La integral de Henstock-Kurzweil

Universidad de Oviedo

Trabajo Fin de Grado

Grado en Física

Curso 2022-2023

Francesc Josep Castanyer Bibiloni

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Una de las primeras ocasiones en la que aparece el concepto de integral, es en los estudios de Newton y Leibniz en los siglos XVII-XVIII. Por ello son considerados los padres del cálculo diferencial e integral. En sus estudios descubrieron que el problema físico del cálculo de áreas (entre otros), pasa por resolver un problema de primitivas. Un problema que hoy en día se plantearía como $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$, $y(x_0) = y_0$.

Para ello, buscaban cualquier primitiva de la función, es decir, una función cuya derivada coincida con la función f. Por tanto, su definición de integral tiene un enfoque sistemático, sin formalización teórica de lo que es una integral, simplemente como concepto de anti-derivada. La definición que se manejaba de integral es lo que hoy en día se conoce como el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), es decir, dada una función f, si existe una función primitiva F, la integral de Newton de f se define como $\int_a^b f \ dx = F(b) - F(a)$. Esta fórmula se conoce como la fórmula de Newton-Leibniz.

En 1823, Cauchy es el primero en formular una definición formal del concepto de integral. Su procedimiento consistía en dividir el intervalo de definición de la integral en subintervalos de longitud conocida, sumando el área que forma el valor de la función en el extremo izquierdo con la longitud del subintervalo. Con esto, toma el límite cuando la longitud máxima de los subintervalos tiende a 0. Cauchy afirmó que ese límite (la integral) existe siempre y cuando la función sea continua.

Más adelante, en 1854, Riemann formaliza su definición de la integral al estilo Cauchy, con particiones del intervalo en subintervalos de longitud conocida. Su cambio, consiste en tomar un punto cualquiera del subintervalo para evaluar la función, en lugar del extremo del subintervalo. Con esto, se conseguía una integral que no requería la continuidad de la función. Más adelante Lebesgue demostró que una función es integrable Riemann si y sólo si es acotada y continua casi siempre. Así, se tiene una versión del TFC (fórmula de Newton-Leibniz) para derivadas acotadas y continuas casi siempre.

El propio Lebesgue, en 1902, define una nueva integral con el objetivo de mejorar los requisitos para el TFC. La definición de la integral pasa por tomar subintervalos en la imagen de la función en lugar de tomarlos en el dominio de esta, como se hace en la integral de Riemann. Para ello, desarrolla toda la teoría de la medida y las funciones medibles. Con la nueva integral, se consiguió mejorar las hipótesis sobre la derivada para que se cumpla la fórmula de Newton-Leibniz, necesitando únicamente que sea acotada.

Denjoy y Perron desarrollaron, en 1912 y 1914 respectivamente, dos integrales mediante las cuales la fórmula de Newton-Leibniz se cumple para cualquier función derivada. Se demostró más adelante que ambas son equivalentes.

Finalmente, Kurzweil y Henstock (en 1957 y 1961 respectivamente) definieron de forma independiente, lo que se conoce hoy en día como la integral de Riemann generalizada, o la integral de Henstock-Kurzweil (HK).

Esta integral es una generalización de la integral de Riemann y de la de Lebesgue, ya que todas las funciones Riemann integrables y Lebesgue integrables son HK integrables. Además, al igual que la integral de Lebesgue, cumple mejores propiedades respecto a la convergencia entre funciones. Y finalmente, el resultado principal y por el cual fue desarrollada la integral, es que cumple la fórmula de Newton-Leibniz para cualquier derivada, sin ningún requisito extra. Es decir, se cumple que $\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$ siempre que exista la derivada F', cómo plantearon Newton y Leibniz en un principio.

Este trabajo se enfocará en presentar la integral de Riemann, presentando de forma breve las propiedades que cumple, y entrando en los resultados sobre convergencia y sobre la fórmula de Newton-Leibniz.

Después, se presentará la integral de Lebesgue, explicando el desarrollo previo sobre la teoría de la medida y sobre funciones medibles que es necesario para definirla. Con ello, se comparará con la de Riemann demostrando que todas las funciones Riemann integrables son Lebesgue integrables, y explicando los resultados sobre convergencias y sobre la fórmula de Newton-Leibniz que mejoran a los resultados de la integral de Riemann. Más adelante, se introducirá la integral de Henstock-Kurzweil siguiendo el mismo procedimiento, es decir, se definirá la integral, se verá que es una generalización de la anterior, y se demostrarán las propiedades sobre el TFC y sobre convergencias, que mejoran a las propiedades de la integral de Lebesgue.

Con esto, finalmente se busca presentar aplicaciones de la nueva integral (HK) a la física, volviendo al punto de partida de Newton y Leibniz por el cual se empezó a desarrollar toda la teoría del cálculo diferencial e integral, para resolver problemas físicos.

Capítulo 2

La integral de Riemann

2.1. Construcción de la integral de Riemann

Para empezar a definir una integral en un intervalo $[a, b]$, se debe definir una partición formada por subintervalos.

Definición 2.1.1. *Una partición* $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i] \ / \ 1 \leq i \leq n, \ x_0 = a, \ x_n = b\}$ *de* $[a, b]$ *es una colección finita de subintervalos cuya unión es* $[a, b]$ *y sólo tienen en común los extremos.*

De cada intervalo, se define su etiqueta $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Con ello, se tiene una partición etiquetada $\mathcal{P}_e$:

Definición 2.1.2. *Una partición etiquetada* $\mathcal{P}_e = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) \ : \ t_i \in [x_{i-1}, x_i], \ 1 \leq i \leq n\}$ *de* $[a, b]$ *es un conjunto de pares con* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *y con los intervalos formando una partición de* $[a, b]$

Con esto, se define la suma de Riemann de una función y una partición etiquetada

Definición 2.1.3. *Dada una partición etiquetada* $\mathcal{P}_e$ *de* $[a, b]$ *y una función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotada, se define su suma de Riemann como* $\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

Así, para definir la integral de Riemann, se usarán particiones cuya longitud de sus subintervalos tienda a cero:

Definición 2.1.4. *Dada una función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotada, el valor* $A = \int_a^b f$ *se define como su integral de Riemann si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta_\varepsilon > 0$ *tal que si* $\mathcal{P}_e$ *es cualquier partición etiquetada cumpliendo* $x_i - x_{i-1} < \delta_\varepsilon$ *para todo* $i = 1, ..., n$ *entonces* $|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - A| < \varepsilon$*. Si* *tal número existe, es único y se dice que f es Riemann-integrable ($f \in R([a, b])$), denotándose por:*

$$(R)\int_a^b f(x)\ dx$$

2.2. Integral de Darboux

Dejando de lado la integral de Riemann, se construye de forma parecida la integral de Darboux, que resultará ser equivalente y será útil más adelante:
Se parte de la definición 2.1.3. Sobre este concepto, se puede ver su variabilidad en función de la etiqueta elegida en cada subintervalo como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) \leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Estas cotas se definen como suma inferior y superior de Darboux asociadas a $\mathcal{P}$, respectivamente ($L(f, \mathcal{P})$ y $U(f, \mathcal{P})$). A partir de ellas, tomando el supremo de la inferior y el ínfimo de la superior, se define:

Definición 2.2.1. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Se define la integral inferior e integral superior de Darboux, respectivamente, como:*

$$\underline{D}\int_a^b f(x)\ dx = \sup \{L(f, \mathcal{P})\ :\ \mathcal{P} \in \mathbb{P}([a, b])\}$$

$$\overline{D}\int_a^b f(x)\ dx = \inf \{U(f, \mathcal{P})\ :\ \mathcal{P} \in \mathbb{P}([a, b])\}$$

Parece evidente pues, distinguir los casos en los que la integral superior e inferior coinciden, y definir:

Definición 2.2.2. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Se dice que es Darboux integrable en $[a, b]$ si $\underline{D}\int_a^b f(x)\ dx = \overline{D}\int_a^b f(x)\ dx$. En este caso, se define su integral de Darboux sobre $[a, b]$ como:*

$$(D)\int_a^b f(x)\ dx = \underline{D}\int_a^b f(x)\ dx = \overline{D}\int_a^b f(x)\ dx$$

No es muy complicado probar el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$f \in R([a,b])$*

2. *f es Darboux integrable*

En tal caso, se cumple que:

$$(R)\int_a^b f(x)\ dx = (D)\int_a^b f(x)\ dx$$

Así pues, se trata de la misma integral y por tanto, las mismas propiedades.

2.3. Propiedades básicas de la integral de Riemann

A partir de esto, surge de forma natural la pregunta: ¿Qué funciones son Riemann-integrables?, es decir, ¿qué se debe exigir a una función para que exista su integral de Riemann?
En primer lugar, se tiene que de existir la integral de una función en un intervalo, esta es única.
Al estar la definición limitada a funciones acotadas definidas en intervalos reales cerrados y acotados, se verá qué condiciones se necesitan para que exista la integral. Además, se verá que la función presenta resultados pobres respecto a sucesiones de funciones convergentes, comparada con otras integrales más generales.
En 1907, se presenta el resultado demostrado por Vitali y Lebesgue respecto a la integrabilidad de Riemann, como sigue:

Teorema 2.3.1. *(Teorema Vitali-Lebesgue)*
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *$f \in R([a,b])$*
2. *f es continua casi siempre* [1]

Para demostrar este resultado se utiliza el lema de Cousin, que será utilizado también más adelante en la caracterización de la integral de Henstock-Kurzweil.
Este resultado aporta una larga serie de **consecuencias**, entre las que cabe destacar las más importantes:

[1] Una función f se dice que es continua casi siempre si f es continua en todo su dominio excepto en un conjunto de medida nula

1. $f \in R([a,b]) \implies$ el conjunto de puntos dónde f es continua es denso en $[a,b]$, y el conjunto de discontinuidades de la función tiene medida cero.

2. Si $f, g \in R([a,b])$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene $f+g, f \cdot g, c \cdot f \in R([a,b])$.

   Así, se tiene un comportamiento de aplicación lineal de la integral de Riemann.

3. Si $f \in R([a,b])$ entonces $|f| \in R([a,b])$.

   Pero el recíproco es falso.

4. Dada $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $R([a,b])$ convergente uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces $f \in R([a,b])$.

A partir de estas consecuencias, se puede ampliar a una serie de **propiedades básicas** de la integral de Riemann:

1. Cómo ya se ha mencionado, tiene comportamiento de aplicación lineal: Si $f, g \in R([a,b])$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene $f+g, f \cdot g, c \cdot f \in R([a,b])$. Además:

   a) $\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$

   b) $\int_a^b (cf)dx = c \cdot \int_a^b f dx$

2. Dada $f \in R([a,b])$, con $f \geq 0$. Si $\int_a^b f dx = 0 \implies f = 0$ casi siempre. Si f es continua $\implies f = 0$.

3. Si $f \in R([a,b])$ entonces $|f| \in R([a,b])$. Además: $\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f| \, dx$.

2.4. Teorema Fundamental del Cálculo de la integral de Riemann

Se puede demostrar el siguiente resultado, abordando directamente el tema del trabajo sobre el Primer Teorema Fundamental del Cálculo:

Teorema 2.4.1. *(Primer Teorema Fundamental del Cálculo) Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *función diferenciable en* $[a,b]$*. Si f' es Riemann integrable en* $[a,b]$*, entonces:*

$$(R)\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)$$

Exigir que una función sea Riemann integrable es una condición realmente estricta, ya que se exige que sea acotada y continua casi siempre. Se busca por tanto ser capaces de mejorar este resultado, exigiendo menos condiciones sobre f'.

Se presenta un ejemplo dónde una función f es diferenciable pero su diferencial no es Riemann integrable (aunque sí sea acotada):

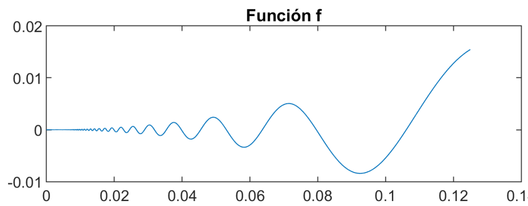
Ejemplo 2.4.1. (Vito Volterra)

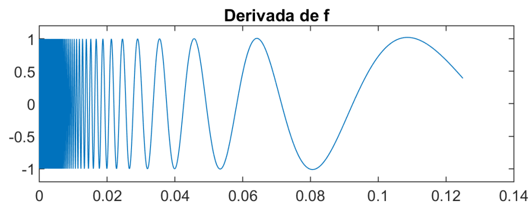
La idea se basa en encontrar una función continua y diferenciable en todo punto, cuya diferencial sea acotada y discontinua en los puntos de un conjunto de Cantor de medida finita. Por tanto, la función diferencial no sería Riemann integrable y sería pues un contraejemplo para el TFC.

Para ello, se presenta la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

La función es diferenciable con $f' = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Esta función es claramente acotada y no tiene límite en $x = 0$, por tanto es discontinua en $x = 0$. Se expone el comportamiento en las siguientes figuras:





La idea es copiar la función y modificarla de tal manera que la nueva función se comporte, en los extremos de ciertos intervalos $[a_n, b_n]$, igual que la función original en $x = 0$.

Así pues, se define la función $G_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$, con $G_n(x) = f(x - a_n)$. Esta función presenta el mismo comportamiento en $x = a_n$ que la función f en $x = 0$.

De la misma manera, se tiene G_n' acotada en todo el dominio, pero no continua en $x = a_n$.

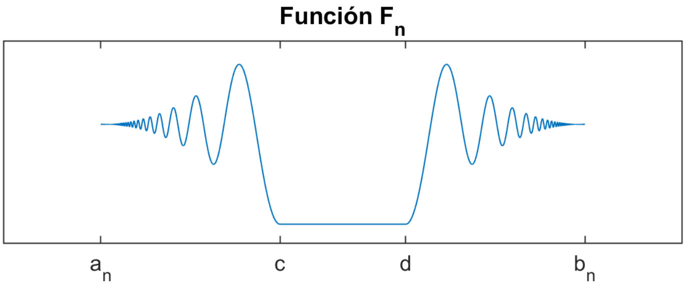
Se busca obtener una función que presente el mismo comportamiento pero en ambos extremos. Para ello, se toma c, punto en $(a_n, (a_n + b_n)/2)$ tal que sea el mayor extremo relativo de la función en ese intervalo ($G_n'(c) = 0$). Se toma también un d tal que $c - a_n = b_n - d$. Se tiene pues que

$$(c - a_n)^2 \sin \frac{1}{c - a_n} = -(b_n - d)^2 \sin \frac{1}{d - b_n}$$

Con esto, se construye la función F_n como sigue:

$$F_n(x) = \begin{cases} (x-a_n)^2 \sin \dfrac{1}{x-a_n} & a_n < x < c \\ (c-a_n)^2 \sin \dfrac{1}{c-a_n} & c \le x \le d \\ -(x-b_n)^2 \sin \dfrac{1}{x-b_n} & d < x < b_n \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se presenta el gráfico de la función:



Se ha construido pues una función cuya diferencial existe y está acotada en todo su dominio, pero es discontinua en los extremos del dominio.

