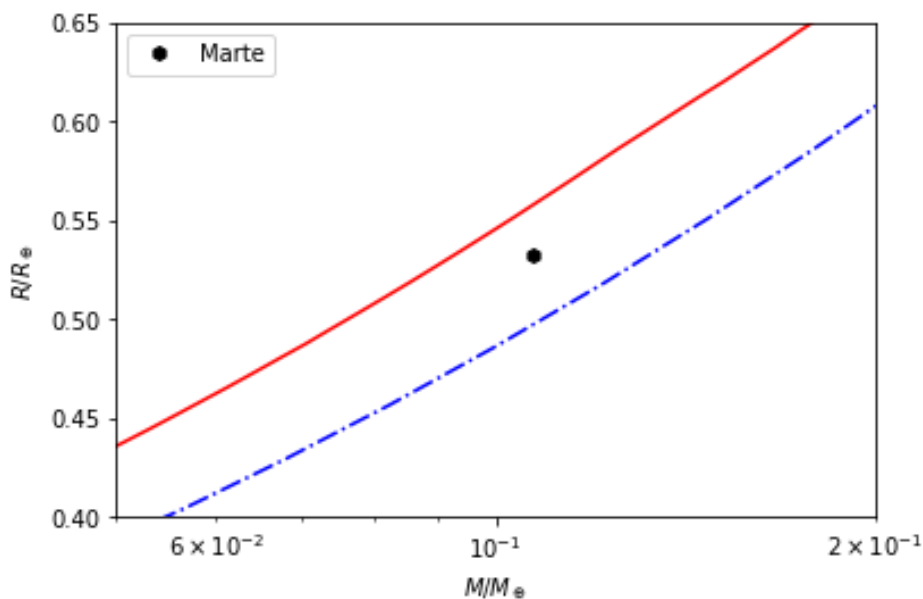


Figura 3.8: Relaciones radio-masa para Marte.

La curva superior es la composición del $MgSiO_3$ en la fase de la enstatita, y la curva inferior en la fase de la perovskita.

Saturno presenta una estructura bastante parecida a la de Júpiter, con una atmósfera formada por un 25 % de helio y un 75 % de hidrógeno. Además, al igual que Júpiter, tiene un núcleo compuesto por hielo y materiales rocosos que representa menos del 0,1 % de la masa de Saturno [18]. Al igual que con Júpiter, definimos una composición formada por un 25 % de helio y un 75 % de hidrógeno. El radio de Saturno calculado con la composición descrita da un valor bastante exacto de $R = 9,1898 R_{\oplus}$, aunque menos que en el caso de Júpiter, con un error del 0,5 % ($R = 9,14 R_{\oplus}$).

3.2.4. Urano y Neptuno

Los planetas Urano y Neptuno nos permiten estudiar los exoplanetas compuestos principalmente por hielo y con una envoltura gaseosa (helio e hidrógeno) que pueden llegar a representar el 10% de la masa total. Calculamos los radios de Urano y Neptuno para validar nuestro modelo en este tipo de exoplanetas. No hay acuerdo acerca de las composiciones exactas de Urano y Neptuno. En los artículos de Podolak et al. [20] y Nettleman et al. [21] hay diferencias en cuanto a las composiciones. Por ejemplo, las atmósferas de hidrógeno y helio de ambos planetas, varían en masa entre 0,5 y 3,5 M_{\oplus} , y hay modelos que duplican

el valor de estas masas. La elección de un modelo de composición afecta al valor del radio calculado.

Para calcular el radio de Urano, definimos su estructura basándonos en los artículos ya mencionados. La estructura de Urano está dividida en tres capas: i) una envoltura externa formada, en su totalidad, por hidrógeno que representa el 16,5% de la masa total, un manto compuesto por hielo VII que forma el 80% de la masa total y un núcleo de hierro representando el 3,5% de la masa total de Urano. Con esta composición, obtenemos un valor para el radio de $R = 3,9347 R_{\oplus}$ con un error del 2% respecto al radio observado ($R = 3,98 R_{\oplus}$).

Para el caso de Neptuno, definimos una estructura similar a Urano, con una envoltura externa de hidrógeno que forma el 15% de la masa total, un manto compuesto por hielo VII que representa el 68,5%, y un núcleo de hierro que representa el 16,5% de la masa de Neptuno. Obtenemos un valor para el radio de Neptuno de $R = 3,3088 R_{\oplus}$ que es bastante exacto respecto al radio observado ($R = 3,86 R_{\oplus}$) con un error del 0,3%.

Las estructuras internas de Urano y Neptuno se muestran en las Figuras 3.9 y 3.10.

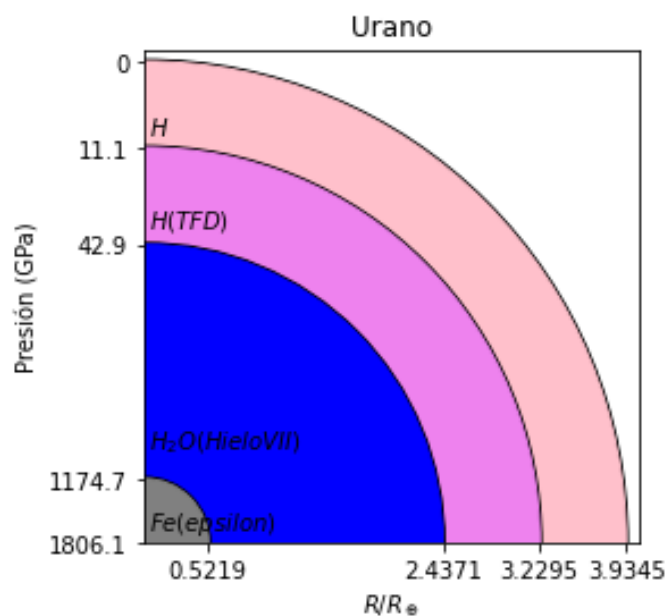


Figura 3.9: Estructura interna de Urano.

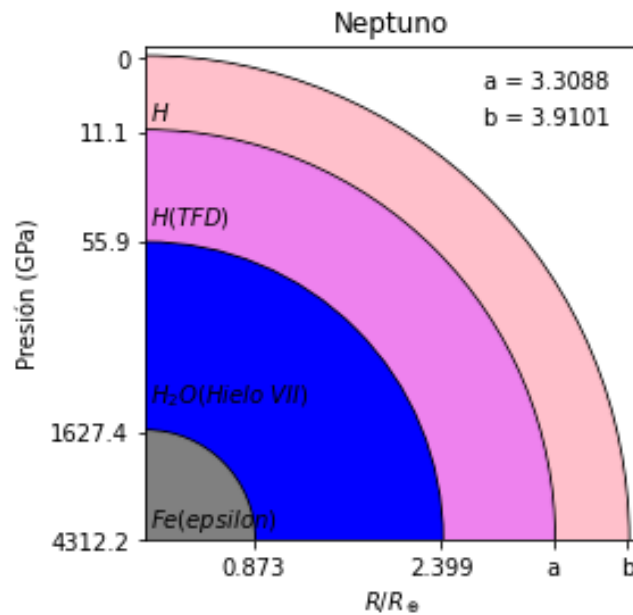


Figura 3.10: Estructura interna de Neptuno.

3.2.5. La Luna, Europa y Calisto

Tras haber estudiado los planetas del Sistema Solar, empleamos los satelites Europa y Calisto, además de la Luna, para validar nuestro modelo en posibles exolunas. Mediante el estudio de Europa y Calisto, podemos estudiar los posibles casos de diferentes exoplanetas que posean un gran envoltura formada por agua (planetas oceánicos). En la sección 3.3.3 trataremos este tipo de planetas.

En el caso de la Luna, Canup y Ashpaug [22] estimaron que el núcleo de hierro constituye tan solo un 3% de la masa total del satélite. Por tanto, definimos la estructura de la Luna como un manto de silicatos que representa el 97% de la masa y un núcleo de hierro con solo el 3% de la masa total del satélite. El radio de la Luna calculado por nuestro modelo de $R = 0,273 R_{\oplus}$ es esencialmente exacto respecto al radio observado ($R = 0,27 R_{\oplus}$).

Para los casos de los satélites Europa y Calisto, empleamos las composiciones estimadas en el artículo de Luskov y Kronrod [23]. Para Europa empleamos una estructura formada por un núcleo de hierro representando el 6,5% de la masa y un manto de silicatos del 87,5%, con una capa final de agua formando el 6% de la masa total del satélite. Para Calisto usamos

un composición formada por un 47,5 % de troilita (FeS) y un 52,5 % de agua. Calculamos la radios para ambos satelites y obtenemos un valor para el radio de Europa de $0,2452 R_{\oplus}$ esencialmente exacto ($R = 0,245 R_{\oplus}$) y un valor del radio de Calisto de $R = 0,3684 R_{\oplus}$ con un error del 2,6 % ($R = 0,378 R_{\oplus}$).

Las estructuras internas de la Luna, Europa y Calisto están mostradas en las Figuras 3.11, 3.12 y 3.13.

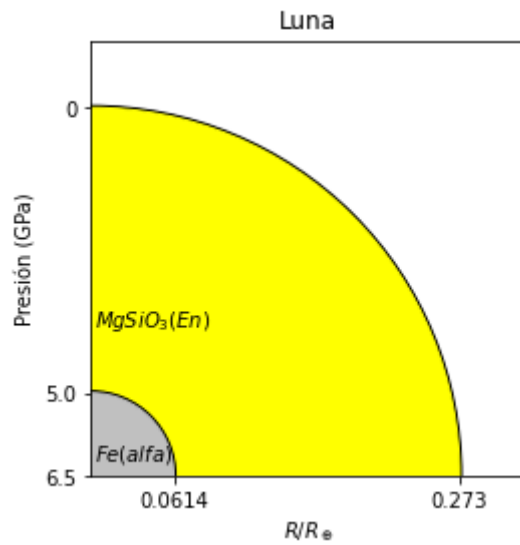


Figura 3.11: Estructura interna de la Luna.

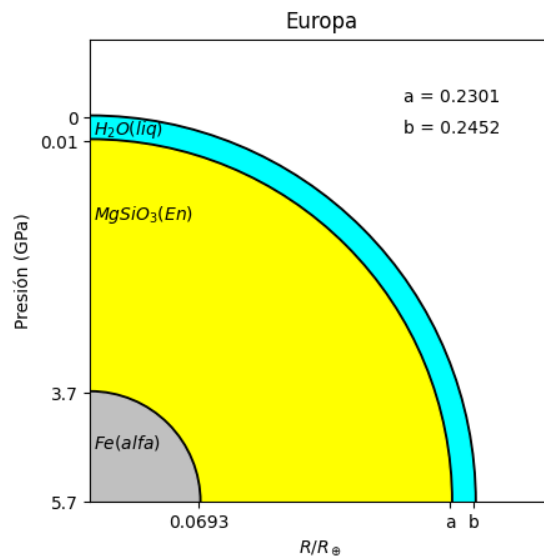


Figura 3.12: Estructura interna de Europa.

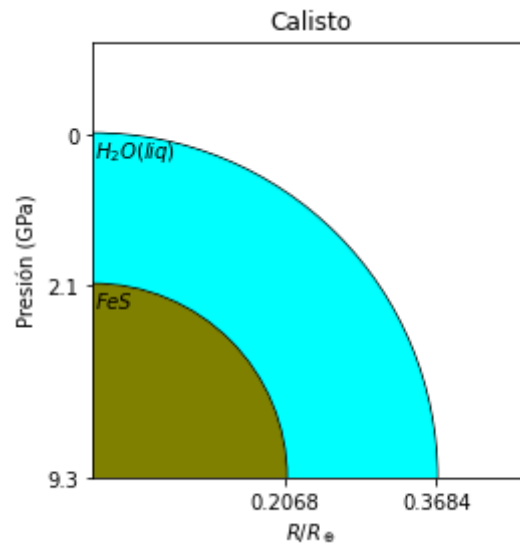


Figura 3.13: Estructura interna de Calisto.

3.3. Modelos planetarios

Hemos observado que las distintas composiciones de los planetas del sistema solar, y también de algunos de sus satélites explorados, provocan diferentes densidades. Estas diferencias se reflejan en sus estructuras internas y nos sirven de guía y también como motivación para examinar varios modelos de planetas con los que podemos catalogar los distintos exoplanetas descubiertos. De este modo, vamos a identificar estos modelos planetarios no solo por las masas totales que poseen los planetas sino también según la composición de los planetas utilizando los materiales ya descritos en la sección 2.3. De esta forma podemos proporcionar una mayor información sobre los nuevos objetos planetarios. En los tipos de planetas descritos ignoramos los elementos cuyas abundancias presentan valores demasiado bajos como para poder afectar a la estimación de su radio de manera notable. Del mismo modo, como ya hemos indicado, no contabilizaremos las atmósferas si son demasiado pequeñas como para poder influir en el radio total observado del planeta.

Dentro de este catálogo de exoplanetas, comenzamos por diferenciar dos importantes tipos. En primer lugar los planetas rocosos, formados básicamente por materiales con bulk modulus altos (con valores mayores de 100 GPa) como hierro y silicatos. En segundo lugar, los llamados planetas gaseosos, caracterizados por tener una gran *atmósfera* que representa



casi la totalidad de sus masas. Se denomina habitualmente *atmósfera* por estar compuesta principalmente por hidrógeno e helio, aunque como veremos más adelante el estado de agregación de estos componentes deja de ser el gaseoso cuando penetramos ligeramente en el interior del planeta. Esta *atmósfera* represente el 75% de la masa total estando la masa restante localizada en el núcleo y formada por metales como el hierro. En segundo lugar, abordaremos también el estudio de dos tipos menos convencionales de planeta, los planetas oceánicos y los planetas ricos en carbono. En los primeros, la cantidad de agua líquida o sólida (hielo VII) es relevante. En los segundos, la relación entre la cantidad de oxígeno y de carbono es menor que la que se observa en los planetas rocosos debido a la presencia bien de carbono (grafito y/o diamante) o de carburo de silicio en alguno de sus politipos.

