Una aproximación a la teoría de juegos

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Autor:

Pablo González Álvarez

Tutor:
Manuel Francisco Montenegro Hermida

Trabajo de Fin de Grado de Matemáticas

Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Índice general

Introducción y objetivos.

Entendemos por **Teoría de Juegos** la rama del conocimiento matemático que se encarga del razonamiento estratégico estudiando estructuras formalizadas de incentivos -**juegos**- como función de las elecciones dos o más agentes -**jugadores**-. Sus investigadores estudian las estrategias óptimas para cada jugador, así como el comportamiento previsto y observado de individuos en diversos juegos [1].

Cabe mencionar ya en este primer momento que el contenido de estudio de la Teoría de Juegos puede resultar engañoso, porque generalmente se asocia el término *juego* exclusivamente con el entretenimiento en el sentido de los distintos juegos recreativos. Muchos de estos pasatiempos, como el ajedrez, podrán ser tomados en consideración como juegos en sentido matemático -de ahí el nombre de esta rama del conocimiento- mientras que algunos otros, como el escondite, difícilmente vendrán tratados de esta forma. También encontraremos multitud de situaciones y ámbitos poco relacionadas con el ocio, en que los distintos actuantes -personas, colectivos o instituciones- escogen unas u otras opciones que afectan al devenir propio y del resto. Estas situaciones, efectivamente, podrán ser modelizadas matemáticamente bajo la óptica de los juegos (el funcionamiento de una empresa en una economía de mercado, la evolución de una especie en función del comportamiento de sus predadores, las distintas estrategias bélicas en una situación de conflicto o la planificación de una campaña electoral son sólo algunos ejemplos) por lo que es clara la necesidad de matizar adecuadamente el concepto de *juego* en nuestro contexto.

Desde el enfoque de esta teoría, un **juego** es una situación conflictiva en la que priman intereses -a menudo contrapuestos- de varios individuos o instituciones que toman decisiones y cada parte, al tomar una decisión, influye sobre la decisión que tomarán las otras. Así, el resultado del conflicto se determina a partir de todas las decisiones tomadas por cada uno los actuantes [2].

En la práctica esto tiene una serie de consecuencias directas, algunas de las cuales podemos presentar ya en esta introducción. En primer lugar, un juego consta de **dos o más jugadores**. Aquellas situaciones en las que sólo interviene un agente decisor son objeto de la Teoría de Decisión, otra rama matemática asociada a problemas de incertidumbre que son tratados con esquemas de análisis y resolución en muchos casos similares a los que caracterizan a la Teoría de Juegos. Atendiendo a las diferencias que presentan los respectivos problemas en función de este número de agentes decisores, algunos autores consideran estas dos ramas bien diferenciadas [3] mientras que otros entienden la Teoría de Juegos como una extensión de la Teoría de Decisión [1].

El aspecto conflictivo se ve generalmente reflejado en la contraposición de intereses entre alguno de los jugadores, aunque formalmente se puede considerar un juego sin conflicto de tales intereses. Un juego en que coincidan los intereses de los jugadores será de tipo cooperativo, en los que se desplaza el aspecto conflictivo a buscar pautas adecuadas de cooperación (a menudo poco obvias) [4].

Cabe destacar que el resultado de un juego para cada jugador no depende exclusivamente de las decisiones que toma, pero este resultado tampoco estará exclusivamente determinado por las acciones realizadas por sus rivales: será una combinación de **ambas decisiones** -las propias y las ajenas- las que determinen el resultado de cada juego.

Se nos presenta así el momento estratégico en toda su complejidad: No bastará tener en cuenta el resultado más deseado, sino tomar en consideración cuales de todos los resultados posibles nos permitirán nuestros oponentes. Será deseable razonar en base a nuestras propias expectativas, pero siendo capaces de entender cuales son las de los demás jugadores y como interaccionan entre ellas. Predecir cual será la decisión que con mayor probabilidad tomará nuestro rival en cada situación será sin duda una habilidad valiosa, y para ello será necesario conocer o estimar cuáles son sus objetivos, el grado de información que posee ¡o incluso lo buen jugador que sea! En multitud de conflictos nos encontraremos ante el problema de escoger entre maximizar las posibles ganancias o minimizar las posibles perdidas, y en muchas de estas situaciones ni siquiera dispondremos de toda la información que quisiéramos sino que tendremos que intentar deducirla o adivinarla de algún modo.

La Teoría de Juegos plantea dos objetivos principales: Un **objetivo descriptivo o positivo** que estudia qué actividad puede ser un juego, de qué manera modelizarlo, cúales son sus reglas, cómo funciona, que comportamientos presentan los jugadores o que resultados se obtienen en cada caso. En definitiva, se propone clarificar **qué es un juego**. Una vez resuelto adecuadamente este primer fin, aparece un **objetivo prescriptivo o normativo** posterior que impera a jugar de una u otra manera, a adoptar unas u otras estrategias. Para ello, se emplean distintas herramientas de análisis y se suponen ciertas condiciones que permiten resolver **cómo debe actuar en el juego** un decisor informado y racional, que se ve sometido a unos ciertos incentivos y busca optimizar sus resultados. Un tercer posible objetivo más general puede plantearse cuando hemos resuelto satisfactoriamente estos dos primeros objetivos. Se trata de un **objetivo de diseño** que trata de **definir**, desde una posición externa, **unas reglas adecuadas** para constituir un nuevo juego que permita la resolución de un conflicto entre los participantes [2].

El objetivo general de este trabajo es presentar los formalismos matemáticos más sencillos empleados en Teoría de Juegos para el estudio de todas estas situaciones. Se buscará una exposición clara y detallada de los elementos básicos que permiten analizar un juego, nutrida con ejemplos que faciliten su asimilación. Se busca que tras esta lectura se puedan comprender manuales avanzados de la materia, se sea capaz de modelizar sin dificultad juegos sencillos y en general se adquiera una idea de las principales líneas de análisis del planteamiento estratégico.

A título personal este trabajo ha supuesto un primer contacto con la Teoría de Juegos. Como alumno del doble grado no he cursado la asignatura optativa de Sistemas de Ayuda a la Decisión, cuya tercera parte se corresponde con la temática de este trabajo. Para iniciarme en la materia he asistido en calidad de oyente a las clases correspondientes a esa tercera parte de la asignatura, impartida por M. F. Montenegro, tutor de este trabajo. Sobre esta base he desarrollado y ampliado alguno de los conceptos fundamentales para la comprensión de un juego, complementando la información con una revisión bibliográfica de diversos manuales y artículos de la materia. Se ha desglosado con particular detalle la teoría de la utilidad, así como los conceptos de información de dominio público y juego de información completa y la diferencia entre solución y concepto de solución. He considerado interesante hacer especial hincapié en estos aspectos ya que que tanto en la asignatura mencionada como en algunos textos vienen tratados de una manera más general, pues puede esbozarse una idea relativamente intuitiva de los mismos sin necesidad de exponerlos de manera rigurosa. Además de competencias específicas de manejo de la Teoría de Juegos para mí este trabajo ha supuesto una iniciación a la revisión bibliográfica de manuales matemáticos, he revisado algunas nociones de estadística así como de la teoría de grafos y también me ha permitido afianzar mis habilidades en materia de construcción y desarrollo de un texto de carácter científico.

Estructura del texto

El primer capítulo constituirá una primera toma de contacto con la Teoría de Juegos. Se presentan los aspectos comunes a estudiar en todo juego, de manera que puedan ser bien identificados cuando se pretenda estudiar una situación real desde la perspectiva de esta teoría.

En el segundo capítulo se construirán distintas funciones utilidad. Estas funciones recogen de manera formal las percepciones de ganancia o pérdida con que cada jugador percibe los distintos resultados del juego. El desarrollo teórico del capítulo se fundamenta en [3] y se ejemplificará con sucesivas anotaciones sobre un caso de elaboración propia.

En el capítulo tercero se describe con mayor profundidad una categoría particularmente manejable de juego, la conformada por los juegos estáticos de información completa. También en este capítulo se presentan de manera rigurosa algunas condiciones que exigiremos cumplan nuestros juegos. Este capítulo prepara el terreno que habrá de cubrir el siguiente, en el que se presentan algunas nociones básicas de solución. Las notación se volverá a coordinar con las de [3], de donde también se extraen las principales definiciones. Algunos ejemplos y las distintas representaciones posibles de estos juegos, desglosadas en la sección 3.2, podrán encontrarse en [4]. Otros ejemplos son recuperados de secciones anteriores.

El cuarto y último capítulo tratará por tanto el objetivo normativo de aconsejar al jugador acerca de qué jugadas le resultará más conveniente realizar en su juego. Los distintos conceptos de solución aparecen en [3], completando la sección 4.2 con algunas ideas y ejemplos de [8], así como recuperando algunos casos ya comentados en capítulos anteriores.

Capítulo 1

Primeros conceptos

Los distintos juegos se han venido clasificando tradicionalmente en **cooperativos** y **no cooperativos** [2], atendiendo a si las reglas del juego permiten la posibilidad de comunicación y coordinación entre los distintos agentes. Los juegos no cooperativos plantean jugadores centrados en el interés propio que no pueden alcanzar contratos vinculantes con sus adversarios. Para recoger adecuadamente multitud de situaciones reales se hace necesario ampliar estas opciones permitiendo el compromiso entre jugadores en algunos juegos. En estos casos una entidad superior que obligue al cumplimiento de los distintos acuerdos puede ser fundamental para comprender correctamente el juego, y uno de los frentes de investigación actual consiste en delinear adecuadamente las reglas del juego para justificar soluciones cooperativas particulares dentro de un planteamiento general no cooperativo que unifique adecuadamente la teoría [2].

Centrándonos en la oposición total o parcial de intereses distinguimos entre los juegos que son de suma cero y los que no lo son. Es usual entender los **juegos de suma cero** -aquellos donde las ganancias de cualquier jugador o jugadores se corresponden con una pérdida directa de sus oponentes- como subconjunto particular del total de juegos posibles [4].

Basándonos en el orden en que los jugadores actúan, veremos que se explican de manera similar aquellos juegos en los que los jugadores actúan bien simultáneamente, bien sin tener ningún tipo de información acerca de una anterior jugada de sus rivales. Serán los llamados **juegos estáticos o estratégicos**, por oposición a los **juegos dinámi-**

cos, donde se sigue un orden y cada jugador conoce total o parcialmente las jugadas realizadas anteriormente por sus rivales e intenta responder a ellas.

Podemos también clasificar los juegos en cuanto al número de jugadores, la estructura de incentivos que presentan o el tipo de información de que disponen los jugadores. Aparecen así multitud de categorías y tipos de juego como los **juegos bipersonales**, **juegos de información perfecta**, **juegos de información incompleta**, **juegos sometidos a componentes de azar**, ... Aunque cada juego puede presentar ciertas características particulares, para modelizar matemáticamente todas estas situaciones tendremos que extraer una serie de elementos que efectivamente son comunes a todos los juegos: **Jugadores**, **acciones**, **conjuntos de información**, **estrategias** y **utilidades**[3]. En este trabajo se pretende elaborar y desarrollar este terreno común a los distintos tipos de juegos. El objetivo de este capítulo será por tanto introducir el formalismo matemático de estos elementos, desglosando algunas de sus propiedades más importantes.

1.1. Un ejemplo real

El formalismo matemático necesario para dotar de coherencia y rigidez al corpus de conocimientos que caracteriza a las matemáticas está marcado por una abstracción que en multitud de ocasiones lo desliga de la situación que lo pare, lo aparta del problema que lo fecunda, lo separa de la situación real que pretende ayudar a resolver. Si bien esta abstracción se volverá necesaria para ahondar en ciertas cuestiones, su exageración también dificulta y entorpece la asimilación de aquello que describe, especialmente para un profano del campo en cuestión quien pretende aproximarse al mismo por primera vez. Para ilustrar esta primera toma de contacto con los elementos base de la Teoría de Juegos, empezaremos tomando como ejemplo sencillo una partida entre dos jugadores de Texas Hold'em, una modalidad de póker.

El póker hace referencia a una variedad de juegos de apuestas en las que los jugadores, con todas o parte de sus cartas ocultas, hacen apuestas sobre una puja inicial obligada o *ciega*, recayendo la suma total de las apuestas en el jugador o jugadores con la mejor combinación de cartas. Las distintas modalidades del póker presentan una estructura de apuestas y un reparto de cartas particular, pero en todas ellas se juega con baraja de naipes francesa. Nuestros dos contendientes tiene en juego una cantidad de dinero en la mesa o *stack* -monto total del que se dispone, para realizar las apuestas o pagos oportunos- y ya en un primer momento se compra la opción a jugar una *mano* -cada ronda de apuestas desde que se genera un nuevo *bote* hasta que se decide qué jugador o jugadores lo ganan- pagando la *ciega*, que se añade al *bote* -el premio por ganar la *mano*, estará constituido por la suma de todas las apuestas que se han realizado o igualado durante la *mano* en juego-. En esta modalidad particular -el Texas Hold'em- se entrega a cada jugador dos cartas que sólo él conoce. A lo largo de la mano hasta otras cinco cartas comunitarias -comunes y conocidas por ambos- que se irán mostrando sobre la mesa en distintas etapas o *calles* -el Texas Hold'em tiene tres calles: en la primera de ellas se muestran tres cartas a la vez, para mostrar la cuarta y quinta cartas en la cuarta y quinta calle respectivamente-. Para finalizar la mano, cada jugador buscará tener una mejor combinación de cinco cartas que su rival, usando para ello tanto sus dos cartas personales como las cinco cartas comunitarias, de modo que pueda llevarse el bote. En caso de empate el bote se reparte a partes iguales.