Sea ahora Γ_α conjunto de tipo Cantor de medida positiva, por tanto $\mu(\Gamma_\alpha) > 0$. El conjunto se construye eliminando infinitos subconjuntos disjuntos. Sea $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ la lista de subconjuntos eliminados de $[0,1]$ para la construcción del conjunto.

Con esto, se define la función final $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} F_n(x) & x \in (a_n, b_n) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) = \Gamma_\alpha \end{cases}$$

Se comprueba que la función cumple que:

1. F es diferenciable en $[0,1]$.

2. F' es acotada en $[0,1]$.

3. F' es discontinua en Γ_α

Así, se tiene que F es una función diferenciable tal que F' no es Riemann integrable, y por tanto no se cumple el TFC.

2.5. Teoremas de convergencias de la integral de Riemann

De forma intuitiva se puede pensar que si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ con $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset R([a,b])$ entonces $f \in R([a,b])$ con $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\ dx = \int_a^b f\ dx$. Ninguna de las dos afirmaciones es cierta.

Respecto a si f es Riemann integrable, se requiere más que convergencia puntual sobre la sucesión:

Teorema 2.5.1. *(Convergencia Uniforme) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset R([a,b])$ sucesión convergente de forma uniforme* [2] *a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces $f \in R([a,b])$ y se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\ dx = \int_a^b f\ dx$$

Evidentemente, la condición de sucesión convergente de forma uniforme es más restrictiva que la condición de convergencia puntual. Se presentan otros resultados con condiciones adicionales en los que sí es suficiente la convergencia puntual para probar el intercambio entre el límite y la integral.

Teorema 2.5.2. *(Convergencia Monótona) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset R([a,b])$ con $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ sucesión monótona creciente. Si $f \in R([a,b])$, se cumple que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\ dx = \int_a^b f\ dx$$

En este caso, al añadir la condición de monotonía en la sucesión, se tiene que se da el intercambio entre el límite y la integral. Se presenta otro resultado con una condición distinta para llegar a la misma conclusión:

Teorema 2.5.3. *(Convergencia Acotada) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset R([a,b])$ con $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ sucesión uniformemente acotada* [3]*. Si $f \in R([a,b])$, se cumple que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\ dx = \int_a^b f\ dx$$

[2] Una sucesión de funciones converge de forma uniforme a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cuando se cumple que $\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} = 0$.

[3] Una sucesión de funciones se dice uniformemente acotada si existe K tal que $|f_n(x)| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in [a,b]$.

En todos los teoremas de convergencia puntual, se exige a la función límite que sea integrable para aplicar los resultados, y no se obtiene como consecuencia de ellos. Se verá que estos resultados se mejoran de forma considerable en las siguientes integrales.

Capítulo 3

La integral de Lebesgue

La idea de Lebesgue a la hora de generalizar la integral de Riemann, es tomar un enfoque distinto a la hora de dividir el intervalo de integración en particiones finas. Él decide tomar particiones en el rango de la función, no en el dominio.
Así pues, supongamos que se tiene $f : X \to \mathbb{R}$ con $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in X$. En este caso, se toma una partición $\mathcal{P} = \{y_0, ..., y_n\}$, con $m = y_0 < y_1 < ... < y_n = M$.
De aquí surgen los conjuntos

$$E_i = \{x \in X \ : \ y_{i-1} \leq f(x) \leq y_i\} = X \cap f^{-1}([y_{i-1}, y_i])$$

Con esto, se toma de cada conjunto E_i una etiqueta (c_i) y se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \cdot (\text{"longitud de } E_k\text{"}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot (\text{"longitud de } E_k\text{"}) \leq \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot (\text{"longitud de } E_k\text{"})$$

En caso de convergencia, esta sería una definición de la integral de Lebesgue en analogía a la integral de Riemann.
En este caso, los conjuntos cuya *longitud* se necesita conocer ya no son intervalos, y por tanto habrá que buscarle un sentido al concepto de *longitud* de un conjunto arbitrario. Para ello, Lebesgue desarrolla toda su teoría de la medida.

3.1. Medida de Lebesgue

Se busca entonces una medida cumpliendo ciertas propiedades:

1. Que esté definida para cualquier conjunto arbitrario de $\mathbb{R}$.

2. Que sea una extensión de la longitud para intervalos.

3. Que sea invariante respecto a traslaciones reales.

4. Que sea numerablemente aditiva, es decir, que la medida de la unión numerable de subconjuntos disjuntos dos a dos sea la suma de la medida de dichos conjuntos.

Con el punto número 4 es con el que se va a tener más problemas, asumiendo cómo solución tomar la clase de subconjuntos de $\mathbb{R}$ en los cuales la medida tiene comportamiento aditivo. Con esto en mente, se procede a definir la medida exterior de Lebesgue, usando que todo subconjunto real está recubierto por una colección numerable de subconjuntos abiertos:

Definición 3.1.1. *Dado un subconjunto real $A \subset \mathbb{R}$, se define su medida exterior de Lebesgue como*

$$\mu^*(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_k \ell(I_k) \ / \ A \subset \bigcup_k I_k, I_k \textit{ intervalo abierto para todo } k = 1, ..., \infty \right\}$$

Destacar que de forma directa por la definición se tiene que $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Con esta definición, los puntos 1 y 3 se cumplen de forma directa. Es necesario hacer hincapié en los otros dos. En primer lugar, se ve que el punto número 2 también queda resuelto:

Teorema 3.1.1. *Para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se tiene que $\mu^*(I) = \ell(I)$*

Con esto queda definida una medida para conjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$, cuyo valor para intervalos vale lo mismo que su longitud y que es invariante respecto a traslaciones reales. Sólo falta discutir el último punto, el comportamiento aditivo numerable.
Lo que sí se puede garantizar, es un comportamiento subaditivo:

Teorema 3.1.2. *Dada $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ colección numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$, se tiene:*

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Mencionar que de este resultado se obtiene de forma directa que cualquier conjunto numerable tiene medida nula.
Como ya se ha mencionado, el objetivo es limitarse a trabajar con conjuntos que cumplan que la desigualdad presentada en el resultado anterior sea una igualdad, y por tanto presenten un comportamiento aditivo respecto a la medida exterior. Pero, ¿cuáles son estos conjuntos? La condición dada por Lebesgue es:

Definición 3.1.2. *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible según Lebesgue (ó medible) si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto $G \supseteq E$ tal que*

$$\mu^*(G \setminus E) \leq \varepsilon$$

Por otro lado, el criterio de medibilidad según Carathéodory es:

Definición 3.1.3. *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible según Lebesgue si*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$

Ambas definiciones de conjuntos medibles son equivalentes, y serán usadas indistintamente. Con esta definición, se puede definir al conjunto de todos los subconjuntos medibles como

$$\mathcal{M}_\mu(\mathbb{R}) = \{E \subseteq R \ : \ E \text{ es medible según Lebesgue}\}$$

Se enuncia una proposición que se utilizará más adelante:

Proposición 3.1.1. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto tal que $\mu^*(E) = 0$ entonces $E \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$.

Finalmente, sobre esta familia de conjuntos se puede anunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.1.3. *Dada la medida exterior de Lebesgue definida anteriormente, se tiene:*

1. *La familia de conjuntos medibles según Lebesgue, $\mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$, forman una σ-álgebra*

2. *Sobre este conjunto, la medida exterior de Lebesgue presenta un comportamiento numerablemente aditivo: Para toda $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ sucesión de subconjuntos medibles disjuntos dos a dos, se tiene*

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(E_k\right)$$

Sobre este σ-álgebra de conjuntos medibles, la medida exterior cumple las propiedades de una medida, y se cambiará la notación de $\mu^*()$ a $\mu()$.
Se presenta un resultado final sobre la aproximación de conjuntos medibles por conjuntos abiertos y cerrados, que será utilizado en demostraciones más adelante:

Teorema 3.1.4. *Para todo conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- $E \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$
- *Dado* $\varepsilon > 0$*, se tiene un subconjunto abierto* $G \subseteq \mathbb{R}$ *con* $E \subset G$ *tal que* $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$.
- *Dado* $\varepsilon > 0$*, se tiene un subconjunto cerrado* $F \subseteq \mathbb{R}$ *con* $F \subset E$ *tal que* $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.

Se ha conseguido pues definir la medida de Lebesgue sobre una clase de conjuntos sobre los cuales la medida tiene un comportamiento adecuado, y a partir de la cual se podrá desarrollar la teoría de integración de Lebesgue.

3.2. Funciones medibles

Recordando la situación en la que se dejó la definición de la integral, se tenían los conjuntos

$$E_i = \{x \in X \text{ tal que } y_{i-1} \leq f(x) \leq y_i\} = X \cap f^{-1}([y_{i-1}, y_i])$$

de los cuales se tenía que obtener su medida. Para ello, hace falta asegurarse de que los conjuntos sean medibles, y de aquí surge la siguiente definición:

Definición 3.2.1. *Sea* $E \subseteq \mathbb{R}$*. Una función* $f : E \to \mathbb{R}$ *se dice que es medible Lebesgue (ó medible) sobre* E *si* $E \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ *y para todo* $a \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in E \ : \ f(x) > a\}$$

es un conjunto medible.

Con esta definición, se asegura que los conjuntos E_i definidos anteriormente, son medibles, y por tanto tiene sentido y está bien definida la integral en el sentido de Lebesgue anteriormente planteada, a falta de formalizar la definición.
Pero primero, se estudiarán propiedades de las funciones medibles:

Proposición 3.2.1. Dado $E \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ y $f : E \to \mathbb{R}$, son equivalentes:

1. f es una función medible
2. $\{x \in E \ : \ f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ para todo $a \in \mathbb{R}$
3. $\{x \in E \ : \ f(x) < a\} \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ para todo $a \in \mathbb{R}$
4. $\{x \in E \ : \ f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ para todo $a \in \mathbb{R}$

La demostración es sencilla usando propiedades de las σ-álgebras y propiedades de conjuntos. De la proposición anterior, se obtiene de forma directa que:

Corolario 3.2.1. Dado $E \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ y $f : E \to \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\{x \in E \ : \ f(x) = a\} \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R}) \text{ para todo } a \in \mathbb{R}$$

Este corolario se usará más adelante para probar la medibilidad de las funciones Riemann integrables.

Proposición 3.2.2. Toda función continua definida sobre un conjunto medible es una función medible:

Demostración. Usando que la antiimagen de todo conjunto abierto mediante una función continua es abierto, se tiene que $f^{-1}((a,\infty))$ es un conjunto abierto y por tanto medible. Así pues, los conjuntos $\{x \in E \ : \ f(x) > a\} = f^{-1}((a,\infty)) \cap E$ son conjuntos medibles y por tanto la función es medible. ∎

Además, se presenta un resultado sobre medibilidad del supremo e ínfimo de una sucesión de funciones medibles, así como del límite inferior y superior:

Proposición 3.2.3. Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ sucesión de funciones medibles sobre E. Se tiene que:

1. $\inf\{f_n\}$ y $\sup\{f_n\}$ son funciones medibles sobre E.

2. $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ y $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ son funciones medibles sobre E.

Se verá ahora que las funciones Riemann-integrables son funciones medibles, y por tanto la integral de Lebesgue es, de hecho, una generalización de la integral de Riemann.
Para ello, se demuestra que:

Proposición 3.2.4. Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas sobre un conjunto medible, con f medible sobre E. Si $f = g$ casi siempre, es decir que son iguales excepto en un subconjunto de medida cero; entonces g es medible sobre E.

Demostración. Se define $Z = \{x \in E \ : \ f(x) = g(x)\}$. Por el corolario 3.2.1, se tiene que $Z \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$, y además $\mu(E \setminus Z) = 0$ por definición. Tomando ahora cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $\{x \in E \ : \ f(x) > a\} \cap Z \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ por ser f medible; y $\{x \in E \ : \ g(x) > a\} \cap (E \setminus Z) \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ ya que está contenido en $E \setminus Z$ y por tanto tiene medida cero (proposición 3.1.1).

Con esto, se tiene que:

$$\{x \in E \ : \ g(x) > a\} = (\{x \in E \ : \ g(x) > a\} \cap Z) \bigcup (\{x \in E \ : \ g(x) > a\} \cap (E \setminus Z)) =$$

$$= (\{x \in E \ : \ f(x) > a\} \cap Z) \bigcup (\{x \in E \ : \ g(x) > a\} \cap (E \setminus Z)) \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$$

Por tanto g es medible sobre E. ■

Con este resultado en mente, resulta sencillo probar que toda función Riemann integrable es medible Lebesgue:

Teorema 3.2.1. *Toda función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann integrable en* $[a,b]$ *es una función medible sobre* $[a,b]$

Demostración. Si f es una función Riemann integrable en $[a,b]$, se vio que es una función continua casi siempre, es decir, que sus discontinuidades están en un conjunto de medida cero, Z. Así, f es continua sobre $[a,b] \setminus Z$ y por tanto medible sobre este conjunto.
Se define $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{Si } x \in [a,b] \setminus Z \\ 0 & \text{Si } x \notin [a,b] \setminus Z \end{cases}$.
En tal caso, se ve que g es una función medible sobre $[a,b]$ ya que dado $c \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\{x \in [a,b] \ : \ g(x) > c\} = \begin{cases} \{x \in [a,b] \setminus Z \ : \ f(x) > c\} & c \geq 0 \\ \{x \in [a,b] \setminus Z \ : \ f(x) > c\} \bigcup \{x \in Z \ : \ g(x) > c\} & c < 0 \end{cases}$$

En ambos casos el conjunto es medible: en el primero por ser f medible sobre $[a,b] \setminus Z$, y en el segundo caso ya que el segundo subconjunto está contenido en Z, y por tanto tiene medida cero.
Se tiene así una función g medible sobre $[a,b]$ y con $g = f$ casi siempre. Usando la proposición anterior (3.2.4), se tiene que f es medible sobre $[a,b]$.

■

Así queda demostrado que toda función Riemann integrable es una función medible. El recíproco, sin embargo, no se cumple, cómo se puede ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.1. Se tomará la función de Dirichlet, definida cómo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Se tiene que esta función es discontinua en todo su dominio: tomando $\varepsilon = 1/2$, para todo δ se tiene que existe un número racional y un número irracional en cualquier intervalo de longitud 2δ, por tanto existen 2 puntos suficientemente cerca cuyas imágenes difieren más de ε.

Con esto, se tiene que f no es Riemann integrable ya que no es continua casi siempre.

Para probar que la función es medible, se usa la Proposición 3.2.4, sabiendo que la función $g = 0$ es medible y que $f = g$ casi siempre (excepto en los números racionales, medida cero).

Por tanto se tiene que f la función de Dirichlet es medible pero no es Riemann integrable.