3.3.1. Planetas de silicatos

Dentro de la categoría de los planetas rocosos, la gran mayoría de los planetas tienen una capa, de mayor o menor extensión, formada básicamente por silicatos (MgSiO_3 principalmente). Por este motivo, nos centramos en los planetas que posean estas capas como sucede en el manto terrestre y los denominamos planetas de silicatos. También, dentro de los planetas de silicatos definimos dos tipos de planetas basados en la abundancia del hierro en sus composiciones. En primer lugar, los planetas que poseen un núcleo de hierro que represente más de la mitad de la masa total, es decir, con una composición parecida a la de Mercurio (70% hierro y 30% silicatos) y llamados super-mercurios en el caso de que sus masas sean mayores a la de Mercurio. En segundo lugar, los planetas en los que dicho núcleo representa menos de la mitad de la masa del planeta, es decir, con una composición parecida a la de La Tierra (32,5% hierro y 67,5% silicatos) y denominados super-tierras en el caso de ser más masivos que La Tierra.

En las Figuras 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18 se exponen los perfiles de las densidades en función del radio o profundidad de diferentes planetas de silicatos con las dos composiciones descritas para varias masas totales. Como se puede observar, los planetas que en cuya composición el hierro es el material más abundante, presentan una densidad en el interior del planeta más elevada que los planetas en los que los silicatos representan la mayor parte de la masa total. Además, presentan una presión más alta en el centro de los planetas, como se muestra en



Composición	β
Fe 100 %	0,2545
Fe 66 %, MgSiO ₃ 33 %	0,2629
Fe 33 %, MgSiO ₃ 66 %	0,2637
MgSiO ₃ 100 %	0,2668

Tabla 3.2: Valores del coeficiente β de la relación masa-radio $R \sim M^\beta$ para diferentes composiciones de planetas de silicatos

las Figuras 3.15, 3.16, 3.17. Estos resultados son esperables debido a la mayor densidad del hierro en comparación con el MgSiO₃.

En la Figura 3.14, la zona sombreada indica la región en la cual un planeta pasa a ser denominado planeta de silicatos. Hemos utilizado el siguiente criterio para definir esta región. El límite superior lo proporciona una composición formada completamente por silicatos, y el límite inferior es una composición de hierro puro. Como los planetas de silicatos tienen como límite inferior la composición de hierro puro, este tipo de planeta sería el planeta de menor tamaño que podemos detectar en relación a la masa. Como se comentó en la sección 3.1., en nuestros modelos planetarios, una vez fijada la masas el radio mínimo de un planeta se obtiene cuando está compuesto únicamente de hierro. En la Tabla 3.2 se muestran los diferentes valores del coeficiente β de la relación masa (M)-radio (R), $R \sim M^\beta$, para las composiciones donde el hierro y/o los silicatos son los materiales principales. Comparando estos valores, observamos que el valor de β disminuye al aumentar la cantidad de hierro en la composición.

3.3.2. Planetas gaseosos

Los planetas gaseosos son los planetas de mayor tamaño en relación a sus masas. Esto es debido a que el hidrógeno y el helio son los componentes más ligeros que pueden formar parte de la composición de un planeta. Por esta razón, si añadimos una envoltura que represente la mitad de la masa total y que esté formada por hidrógeno y helio a planetas formados por un 50 % hierro y por otro 50 % de silicatos, el radio de estos planetas se incrementa de forma notable. En las Figuras 3.20, 3.21, 3.22 y 3.23 se comparan varios planetas con masas iguales y con las dos estructuras antes descritas, para masas de 5, 20 y 40 veces la masa de

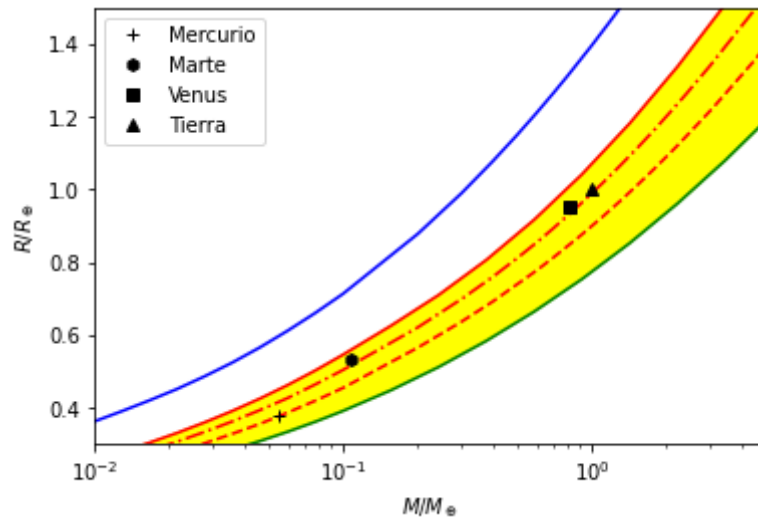


Figura 3.14: Relaciones masa-radio para planetas de silicatos.

Ordenados de arriba a abajo empezando por la curva superior, 100% H_2O ; 100% $MgSiO_3$; 33% Fe , 67% $MgSiO_3$; 67% Fe , 33% $MgSiO_3$; 100% Fe .

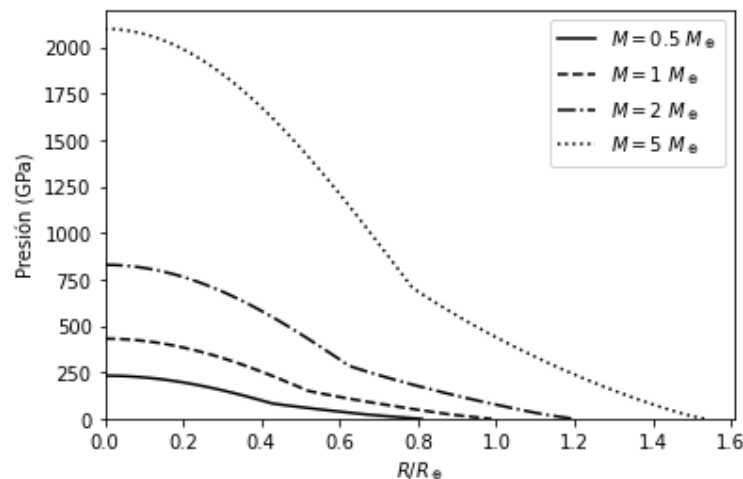


Figura 3.15: Presión vs Radio. Composición como la Tierra.

La Tierra. Se puede observar que al añadir la atmósfera el radio de los planetas puede llegar a duplicarse o incluso a triplicarse. Al comparar los perfiles de las presiones y densidades internas de los planetas descritos, detectamos también que la atmósfera de hidrógeno afecta a los valores de las presiones y densidades internas disminuyéndolos. Este impacto era esperable y la razón es la baja densidad, a presión cero, del hidrógeno comparada con los valores de la densidad del hierro y del $MgSiO_3$. Como se muestra en la Figura 3.19, los planetas que se encuentran en la zona sombreada pueden ser identificados como planetas gaseosos. El límite superior está marcado por una composición únicamente formada por hidrógeno y

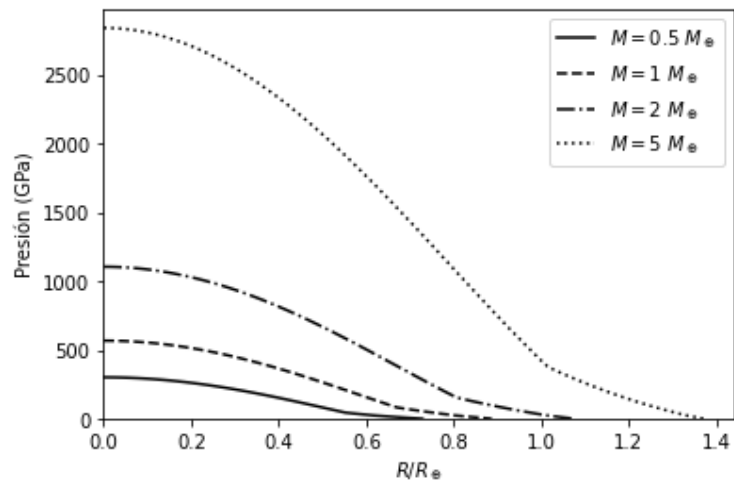


Figura 3.16: Presión vs Radio. Composición como Mercurio.

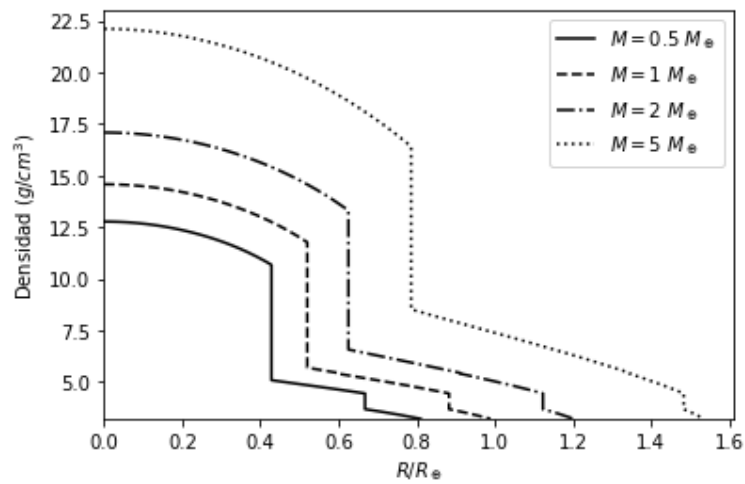


Figura 3.17: Densidad vs Radio. Composición como la Tierra.

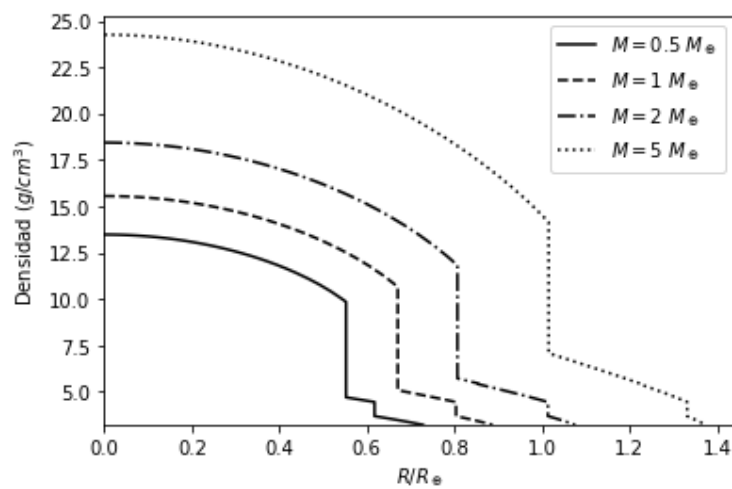


Figura 3.18: Densidad vs Radio. Composición como Mercurio.



Composición	β
<i>He</i> 100%	0,2653
<i>He</i> 50% <i>H</i> 50%	0,2658
<i>He</i> 10%, <i>H</i> 90%	0,2661
<i>H</i> 100%	0,2723

Tabla 3.3: Valores del coeficiente β de la relación masa-radio $R \sim M^\beta$ para diferentes composiciones de planetas gaseosos

el límite inferior está definido al considerar una composición formada completamente por helio. Estos planetas compuestos principalmente por helio pueden tener su origen en estrellas enanas blancas de masa pequeña (en comparación con la masa de nuestro sol) y con una composición pobre en hidrógeno y rica en helio. Un ejemplo de este tipo de planeta podría encontrarse en la estrella binaria llamada AM Canes Venatici [24], rodeada por un disco de acreción de helio formado durante la transferencia de masa de la enana blanca menos masiva a la estrella más masiva.

Observando la Figura 3.19, los planetas Urano y Neptuno se localizan justo en la zona de una composición formada exclusivamente por helio, por lo tanto, estos planetas se encuentran justo en el límite inferior de los planetas gaseosos. Pero, este hecho no afirma que estos planetas sean gaseosos, y de hecho no podrían considerarse como tal debido a que en sus estructuras internas el agua, más concretamente el hielo VII, forma más de la mitad de la masa total de estos. Para que un planeta sea considerado gaseoso es condición necesaria que se encuentre en la zona sombreada, pero ésta no es una condición suficiente. Dónde catalogar estos planetas se abordara en la siguiente sub-sección.

En la Tabla 3.3 se muestran los diferentes valores que puede tomar el coeficiente β de la expresión $R \sim M^\beta$ para las composiciones estudiadas. Comparando los diferentes valores, vemos que el valor de β disminuye al aumentar la cantidad de helio presente en la composición.