Aparece así el póker como un juego de azar, en el que aparentemente se gana o pierde el bote en función de las cartas que han sido repartidas. Sin embargo no es mera suerte lo que permite a un jugador profesional ganar dinero con el póker. Antes de mostrar cada nueva carta comunitaria -entendiendo que en la primera calle se muestran tres nuevas cartas a la vez- y también antes de enseñar sus dos cartas personales en la ronda final -para así concluir la partida y determinar quien ha sido ganador- cada jugador -siguiendo un orden, nunca simultáneamente- tiene la opción de pasar turno o apostar. En caso de producirse alguna apuesta, el oponente deberá igualar -o subir aún más- dicha apuesta para poder seguir en el juego (añadiéndose el dinero apostado al bote) o bien decidir no arriesgar más dinero y retirarse (a cambio de permitir que sea su rival quien se lleve lo acumulado en el bote durante la mano en juego). De este modo, en cada mano se jugarán hasta 4 rondas de apuestas -*preflop*, en el que sólo se han repartido las dos cartas personales a cada jugador; *flop*, con tres cartas comunitarias sobre la mesa; *turn*, cuando ya se ha mostrado la cuarta carta comunitaria; y finalmente el *river*, apuesta donde todas las cartas comunitarias ya han sido mostradas, y tras la cuál se mostrarán las dos cartas personales para decidir quien tiene la combinación más fuerte y se lleva el bote-.

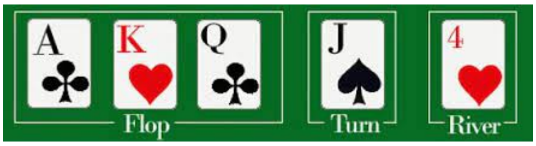


Figura 1.1: Cartas comunitarias en el Texas Hold'em, [5]

Este ejemplo de póker es un **juego dinámico bipersonal** -dos jugadores que apuestan ordenadamente y conocen si su rival ha pasado o apostado en su acción anterior- **de información imperfecta** -a cada jugador le falta parte de la información de lo que viene ocurriendo en el juego, ya que no conoce las cartas personales de su rival- y de suma cero -lo que gana cada jugador es lo que pierde su rival-.

En general, un buen jugador tendrá que decidir si considera que su mano será mejor o peor que la de su rival en caso de llegar a la última ronda, e intentará engordar el bote en caso de creerse seguro vencedor. Cuando a un buen jugador se le presenta una situación así, no se limitará a realizar la mayor apuesta posible -todo su *stack*- sino que más bien tratará de realizar la mayor apuesta que no disuada a su rival de seguir en el juego, esto es, la puja más alta que cree que será igualada por su oponente.

También es usual la situación inversa, en la que cree que su mano no resultará vencedora en caso de llegar a la última ronda. En este caso puede parecer muy atractivo retirarse y no arriesgar más dinero, pero antes de rendirse un buen jugador valorará si marcarse un farol pueda ser una mejor respuesta. Un farol consiste en apostar con cartas que se consideran perdedoras como si se tratase de una buena mano, esta vez con la intención de engañar al rival para así disuadirle de seguir en juego y "robarle" el bote.

Es por tanto el póker un juego en el que ocultar nuestras verdaderas motivaciones se vuelve crucial. Considerar qué tendencias de juego parece mostrar un oponente (si es más bien asustadizo o por el contrario arriesga con demasiada facilidad, ...), o discernir entre qué situaciones de juego parecen resultarle rentables y en cuáles cree estar perdiendo dinero son, sin ninguna duda, habilidades importantes. Además, cada jugador también tendrá que tener en cuenta cuestiones ajenas a la estrategia del juego en sí (como cuánto dinero puede llegar a arriesgar en su partida) y también le será conveniente decidir rápidamente cómo de hábil es su oponente a la hora de plantearse todo este tipo de cuestiones.

Vemos pues que nuestra sencilla modalidad de póker está atravesada de particularidades, pero en cuanto a **juego** presenta cierta estructura común con otros muy distintos, como pudiesen ser el ajedrez o una guerra, que serán centrales para poder entenderlo.

Es evidente que los **Jugadores** deberán ser un elemento a recoger por nuestro modelo. Para juegos con dos agentes decisores los denotaremos, en general, **J1 y J2**. Las dos maneras de presentar un juego serán en **forma extensiva** o de árbol -especialmente apta para describir juegos dinámicos, como es el caso de nuestra partida de póker- o bien en **forma compacta o estratégica** -preferible en la descripción de juegos estáticos como *Piedra, Papel o Tijeras*, en que todos los jugadores actúan simultáneamente- en una tabla. En la representación en forma extensiva, cada nodo del árbol de decisión pertenece a uno u otro jugador y representa un momento en el que dicho jugador puede tomar una decisión. Las distintas ramificaciones -combinaciones entre decisiones- de cada juego conducen a uno u otro resultado que suponen unos u otros incentivos (ganar o perder la cantidad que se ha acumulado en el bote).

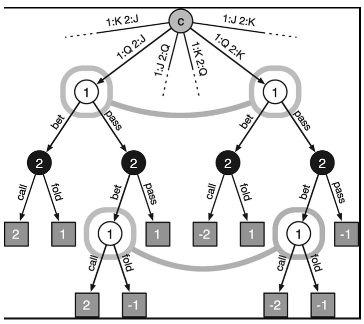


Figura 1.2: Árbol de decisión en el Texas Hold'em, [6]

Aparecen en la figura representados en forma extensiva los primeros instantes de nuestra partida. Los nodos de decisión de J1 vienen representados en blanco, mientras que los de J2 aparecen en negro. En juegos con componente de azar la aleatoriedad es entendida como decisión "neutral". En la situación real, este tipo de "decisión" se toma de manera efectivamente aleatoria pero en Teoría de Juegos consideramos que cada acción pertenece necesariamente a un jugador, por lo que es usual considerar que un tercer jugador neutral -que llamaremos **azar** o **naturaleza** y usualmente denotaremos como **N**- será quien toma esta decisión. En la figura 1.2 este tercer jugador ficticio viene representado por la letra C, y entendemos que es quien decide tanto las dos cartas personales de J1 y J2 como también que aparezca una u otra carta comunitaria en cada mano de nuestra partida de póker. Para evidenciar que tras sus decisiones efectivamente no hay ninguna voluntad racional que prefiere uno u otro desarrollo del juego decimos que este jugador es indiferente al resultado del juego, que sus acciones carecen de incentivos o que su utilidad[1] se mantiene constante para toda combinación de acciones. La raíz de nuestro árbol es un nodo de decisión representado en color gris que pertenece a C, donde sus acciones posibles en este primer momento se corresponden con toda combinación de cartas personales que pueden recibir tanto J1 como J2.

La descripción de un juego recoge su estructura y especifica las **acciones** o alternativas de cada jugador. Son, en definitiva, las elecciones que toma cada jugador durante el juego. En nuestro árbol de decisión, cuando J1 decide apostar en lugar de pasar, las acciones posibles de J2 son retirarse o igualar. Cuando un jugador se decide por una acción en cada nodo de decisión, el juego avanza en un sentido u otro.

Los distintos **conjuntos de información** de cada jugador hacen referencia a la información que conocen los jugadores sobre las acciones anteriores cuando van a realizar una jugada, y tendrán a su vez que venir representados. En nuestra partida cada jugador conoce sus dos cartas en cada momento y, en función de la ronda de apuestas en las que esté, conoce más o menos cartas comunitarias, así como si el jugador rival ha decidido pasar, apostar, igualar o resubir en cada una de las rondas anteriores. Usualmente encontraremos que situaciones distintas, pero indiscernibles para cada jugador, se encuentran en el mismo conjunto de información: el jugador sabe que está en uno de los posibles nodos de ese conjunto de información, pero no sabe exactamente en cuál. Imaginemos que J2 acaba de realizar una apuesta muy alta y J1 se plantea continuar o retirarse. J1 tiene cartas decentes -que resultarán ganadoras frente a un gran porcentaje de cartas que puede tener el rival, pero que resultarán perdedoras frente a un conjunto aún sig-

[1] Ver capítulo 2

nificativo de esas manos y por tanto deben jugarse con cautela- y no querría darse por vencido prematuramente. Es un jugador atento y sabe que su oponente prefiere apostar más bajo con cartas mediocres y sólo apuesta tan fuerte con manos extremadamente fuertes o débiles [2]. J1 tiene que decidir si la apuesta de J2 pretende extraerle la mayor cantidad de dinero posible sustentada por cartas demoledoras o simplemente pretende asustarle con un farol que busca encubrir una mano basura. En ambos casos su rival se comporta de la misma manera, en ambas situaciones dispondría de la misma información y, atendiendo a lo que ha ido observando en la partida hasta el momento, asume que esos dos son los únicos escenarios posibles... pero desgraciadamente son escenarios muy distintos. En este caso, esta realidad aparece recogida en nuestro árbol por una conexión de color gris entre ambos nodos de decisión. En los nodos de un mismo conjunto de información un jugador conoce la misma información y tiene disponibles las mismas acciones, pero el resultado final del juego depende de en cuál, de los posibles nodos, se encuentre realmente.

Entendemos la **estrategia** de cada jugador como un plan de juego que especifica las acciones que el jugador tomará en cada uno de sus nodos de decisión de acuerdo con el conjunto de información en el que se encuentre. La estrategia de un jugador no hace referencia a una acción concreta u otra, sino al conjunto total de acciones que tomará, una por cada posible situación. En nuestra partida J2 carece de experiencia y sabe que no es muy buen jugador, así que decide seguir una estrategia relativamente sencilla antes de empezar la partida. En cada calle clasificará las cartas que N va repartiendo en tres categorías atendiendo a cómo de beneficiosas le resultan: basura, normales y demoledoras. Cuando se enfrente a una apuesta, igualará con cartas normales y resubirá la apuesta con sus cartas basura y demoledoras independientemente de lo que haga su rival. Cuando sea él mismo quien inicia la acción, apostará bajo con sus cartas normales

[2] La clasificación de cartas en demoledoras, decentes, mediocres, débiles... no atiende a criterios estrictos sino que resulta del criterio subjetivo de cada jugador. En cada ronda de apuestas se descubren nuevas cartas comunitarias que benefician, perjudican o dejan indiferente a cada jugador. Solamente en el *river*, cuando todas las cartas comunitarias ya has sido descubiertas, se puede conocer la fuerza absoluta de una mano, esto es, el porcentaje de manos rivales que ganan o pierden frente una mano concreta. Más aún, no es esta fuerza absoluta sino la fuerza relativa lo que orienta a un buen jugador en sus decisiones: en cada momento, considerando tanto la dinámica de apuestas que se ha venido dando en la partida como el efecto de las nuevas cartas comunitarias, los jugadores sitúan a sus rivales en un rango -conjunto de cartas que creen pueden tener- y es frente a este rango como determinan si su mano concreta es más o menos fuerte.

y mucho más fuerte con sus cartas demoledoras o sus cartas basura. Con esta estrategia espera confundir a J1 tratando por igual sus mejores y peores cartas ¡Y evidentemente lo consigue! Volviendo a la situación concreta comentada en el párrafo anterior, si J2 decide apostar fuerte porque tiene unas cartas muy fuertes simplemente nos habla de la acción que tomó J2. Su estrategia especifica sus acciones, tanto en este caso, en el que J2 presenta una mano demoledora, como también en los casos en que tuviese una mano normal o una mano basura.

Por último entenderemos por **utilidad** el resultado del juego para cada jugador. En nuestro ejemplo puede parecer obvio que la utilidad venga dada -positiva o negativa- por la cantidad de dinero ganado o perdido en cada mano. Sin embargo esto podría no ser el caso: Supongamos que J1 es un empresario que tiene interés en entablar relación con J2, otro empresario rival con el que quiere establecer relaciones que sean beneficiosas para su negocio. Las cantidades que se están jugando en esta partida son minúsculas frente al beneficio empresarial que espera poder alcanzar. El interés genuino de J1 en una partida como ésta radica no radica tanto en el dinero en juego como en encontrar un acuerdo empresarial. Si gracias a esta partida consigue tal acuerdo, J1 podría llegar a asignarle una utilidad positiva ¡incluso perdiendo dinero en la partida! La utilidad debe reflejar, por tanto, los incentivos reales a los que se ven sometidos los jugadores, y estos incentivos usualmente van más allá del propio juego.

