

Grado en Matemáticas

Geometría diferencial en fibrados y aplicaciones a la Física

Raquel Izquierdo García

Trabajo Fin de Grado

Tutor: Daniel de la Fuente Benito

Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Julio de 2022



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

RAÍZ DE DOS

No entre aquí quien no sepa geometría

La palabra es mucho más
que la suma de sus letras: nadie entre,
nadie entre aquí que no,
nadie aquí que no sepa
deletrear lo impronunciable.

Nadie,

nadie entre que no aspire
a fracasar en el logos:

restar y restar y restar y—

Antifairesis infinita,
residuo inconquistable.

Entre aquí quien ya sepa
de la inconmensurabilidad de las cosas
que crecen hacia dentro.

Y cuando crea tener la solución,
atienda a las palabras del oráculo:

«intenta de este modo
duplicar el cubo, trisecar
los ángulos, convertir
en un cuadrado este círculo».

Necesitará entonces nuevas reglas,
fabricar nuevos compases: inventar
un lenguaje nuevo

para construir el mundo,
la nada,

lo imposible.

Quien esté dispuesto a ello, adelante:
ingrese en el reino
de la incompletitud.

María Elena Higuieruelo, *Los días eternos* (2020).

Índice general

Introducción	1
1. Algunos conceptos de geometría diferencial	5
1.1. Variedades diferenciables	6
1.1.1. Primeras definiciones: los objetos y las flechas	6
1.1.2. Derivadas, vectores, espacio tangente	8
1.1.3. Campos y formas diferenciables. Tensores. Nuestros primeros fibrados	11
1.2. Geometría Riemanniana	16
1.3. Distribuciones y teorema de Frobenius	19
2. Grupos de Lie y álgebras de Lie.	22
2.1. Grupos de Lie como variedades diferenciables: objetos y flechas	23
2.1.1. Primeros ejemplos	24
2.2. Construir otros grupos a partir de unos dados. Subgrupos y productos. El teorema de Cartan	24
2.3. Volvemos a los ejemplos. Primer encuentro con <i>grupos de simetría</i> : algunos grupos lineales	27
2.4. Álgebras de Lie	28
2.5. Hay un álgebra de Lie para cada grupo de Lie	29
2.6. La aplicación exponencial	31
2.7. De vuelta a los ejemplos. Álgebras de los grupos de Lie lineales	34
3. Representaciones lineales de grupos de Lie y acciones sobre variedades	38
3.1. Representaciones de grupos y álgebras de Lie	39
3.1.1. Representaciones de grupos de Lie	39
3.1.2. Representaciones ortogonales y unitarias	42
3.1.3. La representación adjunta	43

3.1.4.	Métricas invariantes en grupos de Lie	45
3.1.5.	La forma de Killing	46
3.2.	Acciones de grupos de Lie sobre variedades diferenciables	48
3.2.1.	Campos fundamentales de una acción	51
3.2.2.	La forma de Maurer-Cartan y la diferencial de una acción	53
4.	Fibrados sobre variedades	55
4.1.	Fibrados y fibras	57
4.1.1.	Fibrados vectoriales	61
4.2.	Fibrados principales	61
4.2.1.	Morfismos entre fibrados principales y otro encuentro con lo <i>gauge</i>	63
4.2.2.	Fibrado de las referencias	65
4.3.	Fibrados asociados	66
5.	Conexión y curvatura en fibrados principales	70
5.1.	Conexión	71
5.1.1.	Definición de conexión	71
5.1.2.	Transformaciones gauge matemáticas, transformaciones gauge físicas y su relación	74
5.1.3.	Sobre cómo operan las transformaciones gauge sobre fibrados vectoriales asociados	78
5.2.	Curvatura de una conexión	79
5.2.1.	Definición de curvatura e identidad de Bianchi	79
5.2.2.	Versión local de la curvatura: <i>field strength</i> de un campo gauge	81
5.2.3.	Transporte paralelo y derivada covariante	83
6.	Breve acercamiento a las teorías gauge	89
	Conclusiones	94
	Bibliografía	96

Introducción

La *American Mathematical Society* invita a un/a ponente, del que consideran ha hecho contribuciones relevantes en matemáticas aplicadas, a impartir cada año la *Josiah Willard Gibbs Lectureship*. En 1972, fue el físico teórico Freeman Dyson quien se encargó de dar la *Gibbs Lecture* [1]. Impartió una conferencia titulada *Missed opportunities* en la que, en lugar de destacar las aplicaciones de las matemáticas a la física de aquel momento, dio varios ejemplos de cómo la falta de comunicación entre estas dos disciplinas, física teórica y matemáticas, había ralentizado el avance de ambas durante las últimas décadas. Lo explicó con ejemplos de ramas muy distintas: teoría de números, geometría diferencial, álgebra...

La geometría de fibrados y las teorías gauge podrían ser otro ejemplo más en esta lista: dos lenguajes equivalentes que se desarrollaron simultáneamente durante la primera mitad del siglo pasado. En un artículo de tan solo cinco páginas [2] Yang y Mills desarrollaron, sin saberlo¹, la teoría de fibrados principales y las conexiones sobre ellos para poder explicar una teoría gauge que generalizase el electromagnetismo. Así, llegaron a las ecuaciones de Yang-Mills que presentaremos al final del trabajo utilizando herramientas de teorías de campos². De la formulación precisa de estas teorías surgieron grandes problemas matemáticos y físicos en las últimas décadas del siglo pasado³; muchos siguen aún hoy sin solución.

Uno de esos problemas en los que se lleva trabajando cuarenta años sin mucho éxito se ilustra en

¹En una entrevista [3] Yang afirma que a pesar de lo que se dijo más tarde, en el momento en que desarrollaron la teoría solo pretendían hacer una generalización del electromagnetismo, cuyo significado geométrico aún no se comprendía en la comunidad física –otra *oportunidad perdida* de las que habló de Dyson–.

²La idea es partir de una teoría de campos y estudiar cómo estos cambian bajo una **transformación gauge local**. Demuestran que para que la teoría sea consistente (ellos lo llaman *isotropic gauge invariance*, que se terminaría convirtiendo en el isospin) los campos gauge deben transformarse de la forma en que lo hacen las conexiones sobre fibrados principales. Además, construyen el *field strength*, que será la curvatura de la conexión y proponen la acción de Yang-Mills por analogía al caso electromagnético y de ahí derivan –utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange– las ecuaciones de Yang-Mills. El objetivo de este trabajo es que toda esta construcción quede clara y se entienda como la más natural posible una vez propuesto el concepto de fibrado principal.

³Por ejemplo, dos casos que llevaron a medallas Fields: la conjetura de Calabi [4] en geometría diferencial y su relación con las teorías supersimétricas o el uso de teorías topológicas cuánticas de campos (TQFTs) para calcular invariantes de nudos (en concreto, en el famoso [5], Witten estudiaba la teoría de Chern-Simons 3 dimensional, que se corresponde con la parte topológica de una teoría de Yang-Mills).

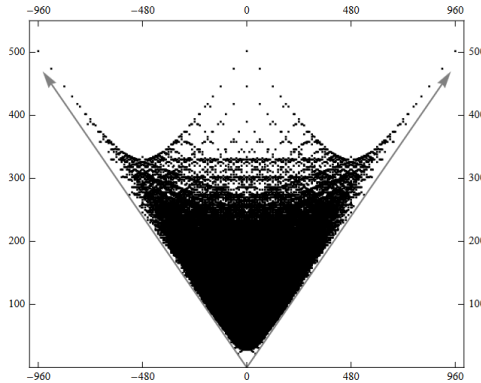


Figura 1: Representación de los números de Hodge ⁵ de la «lista de Kreuzer y Skarke» ⁶. Se representa $2(h^{11} - h^{21})$ en el eje de las x y $h^{11} + h^{21}$ en el eje de las y . Figura 1 de [6].

la figura 1. Ciertos invariantes de una cantidad ingente de variedades resultan seguir una estructura muy simétrica, y no se entiende por qué razón es así. Este hecho se conoce como *mirror symmetry* y es un problema en el que se investiga tanto en matemáticas –por ser muy importante en geometría algebraica– como en física teórica. Lo que se conjetura es que las variedades «espejo» son en cierta forma equivalentes. En teoría de cuerdas esto se traduce en que la teoría resultante de poner una u otra variedad como geometría de las dimensiones extra⁴ del espaciotiempo, termina por ser la misma. En este trabajo no pretendemos explicar este problema y ni siquiera llegaremos a definir los conceptos que hacen falta para poder enunciarlo con rigor. Sin embargo, sí llegaremos a las ecuaciones de Yang-Mills y a explicar que el conjunto de todas sus soluciones tiene una estructura, que se llama espacio de *moduli* de Yang-Mills. Estructura que se cree tiene mucha relación con la *mirror symmetry* a través de unas relaciones de espacios de *moduli* sobre los que se trabaja ahora mismo tanto en geometría algebraica como en teoría de cuerdas, en física teórica.

Este fenómeno –la asincronía en el enfrentarse la comunidad de la física o las matemáticas a los mismos problemas y el no comunicarse– lo ilustra Dijkstra en una viñeta (figura 2) que sirvió como portada de la recopilación *Quantum Fields and Strings: a Course for Mathematicians* [7], un curso para estudiantes de matemáticas organizado en Princeton en 1996-1997. El profesorado estaba formado por algunas de las figuras más relevantes de la física teórica y las matemáticas del momento. El objetivo era

⁴Se sabe que para que las teorías de cuerdas sean consistentes se necesitan añadir dimensiones extra a las cuatro del espaciotiempo «ordinario». Las dimensiones extra se suponen compactas y muy pequeñas –si no ya se habrían tenido que detectar–. En el caso de las teorías supersimétricas se necesitan 10 dimensiones, que se consiguen mediante variedades de Calabi-Yau 3 dimensionales (complejas). La razón por la que estas aparecen es muy interesante desde el punto de vista geométrico: las variedades Kahler resultan ser el escenario perfecto para desarrollar la supersimetría.

⁵Unos invariantes de variedades complejas proyectivas que son muy importantes en geometría algebraica. Son la dimensión de los espacios de la descomposición de la cohomología de una variedad Kahler (teorema de Hodge).

⁶Todos los polihedros 4 dimensionales reflexivos, estudiados computacionalmente, a los que les corresponde una familia de variedades de Calabi-Yau.

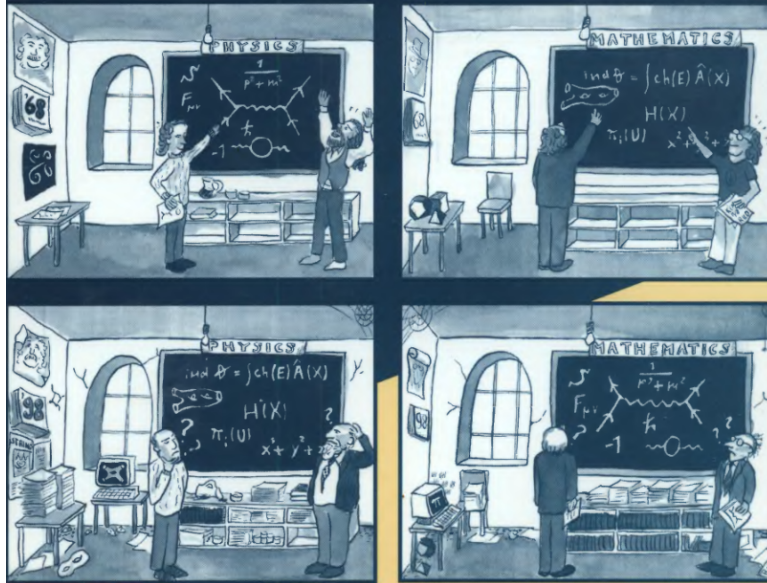


Figura 2: Viñeta de la portada de [7].

propiciar la conversación y el entendimiento entre estas disciplinas, consiguiendo por ejemplo que los/las matemáticos/as entendieran las intuiciones físicas que habían llevado a algunas de estas propuestas tan fascinantes que habían revolucionado el álgebra y la geometría. Esta idea de colaboración debería seguir hoy más vigente que nunca⁷, pues como ya hemos dicho, no se han resuelto gran parte de los problemas propuestos en aquellos años.

Hemos dado solo algunas de las muchas razones por las que merece la pena estudiar geometría de fibrados tanto en física como en matemáticas y, especialmente, por qué estudiarla teniendo en cuenta la relación que hay entre ambas «interpretaciones», ambos lados del diccionario, que no son más que las dos caras de una misma moneda, para poder aspirar a formular mejores preguntas y a resolver problemas interesantes en ambas disciplinas. Seguramente se pueda afirmar que para comprender siquiera la mayor parte de los ejemplos que hemos ido dando, es necesario familiarizarse antes con la teoría de fibrados, pues está en los fundamentos de mucha geometría posterior. Podemos ilustrarlo de nuevo con una analogía física, históricamente no excesivamente precisa: el mayor hallazgo de la relatividad general es explicar cómo la gravedad viene codificada en la geometría. Cuando Einstein la propuso, ya se conocían la teoría moderna del electromagnetismo a través de las leyes de Maxwell, por lo que de forma natural se intentó unificar estas dos fuerzas buscándole una interpretación geométrica a esta última⁸. El planteamiento de la teoría de fibrados pasa por entender que ese campo electromagnético

⁷Cada año se organizan congresos alrededor de estas ideas: juntar a físicos/as y matemáticos/as para que puedan construir un lenguaje común con el que avanzar en ambos campos.

⁸Esto se continúa intentando, por supuesto: entender ahora de qué forma la cuántica juega un papel en la estructura microscópica del espaciotiempo, comprender la *gravedad cuántica*.

no es un campo «usual» sino que apunta a un espacio más grande que el espaciotiempo. En física este es el «espacio interno» y de aquí en adelante esta será precisamente la idea de fibrado: sobre una variedad base –el espaciotiempo– se coloca un fibrado al que exigiremos que se comporte «bien». Lo intuitivo, por supuesto, es imaginarse un espacio que sea el producto cartesiano entre el espaciotiempo y eso a lo que hemos llamado espacio interno. Este ejemplo es un fibrado⁹, pero no tiene el verdadero sabor a fibrado, que va a estar *retorcido* en un sentido que precisaremos más adelante. Quizá, lo más bello de esta historia es que no se trata de un artefacto matemático para formular estas teorías físicas de forma más compacta o elegante, sino que al final del día termina siendo la forma más natural de formular fenómenos que vemos en la naturaleza. El objetivo del trabajo es mostrar por qué razón esto es lo más natural que se podría hacer y de qué forma entran en juego distintas partes de las matemáticas para realizar esta construcción.

Para poder estudiar teoría de fibrados principales sobre variedades diferenciables hay que conocer algunas definiciones y resultados básicos sobre variedades diferenciables, grupos de Lie y acciones de grupos de Lie sobre variedades. En la primera parte del trabajo dedicamos un capítulo a cada una de estas cuestiones, intentando cubrir todos los contenidos comprendidos entre la asignatura de *Geometría de curvas y superficies* y el punto de partida necesario para construir los fibrados principales, que serán el objeto principal de estudio del trabajo.

En el resto del trabajo nos encargamos del estudio de los fibrados principales sobre variedades diferenciables, utilizando las herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores. En el capítulo 4 definimos el concepto de fibrado y lo ilustramos con el ejemplo del fibrado tangente. Nos centramos después en el caso del fibrado principal asociado a la acción de un grupo de Lie sobre una variedad. También definimos fibrados asociados, prestando especial atención al caso vectorial, cuyas secciones serán los campos de materia de las teorías gauge. Ilustramos todos estos conceptos con el ejemplo del fibrado de las referencias, que nos permite además entender gran parte de la geometría diferencial que vimos en 1 desde otra óptica distinta. El capítulo 5 trata sobre los conceptos de conexión y curvatura asociados a un fibrado principal. Con el material de estos dos capítulos, en los que también se estudia lo que significa en matemáticas lo *gauge*¹⁰, ya tenemos las herramientas suficientes como para construir teorías gauge como el modelo estándar. En el capítulo 6 estudiamos brevemente la teoría de Yang-Mills, que es el ejemplo paradigmático de teoría gauge.

⁹El fibrado trivial.

¹⁰En particular, las transformaciones gauge como automorfismos de fibrados principales, lo que le da sentido –si se piensa desde la óptica de teoría de categorías– plantearse la pregunta de cómo es algo salvo por transformaciones gauge, es decir, módulo los automorfismos de la categoría, de forma análoga a cuando pretendemos clasificar los espacios topológicos módulo homeomorfismo.

Capítulo 1

Algunos conceptos de geometría diferencial

La geometría diferencial se encarga de generalizar el estudio de curvas y superficies, que se desarrolló mayoritariamente durante los siglos XVIII y XIX, al de otros objetos más generales, a los que solo se les pide ser *localmente* un espacio euclídeo. Del estudio de lo primero trataba la asignatura *Geometría de curvas y superficies* del grado en matemáticas. Por eso, el objetivo de este capítulo es introducir todo el lenguaje matemático necesario para desarrollar la teoría de fibrados y algunas de sus aplicaciones, partiendo desde la intuición y los conceptos que sí conocemos para superficies. Por su extensión y dado que esta no es la parte principal del trabajo sino la presentación de distintas herramientas que vamos a ir utilizando, no se va a hacer la mayor parte de demostraciones de los resultados que se enuncien, aunque sí se intentará dar justificaciones constructivas en todo lo posible.

El capítulo se estructurará en tres partes. En la primera parte desarrollaremos el «diccionario» básico en el mundo de las variedades: definiremos variedad diferenciable así como los morfismos entre ellas y prestaremos especial atención al concepto de vector y espacio tangente. Se definen el fibrado tangente y cotangente –sin ahondar en su naturaleza de fibrados– y los campos de vectores y de formas. Para ello he seguido mayoritariamente el planteamiento de [8] utilizando también otras referencias como [9], [10], [11],[12] y [13]. La segunda parte es una revisión rápida de los conceptos claves de variedades (pseudo)riemannianas: un tipo especial de variedades a las que se les puede dotar de una métrica. Lo más importante será la definición de conexión, transporte paralelo y derivada covariante, pues nos aparecerán más adelante sus análogos en fibrados principales. Para esta sección hemos utilizado el capítulo 10 de [12]. Por último, hacemos una revisión rápida del teorema de Frobenius así como del concepto de integrabilidad de distribuciones en variedades diferenciables. Por ser este concepto

algo directamente relacionado con los fibrados, hemos tratado de dar una motivación intuitiva pero también formal, de manera que cuando el concepto de fibrado y sección de un fibrado se introduzcan en el capítulo 4, todas las definiciones cobren sentido. Para esto hemos seguido el capítulo 8 de [14].

1.1. Variedades diferenciables

1.1.1. Primeras definiciones: los objetos y las flechas

Una variedad diferenciable es un «espacio» que *localmente* se «parece» a \mathbb{R}^n (dotado con su estructura topológica y diferencial habitual)¹. Esto se formaliza de la siguiente manera: dado un espacio topológico Hausdorff que satisfaga el segundo axioma de numerabilidad M^2 , diremos que una familia $\mathcal{D} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ es una **estructura diferenciable** sobre M si cumple:

- i. $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de M .
- ii. $\exists n \geq 1 : \forall i \in I, \phi_i$ es un homeomorfismo de U_i sobre un abierto de \mathbb{R}^n .
- iii. La aplicación $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ es una aplicación de clase C^∞ entre abiertos de \mathbb{R}^n si $i, j \in I$ cumplen $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.
- iv. La familia \mathcal{D} es maximal.

Diremos que $M \equiv (M, \mathcal{D})$ es una **variedad diferenciable** de dimensión n^3 . A cada par $(U, \phi) \in \mathcal{D}$ se le llama **carta** de la variedad y a cada recubrimiento (no necesariamente maximal) $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de M por cartas de \mathcal{D} , **atlas** de M . Definimos las **funciones coordenadas** de la carta (U_i, ϕ_i) como $x_j = p_j \circ \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$, donde $p_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son las proyecciones canónicas. Esto hace que llamemos **cambios de coordenadas** a las aplicaciones de (iii). En caso de que les exijamos ser tan solo de clase C^k diremos que la estructura diferenciable \mathcal{D} es de clase C^k .

Dada una variedad diferenciable M de dimensión n , sobre cualquier subconjunto abierto suyo $U \subseteq M$ se induce una estructura diferenciable que lo convierte también en una variedad n -dimensional. También podremos construir variedades como producto de otras dadas: si M, N son variedades diferenciables de dimensión n, m y $\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_N$ atlas diferenciables sobre M, N respectivamente, podemos

¹O a otro espacio euclídeo. A lo largo del trabajo haremos algún comentario sobre variedades diferenciables complejas, que localmente son \mathbb{C}^n , pues tienen una estructura riquísima y especialmente interesante en física, pero mayoritariamente trataremos el caso real.

²Estas dos condiciones se podrían relajar y utilizar espacios topológicos más generales pero en la práctica los terminaremos exigiendo para asegurar la existencia de particiones de la unidad y todos los casos con los que vamos a trabajar lo cumplen.

³Gracias al teorema de la función inversa y a que los cambios de coordenadas son difeomorfismos entre abiertos de \mathbb{R}^n , la dimensión de una variedad está bien definida –no depende de la carta ni del atlas–.

construir un atlas diferenciable sobre $M \times N$ con la topología producto:

$$\mathcal{A} = \{(U \times V, \psi \times \varphi) \mid (U, \psi) \in \mathcal{A}_M, (V, \varphi) \in \mathcal{A}_N\},$$

Como las variedades tienen estructura de espacio topológico ya tenemos heredado el concepto de aplicación continua. Además, nos interesa definir una noción de diferenciabilidad que generalice la del análisis real a nuestras variedades. Una aplicación $F : M \rightarrow N$ entre dos variedades M y N se dice **diferenciable** en $p \in M$ si existen cartas (V, ϕ) de N con $F(p) \in V$ y (U, ψ) de M con $p \in U$ tal que $F(U) \subseteq V$, y la aplicación $\phi \circ F \circ \psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow \phi(V)$ es diferenciable en $\psi(p)$ como aplicación entre abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m . Además, F se dice diferenciable en M si es diferenciable en todo punto. Denotamos al conjunto de aplicaciones diferenciables de M en N como $C^\infty(M, N)$ ⁴.

Como esta definición exige que los cambios de cartas sean de clase C^∞ , nos aseguramos que el «ser diferenciable en $p \in M$ » esté bien definido: no depende de las cartas (V, ϕ) , (U, ψ) . Este es un concepto local: queremos ser capaces de aplicar el cálculo de \mathbb{R}^n a las variedades y para ello vamos a utilizar las funciones coordenadas, es decir, a escoger unas cartas. Ahora bien, una pregunta global que tiene sentido hacernos al igual que hacemos al estudiar cualquier otro tipo de estructura matemática es: ¿cuándo dos variedades nos resultaran equivalentes? La respuesta siempre es la misma, cuando exista una aplicación entre ellas que conserve la estructura que nos interese: en álgebra lineal son los isomorfismos lineales, en topología los homeomorfismos y en geometría diferencial serán los difeomorfismos⁵. Una aplicación biyectiva $F : M \rightarrow N$ entre dos variedades diferenciables M y N se llama **difeomorfismo** si F y F^{-1} son aplicaciones diferenciables. En tal caso, M, N se dicen variedades difeomorfas. Un **difeomorfismo local** es una aplicación diferenciable $F : M \rightarrow N$ tal que $\forall p \in M$, existen entornos abiertos U de p en M y V de $F(p)$ en N tales que $F|_U : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo.

Es fácil demostrar que la identidad, las funciones constantes y la composición de aplicaciones diferenciables son a su vez diferenciables. Por otra parte, el problema de clasificación, aún no resuelto en general⁶, que tiene sentido hacerse entonces es: dada una variedad M , ¿cuántas estructuras diferenciables no difeomorfas podemos construir sobre ella?

⁴Simplificamos $C^\infty(M, \mathbb{R}) \equiv C^\infty(M)$.

⁵Es decir, los isomorfismos de la categoría correspondiente.

⁶Por ejemplo, para el caso de \mathbb{S}^4 .

1.1.2. Derivadas, vectores, espacio tangente

Para definir el concepto de diferencial de una función en \mathbb{R}^n utilizamos su estructura de espacio vectorial. Nuestras variedades diferenciables **no** tienen estructura de espacio vectorial⁷ así que para entender cómo se formalizan las nociones de derivada o recta tangente a una función vamos a tener que introducir un concepto vital en la geometría diferencial: el espacio tangente.

Dada una variedad M y un punto p suyo, denotamos por $C^\infty(p)$ al anillo de los **gérmenes de funciones diferenciables alrededor de p** . Se trata del cociente de las funciones diferenciables definidas en algún entorno de p dado por la relación de equivalencia que identifica a las funciones que coincidan en algún entorno de p ⁸. Entonces, decimos que un operador $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ es un **vector tangente a M en p** si actúa como una derivación lineal sobre $C^\infty(p)$: es lineal – $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$ – y cumple la regla del producto – $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ – $\forall f, g \in C^\infty(p), \forall a, b \in \mathbb{R}$.⁹

Otra definición de vector tangente a una variedad en un punto, generalización de la que estudiamos en la asignatura *Geometría de curvas y superficies*, es la que viene de utilizar las curvas diferenciables que pasan por un punto¹⁰. Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva diferenciable con $t_0 \in I$ tal que $\alpha(t_0) = p$. Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha'(t_0) : C^\infty(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \alpha'(t_0)(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} (f \circ \alpha)(t), \end{aligned}$$

es un vector tangente a M en p : el vector tangente o *velocidad* de α en t_0 .

Ambas definiciones son equivalentes¹¹ así que podemos denotar por T_pM al conjunto de vectores tangentes a M en p . Dados $u, v \in T_pM$, $f \in C^\infty(p)$ y $a \in \mathbb{R}$ basta con definir $(u + v)(f) = u(f) + v(f)$ y $(av)(f) = av(f)$ para tener una estructura de espacio vectorial real al que llamaremos **espacio tangente a M en p** .

La dimensión del espacio tangente a una variedad diferenciable M siempre va a ser la dimensión de esa variedad¹². Aunque esto es algo intuitivo, pues precisamente una variedad diferenciable es algo que localmente se parece a \mathbb{R}^n con ese n constante, vamos a probarlo construyendo una base de T_pM :

⁷De hecho, como un espacio vectorial sobre un cuerpo viene totalmente determinado por su dimensión, la única variedad real de dimensión n que es a su vez un espacio vectorial es \mathbb{R}^n .

⁸Es claro que $C^\infty(M) \subseteq C^\infty(p)$

⁹Se puede demostrar que la misma formulación con funciones de $C^\infty(M)$ en lugar de con gérmenes de funciones es equivalente. Intuitivamente se entiende que, dado v un vector tangente a p con la definición anterior, si $f, g \in C^\infty(M)$ coinciden en algún entorno de p se tendrá que $v(f) = v(g)$.

¹⁰Aplicaciones $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ diferenciables.

¹¹Se puede probar que cada vector tangente a M en p es la velocidad de una curva diferenciable que pasa por p y que la aplicación $\alpha'(t_0)$ es de hecho una derivación sobre $C^\infty(p)$.

¹²Entonces, $T_pM \cong \mathbb{R}^n$: a cada vector de \mathbb{R}^n le podemos asociar una derivación que actúe sobre $C^\infty(M)$.

dada una carta $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ cuya definimos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)},$$

donde r_1, \dots, r_n son las coordenadas canónicas de \mathbb{R}^n . Puede demostrarse que $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{i=1}^n$ es una base de $T_p M$, por lo que dado un vector $v \in T_p M$ se tendrá que $v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$.¹³

El caso de \mathbb{R}^n es especial pues, como vamos a motivar ahora, el espacio tangente en cada punto puede ser identificado con él mismo, de manera que se establece una «conexión» trivial entre todos los espacios tangentes que nos permite comparar vectores en distintos puntos, hablar de campos de vectores constantes o derivarlos con facilidad. La aplicación

$$\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p \mathbb{R}^n$$

$$v \longmapsto [\lambda(v)](f) = \frac{d}{dt} \Big|_0 f(p + tv) \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Igualmente, también se puede pensar que cada vector v tangente a \mathbb{R}^n en $p \in \mathbb{R}^n$ (visto como derivación) se identifica con su lista de coordenadas respecto a la base de $T_p \mathbb{R}^n$ asociada a la carta $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ utilizando precisamente el inverso del isomorfismo anterior $\lambda^{-1}(v) = (v(x_1), \dots, v(x_n))$.

Ahora ya estamos en condiciones de generalizar el concepto de diferencial de una función del análisis de \mathbb{R}^n . Dada una función diferenciable entre dos variedades $F \in C^\infty(M, N)$ y $p \in M$, se define la **diferencial de F en p** como

$$dF_p \equiv F_{*p} : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$$

$$v \longmapsto [dF_p(v)](f) := v(f \circ F), \quad \forall f \in C^\infty(F(p)).$$

Es claro que dF_p es una aplicación lineal y $dF_p(v) \in T_{F(p)} N$. Si pensamos en $v \in T_p M$ como vector tangente a una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ se puede demostrar que $dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(0)$. Además, se cumple la *regla de la cadena*, como pasa en el cálculo real: dadas $F \in C^\infty(M, N)$

¹³También se puede denotar, y así se hace siempre en física, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \partial_i^p$ y de tal forma que mediante notación de Einstein $v = v^i \partial_i^p$. Aunque habitualmente utilizamos campos vectoriales – y pensamos en bases locales, dándonos un poco igual escribir la dependencia en p explícitamente pues se sobreentiende – en lugar de vectores tangentes a la variedad en un punto.

y $G \in C^\infty(N, P)$ tenemos que $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$, $\forall p \in M$. Por otra parte, si F es un difeomorfismo tendremos que dF_p será un isomorfismo y $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$ $\forall p \in M$.

Una fórmula que utilizaremos con frecuencia siempre que trabajemos en coordenadas será

$$dF_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y_i \circ F)}{\partial x_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{F(p)} \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

donde $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$, $(V, \phi = (y_1, \dots, y_m))$ son cartas de M y N alrededor de p y $F(p)$ respectivamente. Es claro que la matriz $M(dF_p, B_1, B_2)$ dada por la ecuación anterior¹⁴ es la matriz jacobiana de $\phi \circ F \circ \psi^{-1}$ en $\psi(p)$.

Ahora podemos enunciar una caracterización de los **difeomorfismos locales** entre variedades M, N , es decir, las aplicaciones que conservan localmente la estructura diferenciable, mediante el teorema de la función inversa. Serán las aplicaciones $F \in C^\infty(M, N)$ tales que $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales $\forall p \in M$. Enunciamos el teorema sin demostrarlo:

Sean M, N dos variedades diferenciables, $F \in C^\infty(M, N)$ y $p \in M$. Entonces, $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales si y sólo si existen abiertos $U \subset M, V \subset N$ con $p \in U$ y $U \subseteq V$ tales que $F|_U : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo. Es decir, si F es un difeomorfismo local.