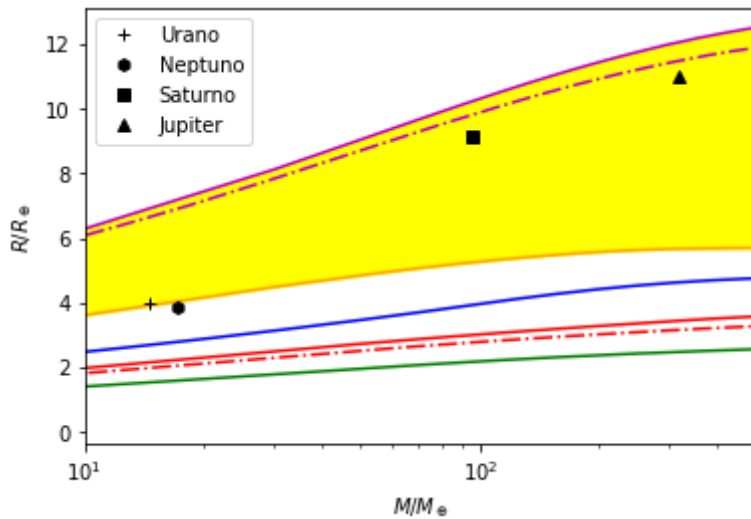


Figura 3.19: Relaciones masa-radio para planetas gaseosos.

Ordenados de arriba a abajo empezando por la curva superior, 100% H ; 10% He , 90% H ; 100% He ; 100% H_2O ; 100% $MgSiO_3$; 33% Fe , 67% $MgSiO_3$; 67% Fe , 33% $MgSiO_3$; 100% Fe .

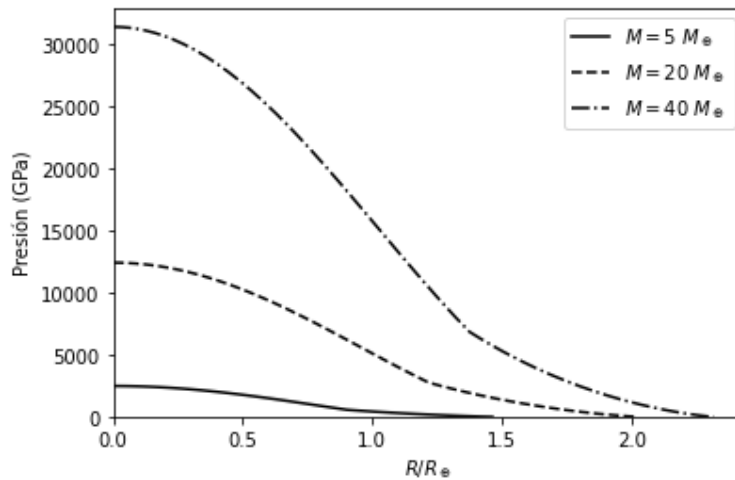


Figura 3.20: Presión vs Radio. Sin envoltura.

3.3.3. Planetas oceánicos

Un gran número de los exoplanetas descubiertos a día de hoy son planetas con masas pequeñas en comparación con sus tamaños. Estos oscilan entre 1 y $4 R_{\oplus}$ y no tienen análogo en nuestro sistema solar porque las densidades medias de los planetas descubiertos no se corresponden con las densidades medias de los planetas de nuestra estrella. Sus densidades son menores que las de los planetas rocosos interiores del Sistema Solar (Mercurio, Venus,

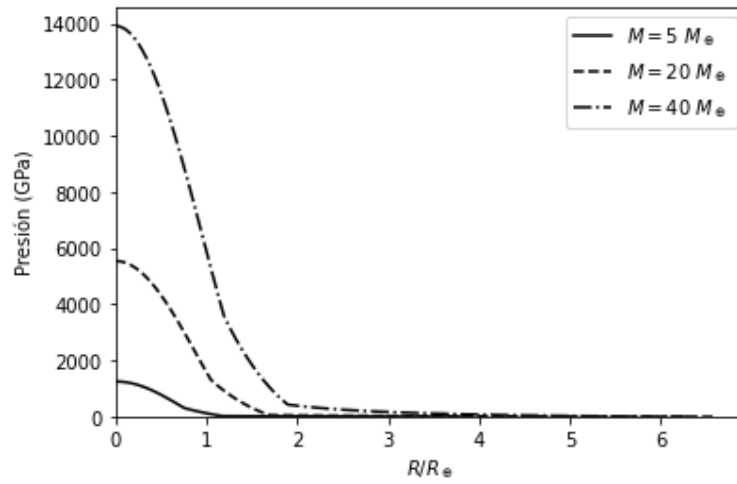


Figura 3.21: Presión vs Radio. Con envoltura.

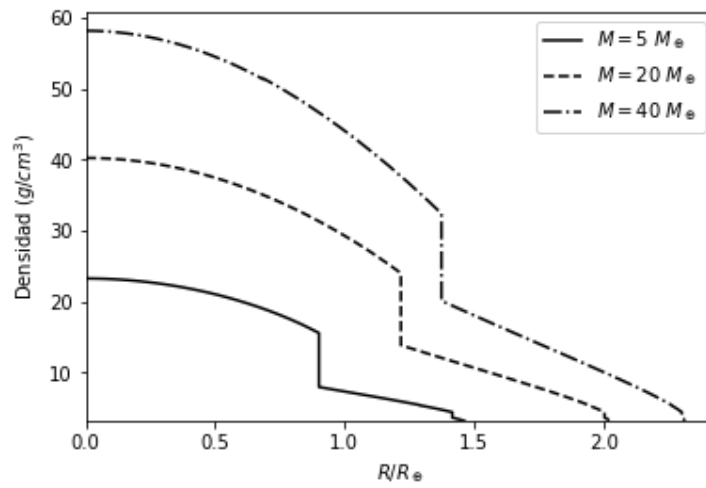


Figura 3.22: Densidad vs Radio. Sin envoltura.

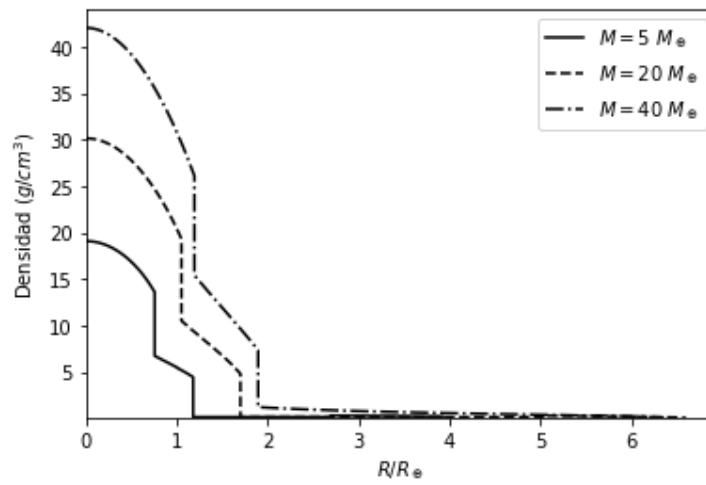


Figura 3.23: Densidad vs Radio. Con envoltura.



la Tierra y Marte) y mayores que los planetas gaseosos (Júpiter y Saturno). Por lo tanto, consideramos esta nueva familia de planetas como un tipo intermedio entre ambos tipos de planetas. Debido a esta situación, estos exoplanetas pueden ser clasificados, según sus masas, en super-Tierras o en mini-Neptunos. Estos planetas, al presentar una masa pequeña y radios relativamente grandes, presentan una densidad considerablemente más baja que los planetas interiores del Sistema Solar, compuestos principalmente por silicatos y hierro. Al tener una densidad menor, se conjetura que estos planetas están compuestos al menos por una gran parte de agua (hielo VII) que representa, al menos, un 25 % de la masa total del planeta. Los denominaremos planetas oceánicos, por la gran presencia de agua en la capa más externa de los mismos. Con esta definición, Urano y Neptuno pueden ser considerados como planetas oceánicos porque ambos planetas contienen cantidades de agua en forma de hielo VII que suponen más de la mitad de sus masas totales.

Es probable que este tipo de planeta se pueda haber formado en regiones frías de un disco protoplanetario, con una temperatura de menos de 200 K [2] y en discos en donde la abundancia de oxígeno sea superior a la de carbono. En este escenario los discos protoplanetarios contendrían una fracción significativa de agua. Debido a la gran diversidad en los parámetros orbitales de los planetas descubiertos, es posible que una parte de estos planetas hayan podido migrar, desde sus lugares de formación [25] hasta las zonas más cercanas al astro que orbiten, como en el caso de 51 Pegasi b [26], incluso que migren hasta la llamada "Zona Habitable", donde es posible la presencia de agua líquida en la superficie.

Atendiendo a sus composiciones internas, podemos diferenciar varios tipos de planetas oceánicos en función del radio de los mismos. El primer tipo de planetas oceánicos es el de los planetas cuya estructura interna es la misma que la de los planetas de silicatos, un manto formado por rocas de silicatos y un núcleo de hierro, añadiendo además la capa externa de agua. De esta forma, podemos proponer los radios mínimos que pueden tener este tipo de planetas. Para ello, consideramos una composición de un 75 % de hierro y el 25 % restante de agua. Con esta composición, definimos el radio más bajo que identificaría a un planeta oceánico. Recordamos de nuevo que se trata de una condición necesaria pero no suficiente.

En la Figura 3.24) se muestra que este límite corresponde a una estructura interna como



la de la Tierra (33 % Fe y 67 % MgSiO_3). Debido a este límite, es posible que los planetas de silicatos que se localicen (ver Figura 3.14) entre el límite inferior para los planetas oceánicos y el límite superior de los planetas de silicatos, tengan en su composición una parte importante de su masa formada por agua. Este hecho se puede visualizar en la Figura 3.26 y ??, allí se muestra (i) la estructura de un planeta formado únicamente por silicatos con una masa igual a la de la Tierra y (ii) la estructura de un planeta, también con una masa igual a la de la Tierra, donde el agua representa el 25 % de la masa total y cuyo tamaño es el mismo que el primer planeta mencionado. Podemos notar que este último planeta presenta un núcleo de hierro y no contiene silicatos debido a que la densidad del agua, en este caso agua líquida (1 g/cm^3) y hielo VII ($1,46 \text{ g/cm}^3$) es menor que la del MgSiO_3 cuya densidad es $4,10 \text{ g/cm}^3$ en su forma de perovskita. De este modo, el hierro al tener una densidad mayor de $6,08 \text{ g/cm}^3$, aporta la masa necesaria para tener el mismo tamaño que el planeta compuesto en su totalidad por silicatos.

En la Figura 3.30 se muestra que el satélite Europa se encuentra localizado en la parte superior del límite máximo para los planetas de silicatos. Es interesante resaltar que un planeta con la misma composición que Europa puede ser considerado como un planeta oceánico, a pesar de que el agua solamente representa un 5 % de la masa total. El añadido del agua como componente en las diferentes composiciones internas hace que existan masas de planetas para las cuales la catalogación de oceánico o planeta de silicatos pueda ser válida simultáneamente. Esto provoca una mayor riqueza en las propuestas al variar las composiciones de silicatos, hierro y agua. Para ilustrar este hecho se muestra en el diagrama de la Figura 3.28 las diferentes posibles estructuras que pueden poseer tres planetas con masas iguales a la de la Tierra y con radios de $1R_{\oplus}$, $1,125R_{\oplus}$ y $1,25R_{\oplus}$. Como era de esperar, el planeta con mayor radio presenta composiciones en las cuales el agua representa más de la mitad de la masa total.

La expresión de las relaciones entre las masas y los radios para las dos composiciones descritas sigue siendo $R \sim M^{\beta}$ en un rango de valores para una masa menor que $10M_{\oplus}$. Los valores del coeficiente β para ambas composiciones son mostrados en la Tabla 3.4. Se puede observar que el valor de β disminuye al disminuir la cantidad de hierro presente en la composición del planeta.



Composición	β
H_2O 100%	0,2458
Fe 25%, H_2O 75%	0,2464
Fe 50%, H_2O 50%	0,2466
Fe 75%, H_2O 25%	0,2542
H 50%, H_2O 50%	0,2612

Tabla 3.4: Valores del coeficiente β de la relación masa-radio $R \sim M^\beta$ para diferentes composiciones de planetas oceánicos

El segundo y último tipo de planeta oceánico son los planetas que poseen además de un núcleo de hierro una envoltura de hidrógeno que representa una importante parte de las masas del planeta. Debido a la gran atmósfera formada por hidrógeno, el agua del planeta se encuentra en su totalidad o en su gran mayoría en forma de hielo VII pues la presión ejercida por la atmósfera propicia su congelación. Debido a este hecho, los planetas catalogados en este tipo de planeta oceánico los llamamos planetas gigantes helados pues muestran además un gran tamaño con respecto a sus masas. Con esta definición, Urano y Neptuno, a pesar de estar localizados justo en el límite inferior para poder catalogarlos como planetas gaseosos, pueden llegar a ser considerados planetas gigantes helados. Como se muestra en la Figura 3.25, este tipo de planeta tiene como límite inferior la composición formada únicamente por agua, composición que marca la frontera entre ambos tipos de planetas oceánicos. El límite superior es la marcada por la composición formada por un 75% de hidrógeno y un 25% de hielo VII. Esta composición indica el radio máximo que puede tener un planeta para que pueda ser considerado oceánico. En la Figura 3.19 se aprecia que el límite superior de los planetas oceánicos se encuentra en la zona marcada para los planetas gaseosos. De forma análoga al anterior caso, de forma que podemos comparar las estructuras internas un planeta con una masa de 15 veces la masa de la Tierra y con una composición formada completamente por helio, el límite inferior de los planetas gaseosos, y la de un planeta con la misma masa que el anterior planeta, con el mismo tamaño y con un 25% de la masa total formada por hielo VII y el resto complementado por un núcleo de hierro y una atmósfera de hidrógeno. Este suceso tiene la misma causa que en el caso del anterior tipo de planeta oceánico, el hidrógeno, al tener una densidad más baja que el helio, el hielo VII y el hierro del núcleo aportan la masa necesaria para no variar de tamaño con respecto al planeta de helio.