1.2. Definiciones básicas

Definición 1.1 (Teoría de Juegos). *Área matemática que estudia el plateamiento estratégico entre decisores racionales que actúan dentro de estructuras formalizadas de incentivos o **juegos** [1].*

Es usual considerar, desde la óptica de la Teoría de Juegos, que los agentes decisores se comportan de manera racional y están bien informados [4]. Esto implica que cada agente conoce las reglas del juego, entiende sus dinámicas e intenta escoger la mejor respuesta posible de acuerdo a los posibles resultados. Esta suposición se vuelve fundamental en uno u otro punto del desarrollo de la Teoría de Juegos, de manera que pueda cumplir con su objetivo normativo de dictar qué respuestas son correctas o erróneas aún cuando un juego sea especialmente complejo o aparezcan situaciones engañosas. Sin embargo, cabe destacar la falta de consenso por parte los teóricos frente a la necesidad de este punto. En las distintas situaciones reales que pretende explicar la teoría de juegos no dejan de aparecer agentes que o no están bien informados de los mecanismos del juego o no parecen escoger sus decisiones de manera racional de acuerdo a sus intereses, y una parte de las investigaciones también se centra en la manera óptima de actuar en un juego cuando nos enfrentamos a un jugador con estas características [2].

Definición 1.2 (Juego)**.** *Problema de decisión donde hay varios agentes decisores sometidos a incentivos que dependen de la combinación de decisiones tomadas por todos los agentes decisores [2].*

En general suele atenderse a aquellas situaciones que presenten algún tipo de aspecto conflictivo, bien se trate una oposición directa de intereses entre alguno de los decisores; una situación en la que aparezcan intereses comunes, pero aparezca el aspecto conflictivo a la hora de determinar la manera en que se pueda dar la cooperación necesaria para alcanzarlos; o bien una combinación de ambas situaciones. Formalmente, un aspecto conflictivo no es indispensable para que una situación sea atendida por la Teoría de Juegos su ausencia trivializa el juego[2] y reflejará situaciones carentes de interés que se evitarán en el presente texto.

Definición 1.3 (Jugador)**.** *Cada uno de los agentes decisores de un juego que actúan en el mismo interpelados por incentivos dependientes del conjunto de decisiones tomadas por todos los jugadores. En un juego de M jugadores, estos se denotarán usualmente como* $J_i \in J = \{J_j\}_{j=1}^{M}$.

Para considerar que un juego no sea trivial se hace indispensable a su vez que los incentivos a los que cada jugador se ve sometido efectivamente varíen en función de sus propias decisiones, además de las decisiones tomadas por el resto de jugadores. Formalmente, este requerimiento no es necesario, pero no resulta difícil entender que un jugador para el que su recompensa en el juego solo depende de las decisiones tomadas por el resto de decisores podrá decidir arbitrariamente sin necesidad de racionalizar su elección. Una situación de este estilo representa un agente externo que condiciona el juego con sus decisiones y que a su vez se ve condicionado por el resultado del juego, pero no hace referencia al sentido usual de jugador. En este sentido surgirán problemáticas complejas y similares a aquellas en las que uno de los jugadores no se comporte de manera racional, su análisis resulta más complejo y en esta aproximación a la Teoría de Juegos estos casos también serán evitados.

Definición 1.4 (Acción). *Cada una de las elecciones o alternativas entre las que puede decidir un jugador cuando realiza una jugada. Usualmente las definimos como $a_{j,i} \in A_i$ (o simplemente $a_i \in A_i$) donde A_i representa el conjunto de acciones del jugador J_i y el índice j indica cada una de las acciones de ese conjunto.*

Definición 1.5 (Resultados del juego). *Cada uno de los distintos modos en que puede concluir el juego, dependen del conjunto de acciones que efectivamente han ido escogiendo los jugadores durante el transcurso del mismo. Llevan aparejados ciertos premios o castigos (los incentivos del juego).*

Definición 1.6 (Pagos). *Son aquellos premios o penalizaciones que van aparejados a cada resultado del juego. Son conocidos de antemano por los jugadores y previstos dentro de las reglas del juego y, en principio, buscan incentivar a los jugadores para buscar la mejor manera posible de jugar al juego.*

Usualmente encontraremos que se habla indistintamente de resultados o pagos pues, al estar estos conceptos bien relacionados, podremos identificarlos. Esta práctica es habitual al describir multitud de juegos pero deberá ser evitada en aquellas situaciones que puedan dar lugar a confusión (por ejemplo, cuando resultados distintos de un juego den lugar a los mismos pagos), si esta diferencia fuese relevante para describir el juego.

También cabe aquí subrayar que los pagos encarnan exclusivamente las motivaciones **internas** al juego que incentivan a jugar de una manera u otra. Si bien los distintos juegos pueden entenderse de manera abstracta como objetos matemáticos, en general modelizan situaciones concretas dentro de sistemas más amplios. En este sentido aparecer incentivos externos que invalidan la eficacia del concepto de pago como motivación real. Dicho de otro modo, podremos encontrarnos situaciones estratégicas reales que nos presenten salidas o soluciones satisfactorias cuando se estudian aislando el juego de su contexto, pero que dejan de serlo bajo una perspectiva más amplia. Para atender a esta problemática tendremos que referirnos al concepto de **utilidad** (ver capítulo 2).

Definición 1.7 (Estrategia)**.** *Plan completo de actuación con que cada jugador puede proponerse jugar una partida, de manera que deja especificadas la acción o acciones que podrá tomar el jugador en cuestión, en caso de llegar a cada uno de sus posibles momentos de decisión. Usualmente se denotará como $s_{j,i} \in S_i$ (o simplemente $s_i \in S_i$) donde S_i representa el conjunto de estrategias posibles para el jugador J_i y el índice j indica cada una de las estrategias de ese conjunto.*

Una estrategia puede definir inequívocamente la acción concreta que toma el jugador en cada momento de decisión, y en estos casos hablaremos de estrategias *puras*. Para evitar ser predecible, con objeto de dificultar a la partida a los rivales o esperando obtener algún otro beneficio, también es usual en muchos juegos que un jugador opte, en un determinado momento de decisión, entre dos o más acciones posibles con unas ciertas probabilidades asociadas a estas acciones. Estos planes de juego se calificarán como estrategias *mixtas*[3].

Definición 1.8 (Perfil de estrategias)**.** *Conjunto de estrategias, una por cada jugador, de manera que lleva asociado un resultado del juego.*

Como ya hemos reiterado, el resultado de un juego para un jugador no depende enteramente de su plan de juego entendido como las decisiones que toma, sino de la combinación de todas las decisiones tomadas por todos los jugadores. La idea de un perfil de estrategias es recoger los planes de juego de todos los jugadores, de manera que de seguirse sabemos cual será el resultado del juego. Por esta razón se vuelve un concepto clave a la hora de analizar qué estrategias particulares de cada jugador le serán más o menos deseables.

Forma dinámica o extensiva y forma estratégica o normal

Son las dos formas más habituales de representar un juego. Ambas formas especifican jugadores, sus posibles acciones y los pagos que resultan de las combinaciones de acciones.

[3]Por razones de simplicidad los ejemplos de juego que se presentan en el presente texto tratarán con jugadores que utilizan exclusivamente estrategias puras.

La forma estratégica se emplea preferiblemente en juegos estáticos -donde cada jugador decide bien simultáneamente al resto, bien sin conocer las decisiones que han tomado sus rivales- y representa el juego de manera más compacta (usualmente en forma de tabla) centrando su énfasis en las estrategias que podría plantearse cada jugador.

La forma extensiva es ideal para representar juegos dinámicos -donde cada jugador responde a información que aportan las acciones anteriores de sus rivales- dado que, además de recoger la información que se aporta con la forma estratégica, especifica las posibles acciones en forma de distintos caminos de un árbol o grafo dirigido, de manera que queda claramente reflejada la estructura secuencial del juego.

Es claramente más adecuado utilizar una u otra representación en función del juego a representar, pero debemos subrayar que ambas formas son aplicables a cualquier juego. Cuando representamos un juego estático en forma extensiva esta representación recogerá toda la información necesaria acerca del juego, y simplemente tendremos en cuenta que la aparente secuencialidad que aporta el árbol no es tal sino que toda decisión en el juego se toma simultáneamente o desconociendo las decisiones tomadas por los demás jugadores. Cuando representamos un juego dinámico en forma normal, entenderemos qué pagos recibirá cada jugador en función de las posibles combinaciones de estrategias que se sigan y simplemente omitimos la descripción de secuencialidad inherente a este tipo de juegos.

1.3. Pares o nones

Pares o nones es un clásico juego para dos jugadores que en adelante llamaremos J1 y J2. Una variante del juego consiste en que uno de los jugadores elige *pares* y el otro *nones* y a continuación muestran a la vez -a la voz de *"¡Uno, dos y tres!"* típicamente- su mano con ninguno, uno o varios dedos extendidos. Si el total de dedos extendidos es par, ganará el jugador que eligió pares, y viceversa.

En nuestro caso J1 se decide por los pares, J2 por tanto escoge nones, y deciden jugarse un euro cada uno. Este es un tipo de juego estático que podemos expresar en forma estratégica con la siguiente tabla.

		J2					
		0	1	2	3	4	5
J1	0	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1
	1	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1
	2	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1
	3	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1
	4	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1
	5	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1

Figura 1.3: Representación en forma estratégica

Aquí vemos cómo las 6 estrategias disponibles en el juego para cada jugador -mostrar de ninguno hasta cinco dedos- etiquetan una fila o columna, atendiendo a si la decisión corresponde a J1 o J2. Cada casilla central en la tabla representa por tanto un resultado del juego derivado de la intersección entre dos estrategias -una por cada jugador- y en ella aparecen ordenadamente los pagos que recibe en cada caso J1 y J2. Es claro que los jugadores son

$$J = \{J_1, J_2\}$$

y sus acciones son el número de dedos que muestran

$$A_1 = \{a_{11} = 0, a_{21} = 1, ..., a_{61} = 5\}$$

$$A_2 = \{a_{12} = 0, a_{22} = 1, ..., a_{62} = 5\}$$

Cuando entre ambos jugadores no muestran ningún dedo entendemos que estamos ante un número par de dedos extendidos y, por tanto, la matriz de pagos nos indica $(1, -1)$ en referencia a que J1 ganará 1 euro y J2 perderá 1 euro.

En ejemplos de este estilo es conveniente identificar que las acciones en que J1 saca un número par de dedos -$a_{11} = 0, a_{31} = 2, a_{51} = 4$- dan lugar a los mismos pagos frente a una misma acción de J2, por lo que son acciones indistinguibles a efectos del juego. También se da esta situación cuando el número de dedos es impar, y podemos razonar análogamente para J2. Tomado esto en cuenta podremos expresar nuestro juego de manera más reducida.

		J2	
		P	N
J1	P	1,-1	-1,1
	N	-1,1	1,-1

Figura 1.4: Pares o nones

Ésta sería una representación ideal del juego. Vemos que con esta forma, más compacta, los conjuntos de acciones son

$$A_1 = \{P, N\}$$

$$A_2 = \{P, N\}$$

donde P y N representan un número de dedos par o impar para J1 y para J2. Como además cada jugador sólo tiene un momento de decisión, los conjuntos de acciones coinciden con los conjuntos de estrategias

$$S_1 = \{s_{11} = P, s_{21} = N\}$$

$$S_2 = \{s_{12} = P, s_{22} = N\}$$

Hay, por tanto, cuatro perfiles de estrategias ($(s_{11}, s_{12}) = (P, P)$, $(s_{21}, s_{12}) = (N, P)$, $(s_{11}, s_{22}) = (P, N)$ y $(s_{21}, s_{22}) = (N, N)$) representados en la forma estratégica por cada una de las casillas de la matriz. Cada uno lleva asociado un resultado del juego. Podemos expresar los pagos que recibe el jugador J_i como función utilidad u_i[4] de estos perfiles de estrategias, de manera que $u_1(P, P) = 1$,$u_1(N, P) = -1$,$u_1(P, N) = -1$ y $u_1(N, N) = 1$ para J1, y de igual manera para J2.

Como *Pares o nones* es un juego estático, la representación estratégica es la más correcta. El juego también queda perfectamente descrito en forma extensiva, toda vez aclaremos que el árbol de decisión no está representando una secuencialidad.