Es importante destacar el siguiente ejemplo que nos va motivar la definición del dual del espacio tangente: dado $p \in M$, si $f \in C^\infty(M)$, la composición del isomorfismo canónico $\lambda^{-1} : T_{f(p)} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ puede identificarse con df_p para verla como un elemento del espacio dual de $T_p M$: $df_p \in (T_p M)^* \equiv T_p^* M$. Si $Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} df_p &\equiv \lambda^{-1} \circ df_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto df_p(v) = \lambda^{-1}(df_p(v)) = [df_p(v)](Id) = v(Id \circ f) = v(f), \end{aligned}$$

muestra lo deseado. Decimos que $T_p^* M$ es el **espacio cotangente de M en p** . Por tratarse del dual de un espacio vectorial de un espacio de dimensión finita ya sabemos que será (no canónicamente) isomorfo a él. Podemos construir la **base dual** a la que dimos anteriormente de $T_p M$ asociada a una carta $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$: $\{((dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p)\}$ considerando la diferencial de las funciones coordenadas $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ¹⁵.

Como motivamos al principio del capítulo, las variedades diferenciables son una generalización de las superficies regulares que estudiamos en otras asignaturas. Ahora vamos a dar una definición de

¹⁴Esta matriz por coordenadas es $(M(dF_p, B_1, B_2))_i^j = \frac{\partial (y_i \circ F)}{\partial x_j}(p)$.

¹⁵Se cumple que $(dx^i)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) = \delta^{ij}$ donde δ^{ij} es la delta de Kronecker.

subvariedad que nos va a permitir recuperar la noción de superficie e hipersuperficie en \mathbb{R}^n .

Dadas dos variedades diferenciables M y N , $p \in M$ y una aplicación $F \in C^\infty(M, N)$, tenemos que: i) si dF_p es inyectiva para cada $p \in M$, de F se dice que es una **inmersión** de M en N , ii) si F es una inmersión de M en N y además, F es inyectiva, entonces a M se la llama **subvariedad** de N y iii) si M es una subvariedad de N y F es un embebimiento topológico¹⁶, se dice que M es una **subvariedad regular** de N .

Un resultado muy importante en \mathbb{R}^3 era el que nos permitía construir superficies de forma implícita como antiimagen de un valor regular de una aplicación diferenciable. Para generalizar esto al caso de las variedades diferenciables necesitamos definir valor regular en este contexto. Dada una aplicación $F \in C^\infty(M, N)$ entre dos variedades diferenciables M, N , decimos que $p \in M$ es un **punto regular** de F si dF_p es sobreyectiva; en caso contrario se dirá que es un **punto singular**. Igualmente, un punto $q \in N$ se llama **valor regular** si $F^{-1}(q)$ está formado puntos regulares.

De F se dirá que es una **submersión** de M en N si dF_p es sobreyectiva $\forall p \in M$ ¹⁷. Entonces, se puede demostrar que dada una aplicación diferenciable $F \in C^\infty(M, N)$ entre dos variedades diferenciables M, N de dimensiones m, n respectivamente, $q \in N$ un valor regular de F tal que $F^{-1}(q) \neq \emptyset$. Entonces, $F^{-1}(q)$ es una subvariedad regular de M de dimensión $n - m$.

1.1.3. Campos y formas diferenciables. Tensores. Nuestros primeros fibrados

Dada una variedad diferenciable M , decimos que $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ es su **fibrado tangente**. Representaremos a los elementos de TM como $v \in T_p M$ o (p, v) indistintamente según el contexto¹⁸. Se puede demostrar que TM es una variedad diferenciable $2n$ -dimensional con estructura diferenciable heredada de la de M : dada una carta (U, ϕ) de M se induce sobre TM la carta $(\pi^{-1}(U), \tilde{\phi})$ dada por $\tilde{\phi}(p, v) = (\phi(p), v(x^1), \dots, v(x^n))$.

Vamos a introducir ahora uno de los conceptos que más utilizamos en física: los campos vectoriales o tensoriales. De forma análoga a lo que hicimos con el concepto de vector tangente, presentamos distintas definiciones. En primer lugar, un campo vectorial puede verse como una sección diferenciable del fibrado tangente. Es decir, dada una variedad M , decimos que una aplicación $X : M \rightarrow TM$ es un **campo vectorial** si se cumple $\pi \circ X = Id_M$. Está claro que la base de $T_p M$ que construimos a partir de una carta $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ puede verse, al extenderse a todo $p \in U$, como un conjunto de

¹⁶Homeomorfismo en su imagen. Es decir, $F : M \rightarrow F(M) \subseteq N$ es un homeomorfismo cuando en $F(M)$ se considera la topología de subespacio inducida por N .

¹⁷Hay que darse cuenta de que la idea ahora es la contraria: la dimensión de la variedad de llegada es más pequeña que la de partida y de hecho una aplicación será una submersión si dF_p tiene rango (como homomorfismo entre espacios vectoriales) igual a la dimensión de la variedad de llegada $\forall p \in M$.

¹⁸Denotamos por π a la proyección canónica $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(v) = p, \forall v \in T_p M$.

campos de vectores sobre U al que llamaremos **campos vectoriales coordenados**. De hecho, dado un campo vectorial X sobre M , existirán n funciones $a^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tales que

$$X|_U = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ }^{19}.$$

El campo vectorial X se dice **diferenciable** si $X \in C^\infty(M, TM)$. Una condición equivalente es que exista un atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha))\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ en M tal que las funciones $a_i^\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ anteriores asociadas a $(U_\alpha, \psi_\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha))$ sean diferenciables para todo $i = 1, \dots, n$ y todo $\alpha \in \mathcal{A}$ ²⁰. Al conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre M lo denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$. Es fácil probar que $\mathfrak{X}(M)$ tiene estructura de espacio vectorial (real) y de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$: dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $a \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(M)$ se tiene que $X + Y, aX, fX \in \mathfrak{X}(M)$.

Igual que entendimos los vectores tangentes a una variedad en un punto como las derivaciones lineales sobre funciones definidas en un entorno de ese punto vamos a entender los campos vectoriales como derivaciones de funciones definidas sobre la variedad²¹. Dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ podemos definir una aplicación $F_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ como $[F_X(f)](p) = X_p(f)$ de manera que F_X actúa como una derivación lineal sobre $C^\infty(M)$. Igualmente, dada una derivación $F : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ podemos definir un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ como $X_p(f) = [F(f)](p)$. De hecho, de aquí en adelante identificaremos indistintamente X y F_X .

Además, se puede dotar a $\mathfrak{X}(M)$ de una estructura de *álgebra de Lie* al considerar el corchete de Lie de dos campos. Las álgebras de Lie nos aparecerán en el siguiente capítulo y serán muy importantes. Damos ahora la definición y el caso concreto de los campos vectoriales. Un **álgebra de Lie**²² es un espacio vectorial V junto a una aplicación $[\ , \] : V \times V \rightarrow V$ bilineal, antisimétrica que cumple la *identidad de Jacobi*: $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad \forall u, v, w \in V$ ²³ a la que llamamos **corchete de Lie**. Así, el corchete de Lie $[\ , \] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ de dos campos vectoriales se define como $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$, $\forall f \in C^\infty(M)$.

Dado un difeomorfismo entre dos variedades diferenciables $f : M \rightarrow N$ podremos definir $f_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ de forma que $(f_*X)_{f(p)} := df_p(X_p) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall p \in M$, el *push forward* del campo X por la aplicación f ²⁴. Entonces, se cumple que:

¹⁹De hecho, cuando damos los campos vectoriales en \mathbb{R}^n como una colección de funciones lo que estamos dando son estas coordenadas a_i .

²⁰Se puede demostrar que esta definición no depende del atlas.

²¹Se puede demostrar que dado $v \in T_p M$ va a existir un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = v$.

²²El ejemplo más sencillo que se nos puede ocurrir es el producto vectorial en \mathbb{R}^3 , que se puede pensar en nuestro lenguaje en términos de corchete de Lie de campos constantes.

²³Merece la pena darnos cuenta de que esta es una de las primeras operaciones **no** asociativas con las que trabajamos, la identidad de Jacobi justamente explica de qué precisa forma lo es.

²⁴En realidad puede definirse un concepto más general: el de campos f -relacionados. Es necesario exigir que f sea un

1. $(f_*X)(h) = X(h \circ f)f^{-1}, \forall h \in C^\infty(N)$.
2. $f_*(aX + bY) = af_*X + bf_*Y, \quad f_*(fX) = (g \circ f^{-1})f_*X, \forall a, b \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathfrak{X}(M), g \in C^\infty(M)$.
3. $[f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
4. Si $g : M \rightarrow N, f : N \rightarrow L$ son difeomorfismos, entonces $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Además, $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}, (1_M)_* = (1_{\mathfrak{X}(M)})^*$.

Se puede demostrar que, dado un conjunto de difeomorfismos Γ de M en M , el conjunto de campos vectoriales invariantes: $A_\Gamma(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \phi_*X = X \quad \forall \phi \in \Gamma\}$, es un subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ ²⁵

Algo muy importante en física cuando queremos formular geoméricamente la mecánica clásica o en el estudio de sistemas dinámicos es el concepto de flujo asociado a un campo vectorial. Merece la pena entonces pararse a explicar este concepto: dado un campo vectorial sobre una variedad $X \in \mathfrak{X}(M)$ ²⁶, de una curva diferenciable $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ ²⁷ se dice que es una **curva integral de X** si $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)} \quad \forall t \in I$. La condición anterior se traduce, en cada punto, en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que tendrá solución única al imponerle la condición $\alpha(0) = p$. Entonces, a cada campo X le podemos asociar una aplicación, el **flujo de X** ,

$$\begin{aligned} \phi : U \subseteq \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, p) &\mapsto \phi_t(p) = \gamma_p(t), \end{aligned}$$

donde γ_p es la curva integral de X tal que $\gamma_p(0) = p$. En caso de que el flujo esté definido en todo $\mathbb{R} \times M$ diremos que el campo X es **completo**. Dado un campo completo X y su flujo ϕ , el conjunto $G = \{\phi_t : t \in \mathbb{R}\} \subseteq C^\infty(M)$ tiene estructura de grupo (abeliano) con la composición como operación interna. Lo llamamos **grupo local de difeomorfismos** o **grupo uniparamétrico de difeomorfismos de M** y cumple que $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$.

De manera análoga al fibrado tangente, definimos el **fibrado cotangente** de una variedad diferenciable M como $T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M$. Representaremos a los elementos de T^*M como $\omega \in T_p^*M$ o (p, ω) indistintamente según el contexto²⁸. Se puede demostrar que T^*M es una variedad diferenciable $2n$ -dimensional con estructura diferenciable heredada de la de M . Igual que antes definimos los campos vec-

difeomorfismo y no basta con tomar una aplicación C^∞ para poder asegurar que $df_p(X_p)$ sea un campo vectorial.

²⁵Será importante para el caso de los grupos de Lie, en que un conjunto especial de (auto)difeomorfismos vendrán determinados por los elementos del propio grupo.

²⁶Equivalentemente podríamos tomar un campo definido sobre un abierto $U \subseteq M$.

²⁷Suponemos sin pérdida de generalidad que $0 \in I$ y que I es el dominio maximal de definición de α .

²⁸Denotamos por π a la proyección canónica $\pi : T^*M \rightarrow M$ dada por $\pi(\omega) = p, \forall \omega \in T_p^*M$.

toriales como secciones del fibrado tangente, diremos que una aplicación $\omega : M \rightarrow T^*M$ es un **campo de 1-formas diferenciales**²⁹ o un **campo de covectores** si se cumple que $\pi \circ \omega = Id_M$. Igual que antes, la base de T_p^*M que construimos a partir de una carta $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$, $\{(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\}$, al extenderse a todo $p \in U$, es una colección de 1-formas. De hecho, dada una 1-forma $\omega : M \rightarrow T^*M$ existen n funciones $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ tales que

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n a_i(dx^i)_p.$$

La 1-forma ω se dice **diferenciable** si $\omega \in C^\infty(M, T^*M)$. Una condición equivalente es que exista un atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n))\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ en M tal que las funciones $a_i^\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ anteriores asociadas a $(U_\alpha, \psi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n))$ sean diferenciables para todo $i = 1, \dots, n$ y todo $\alpha \in \mathcal{A}$ ³⁰. Al conjunto de 1-formas diferenciales sobre M lo denotaremos por $\Omega^1(M)$. Es fácil probar que $\Omega^1(M)$ tiene estructura de espacio vectorial (real) y de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$: $\forall \alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, $a \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(M)$ se tiene que $\alpha + \beta, a\alpha, f\alpha \in \Omega^1(M)$. El ejemplo más sencillo de 1-forma que tenemos es la diferencial de una función diferenciable: $f \in C^\infty(M)$ implica que $df \in \Omega^1(M)$.

Podemos ver que los campos de 1-formas son de hecho el módulo dual al de los campos vectoriales. De forma análoga a lo que hicimos para $\mathfrak{X}(M)$, dado $\alpha \in \Omega^1(M)$ podremos definir $F_\alpha : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ mediante $[F_\alpha(X)](p) = \alpha_p(X_p)$. Se puede comprobar que $F_\alpha(X + Y) = F_\alpha(X) + F_\alpha(Y)$ y $F_\alpha(fX) = fF_\alpha(X)$, $\forall f \in C^\infty(M)$. Recíprocamente, dada una aplicación $F : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que cumpla lo anterior, se podrá definir un campo de 1-formas diferenciable $\alpha : M \rightarrow T^*M$, dado por $\alpha_p(v) = [F(X)](p)$, donde $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial que cumpla $X_p = v$ ³¹.

Por completitud añadimos el siguiente enunciado que nos habla de los *pullbacks* de 1-formas por una aplicación diferenciable: dada $f \in C^\infty(M, N)$ se puede definir un homomorfismo de espacios vectoriales $f^* : \Omega^1(N) \rightarrow \Omega^1(M)$ como $[f^*(\alpha)]_p(v) := \alpha_{f(p)}(df_p(v)) \forall \alpha \in \Omega^1(N)$, $\forall v \in T_pM$, $\forall p \in M$. Además, tiene las siguientes propiedades:

1. $f^*(g\alpha) = (g \circ f)f^*\alpha$, $\forall \alpha \in \Omega^1(N), g \in C^\infty(N)$.
2. Si $g \in C^\infty(N, P)$ es otra aplicación diferenciable, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Además, $(1_M)^* = 1_{\Omega^1(M)}$.

Ahora vamos a introducir el **fibrado tensorial** con la intención de formalizar el concepto de

²⁹De aquí en adelante utilizaremos 1-forma y campo de 1-formas diferenciables indistintamente.

³⁰Igual que en el caso de los campos vectoriales diferenciables, se puede demostrar que esta definición no depende del atlas.

³¹Este campo existe por la afirmación análoga para campos vectoriales.

campo tensorial como una generalización de lo anterior. Es decir, como sección diferenciable de un cierto fibrado vectorial. Construimos el (p, q) -**fibrado tensorial** como

$$\mathcal{T}_q^p M = TM \otimes \dots \otimes TM \otimes T^*M \otimes \dots \otimes T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x M \otimes \dots \otimes T_x M \otimes T_x^* M \otimes \dots \otimes T_x^* M.$$

Se le puede dotar de estructura diferencial inducida de la de M . Así, diremos que una aplicación diferenciable $T : M \rightarrow \mathcal{T}_q^p M$ tal que $T \circ \pi = Id_M$ ³² es un **campo de (p, q) tensores** y al conjunto de todos estos los denotaremos $\mathcal{T}_p^q(M)$. De manera análoga a lo que nos pasó con los vectores y las 1-formas, podemos ver este espacio como un $C^\infty(M)$ -módulo de formas multilineales de $\Omega^1(M) \otimes \dots \otimes \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \otimes \dots \otimes \mathfrak{X}(M)$. Por otra parte, la idea que se tiene en física de «un tensor es algo que se transforma como un tensor», que tiene que ver con pensar en sus coordenadas más que en el propio objeto, se traduce aquí en unas reglas de transformación (covariantes en p índices y contravariantes en q) cuando, dada una carta $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ de M , escribimos $T \in \mathcal{T}_p^q(M)$ como

$$T = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n}} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q},$$

donde $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \in C^\infty(U) \quad \forall 1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$.

Para terminar este repaso de variedades diferenciables vamos a introducir la derivada de Lie, que generaliza el concepto de derivada direccional de \mathbb{R}^n . Nos interesa definir una operación que haga esto mismo y que a su vez se pueda extender para otros campos tensoriales. Sea X un campo vectorial con flujo ϕ y $G = \{\phi_t : t \in I \subset \mathbb{R}\} \subseteq \text{Difeo}(M)$ su grupo uniparamétrico de difeomorfismos asociado. Entonces, dada una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X_x(f) &= \left((\phi_x)_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) (f) \right) = \frac{d}{dt} (f \circ \phi_x) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((f \circ \phi_x)(t) - (f \circ \phi_x)(0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^*(f))(x) - f(x). \end{aligned}$$

Dados dos campos vectoriales X, Y , se define la **derivada de Lie** de Y respecto a X como el campo vectorial definido por

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_X Y)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\phi_{-t})_*(Y_{\phi_t(x)}) - Y_x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((Y_x - (\phi_t)_*(Y_{\phi_{-t}(x)})) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\phi_{-t})_*(Y_{\phi_t(x)})), \end{aligned}$$

³²Ya veremos más adelante que esto es precisamente ser sección del correspondiente fibrado.

que cumple $\mathfrak{L}_X Y = [X, Y]$.

1.2. Geometría Riemanniana

En esta sección vamos a hacer un pequeño repaso de algunos de los conceptos más importantes de variedades riemannianas: variedades diferenciables que localmente parecen el euclídeo y en las que además se puede definir una generalización del producto escalar, un producto entre vectores del mismo espacio tangente.

Una **variedad pseudoriemanniana** es un par (M, g) donde M es una variedad diferenciable y g es una **métrica** pseudo-Riemanniana, un tensor de tipo $(0, 2)$ sobre M que satisface lo siguiente $\forall p \in M$:

- es simétrica: $g_p(u, v) = g_p(v, u)$ ³³.
- es no degenerada: si $g_p(u, v) = 0$ para todo $u \in T_p M$ entonces $v = 0$.

En caso de que la segunda condición se cumpla en una versión más fuerte: $g_p(u, u) > 0$ para todo vector $u \neq 0$, es decir, es definida positiva, se dirá que la métrica es Riemanniana.

Podemos tomar una carta (U, ϕ) en M , con coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$, y preguntarnos cómo es la expresión local de la métrica:

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad g_{\mu\nu}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\nu\mu}(p) \quad \forall p \in M.$$

Entonces, hay un isomorfismo entre $T_p M$ y $T_p^* M$ que es el «subir y bajar índices» de la física: $\omega_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu$ y $u^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu$. Además, a partir de esto se puede llegar, si tomamos un vector infinitesimal en $T_p M$ a la definición que se usa en relatividad general de la métrica como el elemento de línea infinitesimal: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ³⁴. Como g es simétrica, sus autovalores son reales, de hecho, se podrá diagonalizar y quedará una matriz con 1 y -1 en la diagonal. Los casos relevantes serán en los que la diagonalización nos de la identidad: **métrica euclídea** y en los que la diagonalización nos de $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$: **métrica lorentziana**.

Ahora ya podemos definir ángulos entre vectores que estén en el mismo espacio tangente, pero lo que queremos hacer es comparar vectores que estén «anclados» a distintos puntos de la variedad. Para ello vamos a presentar el **transporte paralelo**. La forma más sencilla de entender por qué es necesario

³³Abreviamos $g|_p = g_p$.

³⁴En general llamaremos indistintamente al tensor g y a sus componentes.

es ver qué pasa cuando queremos derivar un campo vectorial:

$$\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{v^\mu(\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots) - v^\mu(\dots, x^\nu, \dots)}{\Delta x^\nu}.$$

En el lado derecho tenemos una cantidad definida en $T_x M$ y otra definida en $T_{x+\Delta x} M$, es decir, dos vectores en espacios tangentes distintos. Para poder restarlos necesitaremos llevar $v^\mu(x)$ a $x + \Delta x$ sin que cambie y, cuando estén ambos vectores en el mismo punto, calcular la diferencia. Este proceso se llama transporte paralelo, pero no es único. De hecho, no hay una forma natural de hacerlo. Será razonable exigir que se cumpla

$$\begin{aligned} \tilde{v}^\mu(x + \Delta x) - v^\mu(x) &\propto \Delta x, \\ (\tilde{v}^\mu + w^\mu)(x + \Delta x) &= \tilde{v}^\mu(x + \Delta x) + \tilde{w}^\mu(x + \Delta x) \end{aligned}$$

donde $\tilde{v} \big|_{x+\Delta x}$ es el vector $v \big|_x$ al que se le ha transportado paralelamente hasta $x + \Delta x$. La forma más general de transporte es

$$\tilde{v}^\mu(x + \Delta x) = v^\mu(x) - v^\lambda(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \Delta x^\nu,$$

donde $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ son los coeficientes del transporte paralelo. Hay tantos transportes paralelos como elecciones coherentes de estos. En nuestro caso, habrá una elección especial, en que el transporte paralelo sea compatible con la estructura métrica de la variedad riemanniana, que definirá la **conexión de Levi-Civita**. A partir de esto, se define la **derivada covariante** de v respecto de x^ν como

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{v^\mu(x + \Delta x) - \tilde{v}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + v^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Que es efectivamente por construcción, un vector en $x + \Delta x$. El concepto de transporte paralelo está unívocamente relacionado con el de **conexión**, como veremos cuando definamos estos conceptos sobre fibrados principales. De hecho, los coeficientes $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ se llaman **coeficientes de la conexión**.

Una **conexión afín** es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla_X(Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ \nabla_{(X+Y)} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \\ \nabla_{(fX)} Y &= f \nabla_X Y, \\ \nabla_X(fY) &= X(f)Y + f \nabla_X Y, \end{aligned}$$

donde $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Si ahora tomamos una carta (U, ϕ) podemos definir los

coeficientes de la conexión:

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad {}^{35},$$

Los coeficientes de la conexión nos dicen cómo cambian los vectores de una base al movernos de un sitio a otro. Conocer esto es equivalente a conocer cómo actúa ∇ sobre todos los vectores. Dados $v = v^\mu e_\mu, w = w^\nu e_\nu \in T_p(M)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla_v w &= v^\mu \nabla_{e_\mu} (w^\nu e_\nu) = v^\mu (e_\mu [w^\nu] e_\nu + w^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) = \\ &= v^\mu \left(\frac{\partial w^\lambda}{\partial x^\mu} + w^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) e_\lambda. \end{aligned}$$

En esta expresión aparece la fórmula que habíamos propuesto antes de forma bastante heurística para la derivada covariante: la conexión ∇ coge dos campos vectoriales v, w y los lleva a un campo $\nabla_v w$ cuya componente ν es $v^\mu \nabla_\mu w^\nu$, donde

$$\nabla_\mu w^\nu = \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} w^\lambda.$$

El concepto de transporte paralelo nos va a permitir definir las curvas geodésicas: las curvas auto-paralelas³⁶, y por tanto, las curvas «más rectas posibles». Para ello tomamos una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ en M que podemos asumir está contenida en un abierto coordenado (U, ϕ) . Si consideramos un campo vectorial X que esté definido a lo largo de $\gamma(t)$ ³⁷, diremos que se transporta paralelamente a lo largo de la curva si

$$\nabla_v X = 0 \quad \forall t \in (a, b),$$

donde

$$v = \frac{d}{dt} = \frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\gamma(t)}$$

es el vector tangente a $\gamma(t)$ en cada punto. En caso de que el propio vector tangente a la curva $v(t)$ sea transportado paralelamente a lo largo de γ , *i.e.* $\nabla_v v = 0$ ³⁸, diremos que la curva γ es una **geodésica**. Esta última expresión se puede escribir en componentes para llegar a la famosa ecuación

³⁵donde $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ es la base coordenada en $T_p M$, con $x = \phi(p)$.

³⁶Después, cuando tengamos una conexión de Levi-Civita podremos ver que también son las de menor longitud.

³⁷ $X_{\gamma(t)} = X^\mu(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\gamma(t)}$.

³⁸En realidad se podría pedir la condición (más débil) de que exista una función f en M tal que $\nabla_v v = f v$, es decir, que la variación de v sea paralela a v , pero se puede demostrar que en caso de que esto se cumpla a lo largo de una curva γ , se podrá reparametrizar para que la ecuación sea la anterior.

de las geodésicas (x^μ son las coordenadas de $\gamma(t)$):

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0.$$

Para terminar esta sección de geometría Riemanniana vamos a definir una conexión privilegiada en estas variedades: la conexión de Levi-Civita. Hasta ahora no hemos pedido a la conexión que satisfaga ninguna condición relacionada con la estructura métrica de las variedades riemannianas. Ahora queremos imponer que g sea **covariantemente constante**, en el sentido de que el transporte paralelo conserve el producto escalar entre cualquier par de vectores. Sea v un vector tangente a una curva cualquiera a lo largo de la que transportamos paralelamente dos vectores X, Y . Se puede demostrar³⁹ que imponer la condición que hemos dicho antes es equivalente a que

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} = 0.$$

Cuando esto sucede se dice que la conexión afín es compatible con la estructura métrica. Utilizando permutaciones de los índices en la ecuación anterior se termina llegando a la ecuación

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + T^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + T^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} - 2\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} g_{\kappa\lambda} = 0,$$

donde $T^\kappa_{\lambda\mu} = 2\Gamma^\kappa_{[\mu\nu]}$ ⁴⁰ es el tensor de **torsión**. La ecuación anterior se puede resolver como

$$\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} = \{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \} + \frac{1}{2}(T^\kappa_{\nu\mu} + T^\kappa_{\mu\nu}),$$

donde $\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \}$ son los símbolos de Christoffel⁴¹. En caso de que el tensor de torsión sea nulo en toda la variedad, la conexión compatible con la métrica se llama **conexión de Levi-Civita**.

1.3. Distribuciones y teorema de Frobenius

La idea del teorema de Frobenius es encontrar unas condiciones suficientes para poder integrar una distribución. Para poder enunciarlo necesitamos entender qué es una distribución y qué significa integrarla. La idea geométrica es la siguiente: una distribución es una asignación suave o diferenciable –en un sentido que especificaremos después– $p \rightarrow W_p$ subespacio vectorial de $T_p M$. Y consideraremos que dicha distribución puede integrarse en $p_0 \in M$ si encontramos una subvariedad N de M tal que

³⁹Construcción estándar de la conexión de Levi-Civita, por ejemplo en la sección 7.2.6 de [12].

⁴⁰La notación $(,)$ y $[,]$ significa índices simetrizados y antisimetrizados respectivamente

⁴¹ $\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu})$.

$p_o \in N$ y $T_p N = W_p \forall p \in N$. Aún no hemos hablado de fibrados, por lo que se hace un poco difícil introducir estas definiciones: al final veremos que la asignación $p \rightarrow W_p$ es un subfibrado del fibrado tangente. El objetivo entonces es dar las definiciones y la intuición necesarias para que cuando definamos fibrado todo tenga sentido.

Dado un entero $0 \leq k \leq n$, definimos la **Grasmanniana** de k -planos en \mathbb{R}^n como el conjunto

$$G(n, k) = \{W : W \subset \mathbb{R}^n \text{ es un subespacio de } \mathbb{R}^n \text{ con dimensión } k\}.$$

Entonces, habrá un espacio total al que llamaremos E que estará fibrando sobre M . La idea es pensar que a cada punto $p \in M$ le estamos asignando una copia de $G(n, k)$ ⁴², donde pensaremos que $W \subset T_p M$ ⁴³. De forma semejante a lo que hicimos con el fibrado tangente TM , se podrá dotar a E de una estructura diferenciable⁴⁴, de forma que diremos que las **secciones** de E son las secciones diferenciables $s : M \rightarrow E$, a las que llamaremos **distribuciones de k -planos sobre M** .

Al final del día, se puede definir una estructura diferenciable⁴⁵ sobre $E = G(TM, k)$ tal que exista una proyección diferenciable $\pi : E \rightarrow M$ y tal que $\pi^{-1}(p)$ sea difeomorfo a $G(n, k)$ para todo $p \in M$ ⁴⁶. Entonces, la definición de **distribución** de k -planos sobre M como secciones de $\pi : E \rightarrow M$, es la formalización de la idea de a ir escogiendo de forma suave subespacios vectoriales k dimensionales de $T_p M$. Diremos que k es el **rango** de la distribución.

La idea intuitiva de integrabilidad se traduce en lo siguiente. Dada una variedad diferenciable M y una distribución de k -planos sobre M –una sección del fibrado $G(TM, k) \rightarrow M$ –, decimos que una subvariedad N de M , de dimensión k , **integra** a W con condición inicial p_0 si $p_0 \in N$ y además $T_p N = W_p$ para todo $p \in N$. La distribución W se dice **integrable** si existe una subvariedad N en esas condiciones $\forall p_0 \in M$. Definimos ahora también el concepto de **condición de integrabilidad de Frobenius**: diremos que una distribución de k -planos sobre M , W , satisface la condición de integrabilidad de Frobenius en un abierto $U \subset M$ si para todo par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ tales que $X_p, Y_p \in W_p$ se cumple que $[X, Y]_p \in W_p$ para todo $p \in U$. El teorema de Frobenius nos dice que esta es una condición suficiente y necesaria para que la distribución sea integrable.

⁴²Es razonable pensar que la dimensión de W_p no puede depender de p si la asignación que estamos haciendo es «suave» en cierto sentido.

⁴³Cosa que es cierta, ya que si M es una variedad de dimensión n , $\dim T_p M = n \implies T_p M \cong \mathbb{R}^n$ (en realidad esto lo podríamos hacer también con los complejos pero no es un caso que vayamos a considerar).

⁴⁴Para esto en realidad necesitaríamos ver que la acción que definimos de $GL(n)$ sobre el conjunto es transitiva y así después construir un cociente que sí sea variedad diferenciable. Las herramientas necesarias para entender esto las daremos en el capítulo de representaciones y acciones de grupos de Lie.

⁴⁵Se puede hacer a través de las funciones de transición entre cartas de M y de las del fibrado tangente.

⁴⁶Tenemos una acción de $GL(n)$ sobre la variedad $G(n, k)$, que no es lineal, y por ello deberemos pensar –en el lenguaje de fibrados– que $G(TM, k)$ es un fibrado asociado al fibrado tangente de M .

Geométricamente debemos pensar la condición como una versión más débil de conmutatividad: estamos exigiendo a los campos vectoriales que en caso de conmutar, el «trozo» que no lo haga esté en W , es decir, una especie de conmutación módulo W . En realidad, cuando conozcamos el lenguaje de los fibrados lo podremos enunciar como que el subfibrado definido por la distribución W sea tal que todas sus secciones tengan corchete de Lie que sea de nuevo una sección de ese subfibrado.