La gran atmósfera de hidrógeno, en su mayoría, afecta de forma bastante notable en el radio de estos planetas oceánicos haciendo que estos planetas puedan poseer un número importante de combinaciones en sus composiciones internas. Algunas de estas posibles composiciones son mostradas en el diagrama de la Figura 3.29. Allí se muestra las composiciones de seis planetas con masas iguales y 15 veces superiores a la masa de la Tierra y con radios de $3 R_{\oplus}$, $3,5 R_{\oplus}$, $4 R_{\oplus}$, $4,5 R_{\oplus}$, $5 R_{\oplus}$ y $5,5 R_{\oplus}$. En el diagrama, se puede observar que cuanto mayor sea el tamaño del planeta, la masa de la atmósfera de hidrógeno será mayor.

En la Tabla 3.4 también se muestra el valor del coeficiente β para la relación $R \sim M^{\beta}$ para el caso de un planeta con una composición formada por un 50 % agua y un 50 % hidrógeno. El valor disminuye, en comparación del valor de una composición enteramente formada por hidrógeno (ver Tabla 3.3), al incluir el agua en la composición del planeta.

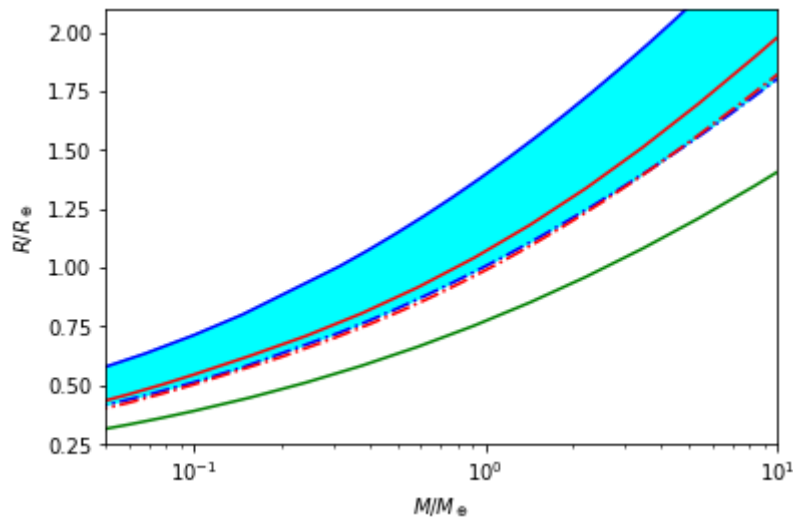


Figura 3.24: Relaciones masa-radio para planetas oceánicos.

Ordenados de arriba a abajo empezando por la curva superior, 100 % H_2O ; 100 % $MgSiO_3$; 33 % Fe , 67 % $MgSiO_3$; 75 % Fe , 25 % H_2O ; 100 % Fe .

3.3.4. Planetas ricos en carbono

Después de haber expuesto los diferentes tipos de exoplanetas susceptibles de ser encontrados en nuestro sistema solar, ya sean planetas rocosos (La Tierra, Mercurio), gaseosos (Júpiter y Saturno), o planetas oceánicos con una gran cantidad de agua, como el satélite Calisto, vamos a considerar ahora un nuevo tipo de exoplanetas con una composición bas-

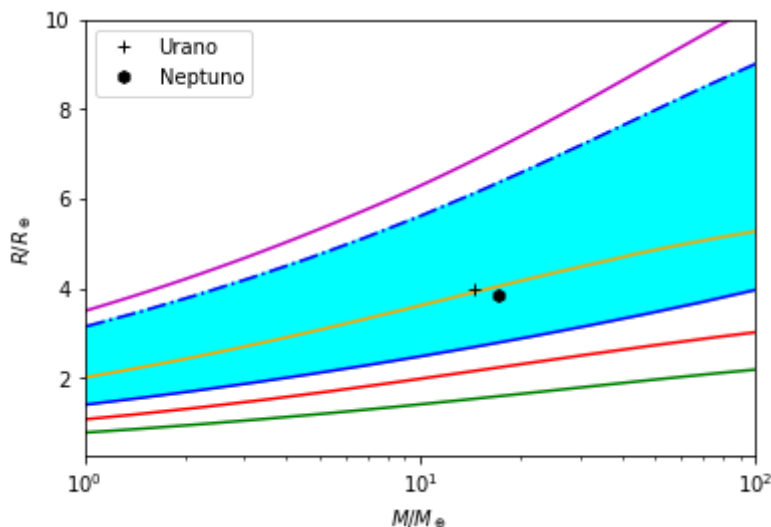


Figura 3.25: Relaciones masa-radio para planetas gigantes helados.

Ordenados de arriba a abajo empezando por la curva superior, 100 % H; 25 % H₂O, 75 % H; 100 % He; 100 % H₂O; 100 % MgSiO₃; 100 % Fe.

tante diferente a los planetas del sistema solar. Se trata de los denominados planetas ricos en carbono en los que la cantidad de oxígenos disminuye por la presencia del carbono. Están por tanto caracterizados por incluir en su composición compuestos de carbono como el grafito o el carburo de silicio (SiC). Este último es el material que habitualmente se utiliza para caracterizar este tipo de planetas.

En el caso de los planetas interiores del Sistema Solar, estos fueron formados a partir de un disco protoplanetario generado a partir de una nebulosa solar en la cual la cantidad de oxígeno presente era el doble que la cantidad de carbono ($C/O \gtrsim 0,5$). En esta situación, los óxidos metálicos y los elementos ricos en hierro se condensan a una temperatura por encima de 1500 K, después los silicatos se condensan a una temperatura entre 1200 – 1400 K y por último el agua se condensa cuando la temperatura alcanza los 180 K [3]. Esta secuencia de condensación en equilibrio, aparentemente, describe las composiciones de los planetas interiores del sistema solar con un núcleo de hierro y un manto formado por silicatos.

En el caso de que el gas de las nebulosas contengan la misma proporción de carbono y oxígeno ($C/O \sim 1$), la secuencia de condensación cambia drásticamente [27]. En esta situación, el gas se condensaría en compuestos ricos de carbono, como el grafito o distintos

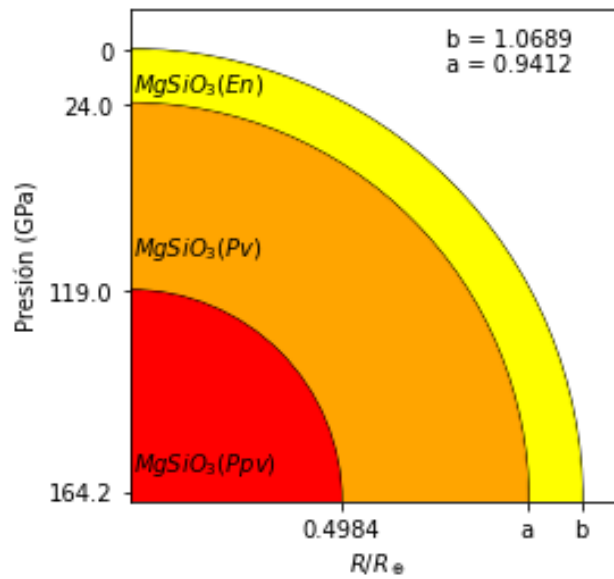


Figura 3.26: Estructura interna con una composición completa de MgSiO₃ de un planeta con la masa de la Tierra

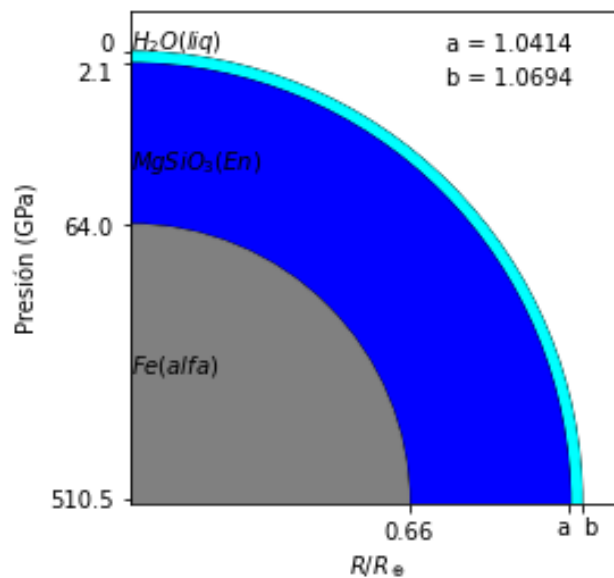


Figura 3.27: Estructura interna con una composición de 65% Fe y 35% H₂O de un planeta con la masa de la Tierra

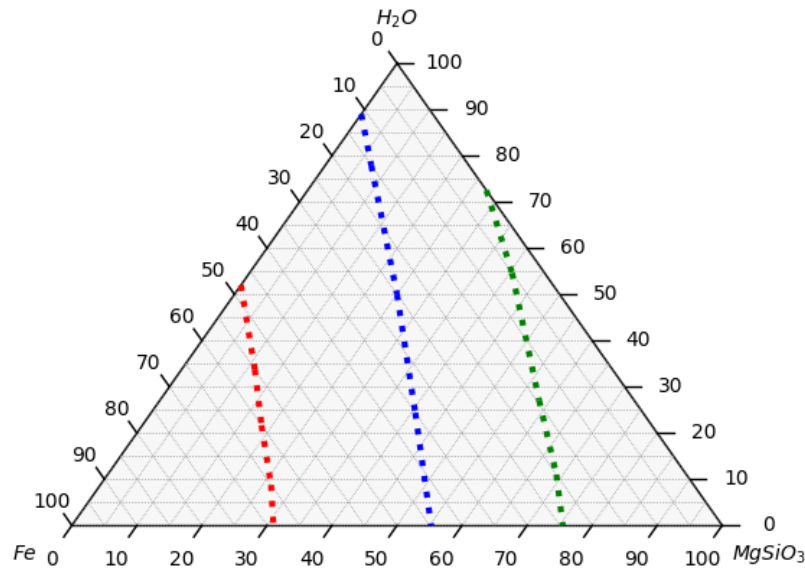


Figura 3.28: Diagrama ternario para tres planetas de 1, 1.125, 1.25 R_{\oplus} con masas iguales a la de la Tierra. Los planetas están ordenados de derecha a izquierda.

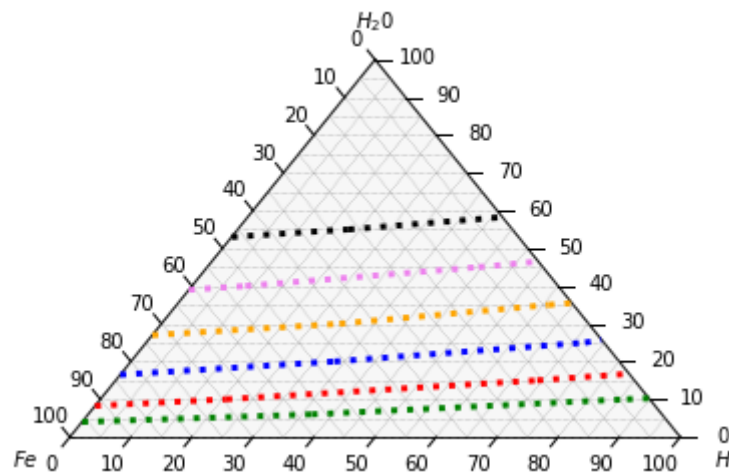


Figura 3.29: Diagrama ternario para seis planetas de 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5 R_{\oplus} con masas de 15 M_{\oplus} . Los planetas están ordenados de abajo a arriba.

politipos de carburo de silicio (SiC) a una temperatura entre 1200 y 1600 K. Por lo tanto, la probabilidad de poder encontrar planetas de carbono se incrementaría en el caso de encontrar planetas que orbiten objetos estelares ricos en carbono, como las enanas blancas o los pulsares. Esta afirmación se puede apoyar en el descubrimiento de planetas orbitando el pulsar PSR 1257+12 [28] que podrían haberse formado en una nebulosa rica en carbono creada por el colapso de una estrella rica en carbono o de una enana blanca. La formación de planetas

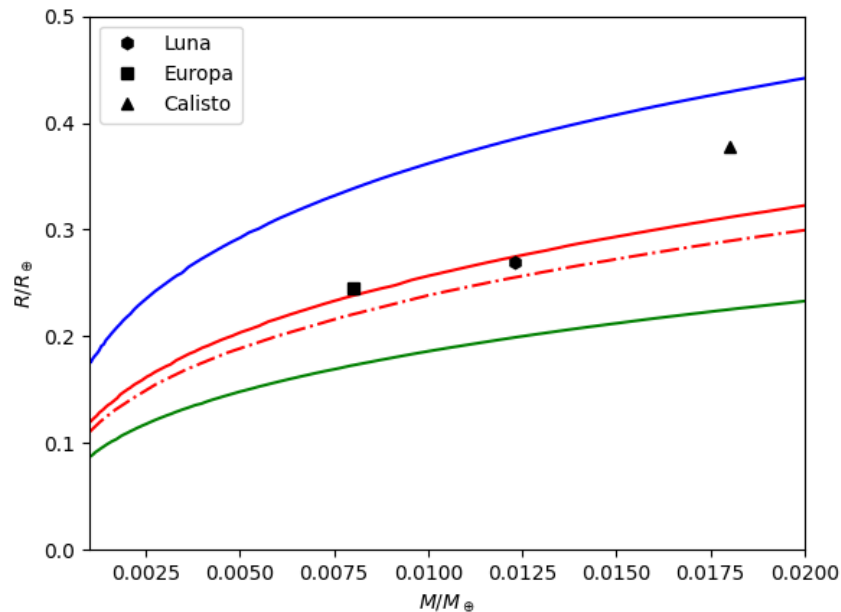


Figura 3.30: Relaciones masa-radio para el satélite Europa.