[4] Trataremos con el debido rigor estas funciones en el capítulo 2

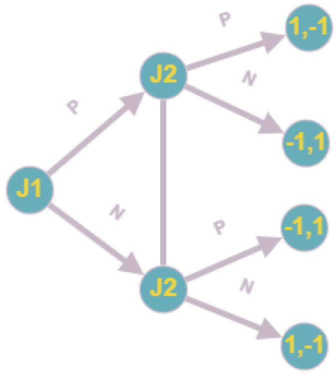


Figura 1.5: Pares o nones en forma extensiva

Los vértices del árbol identifican cada momento de decisión y, por tanto, pertenecen a uno u otro jugador. Los llamaremos nodos de decisión, y de ellos parten aristas dirigidas que representan las posibles acciones que puede tomar el jugador. Los vértices finales no son nodos de decisión sino que identifican los posibles resultados de juego, y en ellos representamos los pagos asociados a estos resultados. Cuando dos nodos pertenecientes a un mismo jugador aparecen ligados representamos que ambos nodos están en el mismo conjunto de información y´, por tanto, el jugador no sabe discernir en cuál de ellos efectivamente se encuentra.

La diferencia entre pagos y resultados del juego se hace clara si suponemos que nuestros jugadores decidiesen jugar una nueva partida pero esta vez arriesgando la cantidad de 5 euros en lugar de sólo 1. Los posibles resultados del juego -así como la estructura del juego- aún serían los mismos que en el caso anterior, pero es claro que los pagos del nuevo juego habrían cambiado. En estos casos, donde el incentivo es una cantidad de dinero, es sencillo determinar el valor de los pagos identificándolos con la cantidad ganada o perdida, pero aún cabría matizar el concepto de pagos cuando éste no sea el caso. ¿Qué ocurre cuando un matrimonio trata de decidir entre dos películas de la cartelera para una cita romántica jugando a pares o nones? Evidentemente, el pago para el ganador consiste en poder escoger la película, pero sería aconsejable que mostrase consideración para con las preferencias de su pareja si no quiere tener posteriores problemas maritales.

Cuantificar el valor de las posibles soluciones de un juego no siempre resulta trivial, pero la realidad es que asignar valores numéricos a los distintos pagos se torna crucial para aplicar métodos analíticos que permitan optimizar la toma de decisiones estratégicas en multitud de juegos. Para afrontar este reto resulta fundamental el concepto de utilidad.

Capítulo 2

Utilidad

La Teoría de la Utilidad es una rama de la Teoría de Juegos que aparece cuando, tomando en consideración que los pagos en multitud de juegos no resultan trivialmente cuantificables, nos proponemos asignar para cada posible resultado de un juego, y para cada jugador, un número real, de manera que queden ordenadas las preferencias de cada jugador por uno u otro resultado. La solución que aporta a esta cuestión consiste en definir una función de utilidad, y en adelante este concepto sustituirá al de pago.

Ejemplo (La merienda). En general, las funciones de utilidad no serán únicas. Supongamos que los diferentes pagos para los tres posibles resultados de un juego al que juega un niño con su hermano mayor consisten en la manzana, la naranja o la pera que podrá merendar. Cuando se le pregunta, el niño dice preferir la manzana a la naranja y la naranja a la pera. Una posible función utilidad consistiría en asignar los valores 2, 1, y 0 a cada fruta. Sin embargo, también será una función utilidad la que resulte de duplicar los valores de la función utilidad inicial, o de valorarlas con las cantidades 3, 2 y 1... Una función utilidad busca poder ordenar y comparar distintos resultados, y usualmente encontraremos distintas funciones que cumplan este cometido.

La problemática principal en Teoría de la Utilidad aparece en aquellos casos donde las preferencias del jugador carezcan de consistencia interna. En nuestro ejemplo, el niño prefiere merendar la manzana a la naranja y también dice querer antes la naranja que la pera. Si al tener que escoger entre la pera y la manzana le gustase más la pera, no parece razonable encontrar una función de utilidad que refleje tales preferencias. Las preferencias del niño, en este caso, se dirán intransitivas. Sólo podremos determinar funciones de utilidad sobre unas preferencias cuando estas cumplan ciertos requisitos.

En este capítulo desarrollaremos los conceptos básicos de la Teoría de Utilidad. Uno de los principales objetivos de la Teoría de Juegos consiste en orientar al jugador acerca de qué maneras de jugar le resultan más beneficiosas. Las funciones utilidad son un elemento clave en este cometido ya que en general los diferentes mecanismos de análisis proponen estrategias con el objetivo de maximizar dichas funciones.

2.1. Utilidad ordinal

La **utilidad ordinal** es una de las posibles funciones utilidad más sencillas, se limita a ordenar preferencias asignando a cada una un número real, sin asignarle valor a las diferencias entre los distintos valores. Para poder definirla tendremos que exigir que las preferencias sean racionales.

2.1.1. Relación de preferencia

La disposición de un jugador a preferir o no unos resultados del juego frente a otros viene recogida formalmente bajo el siguiente concepto.

Definición 2.1 (Relación de preferencia, $\succeq$)**.** *Sea X un conjunto de alternativas mutuamente excluyentes entre las que debe escoger un jugador. Llamamos relación de preferencia a una relación binaria en X que denotaremos $\succeq$ de manera que $\forall x, y \in X, x \succeq y$ recoge que x es preferido o indiferente a y.*

A partir de una relación de preferencia es natural definir otras dos relaciones.

Definición 2.2 (Relación de preferencia estricta, $\succ$)**.** *Sea X un conjunto de alternativas mutuamente excluyentes entre las que debe escoger un jugador. Llamamos relación de preferencia estricta a una relación binaria en X que denotaremos $\succ$ de manera que $x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y$, pero no $y \succeq x$.*

Definición 2.3 (Relación de indiferencia, $\sim$). *Sea X un conjunto de alternativas mutuamente excluyentes entre las que debe escoger un jugador. Llamamos relación de indiferencia a una relación binaria en X que denotaremos $\sim$ de manera que $x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y$, así como $y \succeq x$*

Para que una relación de preferencia entre distintas alternativas se diga racional debe contemplar cualquier posible comparación entre alternativas, y estas comparaciones han de ser transitivas.

Definición 2.4 (Relación de preferencia racional). *La relación de preferencia $\succeq$ definida en X se dice racional si verifica:*

1. *Completitud:* $\forall x, y \in X; x \succeq y$ *o bien* $y \succeq x$ *(o ambas)*

2. *Transitividad:* $\forall x, y, z \in X$ *tal que* $x \succeq y, y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$

2.1.2. Función de utilidad ordinal

Cuando las relaciones de preferencia de un jugador sobre los posibles resultados del juego sean racionales en el sentido anterior, podremos ordenarlas y asignar a cada resultado del juego un número real, de modo que resultados más deseados tengan asignado un número mayor que otros resultados menos deseados. Cualquier función que asigna a cada resultado o pago en el juego este número real respetando las preferencias del jugador la llamaremos función de utilidad del jugador sobre sus posibles resultados del juego o simplemente **utilidad**. Una función utilidad permitirá ordenar de manera natural pagos y resultados que en principio no tendrían porque ser fácilmente cuantificables o comparables.

Definición 2.5 (Utilidad). *Sea X el conjunto de pagos asociados a los distintos resultados del juego posibles para el jugador Ji, llamamos* ***utilidad*** *que representa la relación de preferencia $\succeq$ a una función $U_i : X \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in X; x \succeq y \Leftrightarrow U_i(x) \geq U_i(y)$*

La primera consideración que cabe resaltar es que una función utilidad se define no sólo para el conjunto de resultados de un juego sino también **para cada jugador** individualmente. En este sentido, la utilidad no refleja un posible valor objetivo y total inherente a cada resultado del juego sino que recoge el valor subjetivo con que cada jugador entiende estos resultados, de manera que pueden surgir situaciones donde jugadores distintos puedan tener preferencias distintas sobre un mismo conjunto de resultados. Será necesario construir una función utilidad para cada jugador.

Definición 2.6 (Utilidad ordinal). *Una función utilidad $U_i : X \to \mathbb{R}$ se dice ordinal si cumple:*

1. $x \sim y \Leftrightarrow U(x) = U(y)$
2. $x \succ y \Leftrightarrow U(x) > U(y)$

En general, pretendemos que una utilidad ordene las distintas preferencias de un jugador del modo más minucioso posible, y en adelante restringimos la discusión a utilidades ordinales aún sin especificar tal calificativo. Conceptos aún más avanzados de utilidad podrán permitirnos establecer cuan intensa es la preferencia de una opción frente a otras. Una función utilidad ordinal nos permite por tanto decir si un resultado del juego es o no más beneficioso que otro, pero no tendrían sentido afirmaciones del estilo "este resultado es tres veces más deseable que ese otro".

Evidentemente la utilidad ordinal no es única. Si U fuese una función utilidad de un jugador que refleja sus preferencias $\succeq$, cualquier V=f(U) será otra utilidad ordinal que refleje la relación $\succeq$ siempre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea estrictamente creciente.

Ejemplo (La merienda). Volvamos al juego en que un niño escoge entre $X = \{M, N, P\}$, donde cada letra representa merendar una manzana, una naranja o una pera. Se tenía que $M \succeq N \succeq P$. $U : X \to \mathbb{R}$ con U(M)=3, U(N)=2, U(P)=1 es una posible función utilidad, pero también $U^5, e^U, U+2$ son funciones utilidad compatibles con dicha relación de preferencia. Llamaremos **utilidad normalizada** a aquellas funciones utilidad que asignen utilidad 0 a la opción menos preferida y 1 a la mejor, como podría ser $(U-1)/2$ en este caso.

Habíamos dicho que las preferencias han de tener la calificación de racionales para poder construir estas funciones.

Proposición 2.1. *Es condición necesaria que la relación de preferencia $\succeq$ sea racional para que admita una función utilidad.*

Demostración. Sea U una función utilidad compatible con la relación de preferencia $\succeq$, ésta última ha de cumplir:

1. Completitud: $\forall x, y \in X; U(x), U(y) \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es un conjunto bien ordenado, se cumple que $U(x) \geqslant U(y)$ o bien que $U(y) \geqslant U(x)$. Por definición de utilidad, esto implica respectivamente que $x \succeq y$ o bien que $y \succeq x$.

2. Transitividad: Sean $x, y, z \in X$. Supongamos que $x \succeq y, y \succeq z$, y veamos que $x \succeq z$:

$$x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geqslant U(y)$$

$$y \succeq z \Leftrightarrow U(y) \geqslant U(z)$$

   Como $\mathbb{R}$ es un conjunto bien ordenado, en particular su relación de orden es transitiva y por tanto $U(x) \geqslant U(z) \Rightarrow x \succeq z$.

$\square$

En general el recíproco no es cierto, es decir, no toda relación de preferencia racional admite una función utilidad.

Ejemplo (Relación de preferencia lexicográfica). Sea $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$ podemos definir en X la relación de preferencia lexicográfica:

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \text{ " } x_1 > y_1 \text{ " o bien " } x_1 = y_1 \text{ y } x_2 \geqslant y_2 \text{ "}$$

El nombre de esta relación de preferencia se deriva de la manera de ordenar las palabras en un diccionario. Esta relación es racional (es completa ya que cualesquiera dos combinaciones de letras son comparables y transitiva porque bajo esta relación cualquier conjunto de combinaciones de letras conforma un conjunto bien ordenado) y sin embargo no admite una función utilidad (ver [3]).

Cuando las preferencias se tomen sobre un conjunto finito, la condición de racionalidad será, además de necesaria, suficiente.

Teorema 2.1 (Teorema de existencia y unicidad de la utilidad ordinal)**.** *Sea X finito y sean las preferencias $\succeq$ sobre X racionales -completas y transitivas- entonces existe una* *función utilidad* $U : X \to \mathbb{R}$ *compatible con tales preferencias* ($U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow x \succeq y$)*. Cualquier otra función utilidad V compatible con* $\succeq$ *es función estrictamente creciente de U* ($V = f(U)$ *con* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *estrictamente creciente).*

Demostración.