Capítulo 2

Grupos de Lie y álgebras de Lie.

Los grupos de Lie reciben su nombre en honor al matemático noruego *Marius Sophus Lie*, que trabajó y aplicó los grupos de simetría continuos para el estudio de la geometría [15]. En este capítulo, además de introducir algunos conceptos básicos que necesitaremos más adelante de grupos y álgebras de Lie, intentaremos mostrar cómo de importante fue el descubrimiento de que estos grupos se podían entender a través de su «versión linealizada», las correspondientes álgebras de Lie.

Las **simetrías**, a la luz del teorema de Noether, no son solo otro concepto importante para la física, sino uno absolutamente central. Vemos por ejemplo como, en el lenguaje de la física moderna, se nombra a una teoría física dando sus simetrías: es famoso el caso de las *large N theories*, que sirven para modelar multitud de sistemas, desde la cromodinámica cuántica (QCD)¹ en algunos límites hasta sistemas de espines de materia condensada. Del modelo estándar se dice que tiene como simetrías internas a $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. En este capítulo intentaremos entender cuáles son estos grupos y qué representan, por ejemplo, en términos de isometrías de ciertos espacios. Estos *grupos de simetrías continuas* son algunos ejemplos de grupos de Lie: grupos algebraicos que tienen a su vez una estructura – compatible – de variedad diferenciable. La referencia que vamos a seguir mayoritariamente es [16], utilizando a veces ciertos enfoques de [14] especialmente en lo relacionado con las aplicaciones posteriores en fibrados. Se trata de un tema amplísimo y en el que se continua investigando, no solo por sus aplicaciones a la física sino por el interés matemático propio que tienen. Aquí mostramos unos pocos resultados relevantes para lo que haremos más adelante.

El capítulo se organiza como sigue: en primer lugar definimos grupo de Lie y los morfismos que hay entre ellos, así como el concepto de subgrupo de Lie y algunos resultados que serán útiles más adelante. Por ejemplo, el teorema de Cartan nos asegurará que muchos de nuestros grupos lineales –

¹La teoría que explica la interacción fuerte.

es decir, de matrices – habituales son grupos de Lie, por ser cerrados dentro del grupo lineal general. Damos algunos ejemplos relevantes con los que ilustramos algunas propiedades expuestas. Después pasamos a definir álgebra de Lie. Estas son objetos que existen independientemente de los grupos y que merecen estudio aparte pero nos interesa especialmente la construcción *canónica* del álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie. En lugar de definirla como el espacio tangente al grupo en el elemento neutro, la definimos a partir del álgebra de Lie – infinito dimensional – de campos vectoriales sobre el grupo (como variedad diferenciable) mediante el concepto de campo invariante por la izquierda. Demostramos que ambos enfoques son equivalentes y discutimos algunas propiedades de las álgebras asociadas a un grupo de Lie, así como de los morfismos entre estos objetos. Por último, construimos la aplicación exponencial, que da cuenta precisamente de la idea de Lie de «explicar» los grupos de Lie a partir de su descripción lineal. Exponemos todo esto explícitamente con los grupos de matrices que utilizaremos más adelante.

2.1. Grupos de Lie como variedades diferenciables: objetos y flechas

Los **grupos topológicos** son grupos (algebraicos) que a su vez son espacios topológicos en los que ambas estructuras son compatibles ². Vamos a estudiar un caso concreto de estos:

Definición 2.1. *Un grupo G que a su vez tiene estructura de variedad diferenciable ³ tal que la multiplicación es de clase C^∞ ⁴ se llama **grupo de Lie**.*

Asimismo, se pueden caracterizar los grupos de Lie como los grupos que son a su vez variedades diferenciables tales que tanto la multiplicación como la inversión son aplicaciones C^∞ entre variedades diferenciables. Sin embargo, el teorema de la función inversa aplicado en un entorno del elemento neutro $e \in G$ y el carácter C^∞ de la multiplicación nos aseguran que la inversión sea de clase C^∞ .

Definición 2.2. *Dados dos grupos de Lie G, H , una aplicación $\phi : G \rightarrow H$ que sea C^∞ y tal que $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2) \forall g_1, g_2 \in G$ se llama **homomorfismo de grupos de Lie**.*

Se trata de aplicaciones entre grupos de Lie que respetan ambas estructuras – es decir, que sean homomorfismos de grupos de clase C^∞ –. Análogamente se definen los isomorfismos y automorfismos de grupos de Lie.

²En el sentido de que la operación binaria interna – de aquí en adelante *multiplicación* – es continua cuando se considera en $G \times G$ la topología producto de Tijonov.

³Solo consideraremos grupos de Lie de dimensión finita.

⁴Donde la estructura diferenciable en $G \times G$ es la canónica inducida por la de G .

2.1.1. Primeros ejemplos

Algunas de las primeras variedades diferenciables que se nos vienen a la cabeza son a su vez grupos de Lie que, además, se utilizan continuamente en física y con las que trabajaremos explícitamente en siguientes capítulos. Introducimos ahora algunos ejemplos.

Cualquier espacio vectorial de dimensión finita será una variedad diferenciable y un grupo de Lie pues la suma es C^∞ por ser lineal. Nos interesarán en particular \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n , que son grupos de Lie conexos (desde el punto de vista topológico) y abelianos (desde el punto de vista algebraico).

El **grupo lineal general** $GL(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}) formado por las matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales (complejas) con determinante no nulo es una variedad diferenciable. Para demostrarlo basta con utilizar que \mathbb{R}^{n^2} es una variedad diferenciable y que el determinante es una aplicación continua. Entonces, $GL(n, \mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es un abierto de \mathbb{R}^{n^2} y como ya dijimos en los preliminares, cualquier abierto de una variedad diferenciable tiene estructura de variedad diferenciable. Con la multiplicación de matrices como operación forma un grupo de Lie ⁵. El **grupo lineal especial** $SL(n, \mathbb{K})$ formado por las matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales (complejas) cuyo determinante vale $+1$ también lo es. Esto se puede demostrar gracias al teorema de la subvariedad regular: 1 es un valor regular de la aplicación \det y por tanto $SL(n, \mathbb{K})$ una subvariedad regular de \mathbb{R}^{n^2} .

La circunferencia \mathbb{S}^1 es un grupo de Lie. Se ve fácilmente si pensamos en ella como $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ pues la multiplicación y la inversión son C^∞ en \mathbb{C} . Se trata de un grupo conexo, compacto y abeliano. Veremos más adelante que $\mathbb{S}^1 \cong SO(2) \cong U(1)$, que es precisamente el grupo del electromagnetismo y el de las rotaciones en el plano.

2.2. Construir otros grupos a partir de unos dados. Subgrupos y productos. El teorema de Cartan

Como siempre, a partir de unos pocos ejemplos pretenderemos construir muchos más grupos de Lie. En primer lugar, dados dos grupos de Lie G y H , diremos que $G \times H$ es el **grupo producto**, que será un grupo de Lie al considerar la estructura algebraica de producto directo. Esto hace que sea inmediato probar que el **toro** \mathbb{T}^m es un grupo de Lie, así como cualquier producto finito de grupos de Lie.

Los embebimientos e inmersiones de variedades diferenciables que definimos en el capítulo anterior, cuando vengan dados por homomorfismos de grupos, darán lugar a grupos de Lie. Así, dados dos

⁵Podemos pensar esto como que el grupo de automorfismos sobre un espacio vectorial de dimensión finita es un grupo de Lie.

grupos de Lie H, G y una inmersión o embebimiento $\phi : H \rightarrow G$ que sea un homomorfismo de grupos tendremos que $\phi(H)$ es un grupo de Lie. La diferencia entre ambos viene de la estructura topológica: aunque la restricción de ϕ a su imagen es un difeomorfismo e isomorfismo de grupos en ambos casos, solo cuando es un embebimiento la estructura topológica de $\phi(H)$ coincide con la de subespacio de G . Como nuestras variedades diferenciables son siempre T_2 , en caso de que H sea compacto toda inmersión será a su vez un embebimiento ⁶. Esto sirve, por ejemplo, para ver que \mathbb{Z}_n y \mathbb{Z} son subgrupos de \mathbb{S}^1 generados por $e^{i\alpha 2\pi}$ donde α es racional y tal que $n\alpha \in \mathbb{Z}$ para el primer caso y α es irracional para el segundo.

Otro resultado muy importante que servirá para demostrar que muchos de los grupos de matrices con los que vamos a trabajar son grupos de Lie es el **teorema de Cartan**, que no probamos aquí por ser la demostración demasiado extensa y utilizar conceptos que aún no hemos introducido.

Teorema 2.1 (Cartan). *Dado un grupo de Lie G y un subgrupo (algebraico) H suyo, H será un subgrupo de Lie embebido en G si y sólo si H es un cerrado en G .*

Se dice que un subgrupo cerrado del grupo lineal general es un **grupo de matrices**. Por el teorema anterior, todos estos serán grupos de Lie. Tienen mucha importancia porque representan los grupos de simetrías de ciertos espacios vectoriales métricos ⁷ Además de los grupos lineales especiales ⁸ son importantes los siguientes ejemplos:

- El **grupo ortogonal** de dimensión n : $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = Id\}$ y el **grupo especial ortogonal** de dimensión n : $SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = Id\} = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$.
- El **grupo unitario** de dimensión n : $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot A^\dagger = Id\}$ y el **grupo especial unitario** de dimensión n : $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^\dagger = Id\} = U(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$.

Estos grupos de Lie, unidos a los grupos simplécticos $Sp(n)$ se llaman **grupos clásicos** ⁹.

En realidad, los grupos clásicos se pueden ver como grupos de automorfismos de espacios vectoriales de dimensión finita con una estructura adicional dada por un producto escalar sobre ellos. Un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un \mathbb{K} -espacio vectorial V se dice ¹⁰ **euclídeo** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y es bilineal, simétrico y

⁶Que G sea T_2 y H compacto nos asegura que la inmersión, que es inyectiva, es en realidad un homeomorfismo sobre su imagen.

⁷Esto hace que sean importantísimos en física. Por ejemplo, $SO(1, 3)$, las isometrías del espacio de Minkowski, serán el ingrediente fundamental a la hora de formular la relatividad especial o la teoría cuántica de campos.

⁸Podemos ver ahora que son grupos de Lie como consecuencia del teorema de Cartan.

⁹Veremos que este nombre tiene más que ver con la clasificación de sus álgebras de Lie asociadas, pues las álgebras de Lie simples se dividen en clásicas y excepcionales. Los grupos de Lie excepcionales (compactos y simplemente conexos) son G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 .

¹⁰De forma análoga, cuando tenemos un \mathbb{H} -espacio vectorial podemos definir un producto escalar simpléctico sobre él y tendremos que $Sp(V) \cong Sp(n)$.

definido positivo¹¹ y **hermítico** si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y es lineal en el primer argumento, autoadjunto y definido positivo. Así, si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n tendremos que $O(V) \cong O(n)$ y si V es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n , $U(V) \cong U(n)$.

Un resultado importante es que los grupos de Lie compactos, que utilizaremos para formular muchas teorías gauge en los siguientes capítulos, siempre se pueden identificar con grupos de matrices. Es decir, para todo grupo de Lie compacto G existe un homomorfismo de grupos de Lie de G en $GL(n, \mathbb{C})$ para algún n .¹²

Como corolario del teorema de Cartan se tiene que todo homomorfismo continuo entre grupos de Lie es un homomorfismo de grupos de Lie.

Se puede probar que dado $g \in G$ las aplicaciones:

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto g \cdot h \\ R_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto h \cdot g \\ c_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto g \cdot h \cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

son difeomorfismos. Los llamamos traslación a la izquierda, la derecha y conjugación¹³ por g respectivamente.

Será importante cuando trabajemos con álgebras de Lie utilizar el concepto de componente conexa con la identidad. Es a su vez un grupo de Lie¹⁴, que a veces llamamos **componente conexa de G** y denotaremos por G_e . Es relevante el siguiente resultado:

Proposición 2.1. *Dado un grupo de Lie G , todas sus componentes conexas son difeomorfas a G_e . En particular, todas tienen la misma dimensión.*

Demostración.

Sea $g \in G$ y G_g una componente conexa de G que lo contenga. La aplicación $L_g : G_e \rightarrow G$ es

¹¹En general, si se considera $\mathbb{R}^{p,q}$ con el producto escalar dado por la métrica $diag(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ se pueden definir de forma análoga $O(p, q)$ y $SO(p, q)$.

¹²La demostración es difícil y tiene que ver con teoría de representaciones. En particular, se obtiene como consecuencia del teorema de Peter-Weyl [16] [17], que clasifica las representaciones de los grupos de Lie compactos.

¹³A las conjugaciones se las suele llamar **automorfismos internos**.

¹⁴Esto es inmediato pues las componentes conexas de un cierto grupo son simultáneamente abiertos y cerrados conexos. Que sea un subgrupo nos lo asegura el hecho de que la imagen por una aplicación continua de un conexo es un conexo.

un difeomorfismo. Entonces, como $L_g(G_e)$ es conexa y contiene a g , tendremos que $L_g(G_e) \subseteq G_g$. Análogamente podemos definir $L_g^{-1} : G_g \rightarrow G$ y demostrar que $L_g^{-1}(G_g) \subseteq G_e$. Entonces, $L_g : G_e \rightarrow G_g$ es un difeomorfismo. Todas las componentes son difeomorfas y tienen la misma dimensión porque ésta es invariante por difeomorfismos. ■

2.3. Volvemos a los ejemplos. Primer encuentro con *grupos de simetría*: algunos grupos lineales

Repasamos y demostramos rigurosamente algunas propiedades importantes de los grupos lineales que se utilizan con frecuencia. En primer lugar, es interesante insistir en que, dado que habitualmente pensamos en las matrices actuando sobre vectores, es natural pensar en los elementos de $GL(n, \mathbb{K})$ – o sus subgrupos – multiplicando por la izquierda a vectores de \mathbb{K}^n . Al hacer esto estamos pensando en realidad en la **representación fundamental** del grupo, como ya veremos más adelante ¹⁵.

Proposición 2.2. $SL(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}), $(S)O(n)$ y $(S)U(n)$ son grupos de Lie. Los grupos lineales especiales no son compactos para $n \geq 2$ y tienen dimensiones $\dim(SL(n, \mathbb{R})) = n^2 - 1$ y $\dim(SL(n, \mathbb{C})) = 2n^2 - 2$. Los grupos (especiales) ortogonales y unitarios son compactos para todo $n \geq 1$ y tienen dimensiones $\dim(O(n)) = \dim(SO(n)) = \frac{1}{2}n(n-1)$, $\dim(U(n)) = n^2$ y $\dim(SU(n)) = n^2 - 1$.

Idea de la demostración.

Para demostrar que son grupos de Lie, por el teorema 2.1 bastará con probar que son subgrupos cerrados de un grupo de Lie, $GL(n, \mathbb{K})$ en este caso. Los grupos lineales especiales se pueden ver como $SL(n, \mathbb{K}) = \det^{-1}(1) \subseteq GL(n, \mathbb{K})$, un cerrado por ser $\det : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ una aplicación continua. Además, el 1 es un valor regular de la aplicación \det . Entonces, el teorema de la subvariedad regular que enunciamos en los preliminares nos dice que $SL(n, \mathbb{K}) = \det^{-1}(1)$ es una variedad diferenciable de dimensión $\dim(GL(n, \mathbb{K})) - \dim(\mathbb{K})$, es decir, $\dim(SL(n, \mathbb{R})) = n^2 - 1$ y $\dim(SL(n, \mathbb{C})) = 2n^2 - 2$ ¹⁶, como queríamos demostrar.

Igualmente, las aplicaciones $\phi_{\mathbb{K}} : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ donde $\phi_{\mathbb{K}}(A) = A \cdot A^*$ ¹⁷ son continuas. Entonces, $O(n) = \phi_{\mathbb{R}}^{-1}(Id)$ y $U(n) = \phi_{\mathbb{C}}^{-1}(Id)$ son cerrados de $GL(n, \mathbb{R})$ y $GL(n, \mathbb{C})$ respectivamente.

¹⁵Las representaciones de los grupos de Lie son fundamentales en física. Sirven por ejemplo, en física de altas energías, para identificar las **partículas** con las diferentes representaciones del grupo de simetría de la teoría y en el caso de las teorías gauge – que estudiaremos más adelante – para entender cómo se producen las interacciones entre ellas. Así, es bien sabido que los quarks transforman en la representación del grupo gauge mientras que los bosones – portadores de la correspondiente fuerza – lo hacen en la adjunta. Igualmente, Higgs – un campo escalar – transforma en la representación singlete del grupo de Lorentz. Hay que poner atención en no mezclar las representaciones de los distintos grupos. De hecho, hay un teorema – Coleman-Mandula – que nos dice que las simetrías espaciotemporales y las internas «no se ven», es decir, que solo se pueden combinar de forma trivial (como producto directo).

¹⁶Como variedades reales.

¹⁷Donde $A^* = A^t$ para el caso real y $A^* = A^\dagger$ en el complejo.

Como la intersección de cerrados es un cerrado, $O(n)$, $U(n)$ y sus parientes especiales, son grupos de Lie. Se puede demostrar que estas aplicaciones (restringidas en la imagen) tienen como valor regular a la identidad, lo que nos da $\dim(O(n)) = \frac{1}{2}n(n-1)$, $\dim(U(n)) = n^2$.

Lo relativo a la compacidad se demuestra utilizando el teorema de Heine - Borel. Como ya hemos demostrado que son cerrados de una espacio euclideo isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} , ser acotado será equivalente a ser compacto para estos grupos. El conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{K})$, $a \in \mathbb{R}$ no está acotado. Entonces, $\text{SL}(2, \mathbb{K})$ no es compacto y es inmediato ver que sucede lo mismo con $\text{SL}(n, \mathbb{K})$ $\forall n \geq 2$. Por otra parte, dada $A \in O(n)$ se tiene que $\text{Tr}(AA^t) = AA_{ii}^t = A_{i1}^2 + \dots + A_{in}^2 = 1 \implies |A_{ij}| \leq 1 \forall i, j$ ¹⁸. ■

2.4. Álgebras de Lie

La definición de **álgebra de Lie** la dimos en los preliminares al explicar que al espacio de los campos vectoriales de una variedad $\mathfrak{X}(M)$ se le puede dotar de esta estructura. Trataremos en general con álgebras de Lie reales o complejas pero siempre de dimensión finita.

Sobre cualquier espacio vectorial V se puede definir el álgebra de Lie trivial: $[\cdot, \cdot] \equiv 0$, que es abeliana. Otro corchete de Lie que conocemos es el conmutador de matrices: $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Este álgebra de Lie se denota $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ y demostraremos más adelante que se trata precisamente del álgebra de Lie de los grupos lineales generales. Además, el **teorema de Ado**¹⁹ dice que toda álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ es subálgebra de un álgebra de Lie de matrices.

Dada un álgebra de Lie V , diremos que un subespacio vectorial $W \subseteq V$ es una **subálgebra de Lie** de V si $[w, w'] \in W \forall w, w' \in W$.

Definición 2.3. Dadas dos álgebras de Lie $(V, [\cdot, \cdot]_V), (W, [\cdot, \cdot]_W)$, una aplicación lineal $\psi : V \rightarrow W$ tal que $[\psi(x), \psi(y)]_W = \psi([x, y]_V) \forall x, y \in V$ se llama **homomorfismo de álgebras de Lie**.

Análogamente se definen los **isomorfismos** o **automorfismos** de álgebras de Lie.

Definición 2.4. Sea V un álgebra de Lie sobre un cuerpo \mathbb{K} y T_1, \dots, T_n una base suya²⁰. Entonces, tenemos que

$$[T_a, T_b] = f_{abc}T_c$$
²¹,

¹⁸Equivalentemente, $A \in U(n) \implies \text{Tr}(AA^\dagger) = AA_{ii}^\dagger = A_{i1}A_{i1}^* + \dots + A_{in}A_{in}^* = 1 \implies |A_{ij}| \leq 1 \forall i, j$.

¹⁹Que no demostraremos porque requiere de muchos resultados de teoría de estructura de álgebras de Lie [18].

²⁰Como espacio vectorial.

²¹Hemos utilizado el criterio de suma de Einstein. Lo haremos así en todo este capítulo: índices repetidos están sumados.

donde los coeficientes $f_{abc} \in \mathbb{K}$ se llaman **constantes de estructura**.

La bilinealidad del corchete de Lie hace que las constantes de estructura fijen totalmente los conmutadores de todos los elementos del álgebra de Lie. Además, las propiedades de antisimetría y la identidad de Jacobi del corchete se traducen en lo siguiente: $f_{abc} = -fbac$ y $f_{abc}f_{dce} + f_{bcd}f_{dae} + f_{cad}f_{dbe} = 0$ $\forall a, b, c \in \{1, \dots, n\}$. Recíprocamente, un conjunto de escalares $\{f_{abc} \in \mathbb{K} : a, b, c = 1, \dots, n\}$ que satisfaga las condiciones anteriores define un álgebra de Lie en \mathbb{K}^n .

2.5. Hay un álgebra de Lie para cada grupo de Lie

Habitualmente, especialmente cuando se viene de explicar variedades diferenciables, se define el álgebra de Lie de un grupo de Lie como el espacio tangente al grupo de Lie en el elemento neutro. Esto lleva a la interpretación del álgebra de Lie como una descripción infinitesimal del grupo. Así, en mecánica cuántica o, en general, en física, al hablar de los grupos de simetría, llamamos **generadores infinitesimales** del grupo a los elementos (de una base) del álgebra de Lie asociada. Cuando lo hacemos de esa forma parece que metiéramos «a mano» el conmutador, pues en principio no hay una forma inmediata (que no esté relacionada con el siguiente enfoque) de entender por qué ese espacio tangente, además de estructura de espacio vectorial, tiene un corchete de Lie asociado. Como ya mencionamos antes, por ser un grupo de Lie G una variedad diferenciable, tendremos el álgebra de Lie de los campos vectoriales $\mathfrak{X}(G)$. Sin embargo, este álgebra será de dimensión infinita si $\dim M \geq 1$. Nuestro objetivo será encontrar una forma *canónica* de asociar una subálgebra de Lie \mathfrak{g} de $\mathfrak{X}(G)$ que tenga la misma dimensión que G . Diremos que \mathfrak{g} es el **álgebra de Lie** asociada al grupo de Lie G .

En los preliminares ya hablamos de que el conjunto de campos de vectores invariantes bajo un conjunto de difeomorfismos forma una subálgebra de $\mathfrak{X}(M)$. Vamos a utilizar precisamente esta propiedad para encontrar el álgebra de Lie asociada a un cierto grupo. Diremos de aquí en adelante que $A_\Gamma(G)$ es el conjunto de campos de vectores invariantes por traslaciones a la izquierda ²² y Γ el conjunto de todas las traslaciones a la izquierda ²³.

Proposición 2.3. *Dado un grupo de Lie G , el conjunto de campos de vectores invariantes por la izquierda junto al conmutador de campos de vectores de G forma una subálgebra de Lie $L(G) = \mathfrak{g}$ de $\mathfrak{X}(M)$ ²⁴. Diremos que \mathfrak{g} es el **álgebra de Lie de G** .*

²²También *campos vectoriales invariantes por la izquierda*.

²³La construcción que viene ahora se podría hacer de forma equivalente con traslaciones a la derecha o con conjugaciones.

²⁴Aunque definimos álgebras de Lie para \mathbb{K} espacios vectoriales ahora estamos considerándolas reales, pues nuestras variedades diferenciables siempre lo son sobre \mathbb{R} . Por esta razón $GL(n, \mathbb{C})$ tiene dimensión $2n^2$, las variedades complejas

Queremos demostrar que esta definición es equivalente a la del espacio tangente al elemento neutro, que pone énfasis en que los elementos del álgebra serán la mejor aproximación lineal infinitesimal.

Proposición 2.4. *Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. La aplicación $ev : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$, que evalúa cada campo en el origen, $ev(X) = X_e$ es un isomorfismo lineal.*

Demostración.

La aplicación ev es lineal por construcción²⁵. Para construir su inversa, dado $x \in T_e G$ podemos definir $ev^{-1}(x) = X$. Sea $X_h := (dL_h)_e x = X \forall h \in G$. Para demostrar que X es un campo vectorial basta con darse cuenta de que $(dL_h)_e x = d\mu((h, 0), (e, x))$ donde $\mu : G \times G \rightarrow G$ es la multiplicación del grupo, que es de clase C^∞ por definición de grupo de Lie. Además, X_h es de hecho invariante por la izquierda porque $(dL_g)_h X_h = (d(L_g \circ L_h))_e x = (dL_{gh})_e x = X_{gh} \forall g \in G$. ■

Entonces, el álgebra de Lie de un grupo de Lie de dimensión finita es un álgebra de Lie que tiene misma dimensión que el grupo. Además, por la construcción anterior, tenemos que todo campo vectorial invariante por la izquierda está completamente determinado por su valor en un punto²⁶. Si nos fijamos, el álgebra de Lie $\mathfrak{X}(G)$ vendría de considerar, en lugar de únicamente las traslaciones a la izquierda, todos los difeomorfismos de G en G . Entonces, tiene sentido dar esta definición de \mathfrak{g} , que consiste en restringirnos a los difeomorfismos de G en G que además vienen dados por elementos del propio grupo.

Ahora que sabemos que a cada grupo de Lie se le puede asociar *canónicamente* un álgebra de Lie, tiene sentido preguntarse si toda álgebra de Lie es a su vez el álgebra de un cierto grupo de Lie. La respuesta a esto nos la da el tercer teorema de Lie:

Teorema 2.2 (Tercer teorema de Lie.). *Toda álgebra de Lie de dimensión finita es isomorfa al álgebra de Lie de algún grupo de Lie conexo y simplemente conexo.*

De la misma forma, queremos ver que cada homomorfismo de grupos de Lie define a su vez un homomorfismo entre las correspondientes álgebras de Lie. En el lenguaje de la geometría diferencial, está claro que esto va a tener que ver con la diferencial²⁷.

las estamos pensando sobre \mathbb{R} . Se puede hacer geometría diferencial compleja y para estos casos se demuestra que ambas cosas son equivalentes.

²⁵El famoso principio de superposición de los campos vectoriales.

²⁶Esto tiene que ver con que la acción del grupo sobre sí mismo es transitiva: entonces podremos conocer el valor de X en el neutro a partir de su valor en h y, utilizando el resultado anterior, en todo punto.

²⁷Es lo que consigue «trasladar» aplicaciones entre variedades a aplicaciones entre los correspondientes fibrados tangentes.

Dado un homomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \rightarrow H$, definimos su **diferencial** o el **homomorfismo inducido** por ϕ como $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, donde para cada $X \in \mathfrak{g}$ ²⁸, $\phi_*(X) := (d\phi)_e(X_e)$. Entonces, se tiene que

Teorema 2.3. *La diferencial $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ de un homomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración.

La diferencial de una aplicación C^∞ es una aplicación lineal entre los espacios tangentes en cierto punto (el elemento neutro en este caso). Además, en los preliminares vimos que $[\phi_*X, \phi_*Y] = \phi_*[X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, lo que asegura que ϕ_* sea un homomorfismo de álgebras de Lie. ■

Como la inclusión $i : H \rightarrow G$ de un subgrupo de Lie H en un grupo G es un homomorfismo inyectivo de grupos de Lie cuando H está inmerso o embebido en G , existe una aplicación $i_* : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ también inyectiva que es un homomorfismo de álgebras de Lie. Esto asegura que una inmersión o embebimiento de grupos de Lie se corresponde con que \mathfrak{h} sea subálgebra de Lie de \mathfrak{g} .

Nos gustaría que, para cada homomorfismo entre dos álgebras asociadas a ciertos grupos de Lie, pudiéramos definir unívocamente un homomorfismo entre los grupos²⁹. Sin embargo, esto no es cierto en general y tiene que ver con el concepto de *integrabilidad*: cuándo se puede pasar unívocamente del objeto lineal de las álgebras al no lineal de los grupos. El siguiente resultado da condiciones suficientes para que esto ocurra:

Teorema 2.4. *Dados un grupo de Lie simplemente conexo G y un grupo de Lie H , para todo homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\psi : G \rightarrow H$ tal que $\psi_* = \phi$.*

2.6. La aplicación exponencial

Ahora vamos a presentar la famosa aplicación exponencial, que construye elementos de un grupo de Lie a partir de los de su correspondiente álgebra, desde el enfoque de campos vectoriales invariantes por la izquierda que hemos venido planteando. Para hacerlo vamos a utilizar el concepto de curva integral y grupo uniparamétrico asociado al flujo de un campo vectorial que introdujimos en los preliminares.

²⁸Estamos pensando X como un campo de vectores invariante por la izquierda. La notación no es arbitraria: ϕ_*X es de hecho el *pushforward* de un campo de vectores (invariante por la izquierda) por un difeomorfismo (homomorfismo de grupos de Lie). Precisamente esta definición es posible por la construcción del álgebra de Lie de un grupo: utilizamos que los campos vectoriales invariantes por la izquierda vengán determinados por su valor en un punto.

²⁹Podemos pensar que $\text{Hom}(G, H) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ es inyectiva siempre y que estamos buscando cuándo es sobreyectiva. ?

Dado un grupo de Lie G y un campo vectorial invariante por la izquierda $X \in \mathfrak{g}$, denotamos como ϕ_X a la curva integral de X que pasa por el elemento neutro³⁰.

Teorema 2.5. *Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Entonces, todo campo vectorial invariante por la izquierda $X \in \mathfrak{g}$ es completo. Así, el conjunto $\{\phi_X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es un grupo abeliano con la composición. Además, ϕ_X es un homomorfismo de grupos de Lie: $\phi_X(s+t) = \phi_X(s) \cdot \phi_X(t) \forall s, t \in \mathbb{R}$ que cumple $\phi_{sX}(t) = \phi_X(st) \forall s, t \in \mathbb{R}$.*

Demostración.

Para demostrar que todo X en las condiciones anteriores es completo tenemos que probar que el dominio maximal de definición de su curva integral a través del origen es todo \mathbb{R} . Sea $\phi_X : (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ dicha curva, que satisface $\phi_X(0) = e$ y $\dot{\phi}_X(t) = X_{\phi_X(t)}$. Supongamos que $t_2 < \infty$ y sea $\alpha = \min\{t_2, |t_1|\} < \infty$. Podemos considerar la curva

$$\begin{aligned} \gamma : \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}\right) &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto \phi_X\left(\frac{\alpha}{2}\right) \phi_X\left(t - \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

que es una curva integral de X tal que $\gamma(0) = \phi_X\left(\frac{\alpha}{2}\right) \phi_X\left(0 - \frac{\alpha}{2}\right) = e$. Entonces, como $\frac{3\alpha}{2} > t_2$, hemos llegado a la contradicción ya que partíamos de que (t_1, t_2) era el intervalo maximal de definición de la curva integral de X a través del elemento neutro³¹.