Ordenados de arriba a abajo empezando por la curva superior, 100% H_2O ; 100% $MgSiO_3$; 33% Fe , 67% $MgSiO_3$; 100% Fe .

ricos en carbono es también posible es nuestro propia nebulosa solar y también consistente con nuestro actual entendimiento de formación de planetas, siendo posible por la concentración de carbono en zonas localizadas del disco protoplanetario o en zonas empobrecidas de agua [29].

La composición dominante de los planetas ricos en carbono no es conocida. La composición de los planetas depende de la temperatura del disco protoplanetario, así como de la composición y de la abundancia de los elementos que componen el disco. Sin embargo, los materiales con más posibilidades de formar parte de la composición de los planetas ricos en carbono son el grafito y el SiC tal y como demuestran las observaciones y los cálculos de atmósferas de estrellas ricas en carbono realizados por Lodders y Fegley en 1999 [30]. Conocidos los materiales que pueden formar los planetas de carbono, podemos entonces calcular las relaciones masa-radio de los diferentes tipos de planetas ricos en carbono que pueden existir.



El primer tipo de planeta rico en carbono es un planeta con un núcleo de hierro y un manto formado íntegramente por SiC. En la Figura 3.31 se muestran las relaciones radio-masa para planetas formados completamente por SiC con un núcleo de hierro que representa el 33% de su masa y con un núcleo de hierro que contiene el 66% de la masa. En ambos casos los mantos son de SiC. También se muestran las relaciones para tres tipos de planetas, planetas completamente formados por silicatos y planetas con núcleos de hierro que representen el 33% y el 66% de la masa total. Comparando las relaciones masa-radio de los planetas ricos en carbono con las de los planetas de silicatos, observamos que ambos planetas tienen valores similares. Esta similitud era esperable porque la densidad a presión cero del SiC es de $3,22 \text{ g/cm}^3$ y la densidad del MgSiO_3 es de $4,10 \text{ g/cm}^3$, siendo la diferencia entre estos valores solo del orden del 20%. Al aumentar las masas de los planetas, observamos también que la diferencia entre los valores de las masas y los radios de los dos tipos de planetas va disminuyendo. Incluso se llega a alcanzar el mismo valor para la masa y el radio cuando la masa de planeta supera 1000 veces la masa de la Tierra.

Este comportamiento es debido a que la diferencia entre los valores de las densidades del SiC y del MgSiO_3 disminuye cuando la presión aumenta (Figura 3.33). Por lo tanto, debido a que la presión en el interior de los planetas aumenta al aumentar las masas de estos, la diferencia entre los valores de los radios, para una misma masa, de ambos tipos de planetas es prácticamente nula cuando sus masas superan las 1000 masas de la Tierra. Podemos utilizar la Figura 3.34 para comparar las posibles estructuras internas de un planeta rico en carbono y un planeta de silicatos con masas iguales a la de la Tierra y con una estructura similar a la de La Tierra. Esta estructura estaría constituida por un núcleo de hierro que forma el 32,5% de la masa total, y un manto formado por MgSiO_3 , en el caso del planeta de silicatos, o por SiC, en el caso del planeta rico en carbono. A pesar de tener composiciones distintas, los radios de ambos planetas tienen valores similares, siendo el planeta de carbono el que presenta un radio con un valor 6% mayor comparado con el radio del planeta de silicatos. En ambos planetas el núcleo ocupa, aproximadamente, el mismo volumen, un 15%.

El segundo tipo de planeta rico en carbono es un planeta que tiene más abundancia de carbono que el anterior tipo de planeta, con una estructura interna formada por un núcleo de hierro y por un manto compuesto principalmente por grafito y diamante, en el caso de



que la presión sea lo suficientemente grande. La Figura 3.32 muestra las relaciones radio-masa para planetas formados completamente por grafito y diamante, y para planetas con un núcleo de hierro que representa el 33 % y el 66 % de las masas totales. También se presenta la relación masa-radio para un planeta compuesto únicamente por hielo VII para evidenciar que las relaciones de los planetas compuestos completamente de hielo VII y de C (grafito y diamante) tienen valores muy similares. La razón es la misma que en el anterior tipo de planetas, los valores de las densidades a presión cero del grafito y del hielo VII son bastante parecidos, si bien el hielo VII es el material menos denso con una densidad de $1,46 \text{ g/cm}^3$ en comparación con la densidad del grafito, $2,25 \text{ g/cm}^3$.

En las Figuras 3.35 y 3.36 comparamos las estructuras de dos planetas con masas equivalentes a la de La Tierra y con estructuras formadas por un núcleo de hierro y por un manto compuesto de agua, en el caso del planeta oceánico, o por un manto de grafito, en el caso del planeta rico en carbono. El tamaño del planeta de carbono es un 10 % menor que el planeta oceánico, debido a la diferencia de valor de las densidades del hielo VII y el grafito. Además es llamativa la presencia de un océano de agua líquida, cuya densidad es menor que el hielo VII. En ambos planetas el radio del núcleo es aproximadamente el mismo.

Comparamos ahora las estructuras de dos planetas con masas 10 veces la de La Tierra. En ambos casos el núcleo de hierro constituye el 33 % de la masa de los planetas y la diferencia estriba en la capa externa que está compuesta por agua en un caso y por carbono en el otro. Debido al gran valor de la masa del planeta rico en carbono, el valor de la presión interna es lo suficientemente grande como para que en el manto se formen dos capas, una capa exterior formada por grafito y una capa interna compuesta por diamante debido a la alta presión existente en esas profundidades. En ambas estructuras, el núcleo ocupa de nuevo el mismo volumen con un radio de casi la mitad del tamaño de los planetas. Estos radios son en ambos planetas muy similares con una diferencia de apenas el 3 %, siendo el planeta oceánico el de mayor tamaño.

La expresión de las relaciones entre las masas y los radios en los dos tipos de planeta de carbono sigue siendo $R \sim M^\beta$ en el rango de valores $M < 10M_\oplus$. Los diferentes valores del coeficiente β para cada composición estudiada son mostrados en la Tabla 3.5. Observamos

Composición	β
SiC 100 %	0,265
Fe 33 %, SiC 66 %	0,264
Fe 66 %, SiC 33 %	0,261
Grafito/Diamante 100 %	0,286
Fe 33 %, Grafito/Diamante 66 %	0,279
Fe 66 %, Grafito/Diamante 33 %	0,275

Tabla 3.5: Valores del coeficiente β de la relación masa-radio $R \sim M^\beta$ para diferentes composiciones de planetas de carbono

que el valor de β , al igual que en el caso del MgSiO_3 , disminuye al aumentar la abundancia del hierro en los planetas.

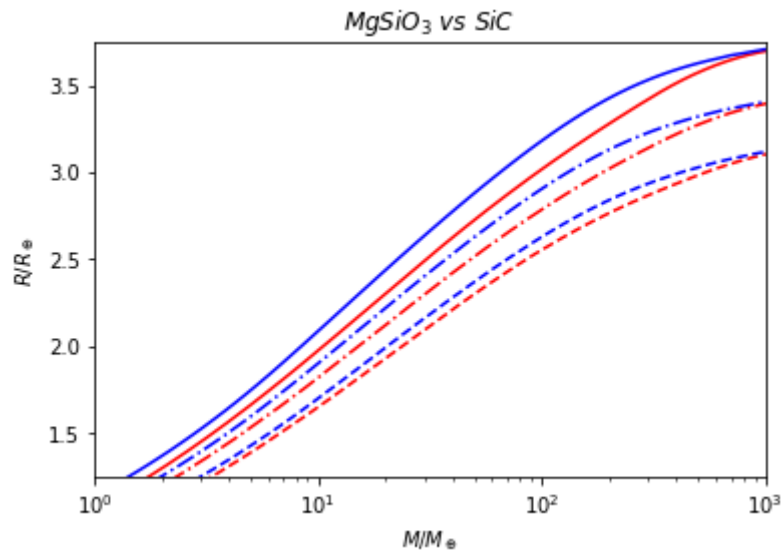


Figura 3.31: Relaciones masa-radio para el MgSiO_3 y el SiC.

Ordenados de arriba a abajo empezando por la curva superior, en color azul 100% SiC; 33% Fe, 67% SiC; 67% Fe, 33% SiC, en color rojo 100% MgSiO_3 ; 33% Fe, 67% MgSiO_3 ; 67% Fe, 33% MgSiO_3 .

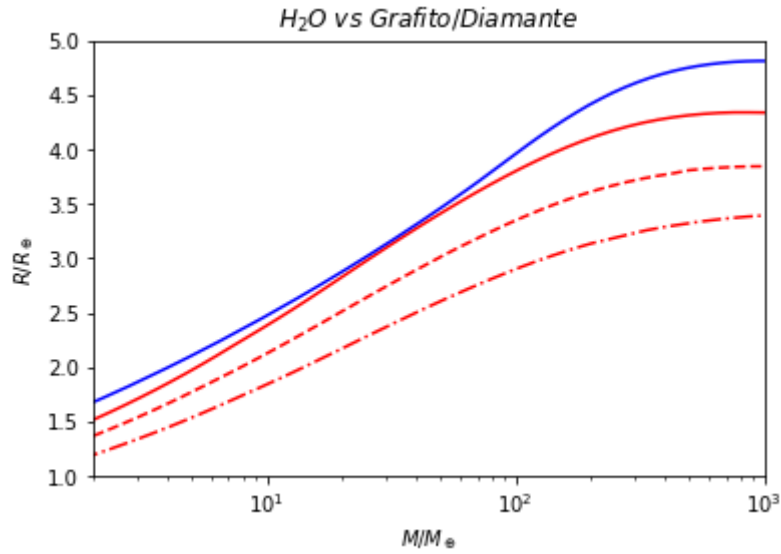


Figura 3.32: Relaciones masa-radio para el $MgSiO_3$ y el *Grafito/Diamante*.

Ordenados en orden descendente, 100% H_2O ; 100% *Grafito*; 33% *Fe*, 67% *Grafito*; 67% *Fe*, 33% *Grafito*

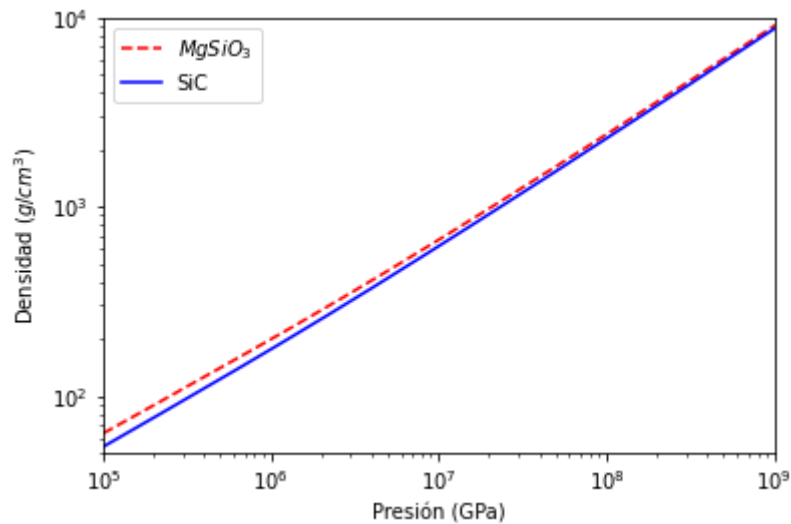


Figura 3.33: Comparación de los perfiles de densidad de $MgSiO_3$ y SiC .

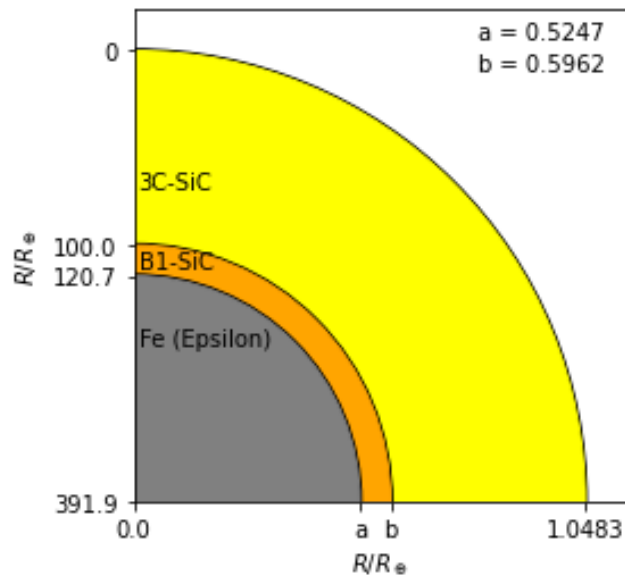


Figura 3.34: Estructura interna de un planeta de carbono (SiC) con una masa como de la Tierra y un núcleo de hierro como el de la Tierra.

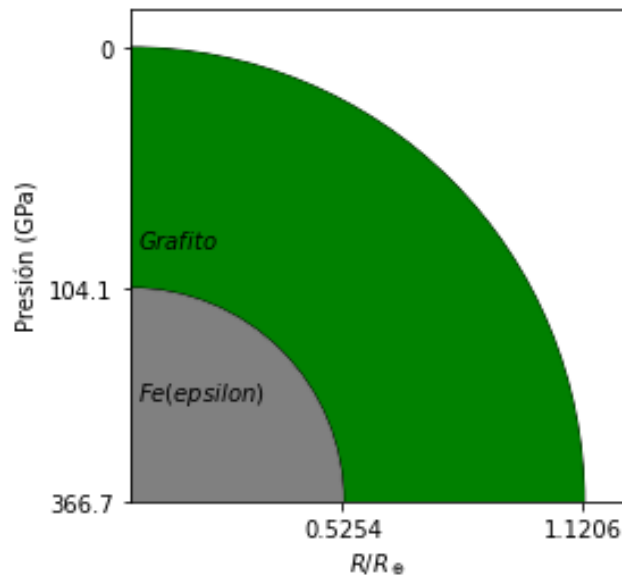


Figura 3.35: Estructura interna de un planeta de carbono (*Grafito*) con una masa como de la Tierra y un núcleo de hierro como el de la Tierra.