1. Supongamos en este primer paso que no hay relación de indiferencia entre ningún par de elementos de X. Entre cualesquiera de los N elementos de X existe una relación de preferencia estricta hacia alguno de ellos que permite el orden

   $$X = \{x_1, ..., x_N\}$$

   de modo que cumplan

   $$x_N \succ ... \succ x_1$$

   Definimos una función utilidad $U(x_i) = i, \forall i \in \{1, ..., N\}$ compatible con la preferencia $\succeq$:

   $$x_i \succ x_j \Leftrightarrow i > j \Leftrightarrow U(x_i) > U(x_j)$$

   Si V fuese otra función utilidad compatible con la relación de preferencia, cumpliría

   $$\forall x_i \neq x_j : x_i \succeq x_j \Rightarrow x_i \succ x_j \Leftrightarrow V(x_i) > V(x_j)$$

   Así,

   $$V(x_i) > V(x_j) \Leftrightarrow i > j$$

   y podemos definir

   $$V(x) = f(U(x)) \ \forall x \in X$$

   donde $f : \{1, ..., N\} \to \mathbb{R}$, siendo $f(i) = V(x_i)$ estrictamente creciente ya que

   $$i > j \Rightarrow f(i) = V(x_i) > f(j) = V(x_j) \ \forall i, j \in \{1, ..., N\} \text{ con } i \neq j$$

2. En el caso general (donde sí pueden aparecer relaciones de indiferencia entre los elementos de X) tomamos un representante para cada clase de elementos indiferentes

entre sí:

$$x_1, ..., x_k \in X \text{ con } x_k \succ ... \succ x_1 \text{ t.q. } \forall x \in X, \exists i \in \{1, ..., k\} \text{ con } x \sim x_i$$

Definimos $U(x) = U(x_i) = i$ una función utilidad compatible con la preferencia $\succeq$.

$$\forall x, y \in X \text{ con } x \succeq y \Rightarrow x \succ y, \text{ o bien } x \sim y \Rightarrow x \sim x_i \succeq y \sim x_j$$

por lo que

$$U(x) = i \geq U(y) = j$$

Sea V cualquier otra función utilidad compatible con $\succeq$ se cumple que

$$V(x) = V(x_i) \geq V(y) = V(x_j)$$

ya que $V(x) = V(y)$ si $x \sim y$ y $V(x) > V(y)$ si $x \succ y$.

Sea $x \in X$ con $x \sim x_i$ podremos expresar $V(x) = V(x_i) = f(U(x_i)) = f(i)$ donde $f : \{1, ..., k\} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente ya que

$$i > j \Rightarrow x_i \succ x_j \Rightarrow V(x_i) > V(x_j) \Rightarrow f(i) > f(j)$$

□

Otra de las situaciones en que podemos asegurar la existencia de una función utilidad ordinal es para el caso de un tipo de conjuntos particular que llamaremos conjunto de bienes de consumo para un número finito de bienes o simplemente **conjunto de bienes de consumo**, y siempre que la relación de preferencia particular que pretende reflejar dicha función utilidad sea racional y además **continua**.

Definición 2.7 (Conjunto de bienes de consumo). *Llamamos conjunto de bienes de consumo a cualquier conjunto* $X = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\} \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$

Es evidente que los conjuntos de consumo no son necesariamente conjuntos finitos.

Usualmente representan cantidades de n bienes distintos disponibles en un estudio económico del mercado, una de las grandes áreas de aplicación de la teoría de juegos.

Definición 2.8 (Continuidad de $\succeq$)**.** *Decimos que $\succeq$ es continua si se mantiene en el paso al límite. Esto se cumple si:*

$$\forall\{(x^n, y^n) : x^n \succeq y^n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x^n \succeq y = \lim_{n\to\infty} y^n$$

Teorema 2.2. *Sea* $X = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \; \forall i \in \{1, ..., n\} \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ *un conjunto de bienes de consumo y sea $\succeq$ una relación de preferencia racional y continua de un agente sobre X; existe una función utilidad ordinal continua $U(x_1, ..., x_n)$ que representa $\succeq$* [1]*.*

2.2. Utilidad de Von Neumann-Morgenstern

La función utilidad ordinal es una herramienta fundamental en el análisis de muchos juegos al ordenar inequívocamente las preferencias entre distintos pares de resultados, pero esta información será insuficiente cuando nos encontremos en contextos de riesgo. El problema radica en que las utilidades ordinales ayudan a determinar las posibles elecciones de un jugador entre una serie de alternativas u opciones puras -ciertas y seguras- pero no son muy útiles para orientar acerca de loterías o distribuciones de probabilidad sobre estas alternativas puras.

Ejemplo (La merienda). Volvamos al juego en que un niño escoge entre $X = \{M, N, P\}$, donde cada letra representa merendar una manzana, una naranja o una pera. El niño dice que prefiere claramente la manzana a las otras dos frutas, y que claramente la que menos desea es la pera.

La estructura del juego le permite decidir entre merendar con seguridad una naranja o jugar a pares o nones. Si decide jugar y gana, merendará la manzana, pero si pierde tendrá que merendar la pera.

Aún asumiendo que tiene las mismas probabilidades de ganar o perder jugando a pares

[1] Todos los teoremas que en el presente texto se enuncien sin demostración pueden encontrarse demostrados en [3].

o nones, la función utilidad ordinal que le habíamos asignado es claramente insuficiente para resolver este caso: aunque esta utilidad ordena sus opciones, nada nos dice acerca de cuanto más desea una manzana frente a las otras dos frutas, si disfruta con las tres, si detesta tanto la naranja como la pera o, por el contrario, si estaría conforme con una manzana o una naranja, pero no le gustan para nada las peras. Estas son consideraciones a las que la utilidad ordinal no da respuesta, pero que, evidentemente, marcarán el razonamiento que subyace en su decisión.

La más sencilla de las funciones utilidad que sí dan lugar a una respuesta en este tipo de casos es la llamada **utilidad de Von Neumann-Morgenstern**. Aunque se puede extender su definición a un caso infinito más general, en el presente texto vamos a aplicarla, por motivos de simplicidad, sobre $X = \{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto finito de alternativas en un contexto de riesgo.

2.2.1. Loterías

Los contextos de riesgo hacen referencia a aquellas situaciones donde las distintas acciones de un juego no dan lugar a resultados *puros* - ciertos y seguros - sino a distintas distribuciones de probabilidad asociadas a estos resultados puros, y se introducen en nuestro formalismo matemático tramite el concepto de **loterías**.

Definición 2.9 (Lotería simple). *Una lotería simple en $X = \{x_1, ..., x_n\}$, un conjunto finito, es una distribución de probabilidad en X. L es una lotería simple de X si*

$$L = \{(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

donde p_i representa la probabilidad de que ocurra el resultado x_i.

Es evidente que podemos asociar opciones puras a loterías degeneradas en una sola alternativa, de modo que en adelante tendrá sentido hablar del concepto de loterías aún en situaciones del juego con resultados ciertos y seguros.

Definición 2.10 (Valor esperado). *Sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de valores numé-*

ricos, llamamos valor esperado de una lotería $L = (p_1, ..., p_n)$ *al valor numérico*

$$E(L) = x_1p_1 + ... + x_np_n$$

El valor esperado será un concepto clave a la hora de encontrar soluciones óptimas y alguno de los métodos más sencillos para analizar las mejores acciones proceden sin más que intentar maximizar dicho valor esperado.

Ejemplo (La merienda). Volvamos al juego en que un niño escoge entre $X = \{M, N, P\}$, donde cada letra representa merendar una manzana, una naranja o una pera. La estructura del juego le lleva al punto donde puede decidir entre merendar con seguridad una naranja o jugar a pares o nones. Si decide jugar y gana, merendará la manzana, pero si pierde tendrá que merendar la pera. Asumiendo que tiene la misma probabilidad de ganar y perder si juega a pares o nones, la lotería degenerada $L_1 = (0, 1, 0)$ representa el resultado puro dado por la situación en que escoge directamente la naranja mientras que $L_2 = (1/2, 0, 1/2)$ refleja la situación en que decide probar suerte. Sin embargo, aún no sabemos que pesos -valor numérico asociado a cada resultado- son adecuados para describir X y por tanto no podremos asociar aún el valor esperado del juego para cada una de sus dos opciones.

Los valores de una función utilidad ordinal, que se limitan a ordenar opciones, no servirán para obtener un valor esperado satisfactorio. Como ya hemos adelantado, la utilidad de Von Neumann-Morgenstern será la más sencilla que responda a esta necesidad pero, antes de hacerla aparecer, tendremos que matizar el concepto de preferencia $\succeq$ cuando se da sobre un conjunto de loterías.

Además es claro que en multitud de juegos -especialmente en juegos iterados- las acciones no se toman únicamente sobre opciones o resultados puros ni tan siquiera sobre loterías asociadas a resultados puros, sino también sobre loterías asociadas a otras loterías más sencillas. Esta forma más general de loterías sobre otras loterías serán llamadas loterías compuestas.

Definición 2.11 (Lotería compuesta). *Dadas* m *loterías simples* $L_j = (p_1^j, ..., p_n^j)$ *en* $X = \{x_1, ..., x_n\}$ *un conjunto finito con* $j \in \{1, ..., m\}$ *y dada una distribución de probabilidad* $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$(con $\lambda_i \geq 0\ \forall i \in \{1, ..., m\}$ y con $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$). *Llamamos lotería* *compuesta a* $(L_1, ..., L_m; \lambda_1, ..., \lambda_m)$ *donde* λ_i *representa la probabilidad de obtener la lotería simple* L_i *y* p_i^j *representa la probabilidad de obtener el suceso* $x_i \in X$ *de acuerdo con la distribución de probabilidad dada por la lotería simple* L_j.

De aquí en adelante hablaremos únicamente de loterías simples, ya que para cualquier lotería compuesta existe una lotería simple que genera la misma distribución de probabilidad sobre los resultados de X.

Proposición 2.2. *Toda lotería compuesta* $(L_1, ..., L_m; \lambda_1, ..., \lambda_m)$ *sobre* X *se corresponde con una lotería simple* $L = (p_1, ..., p_n)$ *sobre* X *en el sentido que ambas generan la misma distribución de probabilidad sobre los resultados que constituyen* X.

Demostración. Definimos

$$p_i = \lambda_1 p_i^1 + ... + \lambda_m p_i^m \; \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Entendiendo que el jugador se interesa únicamente por la distribución última de probabilidades sobre X, de manera que dos loterías (simples o compuestas) distintas se toman como idénticas siempre que generen la misma distribución de probabilidad sobre los resultados que conforman X, podemos obtener la siguiente lotería simple equivalente:

$$L = (p_1, ..., p_n) = \lambda_1 L_1 + ... + \lambda_m L_m \equiv (L_1, ..., L_m; \lambda_1, ..., \lambda_m)$$

Es inmediato comprobar que efectivamente es una lotería simple que genera la misma distribución de probabilidad sobre los resultados de X que la lotería compuesta. □

Ejemplo (La merienda). Volviendo al juego anterior, recordamos que la lotería $L_1 = (0, 1, 0)$ representa la situación en que escoge directamente la naranja, mientras que $L_2 = (1/2, 0, 1/2)$ refleja la situación en que decide probar suerte.

Una vez a la semana, el niño asegura la naranja. El resto de días arriesga su elección decidiendo jugar.

El juego viene descrito por la lotería compuesta $(L_1, L_2; \lambda_1, \lambda_2) = ((0, 1, 0), (1/2, 0, 1/2); 1/7, 6/7)$ que se traduce de manera natural en la lotería simple $L = L_1\lambda_1 + L_2\lambda_2 = 1/7(0, 1, 0) + 6/7(1/2, 0, 1/2) = (3/7, 1/7, 3/7)$ donde queda reflejado perfectamente que un día a la semana -1/7- merendará naranja y que de media los otros seis días -6/7 repartirá su merienda a partes iguales -3/7 entre peras y manzanas.

2.2.2. Relación de preferencia sobre un conjunto de loterías

Tomando en consideración $X = \{x_1, ..., x_n\}$ llamamos

$$L_X = \{(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

al conjunto de las loterías simples sobre X. En este sentido, describimos la relación de preferencia $\succeq$ sobre L_X de manera idéntica a como considerábamos las preferencias $\succeq$ sobre X en la sección anterior, y extendemos de manera natural la notación de racional -completa y transitiva- para cualquier relación de preferencia $\succeq$ sobre L_X. Tenemos sin embargo que matizar la condición de continuidad en este nuevo caso.

Definición 2.12 (Continuidad). *$\succeq$ sobre L_X se dice continua si $\forall L, L', L'' \in L_X$; tanto $\{\lambda \in [0,1] : (L, L'; \lambda, 1-\lambda) \succeq L''\}$ como $\{\lambda \in [0,1] : L'' \succeq (L, L'; \lambda, 1-\lambda)\}$ son conjuntos cerrados.*

En este sentido la continuidad de $\succeq$ sobre L_X viene a asegurar que pequeños cambios en la distribución de probabilidades que recogen dos loterías simples no produce cambios en el orden de preferencia entre las dos loterías.

Definición 2.13 (Axioma de independencia). *$\succeq$ sobre L_X verifica el axioma de independencia si $\forall L, L', L'' \in L_X; \forall \lambda \in (0,1)$ se tiene que :*

$$L \succeq L' \Leftrightarrow (L, L''; \lambda, 1-\lambda) \succeq (L', L''; \lambda, 1-\lambda)$$

El axioma de independencia nos permite asegurar que, cuando se verifica, los jugadores son indiferentes al riesgo: no les importa escoger opciones puras o loterías para alcanzar sus deseos más allá de razonar en base a las leyes probabilísticas pertinentes.