3.3. Integral de Lebesgue

3.3.1. Construcción de la integral de Lebesgue

Se recuerda el procedimiento seguido a la hora de introducir la integral, en este caso ya sobre funciones medibles y acotadas:

Sea una función $f : E \to \mathbb{R}$, con $E \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ y con f una función medible sobre E y acotada ($m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in E$). En primer lugar, se consideran las cotas como $m = \text{ínf}\,\{f(x) \ : \ x \in E\}$ y $M = \sup\{f(x) \ : \ x \in E\}$.

Se toma una partición $\mathcal{P} = \{y_0, ..., y_n\}$, con $m = y_0 < y_1 < ... < y_n = M$.

De aquí surgen los conjuntos

$$E_i = \{x \in E \ : \ y_{i-1} \leq f(x) \leq y_i\} = E \cap f^{-1}([y_{i-1}, y_i])$$

Una vez vista toda la teoría de la medida, se sabe que al ser la función medible sobre E, los conjuntos E_i son conjuntos medibles, por lo que se puede escribir las siguientes sumas inferior y superior de Lebesgue dada una partición:

$$L_\mu(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot \mu(E_i) \qquad\qquad U_\mu(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu(E_i)$$

Es sencillo ver que, para toda partición $\mathcal{P} \in \mathbb{P}([m, M])$ se cumple:

$$m \cdot \mu(E) \leq L_\mu(f, \mathcal{P}) \leq U_\mu(f, \mathcal{P}) \leq M \cdot \mu(E) \tag{3.1}$$

De 3.1 se ve claramente que si se define $\|\mathcal{P}\|_\infty = \text{máx}\,\{(y_i - y_{i-1}) \ : \ i = 1, ..., n\}$:

$$0 \leq U_\mu(f, \mathcal{P}) - L_\mu(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) \cdot \mu(E_i) \leq \|\mathcal{P}\|_\infty \cdot \mu(E) \tag{3.2}$$

Tomando supremo e ínfimo, se consigue quitar la dependencia en la partición:

Definición 3.3.1. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ función acotada y medible sobre E. Las integrales inferior y superior de Lebesgue se definen como:*

$$\mathcal{L}_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}([m,M])} L_\mu(f,\mathcal{P}) \qquad\qquad \mathcal{U}_\mu(f) = \inf_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}([m,M])} U_\mu(f,\mathcal{P})$$

De aquí surge la definición de integrabilidad según Lebesgue:

Definición 3.3.2. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ función acotada y medible sobre E, conjunto de medida finita. Se dice que f es Lebesgue integrable sobre E si $\mathcal{L}_\mu(f) = \mathcal{U}_\mu(f)$. En tal caso, se define la integral de Lebesgue de f sobre E como:*

$$\int_E f \; d\mu = \mathcal{L}_\mu(f) = \mathcal{U}_\mu(f)$$

El conjunto de funciones acotadas y medibles sobre E, conjunto de medida finita, se denota por $\mathcal{L}_{fin}(E)$. La integral así definida es única.

Siguiendo con el desarrollo de (3.2), es claro que:

Teorema 3.3.1. *Toda función $f : E \to \mathbb{R}$ acotada y medible sobre E con $\mu(E) < \infty$ es una función Lebesgue integrable sobre E ($f \in \mathcal{L}_{fin}(E)$).*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, siempre se puede tomar una partición arbitraria $\mathcal{P} \in \mathbb{P}([m, M])$ que cumpla que $\|\mathcal{P}\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{\mu(E)}$.
Con esta partición y con la ecuación 3.2, se tiene que:

$$0 \leq U_\mu(f,\mathcal{P}) - L_\mu(f,\mathcal{P}) \leq \|\mathcal{P}\|_\infty \cdot \mu(E) \leq \varepsilon$$

Además, como $L_\mu(f,\mathcal{P}) \leq U_\mu(f,\mathcal{P})$ para todo $\mathcal{P} \in \mathbb{P}([m, M])$, es claro que

$$0 \leq \inf_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}([m,M])} U_\mu(f,\mathcal{P}) - \sup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}([m,M])} L_\mu(f,\mathcal{P}) \leq \varepsilon$$

Al ser un $\varepsilon > 0$ cualquiera, se concluye que:

$$\mathcal{L}_\mu(f) = \mathcal{U}_\mu(f) = \int_E f \; d\mu$$

$\blacksquare$

Finalmente, se busca generalizar la definición para funciones no acotadas definidas sobre un intervalo $[a, b]$, ya que más adelante se verá que la integral de Henstock-Kurzweil está definida también para funciones no acotadas. La definición se puede generalizar aun más, a funciones no acotadas y medibles definidas sobre un conjunto medible cualquiera, no sólo para intervalos. Para ello, se debería definir previamente las funciones simples y aproximar la función cómo límite de sucesión de funciones simples. Al buscar como objetivo comparar la integral de Lebesgue con la integral de Henstock-Kurzweil, la cual se define para funciones definidas sobre intervalos, se limitará el estudio de la integral de Lebesgue a funciones medibles no acotadas definidas en intervalos.
Se construye en primer lugar la integral para funciones no acotadas, no negativas y medibles, definidas en un intervalo $[a, b]$, a partir de la cuál se obtendrá una generalización aplicable a más funciones.

Definición 3.3.3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función medible no acotada y no negativa. Se define la función ${}^k f = \begin{cases} f & 0 \leq f \leq k \\ k & f > k \end{cases}$. Mediante esta sucesión de funciones, se define de forma directa la integral de la función como el límite de la secuencia $\{\int_{[a,b]} {}^k f \; d\mu\}_{k=1}^{\infty}$, bien definida por ser ${}^k f$ función acotada y medible sobre un intervalo finito. Se define pues la integral de Lebesgue de la función f como:*

$$\int_{[a,b]} f \; d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} {}^k f \; d\mu$$

Se dice que la función f es integrable si $\int_{[a,b]} f \; d\mu < \infty$.

Por último, se generaliza la definición a funciones medibles arbitrarias definidas sobre un intervalo.

Definición 3.3.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función medible no acotada. Se definen las funciones $f^+ = \max\{f, 0\}$ y $f^- = -\min\{0, f\}$. Es claro que $f = f^+ - f^-$. Ambas funciones son medibles y no negativas, y por tanto, se tiene definida su integral. Así, se dice que f es integrable si y sólo si $\int_{[a,b]} f^+ \; d\mu < \infty$ y $\int_{[a,b]} f^- \; d\mu < \infty$, y su integral se define como:*

$$\int_{[a,b]} f \; d\mu = \int_{[a,b]} f^+ \; d\mu - \int_{[a,b]} f^- \; d\mu$$

Con esto, se tiene definida la integral de Lebesgue para funciones medibles no acotadas definidas sobre intervalos.

3.3.2. Propiedades básicas de la integral de Lebesgue

Se introducen las propiedades más básicas e importantes de la integral de Lebesgue. Los resultados se presentarán para funciones medibles y acotadas, y se mencionará su posible extensión a funciones no acotadas.

En primer lugar, se presentan propiedades muy básicas sobre el buen comportamiento de la integral, como cabe esperar ya que en la integral de Riemann ya se tienen:

Teorema 3.3.2. *Sea $f, g \in \mathcal{L}_{fin}(E)$. Se cumple que:*

1. $\int_E (f+g)\ d\mu = \int_E f\ d\mu + \int_E g\ d\mu$
2. $\int_E (a \cdot f)\ d\mu = a \cdot \int_E f\ d\mu$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$

Respecto a la generalización de este resultado, es fácil ver que se cumple definiendo $h = f+g$ ó $h = a \cdot f$, y utilizar el resultado para no negativas sobre sus respectivas funciones h^+ y h^-.

Del desarrollo previo a la definición (3.1), se obtiene claramente una propiedad de la integral:

Teorema 3.3.3. *Sea $f \in \mathcal{L}_{fin}(E)$. si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in E$, se cumple que*

$$m \cdot \mu(E) \leq \int_E f\ d\mu \leq M \cdot \mu(E)$$

En este caso, no tiene sentido plantear el resultado para funciones no acotadas.

Del resultado anterior, claramente se obtiene el siguiente:

Corolario 3.3.1. Sea $f \in \mathcal{L}_{fin}(E)$. Si $f \geq 0 \implies \int_E f\ d\mu \geq 0$

Se presenta también la σ-aditividad de la integral respecto a los conjuntos

Teorema 3.3.4. *Sea $f \in \mathcal{L}_{fin}(E)$. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de conjuntos disjuntos tal que $E = \bigcup_n E_n$. Se tiene que*

$$\int_E f\ d\mu = \sum_n \int_{E_n} f\ d\mu$$

Este resultado también sigue siendo válido para funciones integrables no acotadas, cómo cabe esperar.

Se presenta también una propiedad de la integral de Lebesgue que no se tiene en la integral de Riemann, sobre la integrabilidad del valor absoluto de una función:

Teorema 3.3.5. *Sea $f \in \mathcal{L}_{fin}(E)$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *f es Lebesgue integrable sobre E.*

2. *$|f|$ es Lebesgue integrable sobre E.*

La demostración pasa por ver que el valor absoluto de una función acotada y medible es una función acotada y medible. En cuanto a la generalización, en el caso de funciones no acotadas no negativas se tiene que $|f| = f$ y por tanto la función $|f|$ es claramente integrable de serlo f. Finalmente, en el caso de funciones no negativas, se tiene que $|f| = f^+ + f^-$, y por tanto su integral es finita si lo es la de f.
Como continuación del resultado visto sobre funciones medibles iguales casi siempre (3.2.4), se presenta el resultado con integrales:

Proposición 3.3.1. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, con f Lebesgue integrable. Si $f = g$ casi siempre, entonces g es Lebesgue integrable en $[a, b]$ y se cumple que

$$\int_{[a,b]} f \; d\mu = \int_{[a,b]} g \; d\mu$$

Este resultado es general para funciones integrables, acotadas y no acotadas.
Finalmente, se presenta una desigualdad que relaciona la medida de ciertos conjuntos característicos de la función con el valor de la integral. Este resultado es válido para funciones acotadas y no acotadas.

Teorema 3.3.6. *(Desigualdad de Chebyshev) Sea $f : E \to \mathbb{R}$ función medible sobre E, con $f \geq 0$. Entonces se tiene*

$$\mu(\{x \in E : f(x) \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \cdot \int_E f \; d\mu$$

3.3.3. Generalización de la integral de Riemann

Para seguir con la comparación con la integral de Riemann, se demuestra este Teorema (la primera parte ya está demostrada, falta la igualdad entre integrales):

Teorema 3.3.7. *Sea $f \in R([a, b])$, entonces $f \in \mathcal{L}_{fin}([a, b])$ y se cumple que la integral de Riemann y la de Lebesgue coinciden:*

$$(L) \int_{[a,b]} f \; d\mu = (R) \int_a^b f \; dx$$

Demostración. En el teorema 3.2.1 se probó que toda función Riemann integrable en $[a,b]$ era medible en $[a,b]$. Además, también es acotada así que es Lebesgue integrable. Hay que ver la igualdad entre integrales.
Para ello, se toma una partición arbitraria de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n\}$, y sea

$$M_i = \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}; \ i = 1, .., n$$

Por otro lado, cómo f es acotada, se tiene que existe M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$; y se toma una partición $\mathcal{Q} = \{y_0, ..., y_k\}$ de $[-M, M]$ cumpliendo que los números M_i están en la partición $\mathcal{Q}$. Recordando la definición de los conjuntos $E_j = f^{-1}([y_{j-1}, y_j])$ de la definición de la integral de Lebesgue, se tiene que:

$$U_\mu(f, \mathcal{Q}) = \sum_{j=1}^{k} y_j \cdot \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} y_j \cdot \mu(E_j \cap [x_{i-1}, x_i]) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \mu(E_j \cap [x_{i-1}, x_i]) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \mu([x_{i-1}, x_i]) = U(f, \mathcal{P})$$

De forma análoga, si se construye la partición $\mathcal{Q} = \{y_0, ..., y_k\}$ de $[-M, M]$ conteniendo a los números $m_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}; \ i = 1, .., n$, se obtiene que:

$$L_\mu(f, \mathcal{Q}) \geq L(f, \mathcal{P})$$

Así, dada cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, se tiene que existe una partición $\mathcal{Q}$ de $[-M, M]$ tal que:

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L_\mu(f, \mathcal{Q}) \leq U_\mu(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P})$$

Al ser una función Riemann integrable, se tiene que el supremo de la suma inferior coincide con el ínfimo de la suma superior, y por tanto también coinciden con los supremos de las sumas superior e inferior de Lebesgue, obteniéndose:

$$(L) \int_{[a,b]} f \ d\mu = (R) \int_a^b f \ dx$$

■

Se introducirá un ejemplo de función acotada Lebesgue integrable que no es Riemann integrable, probando que los conjuntos de funciones Riemann integrables y Lebesgue integrables no son iguales:

Ejemplo 3.3.1. (Función Lebesgue no Riemann integrable) Se toma como ejemplo la misma función que en el ejemplo 3.2.1, la función de Dirichlet.
En ese ejemplo, se ha visto que la función no es Riemann integrable, y además se ha visto que la función es medible. Con esto, se tiene una función medible y acotada, y por tanto es una función integrable Lebesgue, que no es Riemann integrable.

Así, queda claro que las funciones Riemann integrables son un subconjunto de las funciones Lebesgue integrables, pero los subconjuntos no coinciden, y por tanto queda claro que la integral de Lebesgue es una extensión de la integral de Riemann en cuanto al conjunto de funciones integrables.

3.3.4. Teorema Fundamental del Cálculo de la integral de Lebesgue

Por lo visto hasta ahora, se tiene que claramente la integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann ya que abarca un conjunto más amplio de funciones. Pero además, se verá que presenta mejores propiedades respecto al teorema fundamental del cálculo y respecto a los teoremas de convergencias.
Se presenta el siguiente resultado del Primer Teorema Fundamental del Cálculo aplicado a la integral de Lebesgue:

Teorema 3.3.8. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función diferenciable en $[a, b]$. Si f' es acotada en $[a, b]$ entonces f' es Lebesgue integrable en $[a, b]$, y se cumple que:*

$$(L) \int_{[a,b]} f' \, d\mu = f(b) - f(a)$$

Demostración. Primero se quiere ver que la función f' es Lebesgue integrable. Como f es diferenciable se tiene que f es continua y por tanto es medible en $[a, b]$. Se amplía la definición de f al intervalo $[a, b+1)$ con $f(x) = f(b)$ para $x \in (b, b+1)$. Con esto, se define las funciones $f_n(x) = \dfrac{f(x+\delta_n) - f(x)}{\delta_n}$. Usando la definición de derivada, se tiene que f' es el límite puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por tanto, también coincide con el límite superior e inferior. Es decir:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in [a, b]$$

Por la proposición 3.2.3, se tiene pues que f' es medible en $[a,b]$ y acotada por hipótesis. Por tanto, f' es Lebesgue integrable en $[a,b]$.