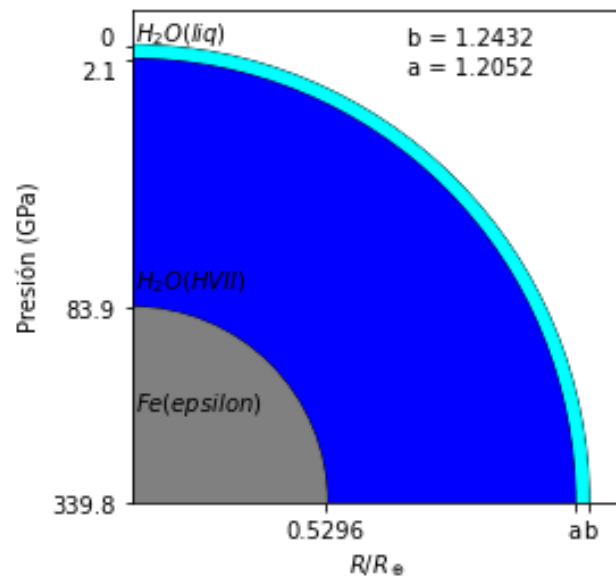


Figura 3.36: Estructura interna de un planeta oceánico con una masa como de la Tierra y un núcleo de hierro como el de la Tierra.



4. Modelización de exoplanetas

Tras haber analizado los diferentes tipos de planetas con los que poder catalogar a los objetos planetarios, ponemos a prueba nuestra estrategia de modelización de la composición de la estructura interna de los mismos aplicándola en una selección de exoplanetas con diferentes masas y radios. Los valores de las masas y radios de estos exoplanetas se mostrarán en tablas a lo largo de esta sección. Además, las incertidumbres en los valores de las masas y los radios nos permitirán explorar y discutir distintas alternativas en las composiciones químicas de estos exoplanetas.

4.1. Sistema Trappist-1

La estrella Trappist-1 alberga un sistema planetario único formado por siete planetas [31]. Como se muestra en la Figura 4.1, todos estos exoplanetas pueden ser considerados como planetas de silicatos o planetas oceánicos debido a su localización en el diagrama de las relaciones masa-radio. Los exoplanetas Trappist-1 c y e son los únicos que podrían ser considerados como planetas de silicatos, debido a que en el diagrama de la Figura 4.1 son los únicos planetas que se encuentran debajo de la curva de la composición formada completamente por MgSiO_3 , aunque es posible la presencia de una importante capa externa formada por agua líquida. Los demás planetas se encuentran por encima de la curva de MgSiO_3 , de modo que podrían ser considerados planetas oceánicos.

4.2. HD 149026 b

Localizado a unos 250 años luz de La Tierra, el exoplaneta HD 149026 b posee una masa de 114 veces la masa de La Tierra con una incertidumbre de $9,5 M_{\oplus}$ y con un radio de aproximadamente 8 veces el radio de La Tierra siendo la incertidumbre en este valor de $0,33 R_{\oplus}$ [32]. Este exoplaneta puede ser considerado como un planeta gaseoso y los valores

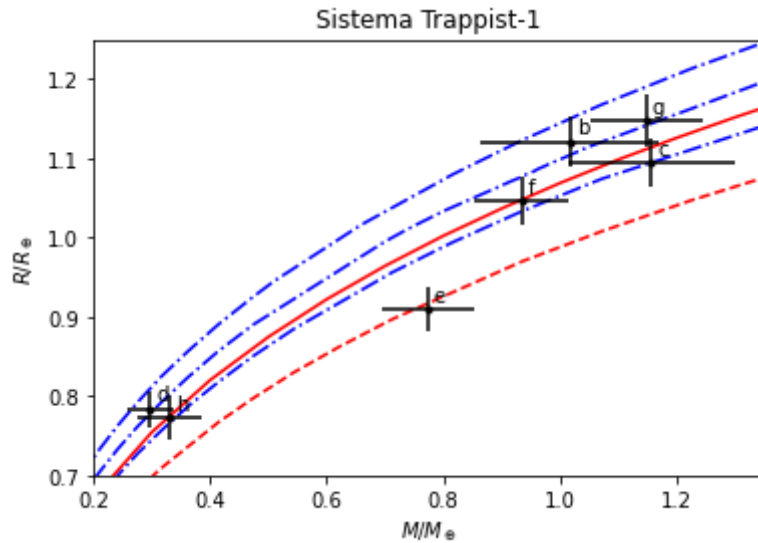


Figura 4.1: Relaciones radio-masa para el sistema Trappist-1.

Ordenados en orden ascendente las composiciones de un núcleo 33% Fe y 67% MgSiO₃, con un océano de agua de, 10%, 20%, 30% la masa total. También se muestran las composiciones completas de MgSiO₃ y agua en color rojo

Planeta	Masa [M_{\oplus}]	Radio [R_{\oplus}]
Trappist-1 b	$1,017 \pm 0,153$	$1,121 \pm 0,032$
Trappist-1 c	$1,156 \pm 0,142$	$1,095 \pm 0,031$
Trappist-1 d	$0,297 \pm 0,039$	$0,784 \pm 0,023$
Trappist-1 e	$0,772 \pm 0,079$	$0,91 \pm 0,027$
Trappist-1 f	$0,934 \pm 0,08$	$1,046 \pm 0,03$
Trappist-1 g	$1,148 \pm 0,095$	$1,148 \pm 0,033$
Trappist-1 h	$0,331 \pm 0,056$	$0,773 \pm 0,027$

Tabla 4.1: Valores de las masas y radios de los exoplanetas del sistema Trappist-1.

de su masa y radio hacen que el exoplaneta se localice en la región de los planetas gaseosos (Figura 4.2). Mediante esta figura podemos ver que este exoplaneta tiene una composición parecida a la de Saturno, aunque con una abundancia mayor de helio.

4.3. Gliese 436-b

El exoplaneta Gliese 436-b (también llamado GJ 436-b) posee una masa $22,2 \pm 1,0 M_{\oplus}$, y un radio $4,327 \pm 0,183 R_{\oplus}$ [33]. Con estos parámetros y tal como se muestra en la Figura

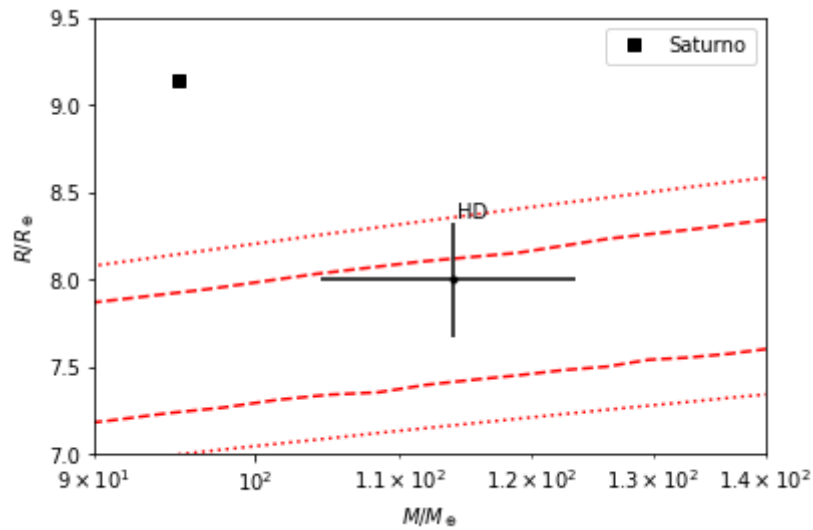


Figura 4.2: Relaciones radio-masa para el planeta HD 149026 b.

Ordenados en orden descendente, 50% He 50% H; 10% Fe, 40,5% He, 49,5% H; 10% Fe, 67,5% He, 23,5% H; 75% He, 25% H.

4.3, este exoplaneta puede ser considerado como un planeta oceánico, más concretamente un gigante helado, como Urano y Neptuno. Mediante las relaciones masa-radio mostradas en la Figura 4.3, se observa que este exoplaneta podría tener efectivamente una composición parecida a la de Urano o a la de Neptuno, aunque su masa sería mayor.

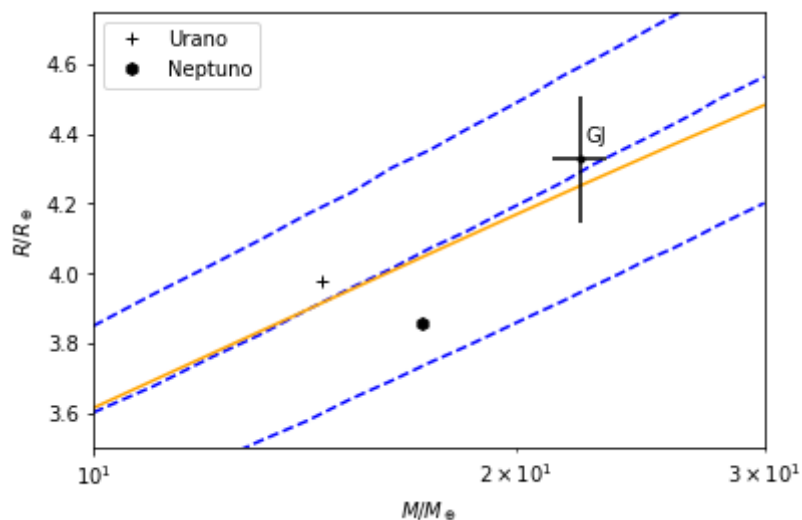


Figura 4.3: Relaciones radio-masa para el planeta Gliese 436-b.

Ordenados de abajo a arriba empezando con las composiciones con un núcleo de hierro de 10% la masa total con mantos de, 75% H₂O, 25% H; 81,25% H₂O, 19,75% H; 87,5% H₂O, 12,5% H. También se muestra la composición de Helio puro.



Planeta	Masa [M_{\oplus}]	Radio [R_{\oplus}]
CoRoT-7 b	$4,8 \pm 0,8$	$1,68 \pm 0,09$
Kepler-9 d	$4,56 \pm 1,29$	$1,416 \pm 0,036$
Kepler-10 b	$5,25 \pm 1,75$	$1,64 \pm 0,19$
55 Cancri e	$8,37 \pm 0,38$	$2,04 \pm 0,15$

Tabla 4.2: Valores de las masas y radios de los exoplanetas 55 Cancri e, CoRoT-7 b, Kepler-9 d y Kepler-10 b

4.4. 55 Cancri e, CoRoT-7 b, Kepler-9 d y Kepler-10 b

Es probable que los planetas CoRoT-7 b, Kepler-9 d, Kepler-10 b y 55 Cancri e sean candidatos para poder ser considerados como planetas ricos en carbono debido a las composiciones de las estrellas que orbitan [34] [35]. Por este motivo, empleando el modelo, calculamos las composiciones de estos planetas aplicando los modelos de un planeta rico en carbono y de silicatos y comparamos ambos modelos, proponiendo un manto constituido por SiC en el caso del modelo de planeta rico en carbono. En la Figura 4.4 se muestra las relaciones entre las masas y los radios para diferentes composiciones. En esta figura se localizan además los cuatro exoplanetas y se exponen el porcentaje de hierro en función del radio para los mismos.

Para el caso de CoRoT-7 b, Como se expone en las Figuras 4.5 y 4.6, siguiendo el modelo de un planeta de silicatos, el planeta no puede tener un núcleo de hierro teniendo que recurrir a la presencia de una capa externa de agua para poder explicar su estructura interna. En cambio, siguiendo el modelo de un planeta rico en carbono, con un manto compuesto por SiC, el planeta puede tener un núcleo de hierro que llegue a representar el 33 % de la masa total, como el caso de La Tierra.

En el caso del planeta Kepler-9 d, los parámetros de la masa y el radio son pocos precisos por lo que las masas de los posibles núcleos son también poco precisas. Como se muestra en las Figuras 4.7 y 4.8, para el modelo de un planeta de silicatos, el núcleo de hierro puede representar desde el 15 % hasta el 58 % de la masa total. Para el modelo de un planeta rico en carbono, el núcleo puede representar desde el 45 % hasta cerca del 73 % de la masa total.

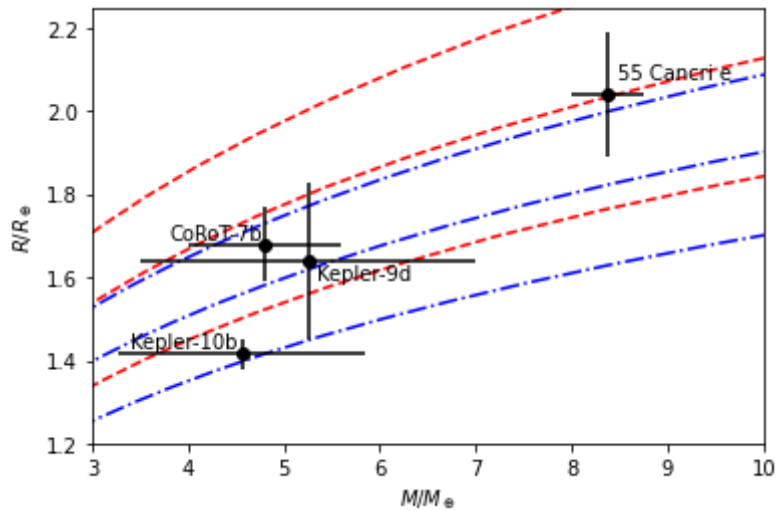


Figura 4.4: Relaciones radio-masa para el sistema Trappist-1.