De los preliminares ya tenemos que en general, dada un campo vectorial completo sobre una variedad diferenciable, se puede construir (tal y como se dice en nuestro enunciado) el grupo uniparamétrico (global) de difeomorfismos. Esto nos asegura que $\phi_X(s+t) = \phi_X(s) \cdot \phi_X(t) \forall s, t \in \mathbb{R}$. Que $\phi_{sX}(t) = \phi_X(st) \forall s, t \in \mathbb{R}$ se sigue por definición pues para un $s \in \mathbb{R}$ fijo, $\delta(t) := \phi_X(st)$ es la curva integral de sX a través del elemento neutro. ■

Estamos en condiciones de definir la aplicación exponencial, cuyo nombre tomará sentido más adelante al aplicarlo a los grupos lineales:

Definición 2.5. *Dado un grupo de Lie G , definimos la **aplicación exponencial** como*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \exp(X) = \exp X = \phi_X(1). \end{aligned}$$

³⁰La llamaremos también, de aquí en adelante, **subgrupo uniparamétrico** del grupo de Lie G asociado a un elemento del álgebra de Lie X .

³¹Que es única por ser solución de un problema de Cauchy bien definido.

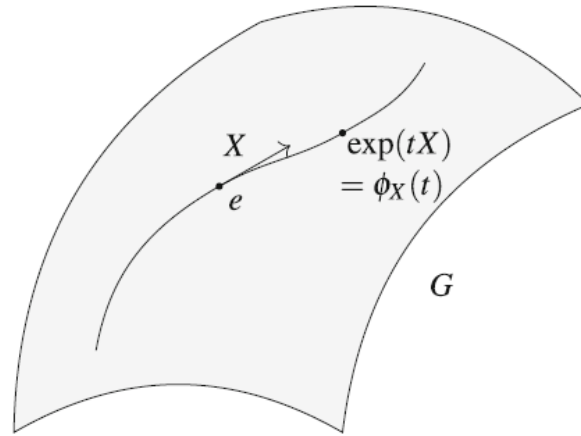


Figura 2.1: La aplicación exponencial. Figura 1.1 de [16].

Por construcción, la exponencial solo llegará a la componente conexa con la identidad de G ³². La acción de esta aplicación se ilustra en la figura 2.1.

De la definición y el teorema 2.5 se siguen las siguientes propiedades, que nos van adelantando la relación que la exponencial tiene con el flujo: i) $\exp(0) = e$, ii) $\exp((s+t)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$ y iii) $\exp(-X) = (\exp X)^{-1} \forall X \in \mathfrak{g}, \forall s, t \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.5. *Sea G un grupo de Lie y $X \in \mathfrak{g}$. Entonces, su flujo a través de cualquier punto $p \in G$ está definido $\forall t \in \mathbb{R}$ y viene dado por $\phi_X(t, p) = p \cdot \exp(tX) = R_{\exp tX}(p) = L_p(\exp tX)$.*

Demostración.

Se trata de una comprobación: $\phi_X(0, p) = p \cdot \exp(0X) = p$. Además,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \phi_t(p) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} L_p(\exp sX \cdot \exp \tau X) = (dL_{p \exp sX})_e (X_e) = X_{p \exp sX} = X_{\phi_\tau(p)}.$$

Porque X es por definición un campo vectorial invariante por la izquierda. Entonces, como cada curva integral es solución única de un problema de Cauchy bien planteado, el enunciado queda demostrado. ■

Aunque por este último resultado ya nos lo podemos imaginar, merece la pena destacar el siguiente resultado:

Proposición 2.6. *La aplicación exponencial es un difeomorfismo local.*

³²Esto ya lo sabíamos en física pues siempre estudiamos que cualquier rotación que no contuviera una inversión (una rotación propia) podía escribirse como exponencial de los generadores infinitesimales (multiplicados por unos ciertos parámetros).

Demostración.

Hemos demostrado que $T_e G \cong \mathfrak{g}$. Además, si vemos \mathfrak{g} como espacio vectorial, podemos identificar trivialmente $T_0 \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$. La diferencial de la aplicación exponencial en el 0 es la identidad: dado $X \in \mathfrak{g}$ y una curva $\gamma(t) = tX$ en \mathfrak{g} tenemos que $\dot{\gamma}(0) = X$ y se tiene que $(d \exp(X))_0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) = X$. Entonces, utilizando el resultado que enunciamos en los preliminares, que la diferencial en un punto de una aplicación $F \in C^\infty(M, N)$ entre variedades diferenciables sea un isomorfismo de espacios vectoriales es condición equivalente a que F sea un difeomorfismo local en dicho punto. ■

Sin embargo, la aplicación exponencial no es un difeomorfismo global en general, lo que tiene sentido pues ya conocemos, por ejemplo, grupos de Lie compactos, y eso obligaría a que los grupos de Lie fueran triviales – como variedades diferenciables, pues serían difeomorfos a espacios vectoriales –. Terminamos con un resultado que utilizaremos con cierta frecuencia en el que probamos que la aplicación exponencial se comporta de la forma que deseamos respecto al homomorfismo de álgebras de Lie inducido por un homomorfismo de grupos de Lie:

Proposición 2.7. *Sea $\psi : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces, $\psi(\exp X) = \exp(\psi_* X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\psi_*} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\psi} & H \end{array}$$

Idea de la demostración.

Dado $X \in \mathfrak{g}$, sea $\gamma(t) = \psi(\exp tX)$ una curva con $t \in \mathbb{R}$. Entonces, como ψ es homomorfismo de grupos de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ tenemos que $\gamma(0) = \psi(e) = e$ y que $\frac{d}{dt} \gamma(t) = (\psi_* X)_{\gamma(t)}$. Entonces, γ es la curva integral de X a través de e , y por tanto $\exp(\psi_* X) = \gamma(1) = \psi(\exp X)$. ■

2.7. De vuelta a los ejemplos. Álgebras de los grupos de Lie lineales

Vamos a construir en primer lugar el álgebra de Lie del grupo lineal general, que viene dada por el conmutador de matrices como ya adelantamos en el apartado anterior.

Proposición 2.8. *El álgebra asociada a $GL(n, \mathbb{K})$ es $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, los endomorfismos de \mathbb{K}^n , junto al conmutador de matrices como corchete de Lie. La denotamos como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.*

Demostración.

Como $GL(n, \mathbb{K})$ es un abierto de \mathbb{R}^{n^2} todos los espacios tangentes se identifican trivialmente con él

mismo: $T_{Id}M(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Vemos primero cuál es el campo vectorial invariante por la izquierda \tilde{X} asociado a una matriz $X \in T_{Id}GL(n, \mathbb{K})$: $\tilde{X}_A = A \cdot X \forall A \in GL(n, \mathbb{K})$ ya que dada una curva γ_X tangente a X en $GL(n, \mathbb{K})$ que pase por $e = Id$ tenemos que $\tilde{X}_A = (dL_A)_e(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_A(\gamma_X(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A \cdot \gamma_X(t) = A \cdot X$. Consideramos ahora dos campos vectoriales invariantes por la izquierda \tilde{X}, \tilde{Y} en $GL(n, \mathbb{K})$, queremos ver que su corchete de Lie (como campos vectoriales) se corresponde con el conmutador de las matrices evaluadas en el origen $\tilde{X}_e := X, \tilde{Y}_e := Y$. Esto es fácil sabiendo cómo se define el corchete de Lie sobre campos vectoriales y pensando estos como derivaciones; en los preliminares vimos que $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{Id} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{Y}_{\gamma_{\tilde{X}}(t)} - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{X}_{\gamma_{\tilde{Y}}(t)}$. De esto podemos derivar $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{Id} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma_{\tilde{X}}(t) \cdot Y) - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma_{\tilde{Y}}(t) \cdot X) = X \cdot Y - Y \cdot X$. ■

Ahora vamos a ver por qué la aplicación exponencial recibe ese nombre. Buscamos la forma explícita de la aplicación exponencial para el grupo lineal general. Dada una matriz $A \in GL(n, \mathbb{K})$, sabemos que su matriz viene definida por la serie $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ ³³.

Proposición 2.9. *Sea $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ cualquiera. Entonces, $\exp A = e^A$. Esto se cumple para cualquier grupo lineal.*

Demostración.

En la demostración del teorema anterior probamos que el campo vectorial invariante por la izquierda asociado a una matriz $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ se define en cada punto $P \in GL(n, \mathbb{K})$ como $\tilde{A}_P = P \cdot A$. Se comprueba fácilmente que $\phi_A(0) = Id$ y que, fijado $s \in \mathbb{R}$, $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \phi_A(t) = \phi_A(s)A$. Entonces, la curva integral a través de $Id \in GL(n, \mathbb{K})$ del campo \tilde{A} viene dada por la aplicación $\phi_A(t) = e^{tA}$. De la definición de aplicación exponencial se deriva inmediatamente que $\exp A = e^A$. ■

Nos proponemos ahora construir las álgebras de los grupos que introdujimos en la sección 2.3. Para ello vamos a utilizar la forma de la aplicación exponencial para los grupos lineales, tal y como demostramos en la proposición anterior.

Grupos lineales especiales.

Sea $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$. Sabemos por la proposición 2.9, que $e^{tA} \in SL(n, \mathbb{K})$. Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $1 = \det(e^{tA}) = e^{\text{Tr}(A)t}$ de lo que obtenemos que $\text{tr}(A) = 0$. Deberíamos demostrar ahora que toda matriz de traza nula está en $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$. Para ello tendríamos que calcular la dimensión de esta subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ y ver que es la misma que $\dim(SL(n, \mathbb{K}))$.

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{M \in GL(n, \mathbb{K}) : \text{tr}(M) = 0\}.$$

³³Que será convergente con la norma del supremo si lo hace en cada entrada.

Grupos ortogonales y unitarios.

Motivamos únicamente el caso ortogonal porque el unitario es análogo cambiando traspuesta por hermítica. Sea $M \in \mathfrak{o}(n)$ cualquiera, \tilde{M} el campo vectorial invariante a la izquierda asociado a ella y $A(t)$ su curva integral a través de Id . Como $\dot{A}(0) = M$ y $A(t) \in O(n)$, se deduce que $A(t)A(t)^T = I$. Entonces, $0 = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} A(t)A(t)^T = M + M^T$, es decir, M es antisimétrica. Igual que antes, deberíamos probar que el conjunto de matrices antisimétricas es un subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y que sus dimensión – como espacio vectorial – se corresponden con la dimensión de $O(n)$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(n) &= \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid M + M^T = 0\}, \\ \mathfrak{u}(n) &= \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) \mid M + M^\dagger = 0\}.\end{aligned}$$

Las álgebras de $SO(n)$ y $SU(n)$ se deducen fácilmente como intersecciones de las anteriores. Como una matriz antisimétrica tiene automáticamente traza nula, $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$. Sin embargo, $\mathfrak{su}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M + M^\dagger = 0, \text{tr}(M) = 0\}$.

Recogemos ahora algunas bases para los grupos de matrices de dimensión más pequeña.

Las álgebras de Lie $\mathfrak{u}(1)$ y $\mathfrak{so}(2)$ tienen dimensión 1 y son por tanto isomorfas. Una base de la primera es $\{i\}$ y de la segunda $\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$. Ya nos lo podíamos esperar pues $U(1)$ son los números complejos de módulo unidad mientras que $SO(2)$ representa las rotaciones propias ³⁴ de \mathbb{R}^2 . Ambas tienen un único grado de libertad: la elección de una fase $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto facilita entender también que $U(1) \cong SO(2) \cong \mathbb{S}^1$.

Una base de $\mathfrak{so}(3)$ viene dada por las matrices de rotación ³⁵:

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que satisfacen $[r_a, r_b] = \varepsilon_{abc} r_c$ donde ε_{abc} es el símbolo de Levi-Civita. A este hecho lo conocemos en mecánica clásica como **teorema de Euler**: cualquier rotación de un sólido rígido se puede describir como una rotación alrededor de un eje que deja fijo un punto suyo, que viene a decir que toda rotación se puede descomponer en tres rotaciones planas consecutivas (no conmutativas) con los llamados ángulos de Euler. Este álgebra es isomorfa a la de $\mathfrak{su}(2)$, que tiene dimensión 3 también. La base más conocida es la que viene dada por las **matrices de Pauli**, que conocemos de mecánica cuántica por darnos la

³⁴En mecánica clásica, se dice que una rotación es propia cuando está conectada con la identidad.

³⁵Como vemos, la exponencial de cada una nos daría una rotación en torno a cada uno de los tres ejes. Esto es una forma de ver que $SO(3)$ tiene, como nos dice nuestra intuición geométrica, subespacios isomorfos a $SO(2)$.

base de espín:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una base de $\mathfrak{su}(2)$ es $\{\tau_a = -i/2\sigma_a\}$. Estas matrices satisfacen las mismas relaciones de conmutación que las matrices de rotación: $[\tau_a, \tau_b] = \varepsilon_{abc}\tau_c$. A pesar de que $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$, sus correspondientes grupos de Lie no son isomorfos. De hecho, $SU(2)$ recubre dos veces a $SO(3)$ ³⁶. Así, en física de partículas, las partículas bosónicas se corresponden con representaciones de $SO(3)$ ³⁷ mientras que las fermiónicas aparecen al considerar $SU(2)$. Esto viene de que desde el punto de vista moderno, una partícula –un campo– es una representación irreducible del grupo de simetrías del espaciotiempo en que construyamos la teoría de campos correspondiente. En el caso de la teoría cuántica de campos (QFT) en 4 dimensiones, se suele tener el espaciotiempo de Minkowski, que ya dijimos tiene como grupo de isometrías a $SO(1, 3)$. Así, como se puede demostrar que $\mathfrak{so}(1, 3) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Por esta razón, de forma encubierta, en muchas asignaturas de mecánica cuántica hemos estado estudiando representaciones de $\mathfrak{su}(2)$.

El último ejemplo que vamos a comentar es el de $\mathfrak{su}(3)$, interesante, por ejemplo, porque $SU(3)$ es la simetría de color, asociada a la fuerza nuclear fuerte del modelo estándar. Una base de $\mathfrak{su}(3)$ viene dada por las **matrices de Gell-Mann**:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

³⁶De hecho, $SU(2)$ es el recubrimiento universal de $SO(3)$.

³⁷O representaciones de $SU(2)$ con índice entero.

Capítulo 3

Representaciones lineales de grupos de Lie y acciones sobre variedades

Los grupos de Lie que hemos definido en el capítulo anterior son unas estructuras bastante difíciles. En general, una de las motivaciones matemáticas para estudiar lo que vamos a hacer en este capítulo, representaciones y acciones, es tratar de describir un grupo entendiendo de qué forma se implementa como el grupo de transformaciones de un objeto matemático. En particular, querremos trabajar con grupos de Lie que actúan sobre espacios vectoriales –**representaciones lineales**– o variedades diferenciables –**acciones**–:

	objeto	homomorfismo de G en
Representación de G sobre	un espacio vectorial V	$\text{Aut}(V) = \text{GL}(V)$
Acción de G sobre	una variedad diferenciable M	$\text{Difeo}(M)$

Una de las razones por las que las representaciones son relevantes en física –más adelante daremos una relacionada con la mecánica cuántica– es que muchas veces los campos que nos aparecen son aplicaciones que a cada punto del espaciotiempo le asignan un objeto de un espacio vectorial¹. Entonces, para entender las simetrías de las teorías de campos es importante entender cómo sus correspondientes grupos actúan sobre espacios vectoriales.

Por otra parte, además de pensar las acciones como generalizaciones no lineales de las representaciones, es importante estudiar acciones de grupos de Lie sobre variedades diferenciables para lo que viene a continuación en fibrados principales.

El objetivo de este capítulo entonces es presentar los conceptos y resultados básicos sobre represen-

¹En realidad aquí ya estamos introduciendo el concepto de sección de un fibrado sin saberlo, en particular de fibrado vectorial.

taciones y acciones de grupos de Lie. En la primera parte hablamos de representaciones de grupos y álgebras de Lie, incidiendo especialmente en una representación especial: la adjunta. Además, hablamos de las representaciones que preservan una estructura métrica en V , así como de las métricas sobre el grupo G que son invariantes bajo la acción del grupo sobre sí mismo. Definimos también la forma de Killing, una forma bilineal simétrica que nos permitirá construir métricas bi-invariantes en grupos de Lie compactos. En la segunda parte del capítulo hablamos sobre acciones de grupos de Lie, definimos los campos fundamentales: campos vectoriales en una variedad M dados a partir de un elemento del álgebra de Lie a partir de una acción de G y la forma de Maurer-Cartan, que será necesaria al estudiar fibrados principales y las conexiones sobre ellos.

En este capítulo, a no ser que se especifique otra cosa, G será un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie asociada, definida en el capítulo anterior. Igualmente, V será un \mathbb{K} espacio vectorial donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}^2 de dimensión finita ³.

3.1. Representaciones de grupos y álgebras de Lie

3.1.1. Representaciones de grupos de Lie

Desde el punto de vista de la física ⁴ tenemos un gran argumento para aprender cosas sobre representaciones de grupos de Lie: el teorema de Wigner nos dice –de forma precisa– que las simetrías cuánticas físicas se implementan en las teorías mediante representaciones (anti) unitarias de los grupos sobre el espacio de estados.

Por ejemplo, toda la información sobre las interacciones del modelo estándar –en primera aproximación y *post* ruptura de la simetría electrodébil–, viene codificada mediante la identificación de las partículas fundamentales con su representación bajo los subgrupos de $SU(3)_C \times SU(2)_{EW} \times U(1)_Y$. Además, el hecho de que en física de altas energías identifiquemos las partículas por su espín y su masa tiene que ver con que es la forma en que se clasifican las representaciones unitarias irreducibles del grupo de isometrías del espaciotiempo ⁵. El objetivo de esta sección es introducir las herramientas que se necesitan para entender todo esto.

Definición 3.1. *Una representación de un grupo de Lie G sobre un \mathbb{K} espacio vectorial V es un*

²En general nos centraremos en las representaciones reales.

³En realidad, existen representaciones de dimensión infinita pero en nuestros ejemplos vamos a trabajar con grupos de Lie compactos.

⁴Desde un punto de vista más matemático, podemos pensar que estudiar representaciones de grupos es algo muy útil, porque los espacios vectoriales son objetos mucho más sencillos que los grupos y entender cómo un grupo actúa sobre un espacio vectorial nos va a dar información sobre el propio grupo.

⁵Minkowski 4 dimensional ($SO(1,3)$) normalmente pero en general $SO(1, d-1)$.

homomorfismo de grupos de Lie

$$\begin{aligned}\rho : G &\rightarrow \text{GL}(V) \cong \text{GL}(n, \mathbb{K})^6 \\ g &\rightarrow \rho(g) : V \rightarrow V \\ v &\mapsto \rho(g)v = g \cdot v = gv\end{aligned}$$

$\forall g \in G, v \in V$. Si ρ es inyectiva se dice que la representación es **fiel**.

De la definición se deduce que $\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$ y $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} \forall g, h \in G$. Además, podemos construir una representación de un subgrupo $H \subset G$ a partir de una representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, tan solo restringiendo el dominio del homomorfismo de grupos de Lie: $\rho_H : H \rightarrow \text{GL}(V)$.

Los grupos de Lie lineales tienen una representación canónica definida por la multiplicación de vectores por la izquierda que se llama **representación fundamental**. En muchas ocasiones se denota una representación por la dimensión del espacio vectorial sobre el que el grupo está actuando⁷. En particular, cuando V es 1-dimensional, diremos que la representación es **singlete** mientras que para 2,3-dimensional existe la nomenclatura de **doblete** y **triplete**.

Podemos plantearnos entonces el problema de cómo construir representaciones a partir de otras. Sean ρ_V, ρ_W dos representaciones de un grupo de Lie G sobre dos espacios vectoriales V, W . Entonces, se pueden definir:

- La representación **suma directa** $\rho_{V \oplus W}$ sobre $V \oplus W$ definida por $g(v, w) = (gv, gw)$.
- La representación **producto tensorial** $\rho_{V \otimes W}$ sobre $V \otimes W$ definida por $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$.
- La representación **dual** ρ_{V^*} sobre V^* definida por $(g\lambda)(v) = \lambda(g^{-1}v) \forall \lambda \in V^*$ ⁸.
- La representación **producto exterior k -ésimo**: $\rho_{\Lambda^k V}$ definida por

$$g(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) = gv_1 \wedge gv_2 \wedge \dots \wedge gv_k, \quad \forall v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k V$$

Definición 3.2. Los **morfismos** entre dos representaciones ρ_V, ρ_W de un grupo de Lie G sobre dos espacios vectoriales V, W son las aplicaciones lineales **G -equivariantes** $f : V \rightarrow W$. Es decir, aplicaciones tales que $f(\rho_V(g)v) = \rho_W(g)f(v) \forall v \in V, g \in G$.

⁷Especialmente cuando la dimensión determina unívocamente la representación. Todo lo dicho en este párrafo tendrá una definición análoga para las representaciones de álgebras de Lie que definiremos un poco más adelante.

⁸Es importante que se hace tanto la inversa como la transpuesta de la representación. También se llama representación gradiente. Este es un caso particular de la representación $\rho_{\text{Hom}(V, W)}$ definida por $(gf)(v) = gf(g^{-1}v), \quad \forall f \in \text{Hom}(V, W)$.

El concepto de G -equivariancia es muy importante y se ilustra con el siguiente diagrama conmutativo para todo elemento $g \in G$ del grupo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \rho_V(g) \downarrow & & \downarrow \rho_W(g) \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Dos representaciones se dirán isomorfas o equivalentes si existe entre ellas un isomorfismo G -equivariante. Entonces, el objetivo de la teoría de representaciones –en general– es clasificar todas las representaciones salvo isomorfismo.

De la misma manera definimos las representaciones de álgebras de Lie:

Definición 3.3. *Una representación de un álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre un \mathbb{K} espacio vectorial V es un homomorfismo de álgebras de Lie*

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) \cong \text{End}(V) \\ \phi &\rightarrow \phi(X) : V \rightarrow V \\ v &\mapsto \phi(X)v = X \cdot v = Xv \end{aligned}$$

$\forall X \in \mathfrak{g}, v \in V$. Si ϕ es inyectiva se dice que la representación es **fiel**.

Igual que en el caso de las representaciones de grupos de Lie, se pueden definir representaciones de una subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ como restricciones de las representaciones del álgebra \mathfrak{g} . De la misma forma, los morfismos de representaciones de álgebras de Lie se definen como aplicaciones lineales \mathfrak{g} -equivariantes. Además, dadas ϕ_V, ϕ_W dos representaciones de un álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre dos espacios vectoriales V, W , se pueden definir:

- La representación **suma directa** $\phi_{V \oplus W}$ sobre $V \oplus W$ definida por $X(v, w) = (Xv, Xw)$.
- La representación **producto tensorial** $\phi_{V \otimes W}$ sobre $V \otimes W$ definida por $X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw$.
- La representación **dual** ϕ_{V^*} sobre V^* definida por $(X\lambda)(v) = \lambda(-Xv) \forall \lambda \in V^*$.
- La representación **producto exterior k ésimo**: $\phi_{\Lambda^k V}$ definida por

$$X(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^k v_1 \wedge \dots \wedge Xv_i \wedge \dots \wedge v_k, \quad \forall v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k V$$

Por otra parte, nos interesa encontrar una representación de un álgebra de Lie asociada a una cierta representación de su grupo. Utilizando el teorema 2.4 se deduce que

Proposición 3.1. *Dada una representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ de un grupo de Lie G , se tiene que su diferencial, $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ es una representación de \mathfrak{g} .*

Entonces, la definición de aplicación exponencial nos va a permitir escribir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\rho_*} & \text{End}(V) \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\rho} & \text{GL}(V) \end{array}$$

donde en el lado derecho tenemos la exponencial de matrices por tratarse de grupos lineales.

El enunciado siguiente –consecuencia directa del teorema 2.4– nos da una condición suficiente para la existencia y unicidad de una representación de grupos de Lie dada una representación de su álgebra:

Teorema 3.1. *Sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo. Entonces, dada una representación ϕ de su álgebra de Lie \mathfrak{g} existe una única representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ tal que $\rho_* = \phi$.*

3.1.2. Representaciones ortogonales y unitarias

En general, nos va a interesar considerar representaciones que sean compatibles con una forma bilineal definida sobre el espacio vectorial, especialmente cuando se trata de un producto escalar euclídeo o hermítico. Este concepto es importante porque las representaciones ortogonales (resp. hermíticas) van a poder descomponerse en suma directa de representaciones ortogonales (resp. hermíticas). Como vamos a dar una condición suficiente para la existencia de un producto escalar G -invariante, estos conceptos son muy útiles en la clasificación de representaciones de grupos de Lie.

Definición 3.4. *Una representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ de un grupo de Lie sobre un espacio vectorial $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclídeo (resp. hermítico) se dice **ortogonal (unitaria)** si el producto escalar es G -invariante, es decir,*

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall g \in G, v, w \in V.$$

Esto es equivalente a que la representación valore en los subgrupos $O(V)$ ($U(V)$) del grupo de automorfismos de V : $\text{GL}(V)$, lo que significa que el grupo está actuando sobre el espacio vectorial como lo hacen las rotaciones. Análogamente construimos un concepto similar para las representaciones de álgebras de Lie:

Definición 3.5. Una representación $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ de un álgebra de Lie sobre un espacio vectorial $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclídeo (resp. hermítico) se dice **antisimétrica** (**anti-hermítica**) si se satisface

$$\langle \phi(X)v, w \rangle + \langle v, \phi(X)w \rangle = 0$$

$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall v, w \in V$.

Y de la misma forma, lo que tenemos es que estas representaciones toman valores en las subálgebras $\mathfrak{o}(n)$ ($\mathfrak{u}(n)$) del álgebra general lineal $\mathfrak{gl}(V)$ determinada por los endomorfismos de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Además, estas representaciones están relacionadas:

Proposición 3.2. Sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación ortogonal (resp. unitaria) de un grupo de Lie G . Entonces, la representación inducida $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ del álgebra de Lie \mathfrak{g} es antisimétrica (resp. antihermítica).

Un resultado importante que utilizaremos más adelante nos da las condiciones de existencia para las representaciones ortogonales de un cierto grupo de Lie, o, visto de otra forma, un producto escalar invariante bajo la acción de dicho grupo:

Proposición 3.3. Sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación de un grupo de Lie G compacto. Entonces, existe un producto escalar euclídeo (resp. hermítico) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V que es G -invariante, es decir, tal que ρ es una representación ortogonal (resp. unitaria) para $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Idea de la demostración.

Dada una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de \mathfrak{g} podemos construir una base dual cuya $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ (que estará formada por 1-formas invariantes por la izquierda) y $\sigma = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$ será una forma de volumen que podremos integrar en todo G . Por ser el grupo compacto, la forma de volumen será también invariante por la derecha y la integral finita. Entonces, dado un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cualquiera en V , podemos definir un producto escalar que va a ser G -invariante:

$$\langle v, w \rangle = \int_G \langle \langle hv, hw \rangle \rangle \sigma(h).$$

■

3.1.3. La representación adjunta

Si partimos de un grupo lineal es bastante natural construir la representación fundamental pero, considerando un grupo de Lie cualquiera, el primer espacio vectorial que se nos puede ocurrir es su

álgebra de Lie, que tiene la misma dimensión que el grupo.

Definición 3.6. *La aplicación*

$$\begin{aligned}\text{Ad} : G &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \text{Ad}(g) = \text{Ad}_g = (c_g)_*\end{aligned}$$

es una representación de G sobre el espacio vectorial \mathfrak{g} , llamada **representación adjunta** Ad de G .

Esta representación es particularmente útil en distintas situaciones. En particular, se cumple que dada una representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ de un grupo de Lie G :

$$\rho_*(\text{Ad}_g X) \circ \rho(g) = \text{Ad}(g) \circ \rho_*(X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Además, la representación adjunta se comporta bien respecto al producto directo. Dado $G = H \times K$ un producto directo de grupos de Lie. La representación adjunta de G en $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ es la suma directa de las representaciones adjuntas de H sobre \mathfrak{h} y K sobre \mathfrak{k} :

$$\text{Ad}_{(h,k)}(X, Y) = (\text{Ad}_h X, \text{Ad}_k Y) \quad \forall (h, k) \in H \times K, (X, Y) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}.$$

En caso de que G sea un grupo abeliano, la representación adjunta es trivial y si G es lineal, tendremos que su forma es particularmente sencilla⁹:

Proposición 3.4. *Dado $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{K})$ cualquiera y $Q \in G$, se tiene que $\text{Ad}_Q : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ viene dada por $\text{Ad}_Q X = Q \cdot X \cdot Q^{-1}$, donde X es un elemento del álgebra de Lie de $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, es decir, una matriz $n \times n$.*

Demostración.

Consideramos $\gamma(t) = e^{tX}$, una curva en G . Entonces, la definición 3.6 nos dice que

$$\text{Ad}_Q X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Q \cdot \gamma(t) \cdot Q^{-1} = Q \cdot X \cdot Q^{-1}$$

■

Inspirándonos en la misma idea: buscar representaciones sobre espacios vectoriales con la misma dimensión del propio grupo de Lie, buscamos la representación adjunta de un álgebra de Lie. En concreto, se puede demostrar que la diferencial de la representación adjunta de un grupo de Lie G , que

⁹Donde, démonos cuenta, el espacio vectorial sobre el que está actuando G , vía representación adjunta, es un espacio vectorial de matrices.

denotamos como $\text{ad}_{\mathfrak{g}} = \text{ad} = \text{Ad}_*$, es una representación del álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre $\text{End}(\mathfrak{g})$, a la que llamamos **representación adjunta** de \mathfrak{g} .

Además, tenemos una particularización del diagrama conmutativo de la definición 3.1:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{End}(\mathfrak{g}) \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{GL}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Y se cumple que

$$\text{ad}(X)(Y) = \text{ad}_X Y = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Demostración.

Sean X, Y dos campos vectoriales invariantes por la izquierda en G y ϕ_t el flujo asociado al campo vectorial X . Entonces, el diagrama anterior nos dice que:

$$\begin{aligned} \text{ad}_X Y &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\text{exp } tX} Y_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (c_{\text{exp } tX})_* Y_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\text{exp } -tX})_* (L_{\text{exp } tX})_* Y_e = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\text{exp } -tX})_* Y_{\text{exp } tX} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_{-t})_* Y_{\phi_t(e)} = [X, Y]_e. \end{aligned}$$

■

3.1.4. Métricas invariantes en grupos de Lie

Los grupos de Lie G son variedades diferenciables así que tiene sentido plantearnos definir sobre ellas métricas (pseudo)Riemannianas. En particular, en física, nos interesará tener métricas invariantes bajo la acción del grupo G , que nos permitirán definir lagrangianos invariantes gauge.