Para la segunda parte de la demostración, hay que calcular el valor de la integral. Para ello, se toma $\delta_n = \frac{1}{n}$, y se amplía la función f al intervalo $[a, b+1)$ de forma distinta, con $f(x) = f(b) - f'(b) \cdot (x-b)$, con $x \in (b, b+1)$. En este caso, las funciones f_n son de la forma $f_n(x) = n \cdot (f(x+1/n) - f(x))$. Por lo visto antes, estas funciones cumplen que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$. Además, estas funciones son funciones definidas como suma y producto de funciones continuas, y por tanto son funciones Riemann integrables. Y, por el Teorema del Valor Medio, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in [a,b]$:

$$f_n(x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n} = f'(z_x^n) \text{ con } z_x^n \in (x, x+1/n)$$

Por tanto, se tiene que $|f_n(x)| = |f'(z_x^n)| \leq M$ con M valor que acota f' (está acotada por hipótesis). Así, usando el resultado sobre convergencia dominada que se presentará más adelante (3.3.12), se tiene que:

$$(L)\int_{[a,b]} f' \, d\mu = \lim_{n\to\infty} (L)\int_{[a,b]} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n \, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((R)\int_a^b n \cdot f(x+1/n) \, dx - (R)\int_a^b n \cdot f(x) \, dx \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left((R)\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x) \, dx - (R)\int_a^b f(x) \, dx \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left((R)\int_b^{b+1/n} f(x) \, dx \right) - \lim_{n\to\infty} n \left((R)\int_a^{a+1/n} f(x) \, dx \right) = {}^1 f(b) - f(a)$$

■

Con esto se prueba un resultado que requiere una condición mucho menos restrictiva que lo probado anteriormente para la integral de Riemann, ya que sólo se requiere que f' sea acotada para que sea Lebesgue integrable. Así pues, es claro que en este aspecto también se tiene una mejoría en la integral.

Como ejemplo de función diferenciable cuya diferencial no cumple con las hipótesis del teorema, se plantea el siguiente ejemplo:

[1] Para la integral de Riemann, se cumple que $\lim_{n\to\infty} n \left(\int_c^{c+1/n} f(x) \, dx \right) = f(c)$

Ejemplo 3.3.2. (Contraejemplo TFC Lebesgue)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esta función es claramente continua y diferenciable para todo $x \neq 0$. Respecto a la continuidad en $x = 0$, se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y $f(0) = 0$.

Se ve la diferenciabilidad en $x = 0$ por definición:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) = 0$$

Así pues, se tiene que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x} \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La función es claramente no acotada pues $1/x$ tiende a infinito cuando x tiende a cero, con un comportamiento oscilatorio dado por el seno:

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera. Se define:

$$x^* = \sqrt{\frac{2}{2n^2+1}} \in [0,1] \implies |f'(x^*)| =$$

$$= \left| 2\sqrt{\frac{2}{2n^2+1}} \cos\left((2n^2+1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\pi\sqrt{2n^2+1}}{\sqrt{2}} \sin\left((2n^2+1)\frac{\pi}{2}\right) \right| = \frac{2\pi\sqrt{2n^2+1}}{\sqrt{2}} \geq n$$

Como se tiene para un natural cualquiera, se tiene que f' no está acotada. Habría que ver por tanto que su integral de Lebesgue sea infinita.

Para ello, usando que f es integrable si y sólo si $|f|$ lo es, basta ver que $\int_{[0,1]} |f'|\, d\mu = \infty$.

Se toman intervalos con $\alpha_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$ y $\beta_k = \sqrt{\frac{1}{2k}}$. En estos intervalos se tiene que f' es acotada y por el TFC, f' es integrable. Por tanto $|f'|$ también lo es. Además, se tiene que $x \in [\alpha_k, \beta_k] \implies 2k\pi \leq \frac{\pi}{x^2} \leq (4k+1)\frac{\pi}{2}$. Por tanto, ambos términos son positivos y se tiene que $f' = |f'|$, y se cumple que

$$\int_{[\alpha_k,\beta_k]} |f'|\, d\mu = \int_{[\alpha_k,\beta_k]} f'\, d\mu = f(\beta_k) - f(\alpha_k) = \frac{1}{2k}$$

Como $|f'|$ es estrictamente positiva y los intervalos son disjuntos contenidos en $[0,1]$, se tiene que

$$\int_{[0,1]} |f'|\, d\mu \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[\alpha_k,\beta_k]} |f'|\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty$$

Así, se concluye por tanto que f' no es Lebesgue integrable en $[0,1]$, siendo así la función f un contraejemplo al TFC por no tener diferencial acotada.

3.3.5. Teoremas de convergencias de la integral de Lebesgue

Se presentan resultados sobre convergencias que en este caso sí que implicaran que la función límite será integrable a partir de convergencia puntual, no como en Riemann dónde se pedía la integrabilidad de la función límite como hipótesis.

Los resultados se presentan de forma general para funciones integrables Lebesgue sobre un intervalo $[a,b]$, sin necesidad de ser funciones acotadas.

Antes de eso, se presenta un resultado sobre convergencia uniforme:

Teorema 3.3.9. *(Convergencia Uniforme) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones Lebesgue integrables que converge de forma uniforme a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, entonces f es Lebesgue integrable y se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n\, d\mu = \int_{[a,b]} f\, d\mu$$

Usando sólo convergencia puntual, se añadirán condiciones adicionales que implicarán la integrabilidad de la función límite, y el intercambio entre el límite y la integral. En primer lugar se presenta un resultado con la condición adicional de ser una sucesión uniformemente acotada:

Teorema 3.3.10. *(Convergencia Acotada) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subset$ una sucesión de funciones Lebesgue integrables uniformemente acotada. Suponiendo que existe $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ en casi todo punto, se tiene que f es integrable Lebesgue y además se cumple que:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n\, d\mu = \int_{[a,b]} f\, d\mu$$

Observar en este caso que la integrabilidad de la función límite es una consecuencia y no una hipótesis, como sí era en los resultados vistos para la integral de Riemann. Esto es una gran mejora en el comportamiento de la integral respecto a las sucesiones de funciones.

Se presenta otro resultado similar con convergencia monótona:

Teorema 3.3.11. *(Convergencia Monótona) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona de funciones integrables Lebesgue sobre $[a,b]$. Suponiendo que:*

1. *Existe* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *en casi todo punto*

2. *Se cumple que* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n \, d\mu < \infty$

Entonces f *es integrable Lebesgue sobre* $[a,b]$ *y además se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n \, d\mu = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

Finalmente se presenta un resultado sobre convergencia dominada, comparando todas las funciones con otra Lebesgue integrable que las domina:

Teorema 3.3.12. *(Convergencia Dominada) Sea* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesión de funciones Lebesgue integrables sobre* $[a,b]$ *con* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *en casi todo punto, siendo* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Sea* g *una función integrable Lebesgue sobre* $[a,b]$ *cumpliendo que* $|f_n| < g$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces se tiene que* f *es Lebesgue integrable sobre* $[a,b]$ *y se cumple que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n \, d\mu = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

Capítulo 4

La integral de Henstock-Kurzweil

Se ha conseguido una integral, la integral de Lebesgue, que además de estar definida para un conjunto más amplio de funciones que la integral de Riemann, cumple mejores propiedades. La más importante y sobre la que se centró el desarrollo es la propiedad sobre el TFC, es decir, que dada una función diferenciable, se le exige a la diferencial que sea acotada para que esta sea integrable. Se buscará una integral sobre la cual no se tenga ninguna condición sobre la diferencial para poder ser integrada.

Así pues es como se llega por parte de Kurzweil y de Henstock a una versión generalizada de la integral de Riemann, que cumple lo mencionado anteriormente. Destacar que la definición de integral que cumpla la propiedad del TFC para cualquier función diferencial ya fue desarrollada anteriormente por Denjoy y Perron, pero en este trabajo se presentará la integral de Henstock-Kurzweil (HK).

4.1. Motivación de la integral HK con ejemplos

Se trata de una generalización de la integral de Riemann, en la que se tomaba una partición etiquetada del intervalo en el cual está definida la función, cumpliendo que todos los subintervalos eran de una longitud menor a cierto valor. Con ello, se calculaba el valor de la suma de Riemann y se veía si ese valor tendía a un número cuando la longitud de los subintervalos tiende a cero.

Cómo se ve, en esa definición no se tiene en cuenta para nada el comportamiento de la propia función. Parece más adecuado pues buscar particiones que dividan el intervalo teniendo en cuenta el comportamiento de la función. Se buscará por tanto subintervalos pequeños cuando estos contengan puntos en donde la función tenga un comportamiento altamente oscilatorio, mientras que dónde la función tenga un comportamiento más suave, se podrán tener subintervalos más grandes.

Bajo este pretexto, se busca definir una función $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ que asigne a cada punto del intervalo c, una cota para la longitud del subintervalo $[u,v]$ que contenga a tal punto. Esta función tendrá un valor pequeño para puntos c tal que f presente un comportamiento altamente oscilatorio localmente en c, mientras que tomará un valor mayor en puntos donde la función no oscile o tenga un comportamiento más suave. Se tomarán pues subintervalos $[u,v]$ tal que

$$c - \delta(c) \leq u \leq c \leq v \leq c + \delta(c) \qquad (c \in [u,v] \subset (c-\delta(c), c+\delta(c)))$$

Se presenta un ejemplo muy sencillo pero ilustrativo.

Ejemplo 4.1.1. (Primera motivación HK)

Sea $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0,1) \cup (1,2] \\ 100 & x = 1 \end{cases}$

Por un razonamiento de área, está claro que $(R) \int_a^b f(x)\, dx = 4$ ($f = 2$ casi siempre).

Siguiendo el procedimiento de Riemann, se tenía que para particiones etiquetadas $\mathcal{P}_e$ de $[a,b]$, $(c_k, [x_{k-1}, x_k])$, se calculaba el valor de la suma de Riemann asociada: $\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) = \sum_k f(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$.

- Si $c_k \neq 1$ para todo k, se tiene que $\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) = 2 \sum_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = 2 \cdot 2 = 4$
- Si $x = 1$ es una etiqueta de algún intervalo, hay 2 casos. Puede que sea la etiqueta de un subintervalo $(c_k = 1, [x_{k-1}, x_k])$ ó que sea la etiqueta de dos subintervalos consecutivos $(c_k = 1, [x_{k-1}, 1])$ y $(1, [1, x_{k+1}])$.

En el primer caso se tiene que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - 4| = |f(1) \cdot (x_k - x_{k-1}) + 2[2 - (x_k - x_{k-1})] - 4| = |f(1) - 2| \cdot (x_k - x_{k-1})$$

En el segundo caso, se tiene que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - 4| = |f(1) - 2| \cdot (x_{k+1} - x_{k-1})$$

Tomando los subintervalos tal que su longitud sea menor que $\dfrac{\varepsilon}{2\cdot(|f(1)|+2)}$, en ambos casos se tiene que $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e)-4|<\varepsilon$.

Realmente, lo único que se necesita es que la longitud de los subintervalos que contengan al punto $x=1$ esté controlada, mientras que los demás subintervalos pueden tener cualquier longitud arbitraria.

Teniendo esto en mente, se define δ de la siguiente manera:

$$\delta(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1)\cup(1,2]\\ \dfrac{\varepsilon}{4\cdot(|f(1)|+2)} & x=1\end{cases}$$

Así, se tiene que cualquier intervalo que contenga al punto $x=1$ tendrá longitud menor a $2\delta(1)$, mientras que el resto de intervalos no se tienen en cuenta. Por tanto, se tiene que $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e)-4|<\varepsilon$.

Se expone otro ejemplo un poco más complejo, para ilustrar la utilidad de este método en todos los casos:

Ejemplo 4.1.2. (Segunda motivación HK)

Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x=\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

Se tiene que $f=0$ casi siempre, y por tanto $(L)\int_{[0,1]}f\ d\mu=0$ (integral de Lebesgue ya que no es acotada y por tanto no es Riemann integrable).

La única manera en la que la suma de Riemann no valga cero es que alguna de las etiquetas c_k sea de la forma $1/n$. En ese caso, $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e)-0|=\sum_k f(c_k)\cdot(x_k-x_{k-1})$.

Se supone el caso que $c_k=1/j$. Entonces $f(c_k)\cdot(x_k-x_{k-1})=j\cdot(x_k-x_{k-1})<j\cdot 2\cdot\delta(c_k)$.

Se toma $\delta(1/j)=\dfrac{\varepsilon}{j\cdot 2^{j+2}}$. Se debe tener en cuenta que al ser una partición finita, se tienen finitas etiquetas de la forma $c_k=1/n$, por tanto es una suma finita. Esas etiquetas a lo sumo pertenecen a 2 subintervalos distintos. Con todo, se tiene que:

$$\sum_k f(c_k)\cdot(x_k-x_{k-1})<\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\cdot 2\cdot j\cdot\varepsilon}{j\cdot 2^{j+2}}=\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}=\varepsilon$$

Por tanto, es claro que la función que da la longitud de los subintervalos sólo debe tener en cuenta los puntos $x = 1/n$. Por tanto, se toma

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{j \cdot 2^{j+2}} & x = 1/j,\ j \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{resto} \end{cases}$$

Con los ejemplos anteriores, se espera motivar la construcción de la integral de HK mediante la construcción de funciones que determinen la longitud de los subintervalos en función de los puntos que contienen, y tomando particiones cuyos subintervalos tengan longitudes definidas por dichas funciones. Estas funciones serán los llamados calibradores.