Ordenados de arriba a abajo empezando por la curva superior, en color azul, 100% $MgSiO_3$; 33% Fe , 67% $MgSiO_3$; 67% Fe , 33% $MgSiO_3$, y en color rojo 100% SiC ; 33% Fe , 67% SiC ; 67% Fe , 33% SiC , y en color rojo, 100% Grafito; 33% Fe , 67% Grafito; 67% Fe , 33% Grafito.

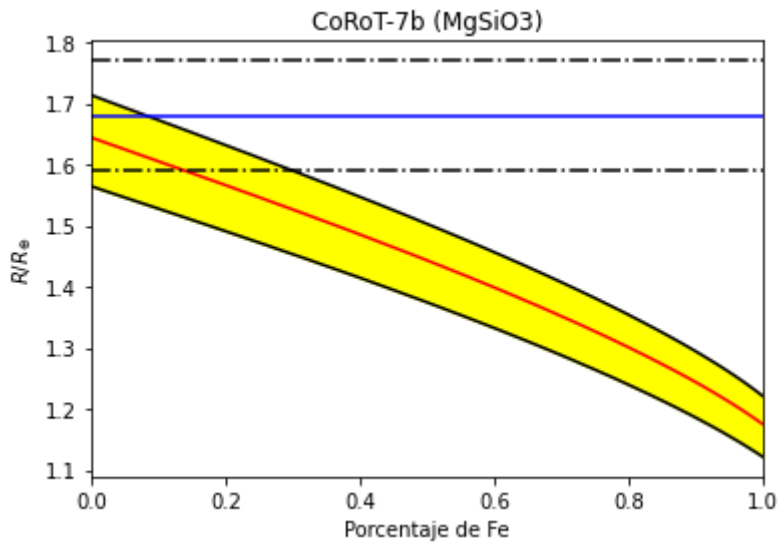


Figura 4.5: Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de $MgSiO_3$.

Para el modelo del planeta de silicatos, el planeta puede llegar a no poseer el núcleo de hierro y poder tener una capa externa de agua.

En el caso de Kepler-10 b, los valores de la masa y el radio presentan menor incertidumbre y podemos determinar con precisión las masas de los núcleos de hierro. Como se muestra en las Figuras 4.9 y 4.10, en el modelo de un planeta de silicatos, el núcleo de hierro puede

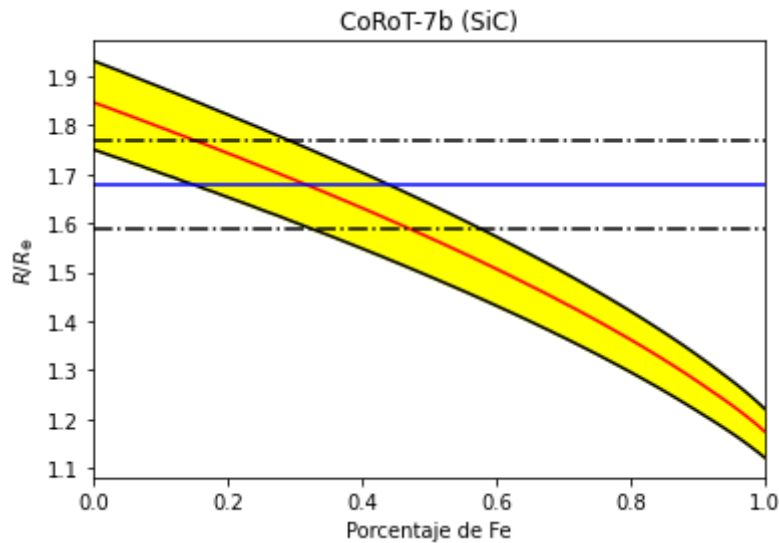


Figura 4.6: Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de SiC.

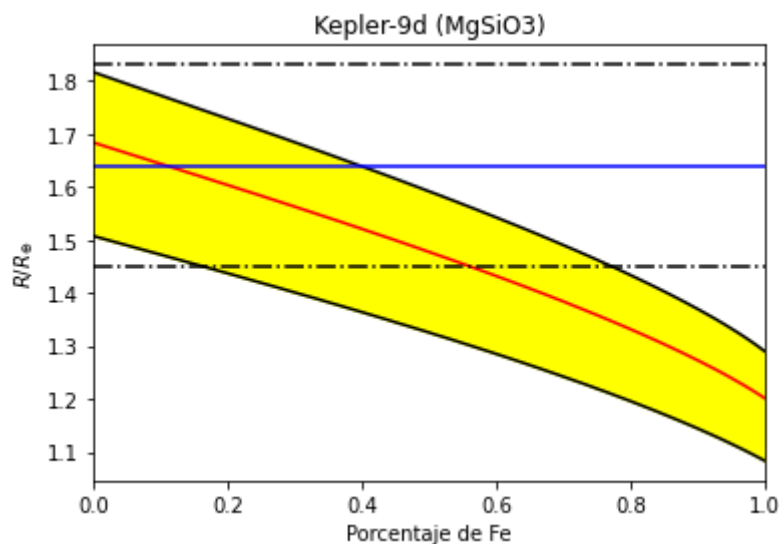


Figura 4.7: Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de MgSiO₃.

llegar a representar el 55 % de la masa total, siendo el 40 % y el 60 % los límites de la masa del núcleo. Para el modelo de un planeta rico en carbono, el núcleo puede llegar a representar el 70 % de la masa del planeta, siendo el 62 % y el 75 % los límites de la masa del núcleo.

Por último, para el planeta 55 Cancri e, en el modelo de un planeta de silicatos el planeta puede llegar a no poseer un núcleo de hierro, teniendo que recurrir a la presencia de una capa externa de agua para explicar su densidad. En cambio, en el modelo de un planeta de carbono con un manto formado por SiC, el planeta puede tener un núcleo que llegue a representar desde el 15 % hasta el 40 % de la masa total (Figuras 4.11 y 4.12), o incluso puede

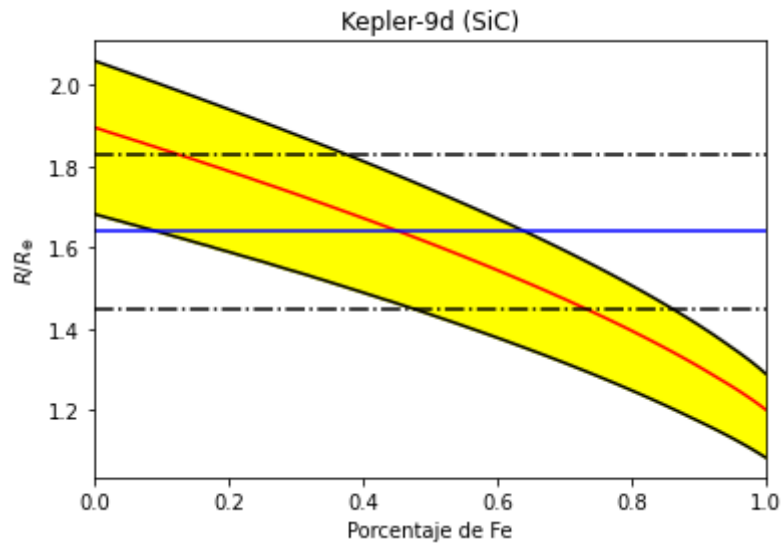


Figura 4.8: Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de SiC.

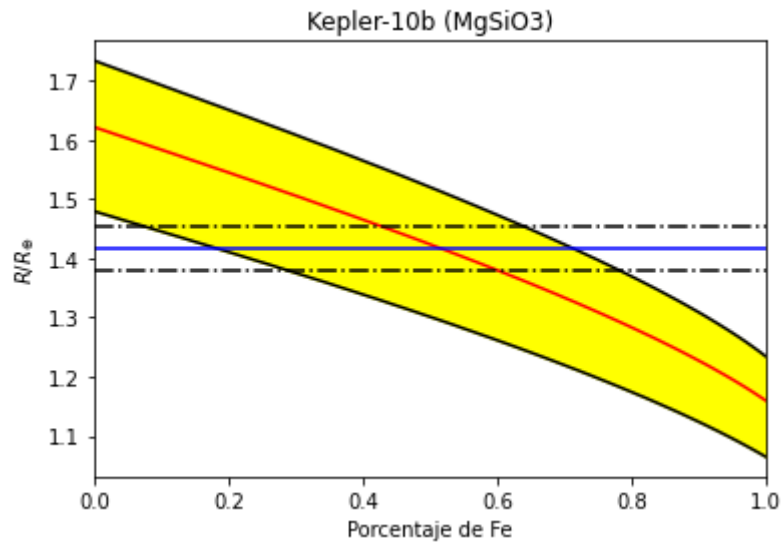


Figura 4.9: Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de MgSiO₃.

no presentar dicho núcleo. Además, 55 Cancri e puede tener un manto formado por grafito y es susceptible también de presentar una capa interna formada por C-diamante (Figura 4.13). Siguiendo este modelo, el planeta puede poseer un núcleo de hierro que llegue a constituir el 33 % de la masa total, como en el caso de La Tierra. 55 Cancri e también puede llegar a tener un núcleo que represente desde el 10 %, como límite inferior, hasta el 55 % de la masa total, como límite superior.

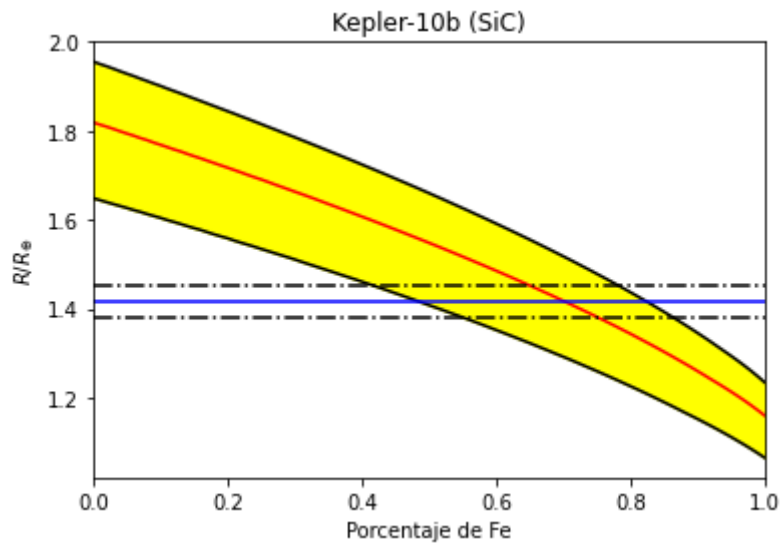


Figura 4.10: Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de SiC

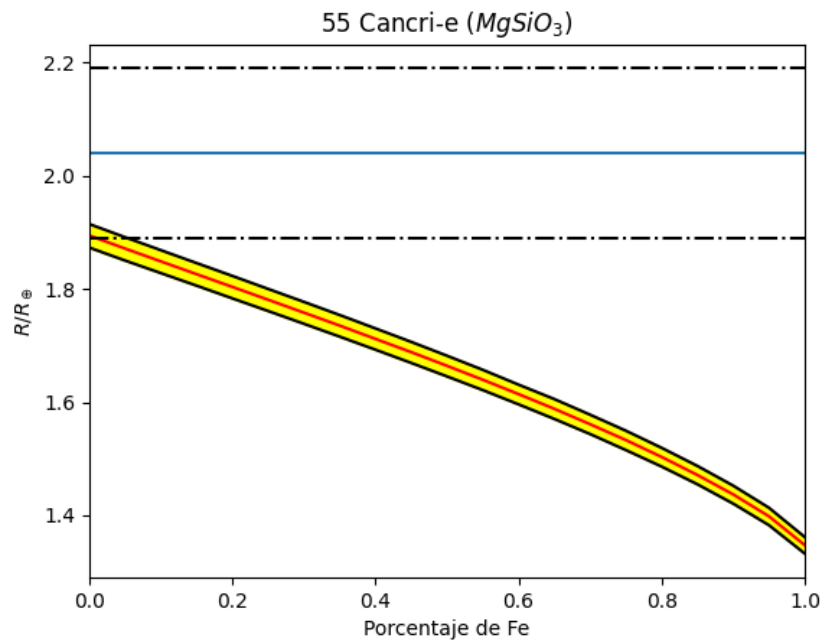


Figura 4.11: Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de $MgSiO_3$.

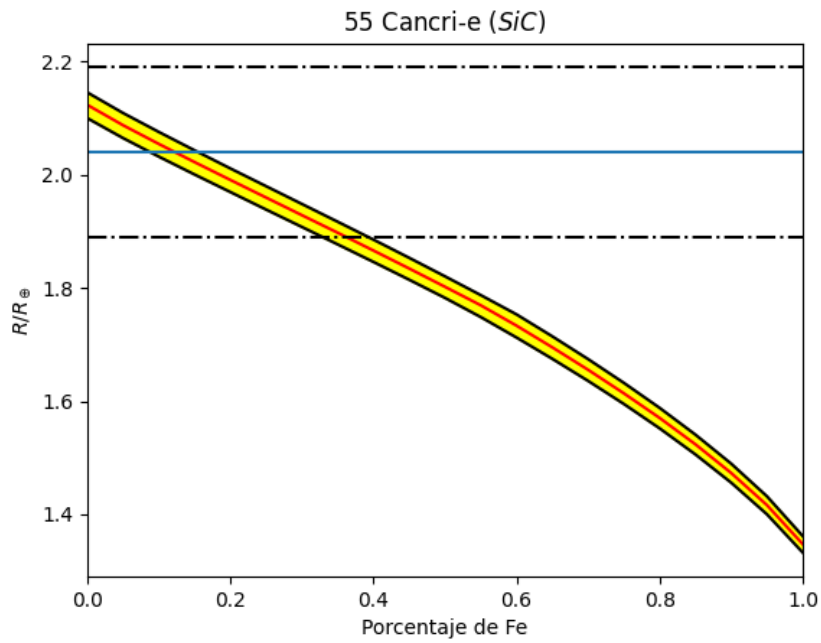


Figura 4.12: Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de SiC.