Definición 3.7. *Dada una métrica s en un grupo de Lie G , se dice que es **invariante por la izquierda** (resp. **derecha**) si las traslaciones a la izquierda (resp. derecha) son isometrías de G – i.e. $L_g^* s = s \quad \forall g \in G$ (resp. $R_g^* s = s \quad \forall g \in G$)–. En caso de que sea invariante por la derecha y por la izquierda se dirá que es **bi-invariante**.*

Se puede demostrar que las geodésicas de una métrica bi-invariante en un grupo de Lie G –pensadas como las geodésicas de una variedad riemanniana– que pasan por el elemento neutro son de la forma $\gamma(t) = \exp(tX)$ donde $X \in \mathfrak{g}$. Es decir, la noción de exponencial geométrica (de la variedad riemanniana) coincide con la de la aplicación exponencial de grupos de Lie cuando la métrica es bi-invariante.

Es inmediato comprobar que una métrica induce un producto escalar en \mathfrak{g} pues, como sabemos, $\mathfrak{g} \cong T_e G$. Además, dado un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{g} , se puede definir

- una métrica invariante por la derecha sobre G dada por $s(X, Y) = \langle R_{g^{-1}*}(X), R_{g^{-1}*}(Y) \rangle \forall g \in G, X, Y \in T_g G$.
- una métrica invariante por la izquierda sobre G dada por $s(X, Y) = \langle L_{g^{-1}*}(X), L_{g^{-1}*}(Y) \rangle \forall g \in G, X, Y \in T_g G$.

Sin embargo, esta forma no nos permite definir métricas bi-invariantes salvo en el caso trivial en que G es abeliano y $L_g = R_g \forall g \in G$. Por ello, es muy relevante el siguiente resultado, que nos da una condición suficiente y necesaria para que una métrica invariante por la izquierda¹⁰:

Teorema 3.2. *Una métrica invariante por la izquierda de un grupo de Lie G es bi-invariante si y sólo si el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{g} inducido por s es Ad-invariante:*

$$\langle \text{Ad}_g v, \text{Ad}_g w \rangle = \langle v, w \rangle, \forall g \in G, v, w \in \mathfrak{g}$$

Demostración.

Sean $X, Y \in T_p G$. Entonces, $s_p(X, Y) = \langle L_{p^{-1}*}(X), L_{p^{-1}*}(Y) \rangle$ y se cumple, utilizando la Ad-equivariancia y la invariancia por la izquierda de s , que

$$\begin{aligned} (R_g^* s)_p(X, Y) &= \langle L_{(pg)^{-1}} R_{g*}(X), L_{(pg)^{-1}} R_{g*}(Y) \rangle = \\ &= \langle \text{Ad}_{g^{-1}} \circ L_{p^{-1}*}(X), \text{Ad}_{g^{-1}} \circ L_{p^{-1}*}(Y) \rangle. \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Ahora, a partir del teorema 3.3 podemos deducir el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *Todo grupo de Lie compacto tiene una métrica bi-invariante.*

En teorías gauge esto se va a traducir en que para una teoría con grupo de simetrías (internas) compacto siempre podremos escribir un lagrangiano invariante gauge y que además sea tal que la energía esté acotada por debajo.

3.1.5. La forma de Killing

Ahora vamos a introducir la **forma de Killing**, que nos servirá para construir métricas invariantes en grupos de Lie compactos. Es una forma bilineal simétrica que se define intrínsecamente y que además es especialmente importante en la teoría de representaciones de álgebras de Lie porque se utiliza para saber si un álgebra es semisimple gracias a un resultado de Cartan.

¹⁰Claramente, se puede demostrar algo análogo para una métrica invariante por la derecha.

Definición 3.8. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre \mathbb{K} . Se define una forma \mathbb{K} -lineal, simétrica en \mathfrak{g}

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (X, Y) &\longmapsto \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y) \end{aligned}$$

a la que llamamos **forma de Killing** $B_{\mathfrak{g}}$ en \mathfrak{g} .

Teorema 3.4. Dado un automorfismo de álgebras de Lie $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, se cumple que

$$B_{\mathfrak{g}}(\sigma X, \sigma Y) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Demostración.

Como σ es un automorfismo de álgebras de Lie se tiene que $\text{ad}_{\sigma X} = \sigma \circ \text{ad}_X \circ \sigma^{-1}$, ya que

$$\text{ad}_{\sigma X} Y = [\sigma X, Y] = \sigma([X, \sigma^{-1} Y]) = \sigma \circ \text{ad}_X(\sigma^{-1} Y).$$

Entonces, de la definición de forma de Killing se sigue que

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}}(\sigma X, \sigma Y) &= \text{tr}(\text{ad}_{\sigma X} \circ \text{ad}_{\sigma Y}) \\ &= \text{tr}(\sigma \circ \text{ad}_X \circ \text{ad}_Y \circ \sigma^{-1}) \\ &= B_{\mathfrak{g}}(X, Y). \end{aligned}$$

■

En caso de que \mathfrak{g} sea el álgebra de Lie de un grupo G se tendrá que esta relación es cierta para Ad_g , que es un automorfismo $\forall g \in G$. De esto se sigue que

Corolario 3.1. La forma de Killing $B_{\mathfrak{g}}$ define una forma simétrica bi-invariante en cualquier grupo de Lie G .

Nos interesa especialmente el caso en que las álgebras de Lie son **compactas** –son álgebras de Lie de algún grupo de Lie compacto–, donde se cumple

Teorema 3.5. La forma de Killing de un álgebra de Lie real compacta es semidefinida negativa. Se cumple

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}}(X, X) &= 0 \quad \forall X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \\ B_{\mathfrak{g}}(X, X) &< 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es el centro de \mathfrak{g} .

3.2. Acciones de grupos de Lie sobre variedades diferenciables

En esta parte del capítulo vamos a interesarnos por la forma en la que los grupos de Lie actúan como transformaciones o simetrías de objetos más generales que los espacios vectoriales, en particular, nos interesarán las **acciones** de grupos de Lie sobre variedades diferenciables. Todo lo que hemos visto hasta ahora será un caso particular de esto: una representación es una acción lineal del grupo en que la variedad es un espacio vectorial. Igual que sucedía antes, las acciones de grupos sobre conjuntos se estudian con el objetivo de poder a veces entender mejor el funcionamiento del grupo¹¹, especialmente cuando G representa las simetrías de nuestra teoría. Además, estudiaremos cuándo el espacio cociente M/G tiene estructura de variedad diferenciable.

Definición 3.9. *Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Entonces, una aplicación diferenciable*

$$\begin{aligned}\Phi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto \Phi(g, p) = g \cdot p = gp\end{aligned}$$

es una **acción por la izquierda** de G en M si cumple

1. $(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ para todo $p \in M$, $g, h \in G$.
2. $e \cdot p = p$ para todo $p \in M$.

De forma análoga se definen las acciones por la derecha¹². Debemos pensarlas como una generalización no lineal de las representaciones: ahora el soporte es una variedad diferenciable y la acción se corresponde con un homomorfismo entre el grupo G y $\text{Difeo}(M)$.

Definición 3.10. *Sea $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción por la izquierda de un grupo de Lie G en una variedad diferenciable M . Entonces, definimos la **traslación a la izquierda** por $g \in G$ como*

$$\begin{aligned}l_g : M &\longrightarrow M \\ p &\longmapsto g \cdot p\end{aligned}$$

que es una aplicación diferenciable. Además, dado $p \in M$,

$$\begin{aligned}\phi_p : G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g \cdot p\end{aligned}$$

¹¹Así sucede cuando entendemos un grupo finito como un subgrupo de un cierto grupo de permutaciones.

¹²En general, a lo largo de la sección se darán definiciones y resultados para acciones por la izquierda pero de forma análoga se construyen para el caso en que cogemos acciones por la derecha.

es la **aplicación órbita** de p bajo G , que es una aplicación diferenciable. Así, se define la **órbita** de G a través de p como $\phi_p(G)$:

$$\mathcal{O}_p = G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}.$$

Se dice que p es un **punto fijo** de la acción si todos los elementos de G actúan trivialmente sobre él. Se define el **conjunto de puntos fijos** de $g \in G$ como

$$M^g = \{p \in M \mid g \cdot p = p\}.$$

Alternativamente, el **estabilizador** de un punto $p \in M$ está formado por los elementos del grupo que actúan trivialmente sobre el punto

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}.$$

Dada una acción $\Phi : G \times M \rightarrow M$, «pertenecer a la misma órbita» es una relación de equivalencia, así que se puede definir el siguiente cociente en M :

$$M/G = \{\mathcal{O}_p \subset M \mid p \in M\},$$

al que llamamos **espacio de las órbitas** o **espacio cociente de M por la acción Φ** .

El estabilizador es un subgrupo de G y se le llama también grupo de isotropía o *little group*¹³. Como el estabilizador de cualquier punto va a ser un cerrado, el teorema de Cartan nos asegura que G_p son subgrupos de Lie de G .

Diremos que el álgebra de Lie del estabilizador de un punto p bajo una acción $\Phi : G \times M \rightarrow M$ es la subálgebra de isotropía de p . Se puede ver que los estabilizadores de dos puntos que están en la misma órbita son conjugados. Va a ser útil caracterizar la subálgebra de isotropía de un punto de una variedad con el siguiente resultado.

Proposición 3.5. *Dada una acción $\Phi : G \times M \rightarrow M$ y $p \in M$ un punto cualquiera se tiene que el núcleo de la aplicación $d_e\phi_p : \mathfrak{g} \rightarrow T_pM$ es la subálgebra de isotropía de p : \mathfrak{g}_p .*

Demostración.

¹³Es importante en física porque, por ejemplo, las partículas, que hemos dicho que vienen etiquetadas por representaciones irreducibles unitarias del grupo de simetría del espaciotiempo, pero la realidad es que las simetrías son distintas según estemos considerando que el grupo esté actuando sobre vectores que están o no en el cono de luz. Esto termina llevando a la distinción entre helicidad y espín. En el caso $m = 0$ el *little group* será precisamente el estabilizador de un 4-vector de tipo tiempo $(k, 0, 0, -k)$ y nos ayudará a clasificar las partículas posibles.

Empezamos con el contenido de la derecha: $X \in \mathfrak{g}_p \implies \exp(tX) \in G_p \forall t \in \mathbb{R}$ así que

$$\phi_p(\exp(tX)) = \exp(tX) \cdot p = p \implies X \in \text{Ker}(d_e\phi_p) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

como queríamos demostrar.

Por otra parte, dado $X \in \text{Ker}(d_e\phi_p)$, se cumple que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} (\exp(tX) \cdot p) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} (\exp(sX) \cdot \exp(\tau X) \cdot p) = D_p l_{\exp(sX)} \left(\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \exp(\tau X) \cdot p \right) = 0.$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Entonces, $\exp(tX) \cdot p$ es una curva constante: $\exp(tX) \cdot p = \exp(0) \cdot p = p$. Entonces, por la definición de subálgebra de isotropía de p , tenemos que $X \in \mathfrak{g}_p$. ■

Ahora damos algunas definiciones, que de nuevo se estudian en el caso general de acciones de grupos G sobre un conjunto X .

Definición 3.11. Sea Φ una acción de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M . Sea ϕ_p la aplicación órbita de p bajo G . Entonces,

- Si ϕ_p es sobreyectiva $\forall p \in M$, se dice que la acción Φ es **transitiva**. En ese caso M tiene tan solo una órbita y se dice que la variedad M es un **espacio homogéneo** respecto a G .
- Si ϕ_p es inyectiva $\forall p \in M$, se dice que la acción Φ es **libre**.
- Si Φ es libre y transitiva se dice que es **simplemente transitiva**.
- Si el homomorfismo $\phi : G \rightarrow S(M)$ ¹⁴ inducido por Φ es inyectivo se dice que la acción Φ es **fiel** o **efectiva**.

Es inmediato comprobar, a partir de las definiciones, que

- Φ es transitiva si y sólo si ϕ_p es sobreyectiva para algún $p \in M$.
- Φ es libre si y sólo si todos los elementos no trivial de G cambian todos los puntos de M , o, equivalentemente, si los estabilizadores de todos los puntos son el grupo trivial o ningún elemento del grupo –salvo el neutro– deja fijo ningún punto $p \in M$. Si Φ es libre entonces las aplicaciones órbitas son inmersiones, que en caso de ser G compacto, serán embebimientos.
- Si Φ es simplemente transitiva, ϕ_p es una biyección entre G y $M \forall p \in M$.

¹⁴El grupo de biyecciones de los puntos de M .

- Si Φ es fiel entonces no existe ningún elemento no trivial del grupo que deje fijos todos los puntos de M .

Definición 3.12. Dadas dos acciones $\Phi : G \times M \rightarrow M$ and $\Psi : G \times N \rightarrow N$ de G sobre variedades M y N decimos que una aplicación $f : M \rightarrow N$ es **G -equivariante** si

$$f(g \cdot_{\Phi} p) = g \cdot_{\Psi} f(p) \quad \forall p \in M, g \in G.$$

En realidad, la mayor parte de los conceptos que hemos ido definiendo se pueden dar en general para acciones de grupos sobre conjuntos. En particular, presentamos ahora una definición que nos va a permitir responder una pregunta interesante para lo que sigue: ¿cuándo tiene el espacio cociente estructura de variedad diferenciable?

Definición 3.13. Decimos que una acción libre por la derecha $\Phi : G \times M \rightarrow M$ de un grupo de Lie G en una variedad diferenciable M es una acción **principal** si la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : M \times G &\rightarrow M \times M \\ (p, g) &\mapsto (p, pg). \end{aligned}$$

es cerrada.

Se puede demostrar que la condición necesaria para que M/G tenga una estructura diferenciable única tal que $\pi : M \rightarrow M/G$ sea una submersión es precisamente que la acción Φ de G en M sea principal. En particular, utilizaremos principalmente los siguientes casos, que se puede demostrar son acciones principales:

- Acciones libres de grupos de Lie compactos en variedades diferenciables.
- Acciones de un subgrupo cerrado $H \subset G$ de un grupo de Lie G sobre el propio grupo.

Por tanto, los espacios cocientes definidos a partir de estas van a ser variedades diferenciables (con una estructura diferenciable única tal que la proyección canónica sea una submersión).

3.2.1. Campos fundamentales de una acción

Ahora queremos discutir cómo se construye, dada una acción de G en una variedad M , un campo vectorial en M a partir de un elemento del álgebra de Lie \mathfrak{g} . La idea viene del teorema 2.3, que nos decía que la diferencial de un homomorfismo de grupos de Lie es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Si pensamos en el homomorfismo $\phi : G \rightarrow \text{Difeo}(M)$ inducido por una acción de un grupo de Lie G sobre una variedad M , tiene sentido pensar que la solución a la pregunta que nos acabamos de hacer va a venir dado por el homomorfismo inducido entre las correspondientes álgebras de Lie: $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. La formalización de esta idea geométrica viene dada por la siguiente definición.

Definición 3.14. *Dada una acción por la derecha $\Phi : G \times M \rightarrow M$ de un grupo de Lie G en una variedad diferenciable M y $X \in \mathfrak{g}$, definimos el **campo vectorial fundamental** \tilde{X} sobre M como*

$$\tilde{X}_p = \frac{d}{dt}_{t=0} (p \cdot \exp(tX)) = (d_e \phi_p)(X_e), \quad \forall p \in M,$$

donde ϕ_p es la aplicación órbita de la acción por la derecha de la definición 3.10.

En caso de que la acción sea por la izquierda la definición es un poco distinta –veremos en un segundo el porqué de esto–:

$$\tilde{X}_p = \frac{d}{dt}_{t=0} (\exp(-tX) \cdot p) = (D_e \phi'_p)(X_e) \quad \forall p \in M,$$

donde

$$\begin{aligned} \phi'_p : G &\rightarrow M \\ g &\mapsto g^{-1} \cdot p. \end{aligned}$$

Es decir, parametrizando la curva integral en sentido contrario.

Geoméricamente estas definiciones solo quieren precisar lo que dijimos antes: un elemento del álgebra de Lie $X \in \mathfrak{g}$ –recordemos, un campo vectorial invariante por la izquierda– define el subgrupo uniparamétrico $\exp(tX)$, que es una curva integral de X que pasa por el neutro. La acción de este subgrupo en $p \in M$ define precisamente una curva en M y el campo vectorial fundamental en p viene dado por la velocidad de esa curva en $t = 0$.

En el caso de las representaciones que estudiamos en la sección anterior esto nos permite ver que los campos fundamentales son los endomorfismos del espacio vectorial. Una representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ de un grupo de Lie en un espacio vectorial V define una acción por la izquierda $\Phi : G \times V \rightarrow V$. La representación inducida del álgebra de Lie \mathfrak{g} es $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ y por tanto los campos fundamentales vienen dados, a partir de $X \in \mathfrak{g}$, por

$$\tilde{X}_v = \frac{d}{dt}_{t=0} (\exp(-tX) \cdot v) = -\rho_*(X)(v) \quad \forall v \in V.$$

Entonces, dada una acción $\Phi : G \times M \rightarrow M$ hemos conseguido definir una aplicación

$$\begin{aligned}\phi_* : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ X &\mapsto \tilde{X}.\end{aligned}$$

La proposición 3.5 nos asegura que en caso de que la acción sea libre esta va a ser una aplicación inyectiva. El siguiente resultado nos dice que la aplicación es de hecho un homomorfismo de álgebras de Lie, como deseábamos.

Proposición 3.6. *Sea G un grupo de Lie actuando sobre una variedad diferenciable M . Entonces, la aplicación*

$$\begin{aligned}\phi_* : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ X &\mapsto \tilde{X},\end{aligned}$$

que asocia a cada elemento del álgebra su campo fundamental es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Tiene sentido preguntarnos cómo transforman los campos fundamentales bajo la acción de grupo. Se puede demostrar que dado un grupo de Lie G que actúa sobre una variedad M y $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$:

- Si G está actuando por la derecha, entonces $r_{g^*}(\tilde{X}) = \tilde{Y}$, donde $Y = \text{Ad}_{g^{-1}} X \in \mathfrak{g}$.
- Si G está actuando por la izquierda, entonces $l_{g^*}(\tilde{X}) = \tilde{Z}$, donde $Z = \text{Ad}_g X \in \mathfrak{g}$.

3.2.2. La forma de Maurer-Cartan y la diferencial de una acción

Ahora vamos a definir la **forma de Maurer-Cartan**, que es una 1-forma \mathfrak{g} -valuada que se puede definir canónicamente sobre un grupo de Lie G . Geométricamente podemos pensar en ella como un análogo de la identificación un vector tangente a un punto de una variedad con los gérmenes de funciones en dicho punto. Es decir, hemos visto que el álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada a un grupo de Lie G se puede definir como el espacio tangente al elemento neutro $T_e G$ y por tanto como una clase de equivalencia de curvas diferenciables en G que empiezan en e . Entonces, lo que hace la forma de Maurer-Cartan es: al pensar en $T_g G$ como una clase de equivalencia de curvas que empiezan en $g \in G$, asignar a cada vector $v \in T_g G$ la clase de equivalencia de las curvas trasladadas por la izquierda con g^{-1} . Esas curvas (y esa clase) comenzará en e y por tanto estará en el álgebra de Lie \mathfrak{g} . Esta 1-forma es muy importante para trabajar con sistemas coordenados comóviles o bases móviles, que permiten formalizar la idea de observador en relatividad general.

Definición 3.15. Dado un grupo de Lie G con álgebra de Lie \mathfrak{g} , se define $\mu \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$, una 1-forma en G \mathfrak{g} -valuada dada por

$$(\mu)_g(v) = (d_g L_{g^{-1}})(v) \quad \forall g \in G, v \in T_e G.$$

Llamamos a μ **forma de Maurer-Cartan** o forma canónica asociada al grupo de Lie G .

Geoméricamente tenemos que pensar que es un objeto que a cada vector tangente a $g \in G$ le asocia el único campo vectorial invariante por la izquierda –elemento del álgebra de Lie por tanto– tal que $X_g = v$. Se puede comprobar con la definición que es invariante bajo traslaciones a la izquierda $L_g^* \mu = \mu$ y se transforma como

$$R_g^* \mu = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \mu^{15}$$

bajo traslaciones a la derecha¹⁶.

Entonces, utilizando la forma de Maurer-Cartan y la proposición 3.6 se puede demostrar que la diferencial en un punto $(x, g) \in M \times G$ de la acción $\Phi : M \times G \rightarrow M$ viene dada por

$$\begin{aligned} D_{(x,g)} \Phi : T_x M \oplus T_g G &\longrightarrow T_{xg} M \\ (X, Y) &\longmapsto (D_x r_g)(X) + \widetilde{\mu(Y)}_{xg}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $T_{(x,g)} M \times G \cong T_x M \oplus T_g G$.

¹⁵Esta propiedad se puede explicar diciendo que la forma de Maurer Cartan es una forma pseudotensorial de tipo (Ad, g) , como precisaremos en el siguiente capítulo.

¹⁶A pesar de que todo lo que se hace para acciones a la izquierda se puede traducir en acciones a la derecha, durante toda esta sección hemos visto como esta relación no es inmediata muchas veces porque algunas definiciones distinguen entre un «lado» y el otro. Seguiremos las convenciones más habituales: considerar acciones por la derecha cuando queremos estudiar espacios cocientes M/G y acciones por la izquierda cuando son transitivas, cuando M es un espacio homogéneo.

Capítulo 4

Fibrados sobre variedades

In the beginning

Then God said:

Let there be gauge theories!

And there was light,

clear and bright

followed by particles

fundamental or otherwise. [...]

And it was called

the miracle of gravity.

Este es un fragmento del poema cómico con el que empieza el libro *The mathematical foundations of gauge theories* [19], escrito por Marathe y Martucci, en el que se desarrolla de forma pedagógica toda la teoría de fibrados necesaria para formalizar las teorías gauge. En este capítulo utilizaremos principalmente material del capítulo 4 de [16], del capítulo 9 de [14] y de las notas [20]. Hemos llegado ahora al objetivo principal del trabajo: estudiar los fibrados sobre variedades diferenciables. En particular, nos interesará aprender un tipo especial de fibrados que se llaman fibrados principales.

La idea detrás los espacios fibrados es una que se usa continuamente en física¹ y que en realidad también utilizamos en el día a día: cuando vemos un mapa del tiempo en realidad lo que estamos imaginándonos es que tenemos un espacio y a cada punto le estamos asociando una temperatura, por ejemplo. Entonces, en cada punto tenemos colocado un semieje real positivo²; esto serán las **fibras** –que tendrán todas la estructura de una fibra modelo–. La idea entonces es pensar en unos *spaghetti*

¹Por ejemplo, lo que explicamos en la introducción: las dimensiones extra necesarias en teoría de cuerdas se pueden pensar como que en cada punto 4 dimensional se está colocando una variedad de Calabi-Yau 6 dimensional.

²Supongamos que medimos en Kelvin.

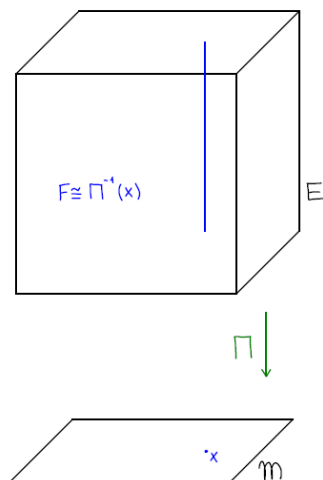


Figura 4.1: Representación esquemática de un fibrado.

colocados sobre una variedad diferenciable M a la que llamaremos **variedad base**. Como veremos, este es un ejemplo muy sencillo en el que el fibrado es trivial: un producto cartesiano entre la variedad base y la fibra. Sin embargo, los ejemplos que verdaderamente nos interesarán, y los que explican un montón de fenómenos que conocemos³, serán aquellos en que el fibrado no es trivial sino que esté «retorcido». El caso general se ilustra en la figura 4.1.

Como venimos diciendo a lo largo de todo el trabajo, nuestro interés está en las teorías gauge. Pero para formalizar esto nos falta lo que estudiaremos en el capítulo siguiente: las conexiones y curvaturas sobre fibrados. Pero estos ejemplos nos muestran, y es objetivo de este capítulo, que en realidad el sitio natural desde el que pensar muchos conceptos de geometría y física es desde la teoría de fibrados. Un resumen de la «historia» de las teorías gauge es el siguiente: el marco geométrico fundamental será un fibrado principal con grupo estructural el grupo gauge de la interacción. La variedad base será nuestro espaciotiempo. Las fibras se piensan en física como el «espacio interno» sobre el que se «mueven» también los campos. Las conexiones serán los campos gauge, mediadores de las interacciones, mientras que los campos de materia son secciones de fibrados vectoriales asociados al fibrado principal. A lo largo de lo que queda de trabajo le intentaremos dar sentido a todas estas palabras.

El capítulo se organiza en tres partes. En la primera damos las definiciones básicas de fibrados (generales) sobre variedades diferenciables y comentamos por encima el caso particular de los fibrados vectoriales. También definimos aplicaciones entre fibrados y los automorfismos, que en el caso de los

³Aunque en un primer lugar pudiera parecer que, por ejemplo, formular el electromagnetismo de esta forma solamente es una manera más elegante de describirlo, terminamos llegando a sistemas como el monopolio de Dirac, donde el fibrado de Hopf es el lugar natural desde el que pensar las cosas. Es decir, aunque en muchos ejemplos tengamos fibrados triviales, hay veces en que la física está «retorcida» y todo este desarrollo no es un artificio sino la mejor manera de describirlo.

fibrados principales serán las transformaciones gauge. En la segunda explicamos los fibrados principales utilizando toda la teoría de grupos de Lie y de acciones de grupos de Lie que desarrollamos en los capítulos anteriores. En particular, estudiamos el fibrado de las referencias como ejemplo paradigmático de fibrado principal, que además nos va a permitir motivar que muchos de los conceptos estudiados en el capítulo 1 se pueden entender mejor desde este punto de vista. Terminamos definiendo los fibrados asociados a fibrados principales, haciendo énfasis en el caso vectorial, cuyas secciones serán los campos de materia de las teorías gauge.

4.1. Fibrados y fibras

Nuestro objetivo ahora es formalizar la idea de «colocar un *spaghetti* encima de cada punto de nuestra variedad». En general, dada $\pi : E \rightarrow M$, una proyección –una aplicación diferenciable sobreyectiva– entre variedades diferenciables, decimos que $E_x = \pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(\{x\}) \subseteq E$ es la **fibra** de π sobre x . En general, las fibras E_x y E_y sobre puntos distintos no tienen por qué estar relacionadas de ninguna forma y puede ser que en particular no sean subvariedades de E . El caso que queremos estudiar es ese en que sí están embebidas en E como subvariedades y en que todas son difeomorfas a una fibra *modelo*⁴. Queremos una generalización del ejemplo trivial en que $E = M \times F$. Los fibrados serán productos *retorcidos*⁵ globalmente que de forma local sí se podrán ver como productos cartesianos como ese⁶. La formalización de esta idea geométrica es la siguiente definición.

Definición 4.1. *Un **fibrado** es una cuaterna $(E, \pi, M; F)$ donde E, M, F son variedades diferenciables, $\pi : E \rightarrow M$ una aplicación diferenciable sobreyectiva y tal que $\forall x \in M \exists U \subseteq M$ entorno abierto suyo tal que $\pi|_{E_U}$, donde $E_U = \pi^{-1}(U)$, se puede trivializar. Es decir, $\exists \phi_U : E_U \rightarrow U \times F$ difeomorfismo tal que $\text{pr}_1 \circ \phi_U = \pi$ ⁷.*

Se suele escribir

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

y se dice que E es el **espacio total**, M la **variedad base**, F la **fibra modelo**, π la **proyección** y (U, ϕ_U) una **trivialización local**⁸.

⁴A la que más adelante le pediremos tener más estructura además de ser variedad diferenciable.

⁵En inglés *twisted*, por eso se los llama a veces *twisted fiber bundles*.

⁶A esto se lo llama ser localmente trivializable.

⁷Donde pr_1 es la proyección del producto sobre el primer factor.

⁸Que además veremos nos servirá para construir las cartas que le podrán dar estructura diferenciable a los fibrados cuando los «construyamos».

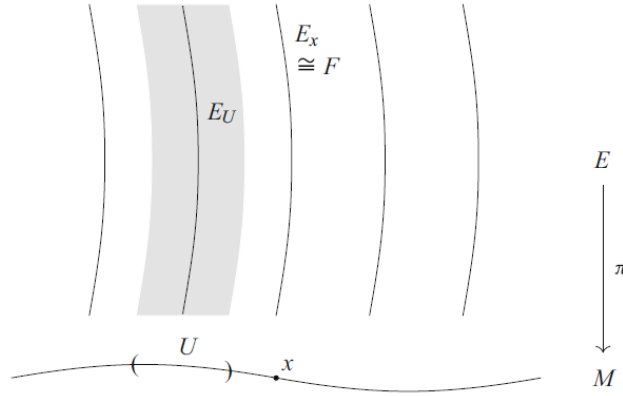


Figura 4.2: Fibrado $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$. Figura 4.1 de [16].

La definición nos asegura, como deseábamos, que cada fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$ sea una subvariedad de E , gracias al teorema del valor regular y que todas son difeomorfas a F . Esta definición se puede visualizar como se muestra en la figura 4.2.

En el capítulo 1 decíamos que los campos vectoriales son secciones del fibrado tangente, esta relación campo \longleftrightarrow sección de un cierto fibrado va a seguir siendo cierta –de una forma que precisaremos más adelante–. Por ello, definimos lo siguiente:

- Una **sección global** de π como una aplicación diferenciable $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_M$. Además, denotamos por $\Gamma(E)$ al conjunto de secciones globales del fibrado.
- Una **sección local** de π como una aplicación diferenciable $s : U \subset M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_U$ donde U es un abierto de M . Además, denotamos por $\Gamma(U, E)$ al conjunto de secciones locales de un abierto U .

Como, por definición, un fibrado es localmente trivializable, está claro siempre que tendrá secciones locales. Para ilustrar esta definición vamos a explicar dos ejemplos. El primero, un fibrado trivial⁹, donde $M = \mathbb{S}^1, F = [0, 1]$ y $E = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, es decir, un fibrado en que el espacio total es un cilindro con borde y la base es una circunferencia. En este caso las trivializaciones locales son también globales. Sin embargo, el ejemplo que tiene que venirnos a la cabeza al pensar en la idea de fibrado es en el que el espacio total es la banda de Möbius¹⁰ en lugar de un cilindro. En ese caso, localmente tendremos trivializaciones –iguales a las del cilindro– y todas las fibras serán difeomorfas a $[0, 1]$, pero al mirarlo

⁹En general, se dice que un fibrado en que se toma $E = M \times F$ es un fibrado **trivial**, en el que la proyección es precisamente la proyección canónica sobre el primer espacio. En un fibrado trivial o en un fibrado isomorfo a un fibrado trivial (al que llamamos **trivializable** –precisamos en un segundo qué es que dos fibrados sean isomorfos–) tendremos que existen secciones globales.