4.2. Construcción de la integral HK

Se formaliza pues lo explicado con ejemplos en el apartado anterior.
Lo primero que se necesita es la definición de una función calibrador sobre el intervalo de integración $[a, b]$

Definición 4.2.1. *$\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función calibrador sobre $[a, b]$ si $\delta(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$*

Así, buscaremos particiones subordinadas a un calibrador:

Definición 4.2.2. *Dada $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ calibrador sobre $[a, b]$, se dice que una partición $\mathcal{P}_e = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\ :\ t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ 1 \leq i \leq n\}$ está subordinada a δ o es δ-fina si $t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leq t_i \leq x_i < t_i + \delta(t_i)$ ($\implies$ $[x_{i-1}, x_i] \subset (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i))$) para todo $i \in \{1, ..., n\}$*

Con esto, cabe preguntar: ¿Dada una función calibrador sobre $[a, b]$, existe siempre una partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ subordinada a δ?
Esta pregunta obtiene su respuesta en el lema de Cousin, ya utilizado anteriormente:

Lema 4.2.1. ***(Lema de Cousin)**: Si $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función calibrador sobre $[a, b]$, entonces existe una partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ de $[a, b]$ que es δ-fina.*

Demostración. Se supone que no existe ninguna partición etiquetada de $[a, b]$ que sea δ-fina. Se nombra $I_0 = [a, b]$ y $c_0 = \dfrac{a + b}{2}$ el punto medio de éste. Se tiene que al menos uno de los dos intervalos $[a, c_0]$ ó $[c_0, b]$ no posee ninguna partición etiquetada δ-fina. Si no, es claro que la unión de ambas particiones etiquetadas sería una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a

δ. Se toma por tanto $I_1 = [a_1, b_1]$ el intervalo de entre los dos que no posee ninguna partición etiquetada δ-fina. Tomando el punto medio, se realiza el mismo procedimiento y por tanto se construye una sucesión de subintervalos $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ cumpliendo que

$$I_0 \supset I_1 \supset ... \supset I_n \supset I_{n+1} \supset ... \qquad \text{y} \qquad \ell(I_n) \to 0$$

Así, se tiene que al ser sucesión de intervalos compactos, sólo existe un único punto $x_0 \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por definición de δ, se tiene que $\delta(x_0) > 0$, y como $\ell(I_n) \to 0$, se tiene que existe un $n^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\ell(I_{n^*}) = \frac{b-a}{2^{n^*}} < \delta(x_0)$$

Por tanto, $I_{n^*} \subset (x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0))$ y el par (x_0, I_{n^*}) es una partición etiquetada de I_{n^*} subordinada a δ. Esto contradice el argumento inicial, y por tanto se demuestra el resultado. ■

Así, se tienen ya definidas todas las herramientas necesarias para construir la integral de Henstock-Kurzweil:

Definición 4.2.3. *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se dice que es Henstock-Kurzweil integrable si existe un número A que cumpla que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función calibrador δ_ε sobre $[a, b]$ tal que para toda partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ que sea δ_ε-fina, se cumple[1]:*

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - A| < \varepsilon$$

Este número A se denota como $A = (HK) \int_a^b f(x)\, dx$

Para garantizar que esta integral está bien definida, se necesita que dada una función calibrador, exista al menos una partición etiquetada que esté subordinada a este. Además, se necesita también la unicidad del valor de la integral. La primera ha sido probada en el Lema de Cousin, 4.2.1. La segunda se va a probar a continuación:

Teorema 4.2.1. *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrable, su integral $(HK) \int_a^b f(x)\, dx$ es única.*

Demostración. Para esta demostración, se debe tener en cuenta que la siguiente afirmación es cierta:

[1] $\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e)$ es la suma de Riemann asociada a la función f y la partición $\mathcal{P}_e$, definida en el capítulo 2

Sean dos calibradores δ_1 y δ_2 sobre $[a,b]$, cumpliendo que $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Dada una partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ subordinada a δ_1, se cumple que $\mathcal{P}_e$ es también subordinada a δ_2.

Con esto, supongamos que A_1 y A_2 son dos integrales HK de f cumpliendo la definición. Así, para cada $\varepsilon > 0$ existe un calibrador δ_1 sobre $[a,b]$ tal que para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}_e^1$ δ_1-fina, se tiene que $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^1) - A_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Lo mismo con un calibrador δ_2 tal que para cualquier $\mathcal{P}_e^2$ partición etiquetada que sea δ_2-fina, se tiene que $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^2) - A_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Definiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$. Tomando una partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ que sea subordinada a δ, se tiene:

$$|A_1 - A_2| \leq |\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e) - A_1| + |\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e) - A_2| < \varepsilon$$

Ya que $\mathcal{P}_e$ es δ_1-fina y δ_2-fina por cómo se ha definido.

Como se ha demostrado para un $\varepsilon > 0$ cualquiera, se tiene que $A_1 = A_2$. ■

Con esto, se tiene bien definida la integral HK de una función sobre un intervalo.

4.3. Propiedades básicas de la integral HK

En primer lugar, se presentan propiedades lineales de la integral, cómo cabe esperar por las propiedades lineales de las integrales anteriores:

Teorema 4.3.1. *Sea f y g funciones HK integrables sobre $[a,b]$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Se tiene:*

1. *$c \cdot f$ es HK integrable sobre $[a,b]$ y se tiene que $\int_a^b (c \cdot f)(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx$*
2. *$f + g$ es HK integrable sobre $[a,b]$ y $\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$*

Demostración. 1. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. El resultado para $c = 0$ es trivial. Se asume pues $c \neq 0$. Se tiene que f es HK integrable, por tanto, para todo $\dfrac{\varepsilon}{|c|}$, existe δ función calibrador tal que para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ subordinada a δ, se tiene que

$$\left| \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Con esto, se tiene que

$$\left| \mathcal{S}(c \cdot f,\mathcal{P}_e) - c\int_a^b f(x)\, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} c \cdot f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - c\int_a^b f(x)\, dx \right| =$$

$$= |c| \left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - \int_a^b f(x)\ dx \right| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

Así, como ε era arbitrario, se cumple la definición de función integrable.

2. Sea $\varepsilon > 0$. Como f y g son integrables HK por definición, se tiene que para $\frac{\varepsilon}{2}$ existen dos funciones calibradores δ_f y δ_g tal que para cualquiera particiones etiquetadas $\mathcal{P}_e^f$ y $\mathcal{P}_e^g$ subordinadas a δ_f y δ_g respectivamente, se tiene que

$$\left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e^f) - \int_a^b f(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \mathcal{S}(g, \mathcal{P}_e^g) - \int_a^b g(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Se define un nuevo calibrador como $\delta = \text{mín}\{\delta_f, \delta_g\}$. Además se cumple que

$$\mathcal{S}(f+g, \mathcal{P}_e) = \sum_{i=1}^n (f+g)(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n g(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) + \mathcal{S}(g, \mathcal{P}_e)$$

Dada una partición δ-fina, se tiene por definición que la partición es δ_f-fina y δ_g-fina. Con ello,

$$\left| \mathcal{S}(f+g, \mathcal{P}_e) - \left(\int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \right) \right| \leq \left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - \int_a^b f(x)\ dx \right| +$$
$$+ \left| \mathcal{S}(g, \mathcal{P}_e) - \int_a^b g(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

De nuevo, como se tomó ε arbitrario, queda demostrado el resultado.

■

Se presenta un resultado para estudiar si una función es integrable sin saber el valor de la integral, sólo estudiando las diferencias entre dos sumas de Riemann de particiones subordinadas a algún calibrador:

Teorema 4.3.2. *(Criterio de Cauchy para HK) Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es HK integrable en $[a,b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un calibrador δ tal que para cualesquiera particiones etiquetadas $\mathcal{P}_e^1$ y $\mathcal{P}_e^2$ subordinadas a δ, se tiene que $|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e^1) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e^2)| < \varepsilon$*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis f es HK integrable. Aplicando la definición a $\frac{\varepsilon}{2}$, se tiene que existe un calibrador δ tal que para cualesquiera particiones etiquetadas $\mathcal{P}_e^1$ y $\mathcal{P}_e^2$ subordinadas a δ, se tiene que

$$\left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e^1) - \int_a^b f(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e^2) - \int_a^b f(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Con esto, se tiene que

$$\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^1)-\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^2)\right| \leq \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^1)-\int_a^b f(x)\;dx\right|+\left|\int_a^b f(x)\;dx-\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^2)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Se tomó ε arbitrario, y por tanto se cumple para todo $\varepsilon > 0$.

$\Leftarrow$ Se asume ahora que para todo $\varepsilon > 0$ existe un calibrador δ tal que si $\mathcal{P}_e^1$ y $\mathcal{P}_e^2$ son dos particiones etiquetadas subordinadas a δ, se tiene que $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^1)-\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^2)| < \varepsilon$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se escoge un calibrador δ_n tal que

$$\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^1)-\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^2)\right| \leq \frac{1}{n}$$

para $\mathcal{P}_e^1$ y $\mathcal{P}_e^2$ subordinadas a δ_n. Se asume la sucesión de calibradores $\{\delta_n\}$ como no creciente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{P}_e^n$ una partición etiquetada subordinada a δ_n. Fijado un $N \in \mathbb{N}$, se tiene que para $m > n \geq N$, entonces $\delta_N \geq \delta_n \geq \delta_m$. Por tanto, una partición $\mathcal{P}_e^n$ δ_n-fina es también δ_N-fina. Lo mismo para una partición etiquetada $\mathcal{P}_e^m$ δ_m-fina, que es también δ_N-fina. Por tanto,

$$|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^n)-\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^m)| \leq \frac{1}{N}$$

para todo $m > n \geq N$. Así, se tiene que $\{\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto existe límite de la sucesión, A. Se elige N suficientemente grande tal que cumpla que $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^n)-A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq N$.

Sea ahora una partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ subordinada a δ_N. Se tiene pues que:

$$|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e)-A| \leq \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e)-\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^N)\right| + \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^N)-A\right| \leq \frac{1}{N}+\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Se ha tomado $\varepsilon > 0$ arbitrario, y por tanto se cumple para todo $\varepsilon > 0$, con lo cual se tiene que f es HK integrable en $[a,b]$.

$\blacksquare$

Con el criterio de Cauchy, es relativamente sencillo probar el siguiente resultado sobre integrabilidad en subintervalos.

Teorema 4.3.3. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Se cumple:*

1. f es HK integrable sobre $[a,c]$ y sobre $[c,b] \implies f$ es HK integrable sobre $[a,b]$.

2. f es HK integrable sobre $[a,b] \implies f$ es HK integrable sobre cada subintervalo $[x,y] \subseteq [a,b]$

Demostración. 1. Sea $\varepsilon > 0$. Se quiere probar que existe δ calibrador sobre $[a,b]$ tal que dadas dos particiones etiquetadas $\mathcal{P}_e^1$ y $\mathcal{P}_e^2$ de $[a,b]$ subordinadas a δ, se cumple que $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^1) - \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^2)| < \varepsilon$.

Se tiene que f es HK integrable sobre $[a,c]$, y por tanto aplicando el criterio de Cauchy para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe un calibrador δ_a sobre $[a,c]$ tal que dadas dos particiones etiquetadas de $[a,c]$ subordinadas a δ_a, se cumple que la diferencia de sus sumas de Riemann es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. De forma análoga sobre $[c,b]$, se tiene un calibrador δ_b tal que dadas dos particiones etiquetadas de $[c,b]$ δ_b-finas, cumplen que la diferencia de sus sumas de Riemann es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Se define un calibrador δ sobre $[a,b]$ como sigue:

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_a(x) & x \in [a,c) \\ \delta_b(x) & x \in (c,b] \\ \max\{\delta_a(x), \delta_b(x)\} & x = c \end{cases}$$

Se toma pues dos particiones etiquetadas $\mathcal{P}_e^1$ y $\mathcal{P}_e^2$ de $[a,b]$ subordinadas a δ. Sin pérdida de generalidad, se toman ambas particiones tal que uno de los extremos de un subintervalo sea el punto $x = c$. Si no se tiene esta propiedad, se divide el subintervalo que contenga al punto $x = c$ en dos subintervalos con extremos en $x = c$, y con etiqueta cualquiera. Estas nuevas particiones seguirán siendo δ-finas por construcción.

De esta manera, se definen las particiones $\mathcal{P}_e^a = \mathcal{P}_e^1 \bigcap [a,c]$ y $\tilde{\mathcal{P}}_e^a = \mathcal{P}_e^2 \bigcap [a,c]$. Esta notación se refiere a tomar los subintervalos de las particiones iniciales que estén en $[a,c]$. De la misma manera, se definen $\mathcal{P}_e^b = \mathcal{P}_e^1 \bigcap [c,b]$ y $\tilde{\mathcal{P}}_e^b = \mathcal{P}_e^2 \bigcap [c,b]$.

Por definición de δ y construcción de las particiones, se tiene que $\mathcal{P}_e^a$ y $\tilde{\mathcal{P}}_e^a$ son particiones δ_a-finas, y $\mathcal{P}_e^b$ y $\tilde{\mathcal{P}}_e^b$ son particiones δ_b-finas. Se cumple pues:

$$\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^1) - \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^2)\right| = \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^a) + \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^b) - \left(\mathcal{S}(f,\tilde{\mathcal{P}}_e^a) + \mathcal{S}(f,\tilde{\mathcal{P}}_e^b)\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^a) - \mathcal{S}(f,\tilde{\mathcal{P}}_e^a)\right| + \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^b) - \mathcal{S}(f,\tilde{\mathcal{P}}_e^b)\right| < \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

Por el criterio de Cauchy, se tiene que f es HK integrable sobre $[a,b]$.

2. Sea $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$. Se toma un δ calibrador tal que $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^1) - \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^2)| < \boldsymbol{\varepsilon}$ siempre que $\mathcal{P}_e^1$ y $\mathcal{P}_e^2$ sean dos particiones etiquetadas de $[a,b]$ subordinadas a δ. Tal calibrador se puede tomar ya que existe por el criterio de Cauchy, usando que f es HK integrable sobre $[a,b]$.

   Se toman ahora dos particiones etiquetadas $\mathcal{P}_e^x$ y $\mathcal{P}_e^y$ de $[a,x]$ y de $[y,b]$ respectivamente, ambas subordinadas a δ. Se toman también $\tilde{\mathcal{P}}_e^1$ y $\tilde{\mathcal{P}}_e^2$ dos particiones etiquetadas de $[x,y]$ subordinadas a δ. Se definen $\mathcal{P}_e^1 := \mathcal{P}_e^x \cup \tilde{\mathcal{P}}_e^1 \cup \mathcal{P}_e^y$ y $\mathcal{P}_e^2 := \mathcal{P}_e^x \cup \tilde{\mathcal{P}}_e^2 \cup \mathcal{P}_e^y$. Estas dos particiones son particiones etiquetadas de $[a,b]$ δ-finas, y por tanto cumplen lo expuesto al principio. Se tiene pues que

$$\left|\mathcal{S}(f,\tilde{\mathcal{P}}_e^1) - \mathcal{S}(f,\tilde{\mathcal{P}}_e^2)\right| = |\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^x) + \mathcal{S}(f,\tilde{\mathcal{P}}_e^1) + \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^y) -$$
$$-\left(\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^x) + \mathcal{S}(f,\tilde{\mathcal{P}}_e^2) + \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^y)\right)| = \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^1) - \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e^2)\right| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

   Como $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ se tomó arbitrario y $\tilde{\mathcal{P}}_e^1$ y $\tilde{\mathcal{P}}_e^2$ son particiones arbitrarias δ-finas, se tiene que f es integrable en $[x,y]$ por el criterio de Cauchy.