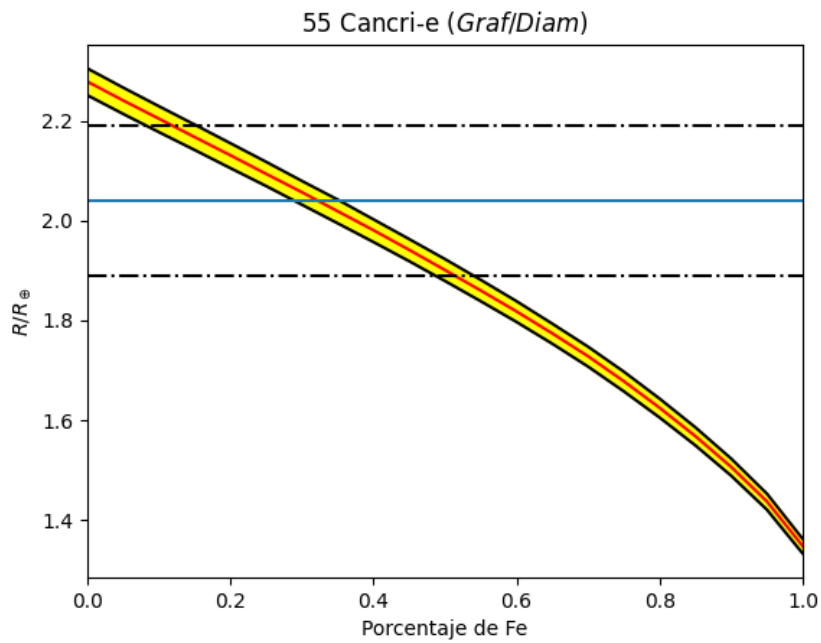


Figura 4.13: Porcentaje de Hierro en función del radio planetario. Modelo de Grafito/Diamante.



5. Resumen y conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la posibilidad de inferir las composiciones y la estructura interna de los exoplanetas (planetas fuera del Sistema Solar) a partir de los pocos datos observables que conocemos acerca de ellos, particular su masa y su radio. Hemos utilizado un modelo de estructura en capas diferenciadas para modelar el perfil de densidad, presión y composición de exoplanetas dada su masa y la abundancia de sus componentes. El primer paso en este trabajo ha sido el de seleccionar los materiales relevantes para el estudio de planetas del Sistema Solar y exoplanetas. Para ello, usamos los componentes utilizados en las teorías de formación planetaria a partir de nebulosas solares: hierro, silicatos, agua, helio e hidrógeno. Además, hemos considerado el caso de planetas ricos en carbono e incluido en nuestra librería de materiales el carbono puro (grafito y diamante) y el carburo de silicio.

Para cada uno de estos materiales hemos seleccionado un conjunto de ecuaciones de estado de la literatura, que relacionan la densidad del material en función de la presión aplicada. Muchos de estos materiales sufren transiciones de fase a altas presiones, y hemos tenido en cuenta las más importantes cambiando la ecuación de estado a las correspondientes presiones de transición. Además, hemos tenido en cuenta que todos los materiales, independientemente de su estructura, tienden al gas de electrones homogéneo a muy alta presión y, por tanto, hemos utilizado su ecuación de estado (el llamado modelo de Thomas-Fermi-Dirac, TFD) como el límite de altas presiones para todos los materiales estudiados.

El perfil de densidad, presión y composición de un planeta es calculado bajo las siguientes aproximaciones: i) el planeta está diferenciado en capas y en equilibrio hidrostático, ii) el efecto de la temperatura sobre la estructura interna del planeta es despreciable comparado con el efecto de la presión y iii) el efecto de la presencia o ausencia y composición de la atmósferas es despreciable. Estas aproximaciones reducen el problema a resolver dos ecuaciones diferenciales que involucran las ecuaciones de estado de los materiales en la composición planetaria escogida. El problema de la resolución numérica de estas ecuaciones diferenciales es ligeramente más complicado por cómo se aplican las condiciones para elegir la solución particular (no es un problema de valor inicial) pero se puede resolver fácilmente



por explorando los distintos valores de la presión inicial del planeta.

Para validar nuestro método hemos estudiado primero las relaciones masa-radio en los planetas y algunos satélites del Sistema Solar, incluida la Tierra. Utilizando las composiciones y abundancias de estos planetas propuestos en la literatura y su masa conocida, hemos calculado el radio de estos objetos celestes y estimado su estructura interna. En general, el acuerdo con las observaciones astronómicas de los radios planetarios así como con nuestro conocimiento de la estructura del interior de la Tierra son excelentes. También se ha observado que los cambios de fase en materiales bajo presión no son demasiado importantes para planetas con masas superiores a la de la Tierra, pero sí lo son para el resto. Por último, se han observado relaciones interesantes entre la masa y el radio del planeta como, por ejemplo, que la curva de radio frente a masa tiene un máximo en torno a 1000 masas de la Tierra (M_{\oplus}), independientemente de la composición del planeta.

Después, hemos aplicado nuestro método a la predicción de las relaciones masa-radio así como la estructura interna de exoplanetas tipo. Dadas una masa y un radio de un exoplaneta, el conocimiento de estas relaciones masa-radio nos permite: i) situarlo en el diagrama y encontrar su composición más probable o al menos el modelo de los que disponemos que más se ajusta a las observaciones y ii) descartar ciertas composiciones planetarias como inviables.

Hemos analizado cuatro modelos de planeta: i) super-Tierras y super-Mercurios, formados principalmente por hierro y silicatos, ii) planetas gaseosos tipo Júpiter y Neptuno, compuestos por gases que, en nuestro modelo, son representados por helio e hidrógeno, iii) planetas oceánicos (hycean), que contienen una cantidad importante de agua en su composición y iv) planetas ricos en carbono, para los cuales consideramos el carbono puro y el carbono de silicio como componentes principales.

Por último, aplicamos las relaciones masa-radio para los modelos de planeta desarrollados a varios exoplanetas particulares como son los del sistema Trappist-1, el HD 149026b y el Gliese 436-b. Además, examinamos planetas que, se cree, pueden ser considerados ricos en carbono como CoRoT-7b, Kepler-9d, Kepler-10d y 55Cancri-e. Demostramos que el méto-



do empleado en combinación con los modelos planetarios desarrollados permiten obtener información acerca de estos planetas a partir de únicamente su radio y su masa observados.



Bibliografía

- [1] “Página web de la nasa.” <https://exoplanets.nasa.gov/>. Accedido en 8-07-2022.
- [2] D. L. Anderson, “The new theory of the earth,” *Cambridge: Cambridge Univ. Press*, 2007.
- [3] K. Lodders, “Solar system abundances and condensation temperatures of the elements,” *The Astrophysical Journal*, vol. 591, pp. 1220–1247, jul 2003.
- [4] S. Seager, M. Kuchner, C. A. Hier-Majumder, and B. Militzer, “Mass-Radius Relationships for Solid Exoplanets,” , vol. 669, pp. 1279–1297, Nov. 2007.
- [5] J. P. Poirier, “Introduction to the physics of the earth’s interior,” *Cambridge: Cambridge Univ. Press*, 2007.
- [6] P. I. Dorogokupets, A. M. Dymshits, K. D. Litasov, and T. S. Sokolova, “Thermodynamics and equations of state of iron to 350 gpa and 6000 k,” *Scientific Reports*, vol. 7, March 2017.
- [7] H. S. Zepolsky and E. E. Salpeter, “The Mass-Radius Relation for Cold Spheres of Low Mass,” *ApJ*, vol. 158, p. 809, Nov. 1969.
- [8] T. J. Ahrens, “Mineral physics and crystallography: A handbook of physical constants,” (*Washington, DC: AG*, 2000.
- [9] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker, “Fundamentals of physics,” *Weinheim: Wiley-VCH*, 2003.
- [10] T. Sakai, H. Dekura, and N. Hirao, “Experimental and theoretical thermal equations of state of MgSiO_3 post-perovskite at multi-megabar pressures,” *Scientific Reports*, vol. 6, March 2016.
- [11] P. Loubeyre, R. LeToullec, J. P. Pinceaux, H. K. Mao, J. Hu, and R. J. Hemley *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, october 1993.



- [12] C. Nisr, Y. Meng, A. A. MacDowell, J. Yan, V. Prakapenka, and S. H. Shim *Geophys. Res. Planets*, vol. 122, pp. 124–133.
- [13] V. F. Petrenko and R. W. Whitworth, “The physics of ice,” *Oxford: Oxford Univ. Press*, 2006.
- [14] J. W. Morgan and E. Anders, “Chemical composition of earth, venus, and mercury,” *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, Dec. 1980.
- [15] R. A. Lyttleton, “On the internal structures of mercury and venus,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 5, pp. 18–35, Feb. 1969.
- [16] A. Rivoldini, T. van Hoolst, O. Verhoeven, A. Mocquet, and V. Dehant., “Geodesy constraints on the interior structure and composition of mars,” *Icarus*, p. 451, March 2011.
- [17] T. Yoshizaki and W. F. McDonough, “The composition of mars,” *Geochimica et Cosmochimica Acta*, vol. 273, pp. 137–162, 2020.
- [18] T. Guillot, “A comparison of the interiors of jupiter and saturn,” *Planetary and Space Science*, vol. 47, pp. 1183–1200, oct 1999.
- [19] T. Guillot, D. Gautier, and W. B. Hubbard, “New constraints on the composition of jupiter from galileo measurements and interior models,” *Icarus*, vol. 130, pp. 534–539, dec 1997.
- [20] M. Podolak, A. Weizman, and M. Marley, “Comparative models of uranus and neptune,” *Planetary and Space Science*, vol. 43, no. 12, pp. 1517–1522, 1995.
- [21] N. Nettelmann, R. Helled, J. Fortney, and R. Redmer, “New indication for a dichotomy in the interior structure of uranus and neptune from the application of modified shape and rotation data,” *Planetary and Space Science*, vol. 77, pp. 143–151, mar 2013.
- [22] R. Canup and E. Asphaug, “Origin of the moon in a giant impact near the end of the earth’s formation,” *Nature*, vol. 412, pp. 708–12, 09 2001.
- [23] V. Kronrod, “Internal structure of europa and callisto,” *Icarus*, vol. 177, pp. 550–569, 10 2005.



- [24] P. Podsiadlowski, Z. Han, and S. Rappaport, “Cataclysmic variables with evolved secondaries and the progenitors of AM CVn stars,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 340, pp. 1214–1228, 04 2003.
- [25] D. Trilling, T. G. W. Benz, J. Lunine, W. B. Hubbard, and A. Burrows, “Orbital evolution and migration of giant planets,” *ApJ*, vol. 500, pp. 428–439, 1998.
- [26] D. N. C. Lin, P. Bodenheimer, and D. C. Richardson, “Orbital migration of the planetary companion of 51 Pegasi to its present location,” , vol. 380, pp. 606–607, Apr. 1996.
- [27] J. W. Larimer, “The effect of co ratio on the condensation of planetary material,” *Geochimica et Cosmochimica Acta*, vol. 39, no. 3, pp. 389–392, 1975.
- [28] A. Wolszczan and D. A. Frail, “A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12,” , vol. 355, pp. 145–147, Jan. 1992.
- [29] K. Lodders, “Jupiter formed with more tar than ice,” *The Astrophysical Journal*, vol. 611, pp. 587–597, aug 2004.
- [30] K. Lodders and J. B. Fegley, “Condensation chemistry of circumstellar grains,” *Asymptotic Giant Branch Stars*, vol. 191, 1991.
- [31] S. L. Grimm, B.-O. Demory, M. Gillon, C. Dorn, E. Agol, A. Burdanov, L. Delrez, M. Sestovic, A. H. M. J. Triaud, M. Turbet, É. Bolmont, A. Caldas, J. de Wit, E. Jehin, J. Leconte, S. N. Raymond, V. V. Grootel, A. J. Burgasser, S. Carey, D. Fabrycky, K. Heng, D. M. Hernandez, J. G. Ingalls, S. Lederer, F. Selsis, and D. Queloz, “The nature of the TRAPPIST-1 exoplanets,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 613, may 2018.
- [32] J. Harrington, S. Luszcz, S. Seager, D. Deming, and L. J. Richardson, “The hottest planet,” *Nature*, jun. 2007.
- [33] D. Deming, J. Harrington, G. Laughlin, S. Seager, S. B. Navarro, W. C. Bowman, and K. Horning, “Spitzer Transit and Secondary Eclipse Photometry of GJ 436b,” , vol. 667, pp. L199–L202, Oct. 2007.



- [34] Y.-X. Gong and J.-L. Zhou, “The silicate and carbon-rich models of CoRoT-7b, kepler-9d and kepler-10b,” *Research in Astronomy and Astrophysics*, vol. 12, pp. 678–692, may 2001.
- [35] N. Madhusudhan, K. K. M. Lee, and O. Mousis, “A POSSIBLE CARBON-RICH INTERIOR IN SUPER-EARTH 55 cancri e,” *The Astrophysical Journal*, vol. 759, p. L40, oct 2012.