¹⁰Lo más sencillo es pensar en $[0, 1] \times [0, 1]$ con la relación de equivalencia $(0, y) \sim (1, 1 - y)$.

de lejos –globalmente– nos encontramos con que está retorcido¹¹. Esto se ilustra en la figura 4.3.

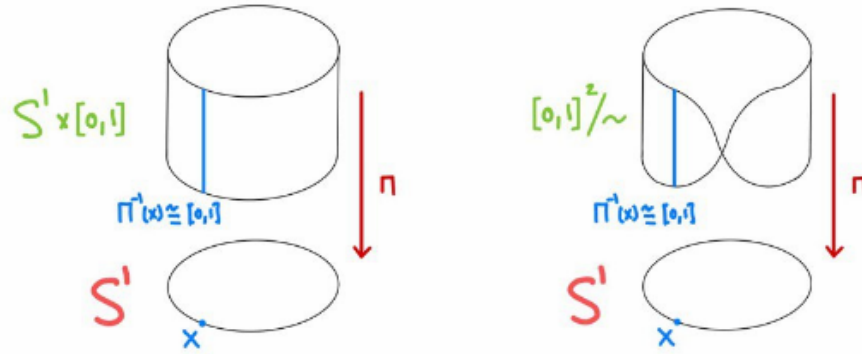


Figura 4.3: Cilindro y banda de Möbius fibrando sobre una S^1 .

Parece razonable preguntarnos qué condiciones van a tener que cumplir las trivializaciones que hemos definido en 4.1. Para ello, consideramos un recubrimiento abierto de M , $\{U_i\}_{i \in I}$, y sus correspondientes trivializaciones (U_i, ϕ_i) . Decimos que el conjunto $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ es un **atlas del fibrado** $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ y que dados U_i, U_j tales que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, los difeomorfismos

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{(U_i \cap U_j) \times F} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$$

se llaman **funciones de transición**. De hecho, $\forall x \in M$ podemos construir un difeomorfismo

$$\phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1} : F \rightarrow F.$$

A veces se llama también función de transición a las aplicaciones¹²

$$\begin{aligned} \phi_{ji} : U_i \cap U_j &\rightarrow \text{Difeo}(F) \\ x &\mapsto \phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1}. \end{aligned}$$

Lo que hemos dicho hasta ahora nos asegura que las trivializaciones (y las funciones de transición) «pegan bien» dos entornos de un punto. Si ahora además exigimos que cuando cojamos tres U_i, U_j, U_k abiertos todo siga «funcionando», llegamos a la condición $\phi_{ik}(x) \circ \phi_{kj}(x) \circ \phi_{ji}(x) = \text{Id}_F$ para todo $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

¹¹En este caso M puede embeberse en el espacio total (la circunferencia central en la banda) pero esto ni siquiera tiene por qué ser cierto en general.

¹²Es posible que todas las funciones de transición vayan a un subgrupo $G < \text{Difeo}(F)$. En ese caso diremos que tenemos un G -fibrado. Aunque no lo vamos a explicar así, un fibrado vectorial (como los fibrados tangente o cotangente que definimos en el primer tema) será un $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ -fibrado.

Esto nos lleva a otra forma de pensar los fibrados: en lugar de darnos la cuaterna de la que hablábamos en 4.1 podrían habernos dado dos variedades M, F , un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de M y unas funciones $\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{Difeo}(F)$ que satisfagan

$$\begin{aligned}\phi_{ii}(x) &= \text{Id}_F \quad \forall x \in U_i, \\ \phi_{ij}(x) \circ \phi_{ji}(x) &= \text{Id}_F \quad \forall x \in U_i \cap U_j \\ \phi_{ik}(x) \circ \phi_{kj}(x) \circ \phi_{ji}(x) &= \text{Id}_F \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k,\end{aligned}$$

que se llaman condiciones de **cociclo**. Se puede demostrar fácilmente que las funciones de transición de un fibrado definido tal y como lo hicimos antes satisfacen todas estas propiedades¹³ y que a partir de esta información de verdad se puede construir un fibrado. En estas funciones vendrá entonces codificado cómo de retorcido está el fibrado. Esta última forma de entender los fibrados puede pensarse como un «libro de instrucciones» para construirlo: nos dan el espacio base, la fibra tipo y las instrucciones sobre cómo se deben ir pegando las fibras, que deben ser consistentes.

Tal y como llevamos haciendo en el resto de capítulos, queremos definir las aplicaciones entre fibrados que respetan su estructura – *i. e.* los morfismos de esta categoría–. Dados dos fibrados $(E, \pi, M; F)$ y $(E', \pi', M'; F')$ un **morfismo de fibrados** es un par de aplicaciones diferenciables (\bar{f}, f) tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

De forma análoga se definen isomorfismos, monomorfismos... En realidad, el caso de mayor interés será ese en que $M = M'$. De hecho, un automorfismo de fibrados es una **transformación gauge**, que serán objeto de estudio del próximo capítulo. Esto codifica precisamente la idea de física de que una transformación gauge es una redundancia: un cambio en la descripción. Podemos pensar en dos ejemplos: el caso trivial en que todas las fibras cambian de la misma forma como cuando pasamos de grados Celsius a Kelvin¹⁴ o el caso no tan trivial y que en realidad nos va a describir algo muy semejante a las teorías gauge físicas del cambio de divisas¹⁵ donde quizá no todas las fibras se transformen de la misma forma.

Antes de pasar a la definición de fibrados principales, que es la que más nos importa, vamos a dar

¹³Las dos primeras inmediatas por definición y la otra solo viene de considerar la composición de tres funciones de transición, como ya hemos motivado.

¹⁴Podemos pensar que un mapa donde a cada sitio le asignamos una temperatura es un fibrado (muy trivial).

¹⁵La idea de explicar transformaciones gauge a través del cambio de divisas está desarrollada en [21], si bien no hace un desarrollo riguroso de la teoría de fibrados sino que lo explica por analogía a la conexión y curvatura en variedades pseudo-Riemannianas.

algunas definiciones sobre fibrados vectoriales, que son en realidad muy importantes.

4.1.1. Fibrados vectoriales

Hemos dicho que las funciones de transición se pueden ver como aplicaciones que van de abiertos de la variedad a $\text{Difeo}(F)$. En caso de que todas estén en un subgrupo G de los difeomorfismos de F , diremos que es un **G -fibrado**. De ser así, tendremos una simetría «extra» y tendrá sentido exigir que la fibra F tenga una estructura que la respete. Vamos a comentar el caso en que $G = \text{GL}(n, \mathbb{K})$: los fibrados vectoriales, donde pediremos que $\pi^{-1}(x)$ sea un espacio vectorial $\forall x \in M$.

Decimos que

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

es un **fibrado vectorial** de rango n si $V \cong \mathbb{K}^n$ ¹⁶ y existe un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tal que las aplicaciones

$$\phi_{ix} : \pi^{-1}(x) \rightarrow V$$

inducidas por ϕ_i son isomorfismos de espacios vectoriales $\forall x \in U_i$. Si $n = 1$ se dirá que es un **fibrado de línea**.

Todo lo que sabemos hacer con espacios vectoriales: productos tensoriales, sumas directas... se puede extender en fibrados de forma inmediata. Estas construcciones serán útiles y en general, dado un fibrado vectorial $E \rightarrow M$, podremos construir fibrados $A^k T^* M \otimes E \rightarrow M$ ¹⁷ tales que las fibras sean k -formas sobre M E -valuadas.

Podríamos probar que el fibrado tangente cumple esta definición pero vamos a ver que es un fibrado vectorial viéndolo como fibrado vectorial asociado a un cierto fibrado principal (el de las referencias lineales, que definiremos más adelante).

4.2. Fibrados principales

Los fibrados principales, junto a las conexiones que vamos a estudiar en el capítulo siguiente, son el enfoque desde el que entender la mayor parte de las teorías físicas que se han desarrollado y formalizado como teorías de campos durante el siglo pasado. De hecho, no se trata solo de un artificio matemático para escribir las cosas de forma más compacta y elegante sino que hay ciertos fenómenos para los que

¹⁶Y entonces $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{K}^n \forall x \in M$

¹⁷Donde A es el antisimetrizador, ya que las k -formas son por definición tensores antisimétricos.

el lenguaje en el que la física se vuelve transparente es precisamente el de la teoría de fibrados.

Definición 4.2. *Sea*

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

un fibrado con fibra un grupo de Lie G y una acción por la derecha de G sobre P . Diremos que es un **G -fibrado principal** o fibrado principal con **grupo estructural G** si se cumple que

1. La acción de G es simplemente transitiva sobre las fibras de π y, además, las deja invariantes. Es decir, la acción se podrá restringir a $P_x \times G \rightarrow P_x$ y la aplicación órbita $G \rightarrow P_x$ es biyectiva $\forall x \in M, p \in P_x$.
2. Existe un atlas donde las trivializaciones son G -equivariantes. Es decir, $\phi_i : P_{U_i} \rightarrow U_i \times G$ es tal que $\phi_i(p \cdot g) = \phi_i(p) \cdot g \forall p \in P_{U_i}, g \in G$ donde G actúa en $(x, a) \in U_i \times G$ como $(x, a) \cdot g = (x, ag)$.

La fibra P_x es una subvariedad de P para la que la aplicación órbita $\phi_p : G \rightarrow P_x$ tal que $\phi_p(g) = p \cdot g$ es un embebimiento (por definición el estabilizador de todo punto es trivial). Esto nos permite pensar que la fibra de un punto de M va a ser precisamente la órbita por la acción de G .

En un fibrado principal las funciones de transición son especiales¹⁸:

Proposición 4.1. *Sean $P \rightarrow M$ un fibrado principal con grupo estructural G y un atlas del fibrado $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ donde $\{U_i\}_{i \in I}$ es recubrimiento abierto de M . Entonces, las funciones de transición valoran en $G \subset \text{Difeo}(G)$:*

$$\begin{aligned} \phi_{ji} : U_i \cap U_j &\longrightarrow G \subset \text{Difeo}(G) \\ x &\longleftarrow \phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1} \end{aligned}$$

donde $g \in G$ actúa en G con la multiplicación por la izquierda, que es un difeomorfismo:

$$L_g(h) = g \cdot h.$$

La demostración es inmediata ya que a partir del difeomorfismo $\phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1} : G \rightarrow G$, que existe $\forall x \in U_{ij}$, podemos definir un elemento $g = \phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1}(e)$. La G -equivariancia nos asegura la acción por la derecha de la forma deseada.

¹⁸Tan especiales que en realidad se puede probar que se puede construir un fibrado principal con grupo estructural G a partir de un recubrimiento abierto de M y unas funciones de transición $\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{Difeo}(G)$ del estilo multiplicación por la izquierda: $\phi_{ij}(x)(h) = \hat{\phi}_{ij} \cdot h$ donde $\hat{\phi}_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ y tal que $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$. Es decir, como hicimos antes al dar las «instrucciones» para construir un fibrado cualquiera. Demostramos una de las implicaciones ahora, la otra es constructiva.

Una propiedad de los fibrados principales es que las secciones locales y las trivializaciones locales están relacionadas por una biyección. Esto a veces sirve para probar de forma más sencilla que cierta acción de un grupo de Lie está definiendo un fibrado principal sobre una variedad P .

Proposición 4.2. *Sean G un grupo de Lie, $\pi : P \rightarrow M$ una proyección de variedades diferenciables y una acción de G sobre P por la derecha. Entonces, P es un fibrado principal con grupo estructural G si y sólo si la acción de G preserva las fibras de π y actúa sobre ellas de forma simplemente transitiva y existe un conjunto de secciones locales $s_i : U_i \rightarrow P$ de π donde $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de M .*

Está claro que una de las dos implicaciones es muy sencilla: dado un fibrado principal $P \rightarrow M$ sabemos que existe un atlas $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$, así que podemos definir las siguientes secciones locales:

$$\begin{aligned} s_i : U_i &\longrightarrow P \\ x &\longrightarrow \phi_i^{-1}(x, e). \end{aligned}$$

Sin embargo, para demostrar la otra implicación es mejor utilizar el siguiente lema (que no demostraremos), con el que el resultado es inmediato.

Lema 4.1. *Sean G un grupo de Lie y $\pi : P \rightarrow M$ una proyección de variedades diferenciables junto a una acción de G sobre P por la derecha. Entonces, si la acción de G preserva las fibras y actúa sobre ellas de forma simplemente transitiva, dada una sección local $s : U \rightarrow P$ se puede construir el siguiente difeomorfismo G -equivariante:*

$$\begin{aligned} t : U \times G &\longrightarrow P_U \\ (x, g) &\mapsto s(x) \cdot g \end{aligned}$$

Lo que quiere decir esto es que construimos una especie de inversa de la trivialización. Este resultado hace razonable la afirmación «un fibrado principal es trivializable si y sólo si admite una sección global», que es muy interesante porque de nuevo solo es cierta en fibrados principales.

4.2.1. Morfismos entre fibrados principales y otro encuentro con lo *gauge*

Nos restringimos a definir los morfismos entre fibrados principales para los casos en que la variedad base es la misma. Como ya dijimos, lo que en realidad queremos estudiar serán los automorfismos, a los que llamamos transformaciones *gauge*.

Definición 4.3. *Sean $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ y $G' \rightarrow P' \xrightarrow{\pi'} M$ dos fibrados principales sobre la misma variedad base M y con grupos estructurales G, G' y $f : G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie. Decimos*

que una aplicación diferenciable $H : P \rightarrow P'$ es un **morfismo de fibrados principales** entre P y P' si es f -equivariante. Se cumple entonces que

$$\pi \circ H = \pi$$

y

$$H(p \cdot g) = H(p) \cdot f(g) \quad \forall p \in P, g \in G.$$

Además, dado un G' -fibrado P' y un homomorfismo de grupos de Lie $f : G \rightarrow G'$, se dice que el G' -fibrado P' junto a la aplicación $H : P \rightarrow P'$ son una **reducción** de P' según f . En caso de que $f : G \rightarrow G'$ sea un embebimiento, H se llama **G -reducción** de P' y a la imagen de H se la llama **subfibrado principal** de P' .

La literatura en física y matemáticas es confusa respecto a esto porque la palabra *gauge*, del inglés *calibre*, se utiliza para muchas cosas distintas. Ya hemos definido las transformaciones gauge –automorfismos entre fibrados principales– y de aquí en adelante un **gauge global (local)** será una sección global(local) de un fibrado principal. Entonces, el resultado 4.2 nos da lo siguiente:

Proposición 4.3. *Dado un fibrado principal $P \rightarrow M$ con grupo estructural G y $s : U \rightarrow P$ un gauge local definido sobre un abierto, la aplicación*

$$\begin{aligned} t : U \times G &\longrightarrow P_U \\ (x, g) &\longmapsto s(x) \cdot g \end{aligned}$$

es un difeomorfismo G -equivariante. En caso de que s sea un gauge global¹⁹ el fibrado es trivializable y la trivialización (global) viene dada por la inversa de t .

Esto es algo que en realidad conocemos en el contexto de la relatividad especial (un espaciotiempo M y una trivialización $M \cong \mathbb{R}^4$ al escoger un observador inercial) y que nos da una razón para haber escogido llamar trivializables²⁰ y no triviales a los fibrados isomorfos a un fibrado trivial (el morfismo entre ellos no es canónico): un gauge local es una elección de un sistema coordinado en la dirección de la fibra dentro del fibrado. Esto es fácil de entender porque como hemos dicho, las secciones locales definen unívocamente trivializaciones locales²¹. En este caso las transformaciones gauge son las

¹⁹Como ya motivamos antes.

²⁰Incluso cuando el fibrado es trivializable se puede elegir un gauge global del que no nos podemos «deshacer» de forma canónica.

²¹Obviamente, distintas secciones locales representan distintas elecciones de sistemas inerciales y tiene que haber una forma de pasar de unos a otros porque la física tiene que ser independiente del sistema de coordenadas, del gauge escogido.

transformaciones de Lorentz que actúan sobre los frames de cada punto del espaciotiempo –sobre las fibras–. Esto se puede traducir de forma casi inmediata al caso de las teorías gauge, que es lo que hemos estado utilizando hasta ahora.

4.2.2. Fibrado de las referencias

Ahora vamos a exponer rápidamente algunas nociones importantes sobre el **fibrado de las referencias**. Dada una variedad diferenciable real M de dimensión n , definimos el conjunto de las referencias²² lineales en un punto $p \in M$ como

$$\text{Fr}_G(M)_p = \{(v_1, \dots, v_n) \text{ base de } T_p M\},$$

y definimos el fibrado de las referencias lineales como la unión disjunta de todos estos:

$$LM = \bigcup_{p \in M} \text{Fr}_{\text{GL}}(M)_p.$$

Se puede probar que LM es una variedad diferenciable de dimensión $n(n+1)$. Dado un abierto coordenado de M , $(U; x^1, \dots, x^n)$, las bases b_x serán transformaciones lineales de $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ en todo $x \in U$: $\vec{u}_i = a_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ con $A = (a_i^j)_{i,j=1,\dots,n} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Entonces, cada punto en LM viene con un punto de M y una matriz de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$.

En realidad, también hemos dicho, implícitamente, la acción del grupo. Es fácil ver que tras definir la proyección $\pi : LM \rightarrow M$ y la acción de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ sobre LM dada por

$$(v_1, \dots, v_n) \cdot A = \left(\sum_{i=1}^n v_i A_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n v_i A_{in} \right), \quad \forall (v_1, \dots, v_n) \in \text{Fr}_{\text{GL}}(M)_p, A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}).$$

hemos definido un fibrado principal $LM \rightarrow M$ sobre M con grupo de estructura $\text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Las reducciones de fibrados que definimos antes son especialmente importantes ahora. Una G -reducción del fibrado de las referencias se llama **G -estructura** de la variedad. Podemos preguntarnos qué información geométrica se saca de las distintas reducciones que pueda admitir el fibrado de las referencias de una variedad diferenciable M :

- Si $G = \{Id\}$ entonces existe una sección global y por tanto la variedad es paralelizable.
- Si $G = \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$, las transformaciones lineales generales de determinante positivo, el admitir

²²Estas referencias o *frames* se llaman muchas veces *vielbein* en física.

una G -reducción significa ser orientable. Entonces, LM^+ serán las bases con orientación positiva²³.

- Si $G = \mathrm{SL}^+(n, \mathbb{R})$, admitir una G -reducción también significa ser orientable. Esto es porque una forma de volumen en M determina una $\mathrm{SL}^+(n, \mathbb{R})$ -reducción (y esto en realidad es una condición suficiente y necesaria).
- Si $G = \mathrm{O}(n)$, admitir una G -reducción significa ser variedad Riemanniana. Entonces, OM serán las bases ortonormales. En caso de que $G = \mathrm{SO}(n)$ serán bases ortonormales con orientación positiva.
- El resto de ejemplos que se nos puedan ocurrir $\mathrm{U}(n) < \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(n)$ están asociadas con estructuras muy importantes relacionadas con las variedades complejas y simplécticas²⁴.

4.3. Fibrados asociados

Vamos a dar la primera definición en general, pero en realidad siempre nos restringiremos a los fibrados vectoriales asociados a fibrados principales.

Definición 4.4. Sea $P \rightarrow M$ un fibrado principal con grupo estructural G , una variedad F y una acción por la derecha ρ ²⁵ de G sobre F . Esto induce una acción por la derecha de G sobre $P \times F$ dada por

$$(p, f) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g^{-1})f).$$

Si definimos

$$P \times_{\rho} F = (P \times F)/G,$$

se cumple que $[p \cdot g, f] = [p, \rho(g)f]$ para todo $g \in G$. Entonces, podemos considerar la fibración sobre M dada por

$$\begin{aligned} \pi' : P \times_{\rho} F &\rightarrow M \\ [y, f] &\mapsto \pi(y). \end{aligned}$$

que será un fibrado sobre M con grupo estructural G y fibra F .

²³Obviamente, ser de orientación positiva es una convención. En general, cuando LM tenga una componente conexa será que la variedad es no orientable mientras que cuando tenga dos, será orientable.

²⁴En este caso la condición no es equivalente: las variedades simplécticas $2n$ dimensionales tienen una $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ -estructura natural y las variedades complejas o casi complejas $2n$ dimensionales tienen una $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ -estructura natural. La otra implicación no es siempre cierta porque hay condiciones de integrabilidad añadidas que no tienen por qué cumplirse.

²⁵Aunque el convenio que habíamos seguido en el capítulo 3 era Φ para acciones y ρ para representaciones, aquí vamos a utilizar ρ siempre.

En el caso que nos interesa, dado $P \rightarrow M$ un fibrado principal con grupo estructural G y una representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ de G sobre un \mathbb{K} espacio vectorial V , definimos un **fibrado vectorial asociado** $E \rightarrow M$ con fibras isomorfas a V . La acción por la derecha de G sobre $P \times V$ viene dada por

$$(P \times V) \times G \longrightarrow P \times V$$

$$(p, v, g) \longmapsto (p, v) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g)^{-1}v).$$

De hecho, el cociente $P \times_{\rho} V$ es una variedad (la acción es libre y principal). Igualmente se puede demostrar que tiene la estructura de fibrado vectorial. La proyección es

$$\pi_E : E \longrightarrow M$$

$$[p, v] \longmapsto \pi_P(p),$$

y las fibras

$$E_x = (P_x \times V) / G \cong V,$$

donde la estructura de espacio vectorial viene definida en el cociente por

$$\lambda[p, v] + \mu[p, w] = [p, \lambda v + \mu w], \quad \forall p \in P, v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K},$$

donde $\pi_P(p) = x$.

De la misma forma que vimos en los fibrados principales, nos interesa describir las secciones locales de los fibrados vectoriales asociados a fibrados principales:

Proposición 4.4. *Sea $P \rightarrow M$ un fibrado principal con grupo estructural G , $E = P \times_{\rho} V$ un fibrado vectorial asociado y $s : U \rightarrow P$ un gauge local. Entonces, existe una biyección entre secciones locales $\tau : U \rightarrow E$ y funciones diferenciables $f : U \rightarrow V$ dado por*

$$\tau(x) = [s(x), f(x)] \quad \forall x \in U.$$

Es decir, un gauge local nos define un isomorfismo entre V y todos los vectores de E_x con $x \in U$. Esto es importante porque en las teorías gauge, los campos de materia vienen descritos por secciones de fibrados vectoriales asociados a fibrados principales donde la representación del grupo gauge G que induce el fibrado asociado es precisamente en la que decimos que «transforma» el correspondiente campo. Este último resultado nos dice que, dado un gauge local del fibrado principal, una sección en E se corresponde con una función diferenciable de M (el espaciotiempo) a V , que es un espacio

vectorial. En el caso en que los campos sean fermiónicos todo esto es más sutil ya que aparecen fibrados espinoriales²⁶. Cuando el espaciotiempo sobre el que hayamos construido la teoría sea contráctil, se tiene que todos los fibrados principales son trivializables²⁷, así que los campos de materia se podrán describir como aplicaciones diferenciables entre \mathbb{R}^n y otro espacio vectorial.

Un fibrado importante es el que nos da la $O(n)$ -estructura sobre una variedad riemanniana. Al final, podemos pensar que el problema que nos planteábamos en curvas y superficies de derivar a lo largo de una curva no plana tiene que ver con esto: con encontrar una base móvil ortonormal que nos va a permitir recorrerla. Esto será más preciso en el siguiente capítulo, donde estudiaremos conexiones y curvaturas en fibrados principales, pero justifican explicar también el siguiente punto: nos interesa ser capaces de definir métricas sobre los fibrados vectoriales asociados a un fibrado principal. Y obviamente queremos que la métrica sea compatible con la acción del grupo.

Así, dado un fibrado principal $P \rightarrow M$ con grupo estructural G , una representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ de G y un fibrado vectorial asociado $E \rightarrow M$ donde $E = P \times_{\rho} V$, tendremos que en caso de que exista un producto escalar G - invariante en $V : \langle \cdot, \cdot \rangle_V$, se podrá definir una métrica en el fibrado $E : \langle \cdot, \cdot \rangle_E$ a partir de

$$\langle [p, v], [p, w] \rangle_{E_x} = \langle v, w \rangle_v,$$

donde $p \in P_x$ cualquiera.

Como ya hemos dicho, el fibrado tangente es un fibrado vectorial, pero es que además se trata precisamente de un fibrado vectorial asociado al fibrado de las referencias. Partimos entonces de una variedad diferenciable (real) M de dimensión n y consideramos el fibrado principal de las referencias:

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & LM \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

Sea $V = \mathbb{R}^n$ y la representación fundamental de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ sobre él: multiplicación matricial por la izquierda sobre los vectores (columna) de \mathbb{R}^n . Entonces existe un isomorfismo de fibrados vectoriales

²⁶En particular, tiene que ver con hacer reducciones del fibrado de las referencias ortonormales con $G = \text{Spin}(1, 3)$, el recubridor universal de $\text{SO}(1, 3)$.

²⁷Esto es un resultado no trivial que relaciona equivalencia por homotopías con isomorfía de los fibrados principales. En particular, que todo fibrado principal sobre una variedad contráctil es trivializable.

$TM \cong LM \times_{\text{GL}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ dado por

$$H : LM \times_{\text{GL}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$$

$$[(v_1, \dots, v_n), (x_1, \dots, x_n)] \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i x_i.$$

En caso de que la variedad M sea pseudo-Riemanniana podríamos definir esto mismo con la acción de $O(n)$ y en general, como dijimos antes, los distintos «tipos» de variedades van asociados a una G -estructura. En general, se puede probar el siguiente resultado:

Proposición 4.5. *Sea $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial real o complejo. Entonces, E es fibrado vectorial asociado de un cierto fibrado principal con grupo estructural $O(n)$ o $U(n)$.*

En general, todo fibrado se puede ver como fibrado asociado de un fibrado principal, lo que justifica su nomenclatura.

Para terminar el capítulo vamos a definir un fibrado un poco especial que se utiliza para formalizar las teorías gauge en términos de fibrados. Consideramos un fibrado principal $P \rightarrow M$ con grupo estructural G y la representación adjunta de G :

$$\text{Ad } G \longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}).$$

El fibrado vectorial asociado se denota $\text{Ad}(P) = P \times_{\text{Ad } \mathfrak{g}}$ y se llama **fibrado adjunto**. Las fibras son isomorfas al álgebra de Lie \mathfrak{g} –vista como espacio vectorial–:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \text{Ad}(P) \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

Capítulo 5

Conexión y curvatura en fibrados principales

En el capítulo anterior hemos ido viendo que el lenguaje de la teoría de fibrados es el adecuado para construir las teorías gauge. Sin embargo, nos faltan dos ingredientes fundamentales para poder entender geoméricamente estas teorías físicas: la conexión y la curvatura. A lo largo del capítulo explicaremos precisamente la frase «un campo gauge es una conexión sobre un fibrado principal» y veremos también de qué forma estas conexiones definen derivadas covariantes sobre los fibrados vectoriales asociados, que codifican la interacción entre los campos de materia –secciones de estos fibrados vectoriales– y los campos gauge mediante lo que se llama el *acoplo mínimo*. Además, esto no solo es interesante desde el punto de vista de la física sino que, al estudiarlo en el fibrado de las referencias, nos damos cuenta de que la mayor parte de la geometría diferencial que estudiamos se puede entender desde los fibrados, por ejemplo, la conexión de Levi-Civita de una variedad pseudoriemanniana será efectivamente una conexión también en este sentido. También hablamos de la curvatura asociada a una conexión, que se identificará con el *field strength* del campo gauge.

El capítulo se divide en dos secciones. En la primera, dedicada a la conexión, se introducen dos definiciones equivalentes de conexión sobre fibrados principales y se estudia cómo se comporta bajo transformaciones gauge. En la segunda se define la curvatura de una conexión y el transporte paralelo y la derivada covariante asociados a una conexión. A lo largo de todo el capítulo se trata rigurosamente la relación entre las transformaciones gauge tal y como se entienden en física y los automorfismos de fibrados principales (transformaciones gauge en matemáticas), además de estudiar cómo se comportan los distintos campos bajo transformaciones gauge.

5.1. Conexión

5.1.1. Definición de conexión

Vamos a explicar dos definiciones equivalentes de conexión sobre fibrados principales. Para ello, empezamos por formular una generalización del concepto de distribución que dimos en el primer capítulo cuando hablamos del teorema de Frobenius. A un subfibrado del fibrado tangente TM de una variedad M se le llama **distribución**¹. La primera definición de conexión que vamos a dar, que tiene una interpretación geométrica muy sencilla², se llama **conexión de Ehresmann** a una distribución de un fibrado principal.

Dado un fibrado principal con grupo estructural G , queremos construir *canónicamente* un fibrado al que llamaremos **fibrado vertical**. Para ello utilizamos que $\pi^{-1}(x) = P_x \subset P$ es una subvariedad embebida en $P \forall x \in M$. Entonces, dado un $p \in P_x$ de la fibra en x , podemos definir el **espacio tangente vertical** V_p de P en p como

$$V_p = T_p(P_x),$$

el espacio tangente en p de la fibra P_x .

Es natural plantearse que la unión de todos los espacios verticales sea el fibrado vertical que estamos buscando. Esto y otras propiedades importantes vienen en la siguiente proposición:

Proposición 5.1. *Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con grupo estructural G . Entonces, $\forall p \in P$ se tiene que $V_p = \ker d_p\pi$ y*

$$\begin{aligned} \phi_* : \mathfrak{g} &\longrightarrow V_p \\ X &\longrightarrow \tilde{X}_p \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales entre \mathfrak{g} y V_p .

*Además, $V = \{V_p\}_{p \in P}$ es una distribución en P llamada **fibrado vertical**. Su rango es la dimensión del grupo G . Se trata de un fibrado vectorial trivial:*

$$\begin{aligned} P \times \mathfrak{g} &\longrightarrow V \\ (p, X) &\longmapsto \tilde{X}_p \end{aligned}$$

¹Este concepto no tiene nada que ver con el de distribución de análisis funcional.

²Tiene mucho que ver con la idea de conexión en variedades Riemannianas. Como incidimos muchas veces el «problema» al tener una variedad diferenciable en lugar de un espacio euclídeo \mathbb{R}^n es que los espacios tangentes en cada punto no son comparables, lo que complica la idea de diferenciación a lo largo de una curva: no podemos restar vectores que no están en el mismo espacio vectorial. Lo que nos resuelve este problema es la idea del transporte paralelo: una regla que me explica cómo «mover» los vectores a lo largo de una curva. Al final se demuestra que dar un transporte paralelo es lo mismo que dar una conexión.

es un difeomorfismo (global). Además, V es invariante bajo la acción de G por la derecha:

$$r_{g*}(V_p) = V_{p \cdot g} \quad \forall g \in G.$$

Idea de la demostración.