$\blacksquare$

Finalmente, se ve un resultado sobre integrabilidad de funciones que son nulas casi siempre (nulas excepto en un conjunto de medida nula). A partir de este, se obtendrá el resultado para dos funciones que son iguales casi siempre, con una de ellas integrable:

Teorema 4.3.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $f = 0$ en $[a,b]$ excepto en un conjunto numerable de puntos, se tiene que f es HK integrable y que $\int_a^b f(x)\ dx = 0$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$. Se define el conjunto $A := \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Con esto, se define un δ calibrador sobre $[a,b]$ adecuado para probar la integrabilidad de la función:

$$\delta(x) := \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \text{ y } x \notin A \\ \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2^n \cdot |f(a_n)|} & x \in A \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P}_e = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) \ : \ t_i \in [x_{i-1}, x_i], \ 1 \leq i \leq n\}$ partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ. Sea Π el conjunto de índices tales que la etiqueta $t_i \in A$. En ese caso, se toma n_i tal que $t_i = a_{n_i}$. Sea Ω el conjunto de índices tal que $t_i \notin A$. Se tiene que para todo $i \in \Omega$, $f(t_i) = 0$. Con esto:

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - 0| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})\right| = \left|\sum_{i \in \Omega} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in \Pi} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})\right| =$$

$$= \left|\sum_{i \in \Pi} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i \in \Pi} |f(a_{n_i})| \frac{\varepsilon}{2^{n_i}|f(a_{n_i})|} = \sum_{i \in \Pi} \frac{\varepsilon}{2^{n_i}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n_i}} = \varepsilon$$

Así pues, como $\varepsilon > 0$ se tomó arbitrario, se tiene que se cumple la definición de integrabilidad para f cuyo valor de la integral es cero.

■

De aquí se obtienen los corolarios sobre cuando dos funciones son iguales casi siempre, y una de ellas es HK integrable.

Corolario 4.3.1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función HK integrable en $[a, b]$ y sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $f = g$ casi siempre (excepto en un conjunto numerable) sobre $[a, b]$, entonces g es HK integrable en $[a, b]$, con $\int_a^b g \ dx = \int_a^b f \ dx$

Demostración. Se define $h \coloneqq g - f$ sobre $[a, b]$. Se tiene que $h = 0$ casi siempre, y por tanto se puede aplicar el resultado anterior (4.3.4). Se tiene pues que h es HK integrable y cumple $\int_a^b h \ dx = 0$. Como f y h son dos funciones HK integrables, por propiedades de linealidad se tiene que $g = h + f$ es HK integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b g \ dx = \int_a^b h \ dx + \int_a^b f \ dx = \int_a^b f \ dx$ ■

Finalmente, un último corolario sobre cuando se tiene que una función es mayor que otra casi siempre, con ambas HK integrables.

Corolario 4.3.2. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones HK integrables tal que $f(x) \leq g(x)$ en casi todo punto. Se tiene que $\int_a^b f \ dx \leq \int_a^b g \ dx$

Demostración. Se definen dos nuevas funciones

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq g(x) \\ 0 & f(x) > g(x) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & f(x) \leq g(x) \\ 0 & f(x) > g(x) \end{cases}$$

Es claro que $\tilde{f} = f$ y $\tilde{g} = g$ casi siempre, por tanto se puede aplicar el resultado anterior y se tiene que $\int_a^b \tilde{f} \ dx = \int_a^b f \ dx$ y $\int_a^b \tilde{g} \ dx = \int_a^b g \ dx$. Además, ahora se tiene que $\tilde{g} \geq \tilde{f}$ y por tanto $\tilde{g} - \tilde{f} \geq 0 \implies \int_a^b (\tilde{g} + \tilde{f})\ dx \geq 0$. Con esto, se tiene que $\int_a^b g\ dx - \int_a^b f\ dx = \int_a^b \tilde{g}\ dx - \int_a^b \tilde{f}\ dx = \int_a^b (\tilde{g} + \tilde{f})\ dx \geq 0 \implies \int_a^b g\ dx \geq \int_a^b f\ dx$ ■

4.4. Generalización de integrales anteriores

Se prueba ahora que todas las funciones Lebesgue integrables son HK integrables. De esta forma se habrá probado que

$$\{f : [a,b] \to \mathbb{R}\ :\ \text{f es Riemann integrable}\} \subsetneq \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\ :\ \text{f es Lebesgue integrable}\} \subsetneq$$

$$\subsetneq \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\ :\ \text{f es Henstock-Kurzweil integrable}\}$$

Para ello, en primer lugar se probará que las funciones Riemann integrables son HK integrables y además se tiene la igualdad de integrales.

Teorema 4.4.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función Riemann integrable sobre $[a,b]$. Entonces f es HK integrable y se tiene que $A = (R)\int_a^b f(x)\ dx = (HK)\int_a^b f(x)\ dx$*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la definición de integrabilidad de Riemann para ε, existe un valor δ_ε tal que para toda partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\ :\ t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ 1 \leq i \leq n\}$ con $x_i - x_{i-1} < \delta_\varepsilon$ para todo $i = 1, ..., n$, se cumple que

$$\left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - (R)\int_a^b f(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

Por otro lado, se define una función calibrador δ tal que $\delta(x) < \delta_\varepsilon/2$ para todo $x \in [a,b]$. Con esto, se tiene que para cualquier partición etiquetada δ-fina, se cumple que $x_i - x_{i-1} < 2 \cdot \delta(t_i) < \delta_\varepsilon$. Entonces se cumple que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - A| < \varepsilon$$

Por tanto, como $\varepsilon > 0$ se tomó arbitrario, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función calibrador $\delta(x)$ sobre $[a,b]$ tal que para toda partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ, se cumple la desigualdad. Es decir, se cumple la definición de integrabilidad HK para el valor A. Por tanto

$$A = (R)\int_a^b f(x)\ dx = (HK)\int_a^b f(x)\ dx$$

■

Se presenta a continuación el resultado por el cual las funciones Lebesgue integrables son HK integrables, y además se tiene la igualdad entre integrales.

Teorema 4.4.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función Lebesgue integrable. Entonces f es HK integrable y se cumple que:*

$$(L) \int_{[a,b]} f \ d\mu = (HK) \int_a^b f(x) \ dx$$

Demostración. La demostración se realiza por partes:

Parte 1: Las funciones escalonadas[2] son HK integrables y el valor de su integral de Henstock-Kurzweil coincide con el valor de su integral de Lebesgue.

Sea $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ función escalonada. Esta función es Riemann integrable por el Teorema de Vitali-Lebesgue (2.3.1), pues por definición tiene un número finito de discontinuidades. Por el teorema anterior (4.4.1), se tiene pues que s es HK integrable y cumple que

$$(R) \int_a^b s(x) \ dx = (HK) \int_a^b s(x) \ dx$$

Además, por el teorema 3.3.7 (integral de Lebesgue como generalización de la integral de Riemann), se tiene que s es Lebesgue integrable y se cumple que

$$(L) \int_{[a,b]} f \ d\mu = (R) \int_a^b s(x) \ dx$$

Por ambas igualdades, se tiene que las funciones escalonadas son HK integrables y su integral HK coincide con su integral de Riemann.

Parte 2: Las funciones simples[3] son HK integrables y el valor de su integral de Henstock-Kurzweil coincide con el valor de su integral de Lebesgue.

Sea G un subconjunto abierto de $[a, b]$. Se puede escribir como la unión numerable de intervalos disjuntos $G = \bigcup I_k$. Se define pues una sucesión de funciones escalonadas $\{f_k\}$ con $f_k = \chi_{I_1} + \chi_{I_2} + ... + \chi_{I_k}$. Por la parte anterior, todas las funciones f_k son HK integrables y se cumple que $\lim_{k\to\infty} f_k = \chi_G$.

Además, se tiene que $0 \leq f_k \leq 1$ sobre $[a, b]$ y $f_k \leq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (sucesión monótona), entonces aplicando el teorema de Convergencia Monótona tanto en su

[2]Una función escalonada es una función constante a trozos con un número finito de discontinuidades.

[3]Una función simple es una combinación lineal de funciones indicadoras sobre conjuntos medibles.

versión de la integral de Lebesgue (teorema 3.3.11) como en su versión para la integral de Henstock-Kurzweil demostrada más adelante (teorema 4.6.3), se tiene que

$$(HK)\int_a^b \chi_G(x)\ dx = \lim_{k\to\infty}(HK)\int_a^b f_k(x)\ dx = \lim_{k\to\infty}(L)\int_{[a,b]} f_k\ d\mu = (L)\int_{[a,b]} \chi_G\ d\mu$$

Sea ahora E un subconjunto medible de $[a,b]$. Se puede cubrir E mediante una sucesión monótona decreciente de subconjuntos abiertos $\{G_k\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(G_k) = \mu(E)$ (por el teorema 3.1.4). De nuevo, se tiene una sucesión monótona de funciones indicadoras $\{f_k\}$ con $f_k = \chi_{G_k}$ cumpliendo que $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \chi_E(x)$. Se aplica de nuevo ambas versiones de los teoremas de Convergencia Monótona, y se cumple que

$$(HK)\int_a^b \chi_E(x)\ dx = \lim_{k\to\infty}(HK)\int_a^b f_k(x)\ dx = \lim_{k\to\infty}(L)\int_{[a,b]} f_k\ d\mu = (L)\int_{[a,b]} \chi_E\ d\mu$$

Con esto, y usando las propiedades de linealidad de la integral de Henstock-Kurzweil (4.3.1) y la definición de función simple, se tiene que toda función simple es HK integrable y su integral de Henstock-Kurzweil coincide con su integral de Lebesgue.

Parte 3: Las funciones integrables Lebesgue no negativas son HK integrables y el valor de su integral de Henstock-Kurzweil coincide con el valor de su integral de Lebesgue.

Se tiene una sucesión monótona $\{\phi_k\}$ de funciones simples[4] tal que $\lim_{k\to\infty}\phi_k(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Se tiene que $(HK)\int_a^b \phi_k(x)\ dx = (L)\int_{[a,b]} \phi_k\ d\mu \leq (L)\int_{[a,b]} f\ d\mu < \infty$. Por tanto, la sucesión $\{(HK)\int_a^b \phi_k(x)\ dx\}$ está acotada, y se puede aplicar el teorema de convergencia monótona. Se tiene pues que f es HK integrable y se cumple que:

$$(HK)\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{k\to\infty}(HK)\int_a^b \phi_k(x)\ dx = \lim_{k\to\infty}(L)\int_{[a,b]} \phi_k\ d\mu = (L)\int_{[a,b]} f\ d\mu$$

Parte 4: Las funciones integrables Lebesgue son HK integrables y el valor de su integral de Henstock-Kurzweil coincide con el valor de su integral de Lebesgue.

Dada f Lebesgue integrable cualquiera, se aplica el resultado anterior a las funciones $\dfrac{|f|+f}{2}$ y $\dfrac{|f|-f}{2}$, funciones Lebesgue integrables (por serlo f) no negativas. Por tanto, $f = \dfrac{|f|+f}{2} - \dfrac{|f|-f}{2}$ es HK integrable y se cumple que

$$(HK)\int_a^b f(x)\ dx = (L)\int_{[a,b]} f\ d\mu$$

[4]Dada cualquier función medible sobre E, existe una sucesión de funciones simples $\{\phi_k\}$ definidas sobre E convergente puntualmente a f. Si f es no negativa, la sucesión se puede tomar monótona.

■

Con esto, se tiene que la integral de Henstock-Kurzweil es una generalización de la integral de Lebesgue, ya que todas las funciones Lebesgue integrables son HK integrables.
Lo último que queda por probar pues es que existen funciones HK integrables que no son Lebesgue integrables, de lo cual se expone un ejemplo a continuación, reutilizando un ejemplo anterior:

Ejemplo 4.4.1. (Función HK no Lebesgue integrable)
Se utiliza la función del ejemplo (3.3.2). En ese ejemplo, se vio que la función

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

no es integrable Lebesgue. Hay que ver pues que la función sea integrable HK. Para ello, se usará un resultado que se probará en la sección siguiente (4.5.1). Según ese resultado, toda función derivada es una función HK integrable y además se cumple que $(HK)\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$. Por tanto, se concluye que la función f' es HK integrable y se puede afirmar que $(HK)\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = -1$.

Es claro con esto que la integral de Henstock-Kurzweil es una generalización de la integral de Lebesgue, que ya era de por sí una generalización de la integral de Riemann. Como ya se ha mencionado anteriormente, se ha probado finalmente que:

$$\{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ \text{f es Riemann integrable}\} \subsetneq \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ \text{f es Lebesgue integrable}\} \subsetneq$$

$$\subsetneq \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ \text{f es Henstock-Kurzweil integrable}\}$$

Se verá ahora qué propiedades adicionales cumple, más generales que las de la integral de Lebesgue, respecto a la integrabilidad de funciones derivadas y respecto a convergencias de funciones.

4.5. Teorema Fundamental del cálculo de la integral HK

Se está ya en posición de resolver una de las cuestiones que se plantean al inicio de este trabajo:

Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable, ¿qué condiciones se tienen que pedir sobre f' para que se cumpla que $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$?. Se ha visto que en la integral de Riemann se necesita que f' sea Riemann integrable, y en la de Lebesgue se suaviza la condición a que f' sea acotada.

Se introduce aquí el siguiente resultado, que claramente mejora los mencionados anteriormente:

Teorema 4.5.1. *Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $[a,b]$. Entonces f' es HK integrable en $[a,b]$ y se tiene que*

$$(HK)\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Se toma $t \in [a,b]$. Como f es diferenciable en $[a,b]$, existe $f'(t)$ y aplicando la definición de diferenciabilidad $\frac{\varepsilon}{b-a}$, existe un δ_t tal que si $0 < |x-t| \leq \delta_t$ con $x \in [a,b]$ entonces

$$\left|\frac{f(x)-f(t)}{x-t} - f'(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Se define la función calibrador $\delta(t) = \delta_t$.

Por otro lado, de la desigualdad anterior se tiene que si $|x-t| \leq \delta(t)$, con $x,t \in [a,b]$:

$$|f(x) - f(t) - f'(t)(x-t)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-t|$$

Tomando y,z cumpliendo $a \leq y \leq t \leq z \leq b$ y $|z-y| \leq \delta(t)$, se tiene que:

$$|f(z) - f(y) - f'(t)(z-y)| \leq |f(z) - f(t) - f'(t)(z-t)| + |f(t) - f(y) - f'(t)(t-y)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a}\,|z-t| + \frac{\varepsilon}{b-a}\,|t-y| = \frac{\varepsilon}{b-a}\,|z-y|$$

Con esto, se toma una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i])\ :\ 1 \leq i \leq n\}$ subordinada a δ la función calibrador. Se escribe $f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))$. Con esto, se tiene (por ser la partición δ-fina, los extremos de los intervalos cumplen con lo probado anteriormente):

$$|\mathcal{S}(f', \mathcal{P}_e) - (f(b) - f(a))| = \left|\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}) - f'(t_i)(x_i - x_{i-1}))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |(f(x_i) - f(x_{i-1}) - f'(t_i)(x_i - x_{i-1}))| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} |x_i - x_{i-1}| = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Se tiene pues que se cumple la definición de integral, con $\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)$.

■

Se demuestra por tanto el resultado que se había utilizado en el ejemplo de función HK integrable que no es Lebesgue integrable (4.4.1).

Con esto, se acaba de probar que el simple hecho de ser diferenciable, implica directamente que f' es integrable siempre, sin ninguna condición adicional. Es una propiedad mucho más fuerte que las vistas anteriormente, con lo que se puede concluir que hay una clara mejoría entre integrales, dejando de lado el hecho de que ya de por sí se tiene una mejoría en el conjunto de funciones que son integrables.