2.2.3. Utilidad de Von Neumann-Morgenstern

Definición 2.14 (Utilidad de Von Neumann-Morgenstern). *Se dice que una función utilidad $U : L_X \to \mathbb{R}$ es una función utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, o simplemente utilidad VNM, si existen n números $u_1, ..., u_n$ asociados a los resultados $x_1, ..., x_n$ que conforman X tales que, para cualquier lotería $L = (p_1, ..., p_n) \in L_X$, se cumple*

$$U(L) = u_1 p_1 + ... + u_n p_n$$

Cuando encontremos una utilidad VNM, podremos comparar la utilidad de distintos resultados asociados a contextos de riesgo o incertidumbre. En este sentido supone una superación del concepto de utilidad ordinal.

A continuación presentamos sin demostración dos resultados importantes acerca de estas funciones VNM. El primero de ellos nos da una condición necesaria y suficiente para identificar si cualquier función de L_X en $\mathbb{R}$ es una utilidad VNM. El segundo nos asegura su unicidad salvo transformación afín positiva.

Proposición 2.3 (Caracterización de una utilidad VNM). *Una función utilidad $U : L_X \to \mathbb{R}$ es VNM si y solo si $\forall L_1, ..., L_k \in L_X, \forall \lambda_1, ..., \lambda_k \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ se cumple*

$$U(\sum_{i=1}^k \lambda_i L_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i U(L_i)$$

Proposición 2.4 (Unicidad de la utilidad VNM). *$U, V : L_X \to \mathbb{R}$ son dos utilidades VNM correspondientes a la relación de preferencia $\succeq$ sobre L_X si y sólo si*

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a > 0 : V(L) = aU(L) + b, \forall L \in L_X$$

Nota 1 (Notación sobre resultados puros). Si revisamos la definición de utilidad VNM comprobaremos que estamos asociando unos números números $u_1, ..., u_n$ asociados a los resultados $x_1, ..., x_n$ que conforman X, y poder determinar estos números será clave para definir una utilidad VNM. Su significado es análogo al del pago asociado a cada resultado puro del juego y, cuando estos pagos son cantidades monetarias, es usual tomar directamente esos valores. También se pueden entender como el valor esperado de una función utilidad VNM, U, para una lotería degenerada L^i -donde L^i consiste en obtener la opción x_i con seguridad-. Así

$$u_i = U(L^i) \forall i \in \{1, ..., n\} \text{ con } L^i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in L_X$$

De esta manera podemos definir la función

$$u : X \to \mathbb{R} \text{ con } u(x_i) = u_i = U(L^i)$$

y así, toda utilidad VNM U cumple que

$$\forall L = (p_1, ..., p_n) \in L_X; \; U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$$

lo que simplificará nuestra notación.

Será interesante conocer bajo qué condiciones podemos asegurarnos encontrar una utilidad VNM.

Teorema 2.3 (Teorema de la utilidad esperada)**.** *Sea $\succeq$ una relación de preferencia sobre L_X racional, continua y que verifica el axioma de independencia, entonces admite una función utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.*

Es decir, existen los valores reales $u_1, ..., u_n$ tales que:

$$\forall L, L' \in L_X, L = (p_1, ..., p_n) \succeq L' = (p'_1, ..., p'_n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \succeq \sum_{i=1}^{n} p'_i u(x_i)$$

2.3. Comentarios generales sobre las funciones utilidad

En general, podemos seguir buscando funciones utilidad aún más refinadas que permitan más formas de comparación entre distintos resultados, y decimos que determinan distintas escalas. La **escala ordinal** es la que define la utilidad ordinal y, de acuerdo con ella, hemos visto que tienen sentido frases del tipo "A es más valorado que B" pero no otras afirmaciones del tipo "A es el doble de valioso que B". Decimos que la utilidad ordinal es insuficiente para trabajar con ciertas situaciones puesto que restringirnos exclusivamente a ordenar resultados del juego genera una serie de inconvenientes cuando nos encontramos en contextos de riesgo. Una utilidad VNM es resolutiva en estos contextos porque determina una **escala cardinal-intervalo** que además de las afirmaciones que permite cualquier escala ordinal también dota de sentido frases como "la diferencia de temperatura entre A y B es el doble que entre C y D". Aún no podemos afirmar que "la temperatura de A es el doble que la temperatura de B" debido a que su unicidad no es estricta, sino que se tiene salvo transformación afín. Es claro que aún no dota de un sentido unívoco a los distintos pesos numéricos $u_1, ..., u_n$ (puesto que podemos determinar otros $v_1 = au_1 + b, ..., v_n = au_n + b$ que definen una utilidad VNM válida para la misma relación de preferencia $\succeq$).

La teoría de utilidad desarrolla también funciones más refinadas. Las que sí permiten otorgar a cada resultado un valor o peso sin especificar la unidad de medida dotan de sentido a frases como "A pesa el doble de B", aunque aún no a otras como "A pesa tres unidades más que B". En este caso estaremos hablando de una **escala cardinal-ratio**, que incorpora las características de las dos escalas anteriores y las amplía.

La escala más general será la **escala cardinal absoluta**. Funciona como una escala cardinal-ratio en la que sí se especifica la unidad de medida concreta, de manera que cualquiera de las frases anteriores -incluida "A pesa tres unidades más que B"- tiene sentido.

Es habitual que los pagos de un juego consistan en distintas cantidades de dinero, y cuando todas estas cantidades sean medidas bajo una misma moneda (no sirve si unas cantidades las medimos en euros y otras en dólares) es natural tomar estos valores como valor numérico de las utilidades de cada resultado puro del juego, porque constituirán utilidades que funcionan en escala cardinal absoluta. Cabe recordar que el sentido de definir funciones utilidad radica precisamente en aquellas situaciones donde no sea obvio cuantificar el valor de los distintos resultados, o no sea obvio el grado de satisfacción que estos efectivamente produzcan en cada jugador. Para encontrar una función utilidad satisfactoria, que determine una escala cardinal absoluta, tendremos que exigir que las preferencias del jugador sobre los distintos resultados sean suficientemente consistentes.

Nota 2 (Condiciones de consistencia para una utilidad de escala cardinal-absoluta).

1. Todos los resultados son comparables: La comparación entre dos resultados debe dar lugar bien a una preferencia estricta $\succ$ de uno de ellos frente al otro, bien a una indiferencia $\sim$.

2. Las preferencias e indiferencias han de ser transitivas.

3. La sustitución en una lotería de cualquier resultado por otro que un jugador considera indiferente le resulta indiferente.

4. El jugador se arriesga siempre que las oportunidades que se ofrezcan sean suficientemente buenas: Sean los tres resultados del juego $X = \{A, B, C\}$ cumpliendo $A \succ B \succ C$ y sea una lotería $L(p) = (p, 0, 1-p)$ que asigna probabilidad p al resultado A y probabilidad $1-p$ al resultado C, es claro que cuando $p = 1 (p = 0)$ entonces $L(1) = L^A \succeq L^B (L^B \succ L(0) = L^C)$. Esta condición exige que exista un valor $k \in (0, 1)$ tal que $L(k) \sim L^B$ de manera que $L(p) \succ L^B$ cuando $p > k$ y $L^B \succ L(p)$ cuando $k > p$.

5. Cuanto mayor sea la probabilidad de conseguir el resultado más preferido, más deseada será la lotería.

6. Los jugadores son indiferentes al riesgo: la actitud del jugador al escoger entre dos loterías viene determinado exclusivamente por los resultados finales posibles y las probabilidades de obtenerlos de acuerdo con las leyes matemáticas oportunas, independientemente del mecanismo por el que se puedan obtener dichos resultados.

Cuando queremos construir una función utilidad de escala cardinal absoluta para una jugador que puede obtener un conjunto finito de resultados $X = \{x_1, ..., x_n\}$ que no son trivialmente cuantificables podemos proceder preguntando directamente al jugador por sus preferencias. En el supuesto de que estas preferencias sean consistentes, se le pide escoger entre los distintos resultados para primero ordenarlos. Se continúa presentándole elecciones entre distintas loterías sobre esos resultados hasta que podamos determinar los valores $u_1, ..., u_n$ que reflejen estas preferencias en escala ordinal absoluta.

No podremos adoptar esta postura cuando el conjunto de resultados posibles no sea finito,no serán sencillos de tratar bajo la óptica de la Teoría de Juegos. Sí cabe tratar juegos con un conjunto infinito de resultados posibles cuando su cuantificación sea más directa (como es el caso de situaciones económicas en que los pagos consistan en cantidades de dinero).

Otro de los problemas que enfrenta la teoría de la utilidad es el de conseguir hacerse cargo de las preferencias que verdaderamente se deducen de las acciones de los jugadores, ya que en multitud de ocasiones estas no serán consistentes. Cuando nos topamos con preferencias verdaderamente intransitivas (como elegir una pera antes que una manzana, una manzana antes que un plátano y un plátano antes que una pera) no encontraremos solución. Afortunadamente, estas situaciones son poco habituales. Sí son comunes intransitividades sutiles en situaciones donde las distintas alternativas parecen tener un valor similar pero el jugador escoge unas y no otras de manera caprichosa.

Por ejemplo el jugador promedio actuará en sus jugadas atendiendo a factores de aparente irrelevancia: es usual que la cantidad de apuestas en una mesa de póker sea mayor cuanto más cálido, distendido y acogedor sea el ambiente para los jugadores.

Las preferencias de cada individuo, además, no son estáticas a lo largo del tiempo: un mismo deportista seguramente no valore igual un vaso de agua al despertarse por la mañana en su casa, que cuando lleva varias horas corriendo por el monte con su botellín vacío.

Que el contexto del juego afecte a nuestras decisiones también es muy común: al comprar un nuevo coche de 20000 euros, valoramos si encargarlo con radio incorporada por el precio de 500 euros -una cantidad desorbitada para un dispositivo de radio común-.

Otro caso de intransitividad sutil surge cuando el jugador permanece indiferente frente a pequeñas perturbaciones en los posibles resultados de un juego: una pareja que busca vivienda puede posponer adquirirla en un primer momento por una cantidad de 140.023 euros mientras valora la compra, para decidirse a comprarla al momento siguiente, aún cuando las casa ha pasado a valorarse en 141.037 euros.

Evidentemente, todas estas situaciones describen inconsistencias o incoherencias que, sin embargo, actúan de manera muy real en nuestra toma de decisiones y de las que la

Teoría de Juegos ha de hacerse cargo al modelizar cada situación.

Capítulo 3

Juegos estáticos de información completa para estrategias puras

En el capítulo anterior desplazamos el concepto de pago, menos operativo, por la idea matemática de utilidad, de manera que, al traducir resultados del juego en números reales, pudiésemos acometer análisis más sofisticados de cada juego. Ahora se antoja necesario formalizar otros aspectos de un juego para poder implementar estos análisis. Resultará muy conveniente restringirnos a uno de los tipos de juego más sencillos: los juegos estáticos de información completa para estrategias puras. En la primera sección del presente capítulo se dará una explicación detallada de las características de estos juegos, y en una segunda sección describiremos la forma estratégica o normal de representar un juego que habitualmente se emplea para describirlos cuando se emplean exclusivamente estrategias puras.

Cuando, en el siguiente capítulo, hagamos aparecer las primeras nociones de solución, será en el contexto de estos juegos estáticos de información completa. La mayor parte de los conceptos que trataremos se traducen sin gran dificultad a otros juegos que pudiesen ser dinámicos, o en los que se pueden llegar a emplear estrategias mixtas.

3.1. Juegos estáticos de información completa

En multitud de juegos los jugadores van obteniendo información acerca de las acciones que realizan sus rivales conforme se desarrolla el juego. Cuando en una partida de póker un jugador decide apostar una cantidad de dinero moderada, en vez de pasar o apostar una cantidad mucho mayor, sus rivales obtienen esta información y deberán responder adecuadamente. Lejos de ser ésta una dinámica general de cualquier juego, también encontramos muchos otros, como pares o nones, donde los jugadores pueden decidir cuáles serán sus acciones sin conocimiento alguno de lo que pretenden hacer o pudiesen ya haber hecho sus rivales.

Definición 3.1 (Juego estático). *Juego donde cada jugador escoge sus acciones sin conocer las de los demás jugadores.*

Fijándonos en la información que los jugadores conocen, podemos definir otras categorías de juego. Atendiendo a la información de que disponen los jugadores acerca de las acciones que se han tomado anteriormente diferenciábamos el conjunto de juegos dinámicos -juegos que no son estáticos y por tanto en los que algún jugador conocerá información acerca de alguna acción que algún rival pueda haber tomado- en **juegos de información perfecta** -cada jugador conoce todas las acciones tomadas previamente, como pasa en el ajedrez- y **juegos de información imperfecta** -donde algún jugador desconoce al menos alguna de las acciones que algún otro jugador ha tomado previamente, como ocurre en el caso del póker-. Sin embargo, hay un tipo de información más general aún que aplica a todo juego (y en particular a los juegos estáticos que vamos a tratar) sobre la que cabe reflexionar: la información acerca de la estructura del juego.