Si consideramos un $U \subset M$ donde el fibrado sea trivializable es muy fácil ver la equivalencia entre ambas definiciones: dado $x \in U$, $\pi^{-1}(x) = P_x = \{x\} \times G$ y, entonces, dado $p = (x, g) \in P_x$, se tiene que $T_p(P_x) = \{\vec{0}\} \times T_g G$. Además, las dimensiones serán $\dim \ker d_p \pi = \dim P - \dim M = \dim G = \dim P_x$, ya que π es una submersión y podemos aplicar el teorema del valor regular.

La aplicación ϕ_* será un isomorfismo por ser la acción de G libre y transitiva en cada fibra. Esto hace trivial demostrar que la aplicación del enunciado es un difeomorfismo, que por tanto hace al fibrado vertical trivial. ■

De la misma forma que pensamos, cuando tenemos una superficie embebida en \mathbb{R}^3 , en descomponer un vector «apoyado» en cualquiera de sus puntos en una parte tangente y una parte ortogonal a la superficie, queremos construir un espacio complementario al espacio vertical. Esta es la idea geométrica en la que pensar salvo por algunas sutilezas: en este caso no tenemos una forma canónica de hacerlo³ y en realidad lo que queremos es construir una distribución sobre P a la que llamaremos conexión.

Dado $p \in P$, definimos el **espacio tangente horizontal** en p como un subespacio de $T_p P$ complementario a V_p , *i.e.*

$$T_p P = V_p \oplus H_p.$$

Con lo que vimos en el capítulo 1 se puede demostrar que dados $p \in P$ tal que $\pi(p) = x$, $d_p \pi : H_p \rightarrow H_x P$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Ahora ya estamos en condiciones de dar la definición de conexión:

Definición 5.1. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con grupo estructural G . Una distribución H de espacios tangentes horizontales sobre P que es invariante por la derecha⁴ bajo la acción de G , es decir,

$$r_{g*}(H_p) = H_{p \cdot g} \quad \forall p \in P, g \in G$$

³Si tuviéramos una métrica bastaría con tomar el ortogonal a V_p en $T_p P$.

⁴Si pensamos en que la acción por la derecha de G en P induce canónicamente una acción por la derecha de G en TP , esta condición de invariancia por la derecha no es más que una condición de simetría. Geométricamente lo debemos pensar como que todos los espacios H_p son «paralelos» a lo largo de P_x .

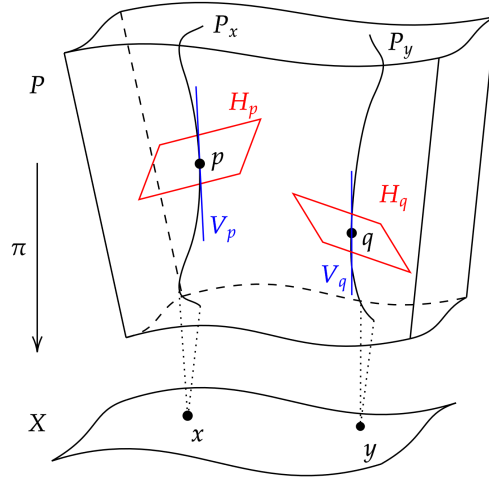


Figura 5.1: Conexión de Ehresmann sobre un fibrado principal P [22].

se llama **conexión de Ehresmann** o **conexión** en P ⁵.

Esta construcción se muestra en la figura 5.1, donde a la variedad base se la llama X .

El caso en que el fibrado de partida es trivial es un buen ejemplo que además es muy importante⁶ para darnos cuenta por ejemplo de que la definición de conexión *nunca es única*, incluso en el caso en que haya una elección canónica. Sea $G \rightarrow M \times G \xrightarrow{\text{pr}_1} M$ el fibrado principal trivial con grupo estructural G . Entonces, los subespacios verticales serán

$$V_{(x,g)} = T_{(x,g)}(\{x\} \times G) \cong T_g G$$

en todo $(x,g) \in M \times G$ y, ahora que tenemos otra proyección pr_2 dada naturalmente, tiene sentido escoger

$$H_{(x,g)} = T_{(x,g)}(M \times \{g\}) \cong T_x M.$$

Se dice que esta es la **conexión plana canónica** sobre un fibrado trivial⁷. La respuesta a la pregunta natural de si se va a poder definir una conexión sobre todo fibrado principal es afirmativa, pero dado que la demostración es difícil, solo enunciamos el resultado.

Esta definición de conexión tiene una interpretación geométrica muy clara pero es difícil de utilizar: hace falta mucha información para poder construir en cada punto del fibrado un espacio vertical y uno

⁵También se puede llamar conexión a toda la construcción que acabamos de hacer y fibrado tangente horizontal a la distribución H . En general, se tiene que $TP = H \oplus V$.

⁶Desde el punto de vista de la física, en muchos ejemplos en los que la variedad es sencillamente el espaciotiempo de Minkowski, que es contráctil, todos los fibrados principales serán trivializables.

⁷Cuando lleguemos a curvatura veremos qué es una conexión plana.

horizontal. Ahora vamos a dar otra definición, para después motivar por qué son equivalentes⁸.

Definición 5.2. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con grupo estructural G . Entonces, una 1-forma \mathfrak{g} -valuada sobre el espacio total P , $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ tal que

- $r_g^* A = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ A$ para todo $g \in G$.
- $A(\tilde{X}) = X$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

se llama **conexión** sobre el fibrado principal.

A veces, a una conexión sobre un fibrado principal se la llama **campo gauge** sobre P , pero en general, cuando pensamos en un campo gauge de una teoría física, la idea que tenemos es una función definida sobre el espaciotiempo M . Veremos más adelante que en realidad estas dos nociones son equivalentes –mediante la fijación de un gauge–.

Vamos a esbozar la demostración de que ambas definiciones son equivalentes. En primer lugar, si partimos de una conexión de Ehresmann sobre un fibrado principal podemos definir una 1-forma \mathfrak{g} -valuada sobre P como

$$A_p(\tilde{X}_p + Y_p) = X \quad \forall p \in P, X \in \mathfrak{g}, Y_p \in H_p.$$

Está claro que $A(\tilde{X}) = X \forall X \in \mathfrak{g}$. Para calcular $r_g^* A$ bastará con utilizar que la transformación de un campo fundamental viene dada por $r_{g*} \tilde{X} = \widetilde{\text{Ad}_{g^{-1}} X}$:

$$(r_g^* A)_p(\tilde{X}_p + Y_p) = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ A_p(\tilde{X}_p + Y_p).$$

Por otra parte, dada $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ una conexión según la definición 5.2, basta con tomar

$$H_p = \ker A_p,$$

que se puede demostrar define una conexión de Ehresmann sobre P .

5.1.2. Transformaciones gauge matemáticas, transformaciones gauge físicas y su relación

El objetivo de esta sección es establecer un diccionario entre las nociones de gauge en física y en matemáticas para poder entender cómo traducir, en el siguiente capítulo, una teoría física a su

⁸En realidad se pueden enunciar algunas más. Una que está a medio camino es la siguiente: una conexión es un isomorfismo de fibrados vectoriales que en V es trivial ($A : TP \rightarrow V$ tal que $A|_V = Id_V$) e invariante bajo la acción por la derecha del grupo ($A \circ dr_g = dr_{g*} \circ A$). La demostración de que las tres son equivalentes está en la sección 2.4 de [20].

formulación geométrica a través de fibrados. Ya habíamos definido una transformación gauge como un automorfismo de fibrados. Sin embargo, a partir de ahora reservaremos esa nomenclatura para los automorfismos de fibrados principales que preserven las fibras y además sean G -equivariantes: difeomorfismos $f : P \rightarrow P$ tales que $\pi \circ f = \pi$ y $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ para todo $p \in P$, $g \in G$. Es claro que, bajo la composición, el conjunto de todas estas transformaciones van a formar un grupo que denotamos por $\mathcal{G}(P)$ ⁹, al que a veces llamaremos **grupo gauge del fibrado principal** P ¹⁰. Las transformaciones gauge locales serán transformaciones gauge del fibrado $P_U \xrightarrow{\pi} U$ donde $U \subset M$ es un abierto y $P_U = \pi^{-1}(U)$.

Una transformación gauge desde el punto de vista de la física tiene que ver con una función que va (de un abierto) del espaciotiempo al grupo de simetrías internas –el grupo gauge–, ya que siempre se piensa como un cambio de gauge: la transformación que se debe hacer para pasar de un punto a otro dentro de la misma fibra¹¹. Para hacer esto tendremos que fijar antes un gauge, pero una visión «intermedia» entre ambos puntos de vista vendrá de la identificación entre las transformaciones gauge que acabamos de definir y un conjunto de aplicaciones del (espacio total del) fibrado P al grupo G :

$$C^\infty(P, G)^G = \{ \sigma : P \rightarrow G \text{ diferenciables} \mid \sigma(p \cdot g) = c_{g^{-1}}(\sigma(p)) = g^{-1} \sigma(p) g \},$$

que forman un grupo bajo la operación $(\sigma' \cdot \sigma)(p) = \sigma'(p) \cdot \sigma(p)$ ¹². Entonces, dada una transformación gauge $f \in \mathcal{G}(P)$ podemos construir $\sigma_f \in C^\infty(P, G)^G$ a partir de

$$f(p) = p \cdot \sigma_f(p) \quad \forall p \in P.$$

De hecho, se puede demostrar que $\mathcal{G}(P) \rightarrow C^\infty(P, G)^G$ es un isomorfismo de grupos¹³.

Definición 5.3. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con grupo estructural G . Diremos que una aplicación

⁹El grupo de automorfismos del fibrado principal con grupo estructural G (las dos condiciones que hemos impuesto las podemos pensar como condiciones de compatibilidad: los morfismos de G -fibrados principales tendrán que preservar su estructura).

¹⁰Es razonable pensar que una teoría gauge será una teoría de campos simétrica –invariante– bajo transformaciones gauge y por tanto con grupo de simetría $\mathcal{G}(P)$. Podemos pensar esto como un análogo de lo que significa el grupo de difeomorfismos $\text{Difeo}(M)$ cuando hacemos relatividad general sobre un espaciotiempo M . En realidad esto no es absolutamente cierto porque las transformaciones gauge son transformaciones sobre el fibrado (dejan invariante el espaciotiempo) lo que en el «lado de la física» se traduce en que la teoría sea *local* de una forma distinta.

¹¹Todo esto en realidad hay que pensarlo mayoritariamente en el caso local pues, como veremos, cuando la transformación gauge sea global estará siendo en cierto sentido constante y se corresponderá con lo que en física es una simetría global y no gauge.

¹²El elemento neutro es precisamente $\sigma(p) = e \forall p \in P$.

¹³De hecho, si el grupo G es abeliano tendremos que hay un isomorfismo $C^\infty(M, G) \rightarrow C^\infty(P, G)^G$, es decir, las transformaciones gauge se podrán ver directamente como aplicaciones del espaciotiempo al grupo. Esto lo podemos pensar en primer lugar porque la conjugación es trivial pero veremos más adelante que tiene que ver con que el álgebra de Lie va a ser directamente \mathbb{R} (en el caso de que G sea compacto y simple), este será el caso del electromagnetismo, lo que nos va a «ahorrar» el tener que fijar el gauge.

diferenciable $\tau : U \rightarrow G$ definida sobre un abierto $U \subset M$ es una **transformación gauge física**.

El conjunto de todas estas transformaciones, que denotaremos $\mathcal{C}^\infty(U, G)$, forman un grupo con la misma multiplicación punto a punto que definimos antes. Cuando la aplicación τ es constante se dice que es una transformación gauge física rígida; todas estas transformaciones también forman un grupo, que de hecho es isomorfo a G^{14} .

La relación que buscamos se codificará en un isomorfismo de grupos. En primer lugar, dado un gauge –una sección local $s : U \rightarrow P$ – se puede inducir el siguiente isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(P_U, G)^G &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U, G) \\ \sigma &\longmapsto \tau_\sigma = \sigma \circ s, \end{aligned}$$

con inversa

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(U, G) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(P_U, G)^G \\ \tau &\longmapsto \sigma_\tau, \end{aligned}$$

donde $\sigma_\tau(s(x) \cdot g) = g^{-1}\tau(x)g \quad \forall x \in U, g \in G$. Esto será lo que precisamente nos diga que, después de hacer una elección de una gauge local –i.e. después de fijar una sección local s – podremos identificar los automorfismos locales del fibrado $P_U \rightarrow P_U$ con las transformaciones gauge locales físicas sobre U .

Antes dijimos que a la conexión A vista como 1-forma a veces se la llama campo gauge. Sin embargo, en física a lo que llamamos campo es a un objeto que, valore donde valore, esté definido sobre el espaciotiempo en que hemos puesto la teoría. Lo que queremos hacer ahora es ampliar el diccionario: encontrar los campos gauge de la física –que sabemos que en las teorías gauge son los campos que median las interacciones– «dentro» de estas conexiones.

Consideramos entonces un fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M$ con grupo estructural G y una conexión $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Entonces, tras fijar un gauge local $s : U \rightarrow P$ con $U \subset M$ abierto, definimos el **campo gauge local** inducido por s como

$$A_s = A \circ ds = s^*A \in \Omega^1(U, \mathfrak{g}).$$

Ahora sí tenemos una 1-forma definida sobre un abierto de la base, lo que se puede considerar un campo sobre el espaciotiempo en el sentido habitual. Esto nos permite escoger una carta sobre U^{15} y

¹⁴En física esto es una simetría global en contraposición con las transformaciones gauge «puras», que serán las que tengan soporte compacto. Por ello se piensa en las transformaciones gauge generales como una transformación constante (global) y una transformación gauge pura.

¹⁵Puede ser que U no esté cubierto por una única carta pero es indiferente porque todo se transforma de la forma adecuada. De hecho, ahora veremos lo que significan en este contexto las funciones de transición.

una base local de campos vectoriales sobre U : $\{\partial_\mu\}_{\mu=1,\dots,n}$ ¹⁶, de forma que

$$A_\mu = A_s(\partial_\mu) \in \mathfrak{g},$$

que podrá escribirse por componentes utilizando una base $\{e_a\}$ del álgebra de Lie

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} A_\mu^a e_a.$$

Ahora sí, a los campos reales $A_\mu^a \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ o a las 1-formas $A_s^a \in \Omega^1(U)$ se llaman **campos gauge** (locales)¹⁷.

La parte interesante viene ahora: ¿qué sucede cuando escojo dos gauges locales distintos? Nos interesa ver cómo se transforman estos campos gauge bajo un cambio de gauge¹⁸. Consideramos $s_i : U_i \rightarrow P$ y $s_j : U_j \rightarrow P$ dos gauges locales con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Ya habíamos visto que

$$s_i(x) = s_j(x) \cdot g_{ji}(x) \quad \forall x \in U_i \cap U_j,$$

donde $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ es la función de transición entre las trivializaciones correspondientes del fibrado principal. Entonces, g_{ji} es una transformación de gauge física entre s_i y s_j . Ahora queremos calcular la relación entre los correspondientes campos gauge

$$\begin{aligned} A_i &= A_{s_i} \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{g}) \\ A_j &= A_{s_j} \in \Omega^1(U_j, \mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Se puede demostrar que la transformación es

$$A_i = \text{Ad}_{g_{ji}^{-1}} \circ A_j + \mu_{ji}$$

sobre $U_i \cap U_j$, donde

$$\mu_{ji} = g_{ji}^* \mu \in \Omega^1(U_i \cap U_j, \mathfrak{g})$$

con μ la forma de Maurer-Cartan $\mu \in \Omega(G, \mathfrak{g})$.

¹⁶ n es la dimensión de M .

¹⁷Que después resultan ser campos bosónicos.

¹⁸Que para una física es una transformación gauge, como hemos motivado.

En caso de que G sea un grupo de matrices, $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} :

$$A_i = g_{ji}^{-1} \cdot A_j \cdot g_{ji} + g_{ji}^{-1} \cdot dg_{ji}.$$

Esto nos recuerda a las reglas de transformación de los campos gauge en las teorías de campos. De hecho, muchas veces en física se definen los campos gauge como 1-formas \mathfrak{g} -valuadas que satisfacen precisamente esto.

Podemos generalizarlo al caso en que tenemos un G -fibrado principal $P \rightarrow M$, una conexión $A \in \Omega(P, \mathfrak{g})$ y un automorfismo del fibrado $f \in \mathcal{G}(P)$ global. Entonces, f^*A será otra conexión

$$f^*A = \text{Ad}_{\sigma_f^{-1}} \circ A + \sigma_f^* \mu_G.$$

5.1.3. Sobre cómo operan las transformaciones gauge sobre fibrados vectoriales asociados

Ahora que ya sabemos cómo se transforman los campos gauge, queremos ver qué sucede con las secciones de los fibrados vectoriales asociados, que estarán relacionados con los campos de materia de las teorías gauge.

La idea clave es que un automorfismo de fibrados principales induce una acción sobre los fibrados asociados, lo veremos en el caso de fibrados vectoriales. Sea $P \xrightarrow{\pi_P} M$ un fibrado principal con grupo estructural G y $E = P \times_{\rho} V \xrightarrow{\pi_E} M$ un fibrado vectorial asociado, definido por una representación ρ de G sobre V . Entonces, se puede demostrar que el grupo de automorfismos del fibrado $\mathcal{G}(P)$ actúa sobre el fibrado vectorial asociado mediante un isomorfismo de fibrados definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(P) \times E &\longrightarrow E \\ (f, [p, v]) &\longmapsto f \cdot [p, v] = [f(p), v] = [p \cdot \sigma_f(p), v]. \end{aligned}$$

Es decir, deja el vector fijo y actúa sobre el fibrado P transformando por la derecha de la forma adecuada. De hecho, en el lenguaje de la física esto es, una vez fijado un gauge local $s : U \rightarrow P$ y una sección local $\Phi : U \rightarrow E$ podremos escribir

$$\Phi(x) = [s(x), \phi(x)] \quad \forall x \in U,$$

donde $\phi : U \rightarrow V$ es una función diferenciable. De hecho, en caso de que $f \in \mathcal{G}(P)$ y τ_f sea su

transformación gauge física asociada:

$$(f \cdot \Phi)(x) = [s(x), \rho(\tau_f(x)) \phi(x)].$$

Estas dos definiciones, a pesar de ser equivalentes, deben pensarse de dos formas distintas. En física se dice que esta última se corresponde con una **transformación activa**: se piensan las transformaciones gauge como automorfismos, las simetrías tienen que ver con invariancia/ buen comportamiento bajo estos automorfismos, mientras que la definición anterior se corresponde con una **transformación pasiva**, donde las simetrías tienen que ver con el comportamiento bajo los cambios de coordenadas. Decimos que son equivalentes porque en realidad, en el segundo caso hemos tenido que fijar un gauge, de manera que lo que hago para ver como se transforma (cómo llevar una sección a otra) es escoger la única transformación gauge (vista como automorfismo) que lo hace.

5.2. Curvatura de una conexión

5.2.1. Definición de curvatura e identidad de Bianchi

Hemos visto que una conexión sobre un fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ es una 1-forma \mathfrak{g} -valuada definida sobre P , $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, y que geoméricamente debemos pensar en una descomposición¹⁹

$$TP = V \oplus H$$

del fibrado tangente de P . Entonces, si ahora consideramos la proyección $\pi_H : TP \rightarrow H$, dado un campo vectorial en P podremos descomponerlo en parte horizontal y parte vertical. Para poder definir la curvatura antes vamos a hablar primero de la **derivada covariante exterior** de una k -forma sobre un fibrado principal, que estará asociada a una conexión. Definimos

$$D : \Omega^k(P) \rightarrow \Omega^{k+1}(P)$$

por su actuación sobre $\theta \in \Omega^k(P)$:

$$D\theta(v_1, \dots, v_{k+1}) = d\theta(\pi_H(v_1), \dots, \pi_H(v_{k+1})) \quad \forall v_1, \dots, v_{k+1} \in T_p, \forall p \in P^{20},$$

¹⁹Donde $H = \ker(A)$. En general, lo único que queremos es utilizar lo que vimos en la sección anterior: descomponemos $T_p P = H_p \oplus V_p$.

²⁰La definición hace que baste con ver cómo actúa la derivada covariante exterior sobre vectores horizontales para saber cómo actúa en general.

donde d es la diferencial exterior que definimos en variedades diferenciables. La dependencia en la conexión entra precisamente en la proyección de los vectores sobre los espacios horizontales. En realidad, para definir la curvatura lo que nos interesa es definir esto para formas \mathfrak{g} -valuadas como la conexión. En general, si V es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita, bastará con considerar la definición anterior componente a componente²¹: $D\theta \in \Omega^{k+1}(P, V)$ dado $\theta \in \Omega^k(P, V)$.

Esto es así porque, en general, si cogemos un abierto coordenado $U \subset M$ de una variedad diferenciable, para definir la derivada exterior de una k -forma E valuada (E un \mathbb{K} -espacio vectorial cualquiera) $\theta \in \Omega^k(M, E)$ ²² escribiremos $\theta|_U = f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, de lo que esperaríamos

$$d\theta|_U = df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

y df lo sabemos definir fácilmente porque, con $f \in C^\infty(M, E)$, $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} E = E$ es la diferencial usual y todo funciona bien, ya que $T_{f(p)} E = E$ por ser un espacio vectorial. Entonces, nos termina quedando, tal y como queríamos

$$d : \Omega^k(M, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, E).$$

Todo es análogo para el caso de D , en el que lo único que cambia es que componemos con las proyecciones que nos da la conexión. Es útil introducir ahora dos definiciones que utilizaremos más adelante: una k -forma V -valuada $\omega \in \Omega^k(P, V)$ se dice

- **horizontal** si $\forall p \in P$ se cumple que $\omega_p(v_1, \dots, v_k) = 0$ siempre que uno de los vectores sea vertical.
- **equivariante** respecto a la representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ de G si $r_g^* \psi = \rho(g^{-1})(\psi)$ para todo $g \in G$, se dice que son k -formas pseudotensoriales de tipo (ρ, V) . En particular, se dirá de tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ si es equivariante respecto a la representación adjunta. A las formas pseudotensoriales de tipo (ρ, V) que son horizontales se las llama **formas tensoriales** de tipo (ρ, V) .

Definición 5.4. Definimos la **curvatura** de la conexión A como la 2-forma sobre P \mathfrak{g} -valuada $F \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ dada por

$$F(X, Y) = DA(X, Y) = dA(\pi_H(X), \pi_H(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(P),$$

²¹Habría que demostrar que esto es independiente de la base.

²²En realidad, podríamos escribir, si pensamos $\Omega^k(M, E) = \Omega^k(M) \otimes E$, al tomar $\theta = \theta^\alpha \otimes T_\alpha$, donde $\{T_\alpha\}$ sea una base del álgebra de Lie \mathfrak{g} y $\theta^\alpha \in \Omega^k(M)$, tendríamos que $d\theta = d\theta^\alpha \otimes T_\alpha$.

donde D es la derivada covariante exterior respecto a la conexión A .

De la misma forma que en una variedad Riemanniana pensamos en la curvatura como una medida de cuánto falla una conexión en ser plana, en este caso tendrá que ver con cuánto se aleja H de ser una distribución integrable. Se cumple que la curvatura es de tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ y que

$$F(\cdot, \tilde{X}) = 0$$

$\forall X \in \mathfrak{g}$. Además, se cumple la siguiente **ecuación de estructura** (de Cartan):

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A]^{23}.$$

Esta ecuación es muy importante y de hecho muchas veces –especialmente en física, cuando se dice que F es el *field strength* de la teoría– se propone como definición de la curvatura. La prueba se hace por casos, distinguiendo cuando $X, Y \in T_p P$ sobre los que aplicar F son horizontales y/o verticales. A una conexión cuya curvatura se anula en todo punto se la llama **plana**. Este es el caso de la conexión canónica sobre fibrados triviales. En general, encontrar todas las conexiones planas no es una pregunta trivial y es algo en lo que se continua trabajando.

Ahora podemos preguntarnos qué sucede con DF , que será una 3-forma \mathfrak{g} -valuada. Una forma de expresar la *identidad de Bianchi* nos dice esto justamente en el caso en que miremos cómo actúa sobre el subfibrado H definido por la conexión.

Teorema 5.1 (Identidad de Bianchi (I)). *Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con grupo estructural G y $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ una conexión, que induce una descomposición $TP = V \oplus H$. Entonces, $DF = 0$.*

5.2.2. Versión local de la curvatura: *field strength* de un campo gauge

Igual que nos sucedió en la sección anterior, nos interesa poder ver la curvatura como un campo –en el sentido de la física, es decir, una función definida sobre el espaciotiempo M –. Para ello, como ya aprendimos, habrá que fijar un gauge. Dada una conexión A sobre un fibrado principal $P \rightarrow M$ y un gauge local $s : U \rightarrow P$ –una sección local definida sobre un abierto $U \subset M$ – definíamos el campo gauge (local) $A_s \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ como $A_s = A \circ ds = s^*A$. Queremos hacer esto mismo con la curvatura.

²³Para definir $[\eta, \phi]$ cuando son formas \mathfrak{g} -valuadas se procede igual que hemos dicho antes (lo podemos pensar como que existe un producto en E $[\cdot, \cdot] : E \times E \rightarrow E$ que se va a traducir en un producto $[\cdot, \cdot] : \Omega^k(M, E) \times \Omega^l(M, E) \rightarrow \Omega^{k+l}(M, E)$). Descomponemos $\eta = \eta^a \otimes T_a$ y $\phi = \phi^a \otimes T_a$ y hacemos $[\eta, \phi] = \eta^a \wedge \phi^b \otimes [T_a, T_b]$. En particular nos interesa que para 1-formas esto es $[\eta, \phi](X, Y) = [\eta(X), \phi(Y)] - [\eta(Y), \phi(X)] = 2[\eta(X), \phi(Y)]$. Es decir, la intuición de 1-formas \mathbb{R} -valuadas de $[A, A] = 0$ o $A \wedge A = 0$ ya no es cierta en general. De hecho, d no tiene por qué ser nilpotente – en particular, $D^2 = 0$ cuando la conexión sea plana–.

Definimos la 2-forma de curvatura (local) o el *field strength*²⁴ del campo $F_s \in \omega^2(U, \mathfrak{g})$ determinado por el gauge local s a partir de

$$F_s = F \circ (ds, ds) = s^*F.$$

Siempre podremos escoger un abierto U que esté en alguna carta de M , de tal forma que podamos escoger una base $\{\partial_\mu\}$ de campos vectoriales sobre U . Entonces,

$$F_{\mu\nu} = F_s(\partial_\mu, \partial_\nu),$$

Si además tomamos una base $\{e_a\}$ del álgebra de Lie \mathfrak{g} , podremos expandir esto como

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a e_a.$$

Esto nos permite escribir la ecuación de estructura de Cartan de la forma en que de verdad se escribe en los libros de física cuando se introducen las teorías de campos²⁵:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]²⁶.$$

En particular, cuando G es abeliano esto se convierte en $F = dA$ y se tiene el conocido $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ del electromagnetismo.

De nuevo, razonamos igual que en el caso de la conexión y nos hacemos la pregunta razonable de cómo cambia el *field strength* cuando cambiamos de un gauge a otro, es decir, cuando escogemos dos secciones distintas $s_i : U_i \rightarrow P$, $s_j : U_j \rightarrow P$ con intersección no vacía $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Consideramos sus curvaturas locales asociadas F_i, F_j . Entonces, habrá una transformación gauge local

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$$

dada por

$$s_i(x) = s_j(x) \cdot g_{ji}(x) \quad \forall x \in U_i \cap U_j.$$

²⁴En el caso del electromagnetismo, en castellano se le llama *tensor de intensidad del campo electromagnético*.

²⁵Que viene de haber aplicado la ecuación de estructura al campo local: $F_s = dA_s + \frac{1}{2}[A_s, A_s]$.

²⁶El término cuadrático $[A_\mu, A_\nu]$ representa en física la autointeracción de los campos bosónicos en las teorías gauge no abelianas. El término cinético de YM será algo como F^2 , lo que lleva a sumandos cúbicos y cuárticos en A : esto serán los vértices con tres y cuatro gluones en QCD, donde $G = \text{SU}(3)$. Es interesante que el hecho de que esta teoría sea no abeliana está directamente relacionado con el confinamiento y la libertad asintótica frente al caso abeliano, que no está bien definido a energías arbitrariamente altas (QED no es *UV complete*).

De aquí se llega solamente por sustitución a cómo se transforma el *field strength* en $U_i \cap U_j$:

$$F_i = \text{Ad}_{g_{ji}^{-1}} \circ F_j.$$

Además, en caso de que G sea un grupo lineal tendremos que las funciones de transición estarán en G y se cumple

$$F_i = g_{ji}^{-1} \cdot F_j \cdot g_{ji}.$$

En general, es posible que estas curvaturas locales no puedan extenderse a una 2-forma definida sobre el espaciotiempo. Sin embargo, en el caso en que G sea abeliano se puede demostrar que sí es cierto: F_s es independiente de la elección de la sección s . Esto lo podemos pensar como que F_s es localmente exacta pero hemos de tener en cuenta que no es globalmente exacta: A_s no se puede extender a una 1-forma sobre todo el espaciotiempo. En el lenguaje de la física esto se dice como que, en el caso abeliano, F es **invariante gauge** mientras que A transforma *covariantemente* respecto a transformaciones gauge –es decir, se transforma pero de la manera adecuada–. En el caso no abeliano ambas cosas son mentira: F no es invariante gauge.

5.2.3. Transporte paralelo y derivada covariante

En la sección anterior habíamos motivado la necesidad de definir una conexión con el caso de las superficies que conocemos bien: para derivar un campo vectorial a lo largo de una trayectoria necesito «restar» vectores y eso no es posible cuando la variedad que estudiamos no es \mathbb{R}^n , porque cada uno se encontrará en el espacio tangente en el correspondiente punto. Hablamos entonces de que escoger una conexión es equivalente a escoger un transporte paralelo, pero es que entonces nuestro interés no estaba en las conexiones sobre variedades Riemannianas que estudiamos en 1.2²⁷ sino en el caso general de la conexión sobre un fibrado principal. Ahora queremos ver cómo el concepto de conexión nos permite definir un **transporte paralelo** sobre fibrados principales y fibrados vectoriales asociados, así como el concepto de **derivada covariante** sobre fibrados asociados.

Sean $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con grupo estructural G y una conexión sobre él, de forma que $TP = V \oplus H$. Entonces, dada una curva $\gamma : I \rightarrow M$ definida en $I \subset \mathbb{R}$, decimos que $\gamma^* : I \rightarrow P$ es un **levantamiento horizontal** si se cumple lo siguiente:

- $\pi \circ \gamma^* = \gamma.$

²⁷Y esto de hecho lo encontraríamos si construyéramos la conexión de Ehresmann sobre el fibrado de las referencias y vieramos cómo se traduce al fibrado tangente, que sabemos es un fibrado vectorial asociado suyo.