4.6. Teoremas de convergencias de la integral HK

Por último, se verá las mejoras que presenta la integral de Henstock-Kurzweil respecto a los teoremas de convergencia. Se vio que la integral de Riemann presenta un comportamiento pobre frente a esta cuestión, mientras que Lebesgue presenta alguna mejoría.

Respecto a la convergencia uniforme, se tiene lo esperado, que ya se cumplía con la integral de Lebesgue:

Teorema 4.6.1. *(Convergencia Uniforme) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones HK integrables convergente de forma uniforme a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces f es HK integrable y se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Demostración. Como se tiene convergencia uniforme, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [a, b] \text{ y para todo } n \geq N_\varepsilon$$

Con esto se deduce que

$$-2\varepsilon < f_n(x) - f_m(x) < 2\varepsilon$$

Usando el corolario 4.3.2 y la linealidad de la integral, se obtiene que

$$-2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (b-a) < \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f_m(x)\ dx < 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (b-a) \implies$$

$$\implies \left| \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f_m(x)\ dx \right| < 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (b-a)$$

Por tanto se tiene que la sucesión de números reales $\left\{ \int_a^b f_n(x)\ dx \right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto tiene límite A.

Se verá ahora que f es HK integrable y que se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = A = \int_a^b f(x)\ dx$$

Para ello, se toma primero $\mathcal{P}_e = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\ :\ t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ 1 \le i \le n\}$ una partición etiquetada de $[a, b]$ cualquiera. Así, si $n \ge N_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, se tiene que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (f(t_i) - f_n(t_i)) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} |f(t_i) - f_n(t_i)| \cdot (x_i - x_{i-1}) < \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (b-a)$$

Además, como $A = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx$, existe $N'_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ tal que $\left| \int_a^b f_n(x)\ dx - A \right| < \boldsymbol{\varepsilon}$ para todo $n \ge N'_{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Se toma $N = \max\{N_{\boldsymbol{\varepsilon}}, N'_{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ y se fija un valor $n_0 \ge N$.

Usando que todas las funciones de la sucesión son HK integrables, se tiene un calibrador δ_{n_0} sobre $[a, b]$ tal que $\left| \int_a^b f_{n_0}(x)\ dx - \mathcal{S}(f_{n_0}, \mathcal{P}_e) \right| < \boldsymbol{\varepsilon}$ para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ subordinada a δ_{n_0}.

Fijada tal partición $\mathcal{P}_e$ subordinada a δ_{n_0}, se tiene que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - A| \le |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - \mathcal{S}(f_{n_0}, \mathcal{P}_e)| + \left| \mathcal{S}(f_{n_0}, \mathcal{P}_e) - \int_a^b f_{n_0}(x)\ dx \right| + \left| \int_a^b f_{n_0}(x)\ dx - A \right| <$$

$$< \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (b-a) + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (b-a+2)$$

Se ha probado pues que se cumple la definición de integrabilidad HK para el valor de A, demostrando el resultado. ■

Se introduce un nuevo concepto sobre las sucesiones de funciones, la equi-integrabilidad ó sucesiones uniformemente HK integrables. Son sucesiones de funciones tales que existe un calibrador que sirve para todas las funciones. Se formaliza la definición:

Definición 4.6.1. *(Equi-integrabilidad) Una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ HK integrables se dice equi-integrable (ó uniformemente HK integrable) sobre $[a,b]$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe δ_ε calibrador sobre $[a,b]$ tal que:*

$$\left| \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - (HK) \int_a^b f_n(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier $\mathcal{P}_e$ partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ_ε.

Se presenta un resultado con convergencia puntual y una condición algo más débil que la equi-integrabilidad, ya que no se necesita para todo n si no para todo n mayor que uno dado:

Teorema 4.6.2. *(Gordon) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones HK integrables que convergente puntualmente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces*

$$f \text{ es } HK \text{ integrable} \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un calibrador δ_ε cumpliendo que: dada cualquier $\mathcal{P}_e$ partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ_ε existe un $N_{\mathcal{P}}$ tal que

$$\left| \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - (HK) \int_a^b f_n(x)\ dx \right| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_{\mathcal{P}}$$

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$, se tiene que existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } n \geq N_0$$

.

Además, como f es HK integrable, existe un calibrador δ sobre $[a,b]$ tal que para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ subordinada a δ, se cumple

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Fijando tal partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\ :\ t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ 1 \leq i \leq k\}$ t subordinada a δ, y usando la convergencia puntual, se tiene que existe un $N_{\mathcal{P}} \geq N_0$ tal que si $n \geq N_{\mathcal{P}}$, se cumple que $|f_n(t_i) - f(t_i)| < \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot (b-a)}$ (hay un número finito de etiquetas y por eso se puede tomar $N_{\mathcal{P}}$ de esta manera). Por tanto, es claro que

$$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e)| \leq \sum_{i=1}^{k} |f_n(t_i) - f(t_i)| \cdot (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por tanto, para $n \geq N_{\mathcal{P}} \geq N_0$, entonces

$$\left|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - \int_a^b f_n(x)\ dx\right| \leq |\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e)| + \left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - \int_a^b f(x)\ dx\right| +$$

$$+\left|\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f_n(x)\ dx\right| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

$\Leftarrow$ Sea $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$. Se tiene que existe $\delta_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ cumpliendo que para cada partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ subordinada a $\delta_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, existe un $N_{\mathcal{P}} \in \mathbb{N}$ tal que se cumple la condición de integrabilidad para ϵ. Se busca ver que la sucesión $\{\int_a^b f_n(x)\ dx\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Se fija para ello una partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ de $[a, b]$ subordinada a $\delta_{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Usando la convergencia puntal, se toma $N_0 \geq N_{\mathcal{P}}$ tal que para $m, n \geq N_0$ se cumple que $|f_n(t_i) - f_m(t_i)| < \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{(b-a)}$ para todo $i = 1, ..., k$. Con esto, se cumple que $|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}_e)| < \boldsymbol{\varepsilon}$. En particular se tiene pues que

$$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e)| = \lim_{m\to\infty} |\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}_e)| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$$

.

Con todo, si $m, n \geq N_0$, se tiene que

$$\left|\int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f_m(x)\ dx\right| \leq \left|\int_a^b f_n(x)\ dx - \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e)\right| + |\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}_e)| +$$

$$+\left|\mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}_e) - \int_a^b f_m(x)\ dx\right| < 3\boldsymbol{\varepsilon}$$

Se tiene pues que $\{\int_a^b f_n(x)\ dx\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por tanto tiene límite $A \in \mathbb{R}$. Aplicando el límite a m, se obtiene de la última desigualdad que

$$\left|\int_a^b f_n(x)\ dx - A\right| < 3\boldsymbol{\varepsilon} \text{ para todo } n \geq N_0$$

Falta ver que f sea HK integrable sobre $[a, b]$. Sea $\mathcal{P}_e$ partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ, y se toma $n \geq N_0 \geq N_{\mathcal{P}}$. Con ello:

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - A| \leq |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e)| + \left|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_e) - \int_a^b f_n(x)\ dx\right| +$$

$$+\left|\int_a^b f_n(x)\ dx - A\right| < \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} + 3\boldsymbol{\varepsilon} = 5\boldsymbol{\varepsilon}$$

Como $\boldsymbol{\varepsilon}$ es arbitrario, se cumple la condición de integrabilidad para f con integral $A = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx$

■

Con esto, es claro que añadiendo equi-integrabilidad se tiene directamente la convergencia y el intercambio entre el límite y la integral:

Corolario 4.6.1. (Equi-integrabilidad) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones HK integrables, equi-integrable sobre $[a,b]$. Si converge puntualmente a $f : X \to \mathbb{R}$, se tiene que f es HK integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Finalmente, se presentan las versiones para esta integral de la convergencia monótona y convergencia dominada (en ese orden ya que la primera se utilizará en la prueba de la segunda). Para ello, se presenta primero un resultado que implica que si un calibrador es bueno respecto a la integral de una función en todo el intervalo (que la diferencia de la suma de Riemann de una partición subordinada con la integral de la función esté acotada), lo sigue siendo en uniones de subintervalos:

Lema 4.6.1. *(Lema de Henstock) Sea f función HK integrable sobre $[a,b]$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea también δ_ε calibrador sobre $[a,b]$ que cumple que para cualquier partición etiquetada δ_ε-fina, $\mathcal{P}_e$, se tiene $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_e) - A| < \varepsilon$.*
Dados $\{F_1, ..., F_J\}$ conjunto finito de subintervalos cerrados de $[a,b]$ cuyos interiores son disjuntos (los únicos puntos en común pueden ser los extremos), y que cumplen que para todo $x_j \in F_j \subset (y_j - \delta_\varepsilon(y_j), y_j + \delta_\varepsilon(y_j))$ para todo $j = 1, ..., J$, se tiene que:

$$\left|\sum_{j=1}^{J}\left[f(y_j)\cdot \ell(F_j) - \int_{F_j} f(x)\ dx\right]\right| \leq \varepsilon$$

y que:

$$\sum_{j=1}^{J}\left|f(y_j)\cdot \ell(F_j) - \int_{F_j} f(x)\ dx\right| \leq 2\varepsilon$$

con $\ell(F_j)$ la longitud del intervalo F_j.

Demostración. Se considera el conjunto $[a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{J} F_j$, que es la unión de una colección finita de intervalos abiertos. Añadiendo los extremos de los intervalos, se consigue una colección finita de subintervalos de $[a,b]$ cerrados, $K_1, ..., K_N$. Por el teorema 4.3.3, se tiene que f es HK integrable sobre cada subintervalo.

Sobre cada subintervalo se toma un calibrador δ_n que cumpla que $\delta_n < \delta_{\varepsilon}$, y tal que para $\eta > 0$ y para cualquier partición etiquetada δ_n-fina, $\mathcal{P}_e(K_n)$, se cumpla que:

$$\left|\sum_{\mathcal{P}_e(K_n)} f(x)\Delta x - \int_{K_n} f(x)\ dx\right| < \frac{\eta}{N}$$

Las particiones $\mathcal{P}_e(K_1), ..., \mathcal{P}_e(K_N)$ junto con los subintervalos $F_1, ..., F_J$ forman una partición δ_{ε}-fina de $[a, b]$. Se cumple pues:

$$\left|\sum_{j=1}^{J}\left[f(y_j)\cdot \ell(F_j) - \int_{F_j} f(x)\ dx\right]\right| =$$

$$= \left|\left[f(y_1)\ell(F_1) + ... + f(y_J)\ell(F_J) + \sum_{\mathcal{P}_e(K_1)} f(x)\Delta x + ... + \sum_{\mathcal{P}_e(K_N)} f(x)\Delta x\right] - \right.$$

$$-\left[\int_{F_1} f(x)\ dx + ... + \int_{F_J} f(x)\ dx + \int_{K_1} f(x)\ dx + ... + \int_{K_N} f(x)\ dx\right] +$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{N}\left(\int_{K_n} f(x)\ dx\right) - \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{\mathcal{P}_e(K_n)} f(x)\ \Delta x\right)\right| <$$

$$< \varepsilon + \sum_{n=1}^{N}\left|\int_{K_n} f(x)\ dx - \sum_{\mathcal{P}_e(K_n)} f(x)\Delta x\right| < \varepsilon + N\frac{\eta}{N} = \varepsilon + \eta$$

Se da para cualquier $\eta > 0$, y por tanto se cumple la primera desigualdad a probar.

Para la segunda desigualdad, se toman primero los subintervalos de entre $F_1, ..., F_J$ tal que cumplan que $f(y_j)\ell(F_j) - \int_{F_j} f(x)\ dx \geq 0$. Así, por la primera desigualdad (ya probada):

$$0 \leq \sum\left[f(y_j)\ell(F_j) - \int_{F_j} f(x)\ dx\right] = \sum\left|\left[f(y_j)\ell(F_j) - \int_{F_j} f(x)\ dx\right]\right| \leq \varepsilon$$

Por otro lado, para los subintervalos que cumplen que $f(y_j)\ell(F_j) - \int_{F_j} f(x)\ dx < 0$, se tiene que:

$$0 < \sum\left[-f(y_j)\ell(F_j) + \int_{F_j} f(x)\ dx\right] = \sum\left|\left[f(y_j)\ell(F_j) - \int_{F_j} f(x)\ dx\right]\right| \leq \varepsilon$$

Por ambas desigualdades, se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{J}\left|f(y_j)\cdot \ell(F_j) - \int_{F_j} f(x)\ dx\right| \leq 2\varepsilon$$

∎

Con este lema, se está en posición de demostrar finalmente el teorema de Convergencia Monótona:

Teorema 4.6.3. *(Convergencia Monótona) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión monótona de funciones HK integrables que convergente puntualmente a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces, f es HK integrable si y solo si la sucesión $\{\int_a^b f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $[a, b]$. En ese caso se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Demostración. Se supone la ssucesión $\{f_n\}$ creciente en $[a, b]$. El caso de la sucesión decreciente será similar.

- $\Rightarrow$ Se supone f HK integrable. Entonces se tiene que $\int_a^b f_n(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx$ para todo n, y por tanto la sucesión monótona $\{\int_a^b f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada por $\int_a^b f(x)\ dx$ y con ello además es convergente.

- $\Leftarrow$ Se supone ahora que la sucesión monótona $\{\int_a^b f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y por tanto es convergente a un valor A. Se verá que f es HK integrable y que $\int_a^b f(x)\ dx = A$. Se toma $\varepsilon > 0$. Por definición de límite, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$ se tiene que $0 \leq A - \int_a^b f(x)\ dx < \varepsilon$. Como las funciones f_n son HK integrables se tiene un calibrador δ_n para cada función tal que

$$\left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - \int_a^b f_n(x)\ dx\right| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ subordinada a δ_n.

Por otro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, existe un $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ siempre que $m \geq n(x) \geq N_0$.

La función $\delta(x) = \delta_{n(x)}$ es una función calibrador sobre $[a, b]$. Se toma una partición etiquetada de $[a, b]$, $\mathcal{P}_e$, subordinada a δ, y se verá que cumple la definición de integrabilidad con el valor A.

Se tiene que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_e) - A| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f_{n(t_i)}(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})\right| +$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n} f_{n(t_i)}(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\ dx\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\ dx - A\right|$$

Se busca acotar los tres términos de la desigualdad. El primer término está acotado por $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|f(t_i) - f_{n(t_i)}(t_i)\right| \cdot (x_i - x_{i-1}) < \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (b-a)$.

Para el tercer término, se usa que $n(x) \geq N_0$ para todo $x \in [a,b]$ por construcción. Además, como los subintervalos de la partición son disjuntos entre sí y su unión es el total $[a,b]$, se cumple que $\int_a^b f_{N_0}(x)\ dx = \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N_0}(x)\ dx \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\ dx$.