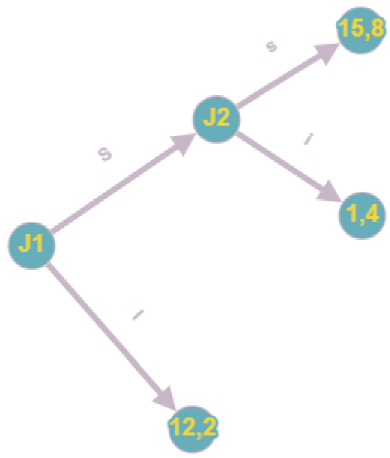
Definición 3.2 (Información de dominio público). *Decimos que en un juego de $J = \{J_i\}_{i=1}^n$ jugadores una información I es de conocimiento común o dominio público si:*

- *Todo jugador $J_i \in J$ conoce I*
- *Todo jugador $J_i \in J$ sabe que cualquier jugador $J_j \in J$ conoce I*
- *Todo jugador $J_i \in J$ sabe que cualquier jugador $J_j \in J$ sabe que todos conocen I*

Y así, sucesivamente.

Una definición tan matizada es, sin embargo, necesaria para enfatizar la diferencia entre situaciones donde todos los jugadores conocen una información frente a aquellas donde esa información es de dominio público.

Ejemplo (Cuando se sabe que el otro sabe). Supongamos un juego de dos jugadores $J = \{J_1, J_2\}$ que pueden obtener una u otra suma de dinero de acuerdo a la siguiente estructura:



Para un observador externo es evidente que el perfil de estrategias (S, s) configura el resultado del juego más deseado para ambos jugadores, obteniendo cada uno 15 y 8 euros. Mientras la estructura del juego sea de dominio público es razonable suponer que efectivamente este será el resultado final: Evidentemente J_2 siempre escogerá s frente a i, puesto que en caso de que J_1 escoja S obtiene una suma mayor, mientras que su acción no condiciona el resultado del juego siempre que J_1 elija I. Como J_1 se lleva la mayor cantidad posible con el resultado (S, s), escogerá precisamente S, razonando de la misma manera acerca de la probable respuesta de J_2.

Que la información acerca de la estructura del juego sea de dominio público es, sin embargo, crucial para realizar este análisis. Si en su lugar especificamos únicamente que los dos jugadores conocen la estructura del juego, sería perfectamente razonable que J_1 se decida por I y se asegure tener 12 euros. ¿La diferencia? En ambas situaciones los dos jugadores conocen la estructura del juego, pero en este segundo supuesto J_1 no sabe que

J_2 conoce tal estructura, con lo que no puede inferir su respuesta s. Ante el peligro de que el resultado del juego quede determinado por el perfil de estrategias (S, i) -obteniendo solamente 1 euro-, el argumento que sí era válido en el caso anterior ha dejado de tener sentido.

Definición 3.3 (Juego de información completa). *Cuando es de dominio público la información acerca de la estructura de un juego, decimos que este es un juego de información completa, entendiendo por estructura del juego:*

- *El total de jugadores.*
- *Las acciones de que dispone cada jugador en cada posible momento de decisión y, por tanto, el total de estrategias posibles.*
- *Las utilidades que asocia cada jugador a cada resultado del juego, así como los perfiles de estrategias que implican dichos resultados.*

En la vida real nos encontraremos situaciones que efectivamente podrán ser entendidas como juegos que no serán de información completa. En particular, cuando no conozcamos el número de jugadores (la policía investigando un comando terrorista de un número indeterminado de personas), no conozcamos la totalidad de acciones que algún jugador tiene disponibles (un ejército que no sabe de qué armas dispone el enemigo), o no sepamos qué utilidad le asigna cada jugador a los posibles resultados del juego (un rival de póker que verdaderamente busca estrechar lazos personales con nosotros antes que ganarnos la partida), estaremos ante juegos que no son de información completa. Modelizar juegos de este tipo supone un reto avanzado, que va más allá de esta aproximación a la Teoría de Juegos, porque exige diferenciar entre los conocimientos ciertos que tiene cada jugador y sus creencias infundadas, dejar abierta la opción de que existan informaciones desconocidas por alguno de los jugadores y, resumidamente, dan a entender que cada jugador razonará en base a su conjunto de creencias sobre la estructura del juego, y no en base a un conocimiento común al resto de jugadores sobre la estructura real del mismo. Aunque todas estas cuestiones llegan a resolverse con modelos más sofisticados de juego, para iniciarnos en la compresión del concepto de solución será más conveniente trabajar exclusivamente sobre situaciones donde la información acerca de la estructura del juego sea homogénea entre el total de jugadores -de dominio público-, de manera que todos ellos razonen en igualdad de condiciones sobre los mismos conocimientos. En adelante se entenderá por tanto que todo juego presentado en este trabajo será de información completa.

3.2. Forma estratégica o normal (para estrategias puras)

Hemos dicho que cualquier juego admite una representación en forma estratégica o en forma extensiva. Cuando queramos describir un juego estático será usual decantarnos por la primera, más compacta, ya que la estructura de estos juegos no incluye noción alguna de secuencialidad en las distintas acciones de los jugadores, que sólo podría recogerse con una descripción en forma extensiva.

Definición 3.4 (Forma estratégica o normal). *Un juego G en forma estratégica o normal (para estrategias puras) viene especificado por los siguientes elementos:*

$$G = \{J; (S_i)_{i\in\{1,...,n\}}; (u_i)_{i\in\{1,...,n\}}\}$$

con

- $J = \{J_1, ..., J_n\} \equiv$ *conjunto de jugadores.*
- $S_i \equiv$ *conjuntos de estrategias puras del jugador J_i.*
- $u_i \equiv$ *utilidades, son funciones que asocian a cada perfil de estrategias -y por tanto a cada resultado del juego- la utilidad del jugador J_i.*

Como vemos la expresión de un juego en forma normal recoge, de manera explícita, el conjunto de jugadores, el conjunto de estrategias disponibles para cada uno y las utilidades con que cada jugador entiende los posibles resultados del juego. Es interesante mencionar que cualquier juego estático queda perfectamente explicado trámite estas tres categorías, ya que contienen, de manera implícita, información acerca de toda otra serie de elementos básicos de un juego:

- Acciones: Una estrategia pura es el plan completo que deja especificada toda acción que tomará un jugador en caso de llegar a cada uno de sus posibles momentos de decisión y, por tanto, conocer las distintas estrategias de que dispone cada jugador implica conocer todas sus posibles acciones.

- Resultados del juego: Podemos identificarlos directamente con las utilidades de jugador.

- Perfiles de estrategias puras: Son todas las posibles combinaciones de estrategias puras que pueden ejecutarse en el juego, una por cada jugador, de manera que determinan un desarrollo del juego y su correspondiente resultado. Este será un concepto clave, precisamente, porque relaciona las estrategias que puede ejecutar cada jugador con las utilidades que pueden resultar de que implemente dichas estrategias.

Definición 3.5 (Estrategia pura)**.** *En un juego de n jugadores, una estrategia pura para un jugador J_i, con $i \in \{1, ..., n\}$ es una función*

$$\begin{aligned} s_i :& H_i \to A_i(h) \\ & h \rightsquigarrow s_i(h) = a_{ji} \end{aligned}$$

que va de la familia de conjuntos de información (ver nota siguiente) que pertenecen a J_i en el conjunto de acciones disponibles para ese jugador. $h \in H_i$ es uno de los conjuntos de información en que puede encontrarse J_i y $a_{ji} \in A_i(h)$ es su acción j-ésima, perteneciente al conjunto de acciones disponibles para ese jugador en dicho conjunto de información. Denotamos por S_i el conjunto de las estrategias puras, s_i, que puede plantearse adoptar J_i.

Nota 3. Un conjunto de información de un jugador es el conjunto de nodos de decisión en los que sabe que puede encontrarse, pero no sabe en que nodo particular del conjunto de información está. En los juegos estáticos cada jugador decide una sola vez que acción tomar, con lo que a cada jugador sólo dispone de un nodo de decisión, es decir, $H_i = \{h\}$ sólo tiene un elemento h, y podemos entender que una estrategia pura se corresponde con la acción particular que el jugador escoge jugar en su partida [1].

[1]En este contexto de los juegos estáticos, podemos evitar un estudio en profundidad de los conjuntos

Definición 3.6 (Perfil de estrategias puras)**.** *Fijada una estrategia pura $s_i \in S_i$ para cada jugador $J_i \in J$, se determina un desarrollo completo del juego. Se denomina perfil de estrategias puras a cualquier n-pla $s = (s_1, ..., s_n) \in S_1 \times ... \times S_n$, de modo que lleva aparejado un resultado del juego.*

Para cada perfil de estrategias puras, s, denotamos $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n) \in S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n = S_{-i}$ a la (n-1)-pla resultante de considerar las estrategias jugadas por todos los jugadores salvo J_i.

En general, entenderemos que $s \equiv (s_i, s_{-i})$.

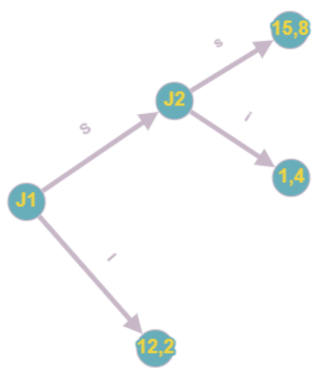
Nota 4 (Escala de utilidades)*.* Mientras nos limitemos a estudiar juegos donde los jugadores adoptan estrategias puras, será suficiente con exigir a nuestras funciones utilidad que determinen una escala ordinal. Cada estrategia pura consiste en asignarle inequívocamente a cada jugador una acción en cada uno de sus nodos de decisión y, así, cada perfil de estrategias que surge de la combinación de distintas estrategias puras implica un resultado del juego determinado. En estos casos, basta poder ordenar la preferencia de cada jugador, acerca de uno u otro resultado del juego, para argumentar cuál será su respuesta óptima. Cuando tratemos juegos con componente de azar, y, en general, en toda situación que resulte en resultados del juego caracterizados por una distribución de probabilidad no degenerada en uno de ellos, una función utilidad que defina una escala ordinal se tornará insuficiente. En este tipo de casos tendremos que valernos de utilidades que sean al menos VNM.

3.3. Distintas representaciones en forma estratégica

La convención habitual para representar juegos estáticos bipersonales finitos es dar una expresión matricial, indicando por filas o columnas las estrategias de uno u otro jugador. La intersección de una fila con una columna marca de esta manera un perfil de estrategias al que podemos asociar un resultado del juego, y en dicho elemento de matriz se expresan las utilidades asociadas a este resultado del juego.

de información sin mayor perjuicio en la comprensión del juego. Sí será clave precisar adecuadamente este concepto cuando se pretenda modelizar cualquier juego dinámico.

Ejemplo 3.1 (Cuando se sabe que el otro sabe). Recordando la expresión en forma de árbol del juego anterior, podría parecer que este juego es de tipo dinámico. Basta suponer que a J_2 se le exige definir su estrategia simultáneamente a J_1 para entender que es un juego donde cada jugador puede perfectamente escoger sus acciones sin conocer las decisiones de los demás jugadores, esto es, un juego estático.



		J2	
		s	i
J1	S	15,8	1,4
	I	12,2	12,2

Figura 3.1: Un juego estático puede representarse en forma extensiva o estratégica.

Entendemos por racionalidad de un jugador tanto la racionalidad sobre sus preferencias acerca de los resultados del juego como su capacidad para evitar resultados menos deseados. En el análisis de este juego ya habíamos asumido, implícitamente, que además de ser de dominio público la estructura del juego también lo es la racionalidad de sus jugadores. En otro caso, J_1 podría decantarse por su estrategia I: aún cuando sepa que J_2 conoce la estructura del juego evita el peor resultado posible en caso de que este último no fuese capaz de entender (después de todo nadie le asegura que sea racional) que su estrategia óptima es s, lo que de nuevo complicaría el análisis del juego. En lo que resta de este trabajo entenderemos también, y por motivos similares a cuando nos referíamos al conocimiento sobre la estructura del juego, no sólo que los jugadores son agentes racionales, sino además que es de dominio público que lo son.

Los juegos n-personales, con n $>$ 2, no podrán representarse de manera tan compacta. Cuando n sea relativamente pequeño aún será posible desgranar el juego en un pequeño conjunto de matrices que funcionen de manera similar al caso anterior.

Ejemplo 3.2 (Votación). Un padre (P) decide pasar la tarde junto a su hijo (H) y su sobrino (S) y proponen respectivamente jugar al fútbol (F), recorrer una ruta en el monte (M) o ver una película en el cine (C). Deciden votar para decidir la tarea más preferida sabiendo que en caso de empate será el padre quien decida. Sabemos que sus preferencias son:

- P: $F \succ C \succ M$
- H: $M \succ C \sim F$
- S: $C \succ M \succ F$

que podemos traducir en las utilidades:

- $u_P(F) = u_H(M) = u_S(C) = 3$
- $u_P(C) = u_H(C) = u_H(F) = u_S(M) = 2$
- $u_P(M) = u_S(F) = 1$

La representación en forma normal de este caso presenta una matriz por cada estrategia de un jugador determinado. Aquí elegimos al padre, de manera que reducimos nuestro juego 3-personal a tres juegos bipersonales.