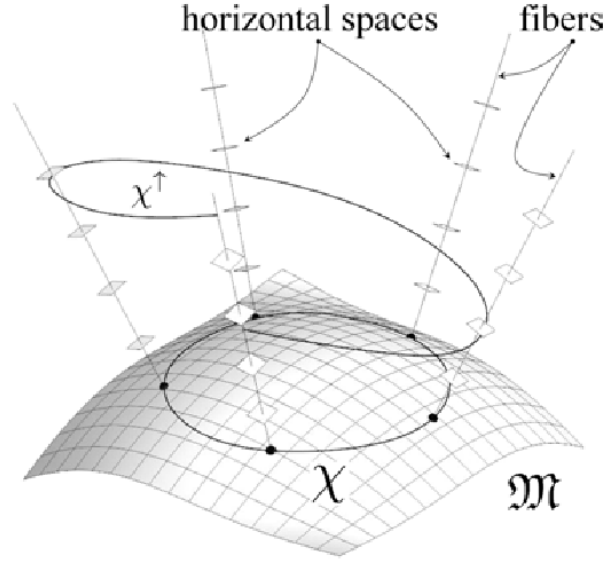


Figura 5.2: Levantamiento horizontal de una curva cerrada, figura 14.4 de [23].

- $\dot{\gamma}^*(t) \in H_{\gamma^*(t)} \forall t \in I$, es decir, las velocidades son horizontales respecto a la conexión.

Esta idea se ilustra en la figura 5.2. Se puede demostrar –y es una consecuencia del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales– que dada una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ con $\gamma(a) = x$ y $p \in P_x$, existe un único levantamiento horizontal γ_p^* tal que $\gamma_p^*(a) = p$.

En las condiciones anteriores, dada una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, decimos que la aplicación diferenciable²⁸

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma^A : P_{\gamma(a)} &\longrightarrow P_{\gamma(b)} \\ p &\longmapsto \gamma_p^*(b) \end{aligned}$$

es el **transporte paralelo** en el fibrado principal P a lo largo de γ respecto a la conexión A . Se puede demostrar que dadas dos curvas γ de x a y y γ' de y a z en M ,

$$\Pi_{\gamma * \gamma'}^A = \Pi_{\gamma'}^A \circ \Pi_\gamma^A,$$

donde $\gamma * \gamma'$ es la concatenación de las curvas²⁹. Además, el transporte paralelo es G -equivariante:

$$\Pi_\gamma^A \circ r_g = r_g \circ \Pi_\gamma^A \quad \forall g \in G.$$

Ahora estamos en condiciones de, dada una conexión sobre el fibrado principal, definir la derivada covariante en fibrados vectoriales asociados. Esto es muy importante en teorías gauge porque los campos

²⁸Habría que demostrar que es diferenciable efectivamente y que no depende de la parametrización de γ . Es cierto.

²⁹En particular, si γ^- es la misma curva pero con orientación opuesta se tendrá que $\Pi_{\gamma^-}^A = (\Pi_\gamma^A)^{-1}$.

de materia son secciones de estos fibrados y los términos cinéticos de los lagrangianos contendrán precisamente estas derivadas covariantes. Empezaremos por definir el transporte paralelo.

Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con grupo estructural G , $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ una conexión sobre él, $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación de G sobre un \mathbb{K} -espacio vectorial V y $E = P \times_{\rho} V$ el fibrado vectorial asociado construido a partir de ella. Entonces, dada una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ en M , la aplicación

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma}^{E,A} : E_{\gamma(0)} &\longrightarrow E_{\gamma(1)} \\ [p, v] &\longmapsto [\Pi_{\gamma}^A(p), v] \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal³⁰ al que llamamos **transporte paralelo** en el fibrado asociado.

La idea es que la derivada covariante de una sección va a darnos una medida de cómo de «no constante» es la sección respecto a la conexión a partir de la que la vamos a definir. Vamos a intentar hacer la construcción más geométrica posible, aunque al principio la idea sea un poco redundante. Consideramos una sección local Φ de E , un punto $x \in M$ y $X \in T_x M$. Tomamos una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = X$. Entonces, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, podemos transportar paralelamente el vector $\Phi(\gamma(t)) \in E_{\gamma(t)}$ hasta E_x a lo largo de γ . Nada nos asegura que vayamos a llegar al mismo vector, de hecho, cómo de distintos son los vectores inicial y final será la medida de cómo de no constante es Φ respecto a la conexión con la que hemos definido el transporte paralelo. Para calcular esta diferencia tomamos la derivada en $t = 0$, que nos dará un elemento de E_x (un vector):

$$D(\Phi, \gamma, x, A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Pi_{\gamma_t}^{E,A})^{-1} (\Phi(\gamma(t)) \in E_x ,$$

donde γ_t denota la restricción en el dominio de γ al intervalo $(0, t)$ con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Se puede demostrar que, fijado un gauge $s : U \rightarrow P$,

$$D(\Phi, \gamma, x, A) = [s(x), d\phi(X) + \rho_*(A_s(X))\phi(x)] .$$

Esto quiere decir, como podíamos esperar, que la definición solamente depende del vector X , no de la curva que utilizamos para construirlo. Es importante darse cuenta de que la acción de D sobre secciones escalares –fibrados vectoriales asociados definidos a partir de la representación trivial– coincide con la diferencial d , porque $\rho_* = 0$.

Definición 5.5. *Sea una sección Φ del fibrado asociado E y un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos*

³⁰Para demostrar esto hay que comprobar que la aplicación está bien definida: que es independiente del representante de la clase.

la *derivada covariante* de Φ , $\nabla_X^A \Phi$, como la sección sobre E definida por

$$(\nabla_X^A \Phi)(x) = D(\Phi, \gamma, x, A),$$

donde γ es cualquier curva a través de x y con vector tangente X_x .

Entonces, la derivada covariante es una aplicación

$$\nabla^A : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M, E).$$

En general, nos va a interesar escribir esto una vez se ha fijado un gauge local $s : U \rightarrow P$, de forma que la sección será $\Phi = [s, \phi]$ y la derivada covariante $\nabla_X^A \Phi = [s, \nabla_X^A \phi]$, donde

$$\nabla_X^A \phi = d\phi(X_x) + \rho_*(A_s(X_x))\phi(x) \in V,$$

lo que se llama «derivada alargada».

Hemos dicho que la aplicación *derivada covariante* ∇^A lleva secciones de E a 1-formas en M E -valuadas. Se puede demostrar que

- Es lineal en ambas entradas y satisface $\nabla_{fX}^A \Phi = f \nabla_X^A \Phi$ para cualquier función $f \in C^\infty(M, \mathbb{K})$.
- Cumple la regla de Leibniz

$$\nabla_X^A(\lambda\Phi) = L_X \lambda \Phi + \lambda \nabla_X^A \Phi,$$

donde $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{K})$.

Estas propiedades que acabamos de describir son las que se utilizan para definir la derivada covariante en muchas ocasiones. En particular, nos va a interesar expresar todo esto en coordenadas locales, que ya sabemos es traducir al lenguaje de los campos en física. Entonces, si tomamos una base $\{\partial_\mu\}$ de campos vectoriales en U , podemos escribir

$$\nabla_\mu^A \phi = \nabla_{\partial_\mu}^A \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu,$$

donde $A_\mu \phi = \rho_*(A_\mu)\phi$. En física esto se escribe así³¹ porque se piensa en los campos de materia como funciones sobre (un abierto del) espaciotiempo y con valores en un espacio vectorial V . Vimos en el capítulo anterior que al final esto es lo mismo que una sección del fibrado vectorial E cuando se ha

³¹Esto no es del todo cierto, normalmente se quiere que las simetrías tengan generadores hermíticos y se define $\partial_\mu \phi - igA_\mu$, donde g es una constante de acoplo de la que hablaremos ahora.

fijado un gauge. Desde el punto de vista de las teorías de campos, lo más relevante es que el segundo sumando de la definición de la derivada covariante es no lineal e introduce un acoplo entre el campo gauge A y el campo de materia ϕ . Esta es la forma en que el bosón gauge interactúa —media la fuerza— con los campos de materia. Un papel protagonista es el de la representación ρ del grupo G , que no solo influye a la hora de construir el fibrado asociado sino también al definir la derivada covariante. En la sección 3.1.1 prometíamos que a las partículas se las etiquetaba por su representación respecto al grupo de simetrías internas porque esto caracterizaba completamente de qué forma interactuaban dentro del modelo estándar. Ahora empezamos a ver la razón por la que esto es así: el campo gauge A solo va a poder actuar sobre aplicaciones que tomen valores en V (secciones de E , que sabemos que al final del día son campos de materia) solo si V tiene una representación de G . En caso de que la representación $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ sea no trivial habrá un acoplamiento entre A y ϕ que podrá ser no trivial. En ese caso se dirá que ϕ —y las partículas que representen sus excitaciones— están cargadas.

Para terminar el capítulo vamos a ver que hay un espacio $\Omega_{\text{hor}}^k(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}}$ al que pertenece la curvatura, pues será algo relevante a la hora de definir una teoría gauge en el último capítulo. La motivación para esto en realidad puede ser la siguiente: una conexión no se puede ver directamente como un campo sobre el espaciotiempo, pero resulta que la diferencia entre dos sí que puede escribirse como un campo de 1-formas que valore en el fibrado vectorial asociado $\text{Ad}(P)$. Esto nos permite terminar de entender la frase de «los bosones gauge transforman en la representación adjunta». Denotamos por $\Omega_{\text{hor}}^k(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}}$ al conjunto de k -formas tensoriales de tipo Ad .

Es inmediato demostrar que dadas dos conexiones $A, A' \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ se tiene que

$$A' - A \in \Omega_{\text{hor}}^1(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}(P)}.$$

De hecho, dada una $\omega \in \Omega_{\text{hor}}^1(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}(P)}$, se tiene que $A + \omega$ es también una conexión sobre P ³². Además, la curvatura de la conexión cumple $F \in \Omega_{\text{hor}}^2(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}}$.

Además, el conjunto de conexiones sobre P forma un espacio afín sobre el espacio vectorial $\Omega_{\text{hor}}^1(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}(P)}$. El último resultado que vamos a presentar es el que precisamente nos va a permitir entender la curvatura como una forma definida sobre la variedad base —el espaciotiempo— en lugar de sobre el fibrado, es decir, como un campo.

Teorema 5.2. *Existe un isomorfismo canónico entre $\Omega_{\text{hor}}^k(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}}$ y $\Omega^k(M, \text{Ad}(P))$.*

Para demostrarlo hay que comprobar que la aplicación que vamos a escribir ahora es un isomorfismo

³²A esto se le llama también simetría gauge: en el caso del electromagnetismo, una vez escribes el potencial eléctrico y magnético en un 4-vector te das cuenta de que tanto las ecuaciones de movimiento como la acción —salvo por un factor de frontera— se quedan igual si le añades al potencial una derivada total.

lineal bien definido.

$$\Lambda : \Omega_{\text{hor}}^k(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}} \longrightarrow \Omega^k(M, \text{Ad}(P))$$

donde, dado $\bar{\omega} \in \Omega_{\text{hor}}^k(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}}$, definimos $\omega = \Lambda(\bar{\omega})$ a partir de

$$\omega_x(X_1, \dots, X_k) = [p, \bar{\omega}_p(Y_1, \dots, Y_k)] \in \text{Ad}(P)_x = (P_x \times \mathfrak{g})/G,$$

donde $x \in M$ y $p \in P$ son puntos cualesquiera tales que $\pi_P(p) = x$ y $X_i \in T_x M$ y $Y_i \in T_p P$ son vectores cualesquiera tales que $\pi_{P*}(Y_i) = X_i$.

Esto nos permite identificar la diferencia de dos conexiones como un elemento de $\Omega^1(M, \text{Ad}(P))$ y la curvatura como un elemento de $\Omega^2(M, \text{Ad}(P))$.

Ahora estamos en condiciones de matizar una mentira a medias que hemos venido diciendo. En QFT, las partículas se describen como excitaciones de los campos actuando sobre el vacío. En el caso de los campos gauge tendremos una 1-forma de conexión A^0 sobre el fibrado principal –a la que llamaremos **conexión de vacío**– y, entonces, los bosones gauge se describirán (clásicamente) a partir de la diferencia $A - A^0$ donde A es otra conexión. Por lo que acabamos de decir, esta diferencia sí se podrá identificar con una 1-forma sobre el espaciotiempo que toma valores en $\text{Ad}(P)$, lo que le da sentido a la frase «los bosones gauge son campos que transforman en la representación adjunta del grupo gauge». De aquí en adelante hablaremos de la diferencia de conexiones o de una conexión de forma indistinta pero hay que tener en mente cómo emerge el «verdadero» campo gauge.

Capítulo 6

Breve acercamiento a las teorías gauge

El lagrangiano del **modelo estándar** se puede escribir abreviadamente como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_D[\Psi, A] + \mathcal{L}_H[\Phi, A] + \mathcal{L}_Y[\Psi_L, \Phi, \Psi_R] + \mathcal{L}_{YM}[A] \\ &= \text{Re}(\bar{\Psi} D_A \Psi) + \langle d_A \Phi, d_A \Phi \rangle_E - V(\Phi) - 2g_Y \text{Re}(\bar{\Psi}_L \Phi \Psi_R) - \frac{1}{2} \langle F_M^A, F_M^A \rangle_{\text{Ad}(P)},\end{aligned}$$

y, como prometimos desde el principio, puede explicarse y entenderse geoméricamente y con teoría de fibrados. Esto es el resultado de siglos de trabajo en los que se terminó consiguiendo entender –y sabemos que aún no se comprende del todo, que esta no es toda la historia– que los conceptos de campo, interacción y simetría –a los que también fue muy difícil llegar– se podían expresar de esta manera. En este último capítulo vamos a, muy rápidamente¹, explicar un ejemplo explícito en el que se ven algunas de las cosas que hemos ido estudiando a lo largo del trabajo. El objetivo es escribir el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento de una **teoría de Yang-Mills**, es decir, una teoría gauge «pura» que generaliza al electromagnetismo para el caso no abeliano. Esto se corresponde con el último de los sumandos de la ecuación anterior.

Los ingredientes que necesitamos para construir la teoría son los siguientes

- Una variedad pseudo-Riemanniana orientable de dimensión n : el **espaciotiempo** (M, g) .
- Un fibrado principal $P \rightarrow M$ con grupo estructural G^2 compacto de dimensión r .
- Un producto escalar Ad-invariante semidefinido positivo en \mathfrak{g} : $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ ³ y una base de \mathfrak{g} que sea ortonormal respecto a este producto.

¹Y por tanto pasando por encima algunos conceptos matemáticos interesantes, haciendo una exposición más superficial que en el resto del trabajo.

²Típicamente $G = \text{U}(1), \text{SU}(2)$ o $\text{SU}(3)$.

³Este determinará una métrica en el fibrado vectorial asociado $\text{Ad}(P) = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{ad}(P)}$

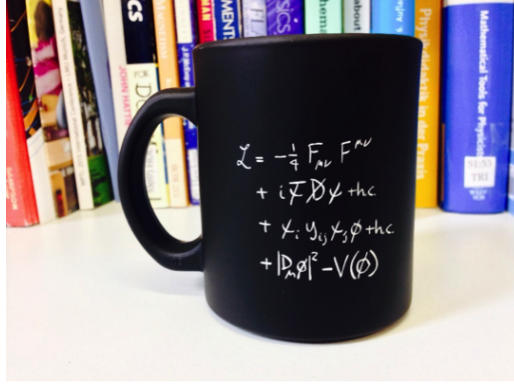


Figura 6.1: Taza con el lagrangiano del modelo estándar. Imagen de [24].

Sea A una conexión sobre P , $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, y $F^A \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ su correspondiente curvatura. Al final del capítulo anterior vimos que $F_M^A \in \Omega^2(M, \text{Ad}(P))$. Esto nos permite definir el lagrangiano de Yang-Mills como

$$\mathcal{L}_{YM}[A] = -\frac{1}{2} \langle F_M^A, F_M^A \rangle_{\text{Ad}(P)},$$

de forma que, una vez fijada la conexión A , el lagrangiano sea una función $\mathcal{L}_{YM}[A] \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Se puede demostrar que es un lagrangiano invariante gauge –lo hemos construido para que lo sea–:

$$\mathcal{L}_{YM}[f^*A] = \mathcal{L}_{YM}[A]$$

para cualquier automorfismo de fibrados $f \in \mathcal{G}(P)$ y para todas las conexiones A sobre P .

Nos interesa escribirlo localmente para poder llegar a una expresión que nos va a permitir escribir incluso unos diagramas de Feynman. Para ello escogemos un gauge local $s : U \rightarrow P$ y una carta en U con coordenadas x^μ . Entonces,

$$\mathcal{L}_{YM}[A] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{Aa} F_a^{A\mu\nu}{}^4,$$

donde

$$F_{\mu\nu}^{Aa} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

con las **constantes de estructura** f_{abc} definidas por las relaciones de conmutación de la base $\{T_a\}$

⁴Hemos utilizado que el *field strength* se define como $F_s^A = s^* F^A \in \Omega^2(U, \mathfrak{g})$, y que al expandirlo en las coordenadas x^μ se tiene $F_{\mu\nu}^A = F_s^A(\partial_\mu, \partial_\nu)$ y si tomamos una base $\{T_a\}$ de \mathfrak{g} tenemos que $F_{\mu\nu}^A = F_{\mu\nu}^{Aa} T_a$.

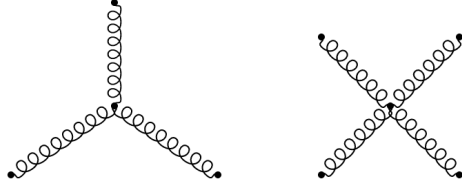


Figura 6.2: Vértices con tres y cuatro patas correspondientes a la autointeracción del campo gauge en una teoría de Yang-Mills no abeliana.

del álgebra de Lie. De aquí se pasa a la siguiente fórmula explícita del lagrangiano:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{YM}[A] &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{Aa} F_a^{A\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) \\
 &\quad - \frac{1}{2} f_{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} \\
 &\quad - \frac{1}{4} f_{abc} f_{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}
 \end{aligned}$$

En caso de que G sea abeliano el único término no nulo será el primero, que describe los bosones libres. En el caso de QCD, que es no abeliano, se tienen esas interacciones entre tres y cuatro gluones. En particular, como $G = \text{SU}(3)$ sabemos que habrá ocho gluones. Dentro de las constantes de estructura está la carga, que es una constante de acoplo que «mide» cuánto se aleja la teoría descrita por el lagrangiano de la teoría libre: en particular cuando dicha constante sea pequeña se podrán utilizar unas herramientas perturbativas que nos permitirán calcular los observables que deseemos. En particular, podremos entender los dos últimos sumandos de la ecuación anterior como los vértices (diagramas de Feynman) de la interacción, que se muestran en 6.2.

Si ahora consideramos que nuestro espaciotiempo es cerrado⁵ (compacto y sin frontera) podemos encontrar las ecuaciones de movimiento correspondientes a esta teoría. Para ello, tenemos que construir la acción de la teoría, para lo que nos aprovechamos del isomorfismo lineal $\Omega^1(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}} \cong \Omega^1(M, \text{Ad}(P))$, que nos va a permitir integrar el lagrangiano en el espacio:

$$S_{YM}[A] = -\frac{1}{2} \langle F_M^A, F_M^A \rangle_{\text{Ad}(P), L^2} = -\frac{1}{2} \int_M \langle F_M^A, F_M^A \rangle_{\text{Ad}(P)} \text{dvol}_g^6.$$

⁵Es que si tenemos frontera podríamos añadir otro término, que es topológico porque solo depende de la topología del espaciotiempo y no de la métrica y que se llama θ -term. Esto en principio puede parecer no tener sentido físico porque existirían trayectorias cerradas de tipo tiempo (máquinas del tiempo) que violarían la causalidad. Sin embargo, sirve para modelizar muchos sistemas físicos –en realidad bastaría con suponer que todos los campos tienen algo así como soporte compacto, que es lo que se hace siempre al hacer QFT–. El propósito ahora es que simplifica los cálculos.

⁶Donde $\text{dvol}_g = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, con $|g|$ el valor absoluto del determinante de la métrica, es la forma de volumen canónica sobre M que existe por ser esta una variedad pseudo-Riemanniana orientable. Además, si suponemos que las formas tienen soporte compacto tendrá sentido definir el producto escalar L^2 de forma análoga a como lo hacemos con

Y, entonces, definiremos los puntos críticos de la acción como aquellos en los que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S_{YM}[A + t\alpha] = 0,$$

para cualquier variación $\alpha \in \Omega_{\text{hor}}^1(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}}$. Otra opción equivalente y ahora más sencilla es, a partir del lagrangiano escrito en coordenadas, calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange. Al final se llega a que las ecuaciones de movimiento son

$$d_A * F_M^A = 0^7,$$

las **ecuaciones de Yang-Mills**. Esto se puede escribir tras fijar un gauge local $s : U \rightarrow P$ como

$$d * F_s^A + [A_s, *F_s^A] = 0,$$

que es más fácil de interpretar como una (muy difícil) ecuación en derivadas parciales de segundo orden. En el caso del electromagnetismo, $G = \text{U}(1)$, la ecuación de Yang-Mills y la identidad de Bianchi se reducen a

$$d * F_M = 0,$$

$$dF_M = 0,$$

que sí son lineales y mucho más sencillas de resolver, representan un sistema físico que contiene al campo electromagnético libre (sin interacción).

En general, se puede estudiar las ecuaciones de Yang-Mills sobre cualquier fibrado principal y encontrar soluciones es un problema abierto y muy importante tanto en matemáticas como en física teórica. Como las ecuaciones son invariantes gauge, se puede pensar que el grupo gauge $\mathcal{G}(P)$ del fibrado principal $P \rightarrow M$ donde estamos estudiándolas actúa sobre el conjunto de todas las conexiones. A solución de la ecuación de Yang-Mills –a las que llamaremos **conexiones de Yang-Mills**–. Entonces, tiene sentido estudiar el conjunto de todas las conexiones de Yang-Mills que «no sean equivalentes». Se define el **espacio de moduli de Yang Mills** de un fibrado principal $P \rightarrow M$ sobre una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) como el espacio de conexiones de Yang-Mills cocientado por el grupo gauge⁸.

En 4 dimensiones el operador estrella de Hodge es idempotente sobre 2-formas y es fácil com-

funciones.

⁷donde $*$ es el operador $*$ de Hodge: $\Omega^k(M, \mathbb{K}) \rightarrow \Omega^{n-k}(M, \mathbb{K})$.

⁸No es trivial probar que está bien definido porque en la mayor parte de los casos estaremos haciendo el cociente de un espacio de dimensión infinita por un grupo de dimensión infinita.

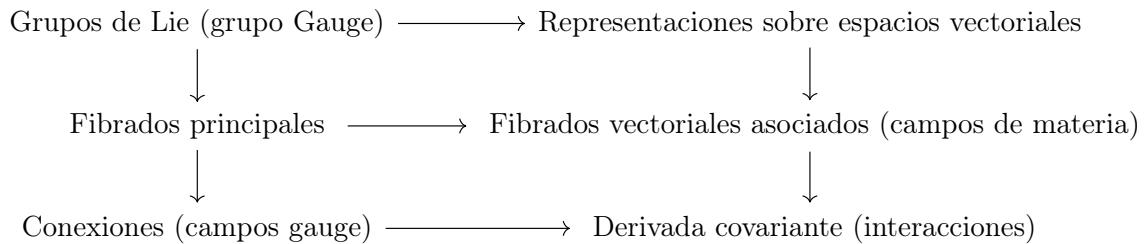
probar que conexiones A cuyas curvaturas satisfagan $*F_M^A = F_M^A$ ⁹ **–instantones–** o $*F_M^A = -F_M^A$ ¹⁰ **–antiinstantones–** son inmediatamente solución de la ecuación de Yang-Mills. El caso en que $G = \text{SU}(2)$ es el que estudió Donaldson y con el que probó el teorema de Donaldson, un resultado muy importante de geometría en 4 dimensiones. Este es uno de los muchos ejemplos en los que la interacción entre la física teórica y la geometría resulta en contribuciones muy relevantes. La historia de la física y las matemáticas de los últimos cincuenta años es prueba de esto y aún quedan muchos problemas abiertos en estas ramas.

⁹Autodualidad.

¹⁰Anti-autodualidad.

Conclusiones

Uno de los mayores logros de la física teórica del siglo XX fue «descubrir» la teoría cuántica de campos y llegar a formular teorías como el modelo estándar, que aún siendo incompleto constituye la teoría física más precisa jamás formulada. Igualmente, la simetría gauge es un concepto fundamental de la física, que utilizamos para describir las interacciones entre campos dinámicos. El objetivo de este trabajo era hacer una introducción a la idea geométrica que hay detrás de esto: la teoría de fibrados sobre variedades diferenciables, sin duda uno de los mayores logros de la geometría del siglo XX. Esto se puede resumir con el siguiente diagrama [16]:



La idea es que tenemos una variedad diferenciable M a la que llamaremos espaciotiempo y un grupo de Lie G al que llamaremos grupo gauge. Construimos entonces:

- Un fibrado principal $P \rightarrow M$ con grupo estructural G . A veces se dice de forma «poética» que este fibrado es precisamente la teoría gauge.
- Una conexión sobre ese fibrado principal, $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$, que es el campo asociado a los bosones gauge que median la fuerza con grupo de simetrías internas G . Cuando fijemos un gauge local, podremos ver A verdaderamente como una 1-forma sobre M , es decir, un campo con el significado habitual en física. Si calculamos la curvatura asociada a la conexión podremos construir la acción de Yang-Mills: un escalar de Lorentz invariante gauge que codifica una teoría gauge pura.
- Una representación de G sobre un \mathbb{K} -espacio vectorial V . A partir de esto podremos definir un fibrado vectorial asociado $P \times_{\rho} V \rightarrow M$ al fibrado principal anterior. Entonces, las secciones de este

fibrado serán los campos de materia de la teoría (que se comportarán bajo las transformaciones gauge precisamente como dice la representación ρ).

- Una derivada covariante asociada a la conexión A con la que podremos construir los términos cinéticos invariantes gauge de los campos de materia, que codifican también el *minimal coupling* al campo gauge.

Se ha intentado hacer el trabajo lo más autocontenido posible, para lo que incluyeron los tres primeros capítulos –sobre variedades diferenciables, grupos de Lie y acciones de grupos de Lie– en los que, sin embargo, muchas cosas se trataron de forma superficial y sin las demostraciones de los resultados relevantes y difíciles. Sería interesante cubrir todos estos huecos en posibles «ampliaciones» del trabajo. Además, aunque hayamos tratado muchos temas distintos, la realidad es que quedan multitud de temas por estudiar para poder llegar a entender algunos de los problemas matemáticos que se planteaban en la introducción. De hecho, faltarían aproximadamente cuarenta años de desarrollo matemático más que pródigo sobre estas bases. Algunos ejemplos de temas que habría sido muy interesante estudiar y que constituyen una posible extensión del trabajo son:

- **Clases características:** tienen que ver con medir en qué medida un fibrado principal se aleja de ser trivial. Son algo esencial en el estudio de la cohomología en este contexto. Habría sido muy interesante, en particular, estudiar clases de Chern y así construir teorías de Chern-Simons.
- En relación con la curvatura, es muy importante estudiar **holonomía:** un objeto que en el caso de los fibrados principales, cuantifica cómo el transporte paralelo no deja la información geométrica «invariante». Este es el marco en que estudiar *Wilson lines/loops* en teorías gauge, que son los observables razonables (invariantes gauge) en estas teorías físicas. Es algo muy relevante también en teoría de cuerdas, donde la holonomía ayuda a clasificar las compactificaciones «deseables» de las dimensiones extra.
- **Fibrados espinoriales:** las partículas fundamentales «de materia» del modelo estándar son fermiónicas y por ello deben estudiarse a partir de representaciones espinoriales. Desde el punto de vista matemático, habría sido muy interesante estudiar grupos de espín y fibrados espinoriales.

Bibliografía

- [1] Freeman J Dyson. Missed opportunities. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 78(5):635–652, 1972.
- [2] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.
- [3] DZ Zhang. C.N. Yang and contemporary mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, 15(4):13–21, 1993.
- [4] Shing-Tung Yau. Calabi’s conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(5):1798–1799, 1977.
- [5] Edward Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, 121(3):351 – 399, 1989.
- [6] Philip Candelas, Xenia de la Ossa, Yang-Hui He, and Balazs Szendroi. Triadophilia: A Special Corner in the Landscape. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 12(2):429–473, 2008.
- [7] P. Deligne, P. Etingof, D. Freed, L. Jeffrey, D. Kazhdan, J. Morgan, D. Morrison, and E. Witten. Quantum fields and strings: a course for mathematicians. vol. 1, 2. material from the special year on quantum field theory held at the institute for advanced study, princeton, nj, 1996–1997. ams, providence, ri. *Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ*, 1, 1999.
- [8] Joaquín Pérez Muñoz. Geometría y topología, 2007.
- [9] Joaquín Pérez Muñoz. Geometría riemanniana, 2004.
- [10] Andrés Viña Escalar. *Geometria diferencial*. Universidad De Oviedo, Servicio De Publicaciones, D.L, 1999.

- [11] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry / 1-5*. Publish Or Perish, 2005.
- [12] Michiko Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Adam Hilger, Cop, 1990.
- [13] Vladimir Iгореvic Arnold, Karen Vogtmann, and Alan Weinstein. *Mathematical methods of classical mechanics : with 269 illustrations*. Springer-Verlag, Cop. , Cop, 2010.
- [14] Stephen Bruce Sontz. *Principal bundles - the classical case*. Springer International Publish, 2015.
- [15] Arild Stubhaug. *The mathematician Sophus Lie: it was the audacity of my thinking*. Springer, 2002.
- [16] M. J. D. Hamilton and Springer International Publishing Ag. *Mathematical Gauge Theory : With Applications to the Standard Model of Particle Physics*. Cham Springer International Publishing Springer, 2018.
- [17] Anthony W. Knap. *Lie groups beyond an introduction*. Birkhauser, 1996.
- [18] Claude Chevalley. Theory of lie groups i. *Princeton, NJ*, 1947.
- [19] Kishore B. Marathe and Giovanni Martucci. The mathematical foundations of gauge theories. 1992.
- [20] Marco Castrillón and Vicente Muñoz. Notas de un curso de doctorado en la Universidad Complutense de Madrid: "Bundles". <http://www.mat.ucm.es/~vmunozve/Notas-fibrados.pdf>.
- [21] Jakob Schwichtenberg. Demystifying gauge symmetry, 2019.
- [22] Tazerenix. Ehresmann connection. https://en.wikipedia.org/wiki/Ehresmann_connection, Mar 2022.
- [23] Sergey Lychev and Konstantin Koifman. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. De Gruyter, 2019.
- [24] CERN. Sit down for coffee with the standard model. <https://home.cern/news/news/cern/sit-down-coffee-standard-model>.