Así pues, se cumple que

$$0 \leq A - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\ dx \leq A - \int_a^b f_{N_0}(x)\ dx < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Falta acotar el último término. Los números $n(t_i)$ pueden no ser distintos todos entre sí. Se agrupan los que son iguales y sobre ellos se aplica el Lema de Henstock (el Lema de Henstock se aplica sobre la misma función). Por ejemplo, suponiendo que $n(t_{j_1}) = n(t_{j_2}) = ... = n(t_{j_l}) = n_j$, se cumple:

$$\left| \sum_{k=1}^{l} f_{n_j} \cdot \Delta x_{j_k} - \int_{\Delta x_{j_k}} f_{n_j}(x)\ dx \right| \leq \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2^{n_j}}$$

Δx_{j_k} se refiere al subintervalo en el que los $n(x)$ de las etiquetas de la partición son iguales.

Con esto, todo el segundo término está dominado por la serie $\sum\limits_{k} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2^k} = \boldsymbol{\varepsilon}$. Por tanto, se tiene que f es HK integrable con

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

El caso decreciente es similar y no se desarrollará. ■

Finalmente, se presenta el resultado de convergencia dominada para la integral HK:

Teorema 4.6.4. *(Convergencia Dominada) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones HK integrables que convergente puntualmente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si existen funciones $h, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ HK integrables cumpliendo*

$$h(x) \leq f_n(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in [a,b] \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}$$

entonces se cumple que f es HK integrable y que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Demostración. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \geq n$, se define la función $F_{m,n} = \min_{k\in[n,m]} f_k$. Se tiene que el mínimo entre funciones integrables es integrable[5]. Entonces se tiene que la sucesión $\{F_{m,n}\}_{m\geq n}$ es decreciente, está acotada inferiormente por h, y tiene por límite $F_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Como $\int_a^b G_m(x)\ dx \geq \int_a^b h(x)\ dx$, se aplica el resultado de convergencia monótona y se tiene que F_n es HK integrable y cumple que $\int_a^b F_n(x)\ dx \leq \inf_{k\geq n} \int_a^b f_k(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$. La sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y converge a f. Aplicando de nuevo el teorema de convergencia monótona, se tiene que f es HK integrable y que

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)\ dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_a^b f_n(x)\ dx$$

De forma similar, se obtiene que $\lim_{n\to\infty} \sup \int_a^b f_n(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx$.
Con esto, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$ ■

[5]Se vio que la función mínimo es medible (3.2.3), y por tanto es Lebesgue integrable (si es acotada o su límite es finito). De la misma manera, se utiliza el resultado sin demostrar de que la función mínimo de funciones HK integrables es HK integrable.

Capítulo 5

Algunas aplicaciones de la integral HK a la Física

Uno de los primeros ámbitos que se estudian en la carrera de física, y que es fundamental para empezar a construir conocimientos alrededor de ello, es el de la mecánica clásica. Y su base, son las Leyes de Newton. En concreto, según la segunda ley de Newton se tiene que $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, con $p = m \cdot v$. Uno de los ejemplos más sencillos al aplicar esta ley es la ecuación del movimiento de caída libre

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g \implies \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g$$

En este caso, para obtener la ecuación del movimiento $y(t)$ habría que integrar dos veces la función constante g. Cuando se trata con funciones así de sencillas, no se encuentra ningún problema. Pero en función de las fuerzas que intervienen en el problema, se puede complicar tanto como uno quiera, llegando muchas veces al punto dónde hay que obtener soluciones mediante aproximaciones ante la imposibilidad de resolver la ecuación correspondiente. Una de las mayores limitaciones a la hora de estudiar física desde un principio es la cantidad de problemas que requieren de teoría de ecuaciones diferenciales para poder resolverlos.
Más adelante, sobre el problema cuántico del movimiento de partículas subatómicas, se desarrolla la ecuación de Schrödinger. Esta ecuación en una dimensión es la siguiente (en su versión independiente del tiempo):

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

De nuevo, se vuelve a encontrar una ecuación diferencial, y para resolverla se debe acudir otra vez a las integrales. Además, a esta ecuación se le puede añadir condiciones de contorno en función del problema que se quiere resolver.

Con esto, se quiere exponer que en muchos ámbitos de la física, sobre todo de la mecánica, uno se encuentra con problemas cuya solución requiere de integrar dos veces una función para poder encontrar la ecuación del movimiento. Y, dependiendo de quién es la función a integrar, se puede utilizar la integral de Riemann o en su defecto la de Lebesgue. Pero en el caso de que la función a integrar no sea Lebesgue integrable, poco más se puede solucionar de forma exacta sin recurrir a la integral HK presentada en este trabajo; recordando que existen funciones que son HK integrables y no Lebesgue integrables.

Se plantea pues de forma directa, un problema en el que hay que resolver una ecuación diferencial dónde interviene una función HK integrable que no es Lebesgue integrable. Se expone un ejemplo práctico sobre el que se desarrollará cierta teoría generalizando este tipo de problemas.

Ejemplo 5.0.1. (Ejemplo aplicaciones de la integral HK)

Sea f la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{x} \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Se vio en el ejemplo 3.3.2 que esta función no es Lebesgue integrable, y se vio también en el ejemplo 4.4.1 que la función sí es HK integrable (realmente se vio que con $g(x) = 2x\cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)$, se tiene que $h(x) = g(x) + f(x)$ es integrable HK y como $g(x)$ lo es por ser continua y acotada, entonces se tiene que $f(x)$ es HK integrable).

Se plantea entonces el problema:

$$(P) \begin{cases} -y'' + y = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Sin la integral HK no se puede resolver el problema pues la solución pasa por integrar la función f (realmente se integran productos de funciones HK integrables y la función f). Por ello, este problema solo tiene solución mediante el formalismo general presentado en este trabajo.

Más aún, se verá de forma breve que la solución del problema es de la forma:

$$y(t) = \Gamma(f)(t) - (e - e^{-1})e^{-t} + (e - e^{-1})e^{t}$$

Con $\Gamma(t)$ función definida como la integral de productos de funciones HK integrables con la función f. Se toma las funciones e^t y e^{-t} ya que son funciones solución de la ecuación $-y'' + y = 0$ linealmente independientes.

Una vez introducido un ejemplo en concreto, se plantea de forma general el problema a tratar (P), y sobre el que se desarrollará cierta teoría sobre ecuaciones diferenciales discutiendo la existencia de solución y la forma explícita de esa solución, en caso de tenerla:

$$(P)\begin{cases} Ly = -y'' + q \cdot y = f \\ Uy = h \end{cases}$$

con f, q dos funciones HK integrables sobre $[a, b]$, U es un operador lineal tal que actuando sobre la función y, es de la forma

$$U(y) = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix}$$

y h es el vector columna al cual se iguala el operador lineal

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Es decir, $Uy = h$, la condición de contorno, se convierte en dos ecuaciones de la forma $m_i \cdot y(a) + n_i \cdot y'(a) + p_i \cdot y(b) + q_i \cdot y'(b) = h_i$ con $i \in \{1, 2\}$.
Una vez planteado el problema, se procede a discutir, en primer lugar, la existencia de soluciones del problema. Para ello, se expone el siguiente resultado:

Teorema 5.0.1. *Sea $h \in \mathbb{C}^2$y f función HK integrable sobre $[a, b]$. Dados los siguientes problemas:*

$$(A)\begin{cases} Ly = f \\ Uy = h \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} Ly = 0 \\ Uy = 0 \end{cases}$$

se da uno de los dos siguientes casos:

1. El problema (A) tiene solución única en $\mathcal{A}$.

2. El problema (B) tiene solución no trivial $\mathcal{A}$.

Para comprender el enunciado del teorema, hace falta definir el conjunto $\mathcal{A}$ dónde se buscan las soluciones. Se define como $\mathcal{A} = \{y \in AC([a,b]) : y' \in ACG_*([a,b])\}$.
A su vez, para entender quien es este, hay que definir ciertos conjuntos adicionales:

1. $AC([a,b])$ funciones absolutamente continuas sobre $[a,b]$. Una función $f \in AC([a,b])$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{s} |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$ siempre que $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^{s}$ sean subintervalos disjuntos de $[a,b]$ cumpliendo que $|d_i - c_i| < \delta$.

2. $AC_*([a,b])$ funciones absolutamente continuas en sentido estricto sobre $[a,b]$. Una función $f \in AC_*([a,b])$ si $\sum_{i=1}^{s} \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [c_i, d_i]\} < \varepsilon$ siempre que $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^{s}$ sean subintervalos disjuntos de $[a,b]$ cumpliendo que $|d_i - c_i| < \delta$.

3. $ACG_*([a,b])$ funciones absolutamente continuas en sentido estricto generalizadas. Una función $f \in ACG_*([a,b])$ si f es continua y existe una colección numerable $\{E_n\}$ de subintervalos de $[a,b]$ tal que $[a,b] = \cup E_n$ y $f \in AC_*(E_n)$.

Se buscan soluciones en este conjunto ya que se cumple que si $y \in \mathcal{A}$ entonces y' existe y es continua en $[a,b]$, $|y'|$ es integrable, y'' existe en casi todo punto en $[a,b]$ y se cumple que $\int_a^x f(x)\, dx = y'(x) - y'(a)$. Es por ello que se buscan soluciones que pertenezcan a ese conjunto.
Con esto se define el conjunto $\mathcal{A}_* = \{y \in \mathcal{A} : Ly = 0 \text{ casi siempre en } [a,b]\}$.
De la demostración del teorema 5.0.1 se obtiene que si el problema (B) tiene únicamente la solución trivial como solución, se tiene que Uy_1 e Uy_2 son linealmente independientes siendo y_1 e y_2 una base del conjunto $\mathcal{A}_*$ (dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $Ly = 0$ en $\mathcal{A}$). Entonces se tiene que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha U y_1 + \beta U y_2 = h$. De aquí, dada una solución $y(t)$ al problema $\begin{cases} Ly = f \\ Uy = 0 \end{cases}$ se tiene claramente que $y + \alpha y_1 + \beta y_2$ es la solución única al problema (A).
Por tanto, se presenta el resultado sobre la solución a un problema dado tal que la base del conjunto $\mathcal{A}_*$ cumpla que $W(y_1, y_2) = 1$. $W_x(y,z) = y'(x) \cdot z(x) + y(x) \cdot z'(x)$ cumple que si $W_c(y,z) \neq 0$ para algún $c \in [a,b]$ entonces y, z son linealmente independientes.

Teorema 5.0.2. *Sea y_1, y_2 base del conjunto $\mathcal{A}_*$ tal que $W(y_1, y_2) = 1$ y sea*

$$K(x,t) = \begin{cases} 0 & a \leq x < t \\ y_2(t)y_1(x) - y_1(t)y_2(x) & t \leq x \leq b \end{cases}$$

Si el problema (B) tiene una única solución (la solución trivial) y f es HK integrable sobre $[a,b]$ entonces la única solución $y \in \mathcal{A}$ del problema

$$\begin{cases} Ly = f \\ Uy = 0 \end{cases}$$

viene dada por

$$y(x) = \int_a^b [K(x,t) + c_1(t)y_1(x) + c_2(t)y_2(x)]f(t)\ dt$$

con:

$$c_1(t) = \frac{\det\left((y_1(t)y_2(b) - y_2(t)y_1(b)) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + (y_1(t)y_2'(b) - y_2(t)y_1'(b)) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, Uy_2 \right)}{\det(Uy_1, Uy_2)}$$

y

$$c_2(t) = \frac{\det\left(Uy_1, (y_1(t)y_2(b) - y_2(t)y_1(b)) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + (y_1(t)y_2'(b) - y_2(t)y_1'(b)) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \right)}{\det(Uy_1, Uy_2)}$$

para todo $t \in [a,b]$

Con esto, se ha abordado las soluciones a un problema para la ecuación de Schrödinger en un intervalo $[a,b]$ con condiciones de contorno, para una función HK integrable. Ha sido necesario todo el desarrollo sobre la integral HK para poder deducir tales resultados para funciones f más generales que las funciones Lebesgue integrables, ya que ciertas funciones simplemente no son integrables y no tendría sentido plantearse tal problema.

Capítulo 6

Conclusiones

En primer lugar, se ha presentado la integral de Riemann, la que por su sencillez y por su importancia histórica, es de lo primero que se enseña en el cálculo diferencial e integral. Se han estudiado sus puntos fuertes y sus puntos débiles. Como punto fuerte se tiene que es una de las primeras definiciones formales del concepto de integral, y que no requiere que la función sea continua. Pero, por otro lado, presenta grandes limitaciones ya que la convergencia puntual de funciones integrables a una función f no implica que ésta sea integrable, y respecto a la fórmula de Newton-Leibniz, se exige a la función f' que sea Riemann integrable (acotada y continua casi siempre) para que se cumple la fórmula ($\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)$).

Con las limitaciones de la primera integral en mente, se ha presentado el desarrollo de la teoría de la medida de Lebesgue, y las funciones medibles. A partir de esto, se ha definido la integral de Lebesgue. Una integral que es capaz de integrar todas las funciones Riemann integrables, y que cumple mejores propiedades. Respecto a la convergencia de funciones, en este caso sí se consigue que la convergencia puntual de funciones integrables a una función f implique que la función f sea integrable, añadiendo algunas hipótesis adicionales. Además, respecto a la fórmula de Newton-Leibniz, se ha probado que rebaja las hipótesis necesarias sobre f' para que se cumpla la fórmula, a únicamente que f' sea acotada.

Con la idea de conseguir que la fórmula de Newton-Leibniz se cumpla sin ninguna hipótesis adicional, se presenta la integral de Riemann generalizada, la integral de Henstock-Kurzweil. Se ha definido para ello el concepto de calibrador y de partición subordinada a este. A parte de efectivamente probarse que esta integral cumple la fórmula de Newton-Leibniz sin ninguna condición sobre f' más que su existencia, se ha demostrado que es una generalización de la integral de Lebesgue y que existen funciones que son HK integrables y que no son Lebesgue integrables.

Finalmente, teniendo en mente la existencia de funciones HK integrables que no son Lebesgue integrables, se plantea como aplicación a la física la resolución de ciertos problemas con condiciones de contorno cuya solución pasa por integrar funciones. En el caso de que estas funciones sean funciones HK integrables que no son Lebesgue integrables, la única manera de resolver el problema es mediante la integral HK.

Bibliografía

[1] Brito, W. Las integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil.

[2] Burk, F. E. *A garden of integrals*, vol. 31. American Mathematical Soc., 2007.

[3] Dijk, E. v. *The Henstock-Kurzweil integral.* PhD thesis, Faculty of Science and Engineering. University of Groningen, 2014.

[4] Sánchez-Perales, S., and Mendoza-Torres, F. J. Boundary value problems for the Schrödinger equation involving the Henstock-Kurzweil integral. *Czechoslovak Mathematical Journal 70*, 2 (2020), 519–537.