P vota F				
		S		
		F	M	C
H	F	(F):3,2,1	(F):3,2,1	(F):3,2,1
	M	(F):3,2,1	(M):1,3,2	(F):3,2,1
	C	(F):3,2,1	(F):3,2,1	(C):2,2,3

P vota C				
		S		
		F	M	C
H	F	(F):3,2,1	(C):2,2,3	(C):2,2,3
	M	(C):2,2,3	(M):1,3,2	(C):2,2,3
	C	(C):2,2,3	(C):2,2,3	(C):2,2,3

P vota M				
		S		
		F	M	C
H	F	(F):3,2,1	(M):1,3,2	(M):1,3,2
	M	(M):1,3,2	(M):1,3,2	(M):1,3,2
	C	(M):1,3,2	(M):1,3,2	(C):2,2,3

En general, las votaciones podrán modelizarse como juegos estáticos y constituyen algunos de los más interesantes ejemplos de aplicación práctica de la teoría de juegos. Sin embargo, cuando el número de jugadores sea relativamente alto, como en una votación por la presidencia estatal, buscaremos una representación más compacta.

Ejemplo 3.3 (Huelga). Tras una crisis económica generalizada, las pocas empresas mineras que han resistido al periodo de escasez, en una cierta región, deciden coordinarse para reducir sus gastos y asegurarse beneficios formando un oligopolio. En particular, reducen los salarios de los 5000 trabajadores del sector que, descontentos, valoran si ponerse en huelga. Esta huelga será exitosa, consiguiendo mejorar las condiciones laborales para todos los trabajadores del sector, si y sólo si al menos el 40 % de ellos secundan la huelga. En caso contrario, las empresas resistirán la protesta, quienes no hayan protestado continuarán con las mismas condiciones y se prevé que los huelguistas serán castigados. Damos una posible representación en forma estratégica del juego.

- Jugadores: $J = \{J_1, ..., J_{5000}\}$
- Estrategias: $S_i \equiv A_i = \{P \equiv \text{Participar}, N \equiv \text{No participar}\}\ \forall J_i \in J$
- Utilidad: $u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 1 & si \quad \#\{j : s_j = P\} \geq 2000 \text{ (40 \% de 5000)} \\ 0 & si \quad \#\{j : s_j = P\} < 2000 \text{ y } s_i = N \\ -1 & si \quad \#\{j : s_j = P\} < 2000 \text{ y } s_i = P \end{cases} \quad \forall J_i \in J$

Definición 3.7 (Juego finito). *Un juego $G = \{J; (S_i)_{i\in\{1,...,n\}}; (u_i)_{i\in\{1,...,n\}}\}$ se dice finito cuando los conjuntos $J, S_1, ..., S_n$ son conjuntos finitos, esto es, un juego con un número finito de jugadores y un número finito de estrategias disponibles para cada uno.*

La representación estratégica matricial no será posible para juegos que no sean finitos, ni en juegos que sean de un número infinito de jugadores, ni cuando el número de estrategias de que dispone alguno de los jugadores no sea finito, ni cuando se de una combinación de ambas situaciones. Aún cuando hablemos de un juego finito, si algún jugador dispone de número de estrategias demasiado grande, la representación matricial tampoco será operativa. También en estos casos se buscarán representaciones del juego alternativas a la matricial.

Ejemplo 3.4 (Juego de las peticiones de Nash). El juego de las peticiones de Nash es un juego bipersonal estático con un número no numerable estrategias disponibles para ambos jugadores, donde se reparte un bien, y cada uno reclama simultáneamente una porción. Los ejemplos clásicos de este juego pretenden repartir una suma de dinero o una tarta. Los jugadores escogen un valor entre 0 y 1, que representa la porción que reclaman, entendiendo que sólo acabarán por recibirla en caso de que la suma de las porciones solicitadas no supere la cantidad total disponible. En otro caso, no recibirán nada. Una posible representación en forma estratégica de este juego será:

- Jugadores: $J = \{J_1, J_2\}$
- Estrategias: $S_1 = S_2 = [0, 1]$
- Utilidades:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1 & si \quad s_1 + s_2 \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad s_1 + s_2 > 1 \end{cases} \qquad u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} s_2 & si \quad s_1 + s_2 \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad s_1 + s_2 > 1 \end{cases}$$

Capítulo 4

Objetivo normativo: Concepto de solución

La Teoría de Decisión plantea problemas de decisión individual, en general en entornos de riesgo, en los que se busca optimizar un resultado. En este contexto, el concepto solución tiene una connotación precisa, que hace referencia a aquella decisión que al agente le conviene en cada caso. En Teoría de Juegos nos encontramos con situaciones en muchos aspectos similares, donde cada jugador puede ser capaz de identificar qué resultados prefiere, pero que, sin embargo, no puede asegurarse conseguir, dado que el resultado final de un juego no depende únicamente de sus propias acciones, sino también de las que tomen los demás jugadores. Aunque en algunas situaciones llega a darse una coincidencia de intereses, como en los llamados juegos cooperativos, en general existirá un conflicto de preferencias que no siempre permite entender el concepto de solución de manera inequívoca. Pese a ello, la Teoría de Juegos está atravesada por el objetivo de orientar al jugador sobre qué estrategias le conviene implementar.

Definición 4.1 (Solución). *Llamamos solución de un juego a un conjunto de perfiles de estrategias tal, que resulta razonable suponer que los jugadores elegirán sus estrategias según los perfiles estratégicos pertenecientes a dicho conjunto.*

Definición 4.2 (Concepto de solución). *Procedimiento que permite obtener una solución de manera clara y precisa.*

En este capítulo introduciremos distintos conceptos de solución, de acuerdo a dos clases de criterios, dominación y equilibrio, que aplicaremos a juegos estáticos de información completa, donde es de dominio público que los jugadores son agentes racionales que aplican exclusivamente estrategias puras.

4.1. Argumentos de dominación

En general, diremos que una estrategia s_i es dominante frente a otra estrategia s_i' -que diremos dominada- si J_i prefiere los posibles desarrollos del juego que se darán cuando escoge la primera en lugar de la segunda para cualquier combinación de estrategias que adopten sus rivales. Los argumentos de dominación constituyen los conceptos de solución más intuitivos e inmediatos, ya que se fundamentan en la idea de que un jugador racional no escogerá estrategias dominadas.

Definición 4.3 (Estrategia dominada). *Sea un juego $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ y sean $s_i, s_i' \in S_i$:*

- *Decimos que s_i' está dominada, o débilmente dominada, por s_i, cuando*

$$u_i(s_i', s_{-i}) \leq u_i(s_i, s_{-i}) \; \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

  y además

$$\exists s_{-i}^* \in S_{-i} \text{ t.q. } u_i(s_i', s_{-i}^*) < u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

  De manera equivalente, diremos que s_i domina, o domina débilmente, a s_i'.

- *Decimos que s_i' está estrictamente dominada por s_i cuando*

$$u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i}) \; \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

  De manera equivalente, diremos que s_i domina estrictamente a s_i'.

- *Decimos que s_i' es no dominada si no existe otra estrategia s_i que la domine, y decimos que es no dominada estrictamente si no existe otra estrategia s_i que la domine estrictamente.*

Cuando la estrategia de un jugador domine débilmente a otra, le convendrá usar la primera, al menos tanto como la segunda, en cualquier situación y, en alguna situación, le convendrá estrictamente más. Cuando una estrategia domine estrictamente a otra, le convendrá usar la primera más que la segunda en cualquier situación.

Consecuencia. *Si s_i' está estrictamente dominada por s_i entonces s_i' también está débilmente dominada por s_i.*

Es razonable suponer que jugadores racionales usarán estrategias no dominadas: si una estrategia s_i' está dominada por s_i, no existe ninguna forma en que puedan jugar los demás jugadores que justifique aplicar la primera, y habrá al menos alguna que sí justifique emplear la segunda. En este sentido, para optimizar los resultados de un juego sería ideal encontrar alguna estrategia que domine estrictamente a todas las demás.

Definición 4.4 (Estrategia dominante)**.** *Sea un juego $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ y sea $s_i' \in S_i$:*

- *Decimos que s_i' es dominante cuando*

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \ \forall s_i \in S_i \text{ y } \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

.

- *Decimos que s_i' es estrictamente dominante cuando*

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \ \forall s_i \in S_i \text{ con } s_i \neq s_i' \text{ y } \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

.

No está asegurada la existencia de estrategias dominantes ni estrictamente dominantes, y en general podrá haber más de una estrategia dominante. Si existiese una estrategia estrictamente dominante, se deduce directamente de la definición anterior que esta sí será única.

4.1.1. Uso de Estrategias Dominantes

Definición 4.5 (Concepto de solución: Uso de Estrategias Dominantes (UED))**.** *Sea un juego* $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ *, pertenecen a la solución del juego según UED todos aquellos perfiles de estrategias en los cuales cada jugador use una estrategia dominante.*

Denotamos $S^{UED} = \{(s_1, ..., s_n) : s_i \text{ estrategia dominante } \forall J_i \in J\}$ *a dicha solución.*

Proposición 4.1. *En aquellos juegos donde cada jugador disponga de una estrategia estrictamente dominante la solución según el concepto UED será única.*

Este primer concepto de solución es el más intuitivo y, en caso de ser aplicable, resulta incuestionable puesto que cualquier jugador se beneficia de escoger estrategias dominantes independientemente de los rivales. Es potente en el sentido de que puede aplicarse en juegos donde cada jugador tenga un conocimiento limitado o incluso nulo acerca de los factores que afectan a los demás jugadores -por ejemplo cuáles son sus utilidades- y en este sentido podría aplicarse aún en juegos que no sean información completa o cuando no sea de conocimiento común que los jugadores son racionales. Desafortunadamente, los juegos donde cada jugador tiene disponible al menos una estrategia dominante son más bien una excepción, y no siempre podremos aplicar este concepto de solución.

Ejemplo (Cuando se sabe que el otro sabe)*.* Recordamos el juego:

		J2	
		s	i
J1	S	15,8	1,4
	I	12,2	12,2

La estrategia s de J_2 es dominante puesto que $u_2(S, s) > u_2(S, i)$ y $u_2(I, s) = u_2(I, i)$, aunque no es estrictamente dominante. También podemos decir que i está dominada por s.

Por otro lado J_1 no tiene estrategias dominantes ni dominadas: $u_1(S, s) > u_1(I, s)$ pero $u_1(S, i) < u_1(I, i)$. En este ejemplo no es aplicable el concepto de solución UED, ya que centrar nuestro argumento en el uso de estrategias dominantes solo permitiría inferir las respuestas de J_2.

Para determinar si la estrategia de un jugador es dominante o está dominada fijamos un mismo conjunto de respuestas de los demás jugadores y sólo entonces comparamos las utilidades que resultan de aplicarla frente a usar cualquier otra estrategia por parte de ese jugador. Resulta en obtener mejores resultados para una misma actuación de los demás jugadores. Así, vemos que existe un caso en que J_2 obtiene un mejor resultado empleando su estrategia i frente a su estrategia s ya que $u_2(I,s) < u_2(S,i)$, pero también hemos de entender que esta comparación tiene poco interés a la hora de determinar su mejor estrategia: estaríamos confrontando dos realidades en que su rival ha tomado decisiones diferentes. .

4.1.2. Eliminación Iterativa Estricta

Hemos visto que un jugador racional nunca utilizará estrategias dominadas, y que, si le es posible, empleará estrategias dominantes. El UED es aplicable incluso en juegos que no son de información completa, y resulta condición suficiente asegurar que los jugadores sean racionales. Suponer que nuestros juegos son de información completa y que es de dominio público que los jugadores son agentes racionales permite razonamientos más amplios, que resultan en idear nuevos conceptos de solución, con el objetivo de poder aplicarlos a un mayor número de casos.

Definición 4.6 (Concepto de solución: Eliminación Iterativa Estricta (EIE))**.** *Sea un juego $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ llamamos Eliminación Iterativa Estricta o Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas (abreviadamente EIE) al siguiente algoritmo:*

1. *Se eliminan, para cada jugador, y simultáneamente, todas las estrategias que estén estrictamente dominadas. Se construye un juego reducido resultante de proceder a tal eliminación en el juego anterior.*

2. *Se repite la etapa anterior, hasta que no queden estrategias que poder eliminar.*

Al conjunto de estrategias de J_i que sobrevivan a EIE las llamaremos estrategias iterativamente no dominadas, y las denotaremos S_i^S .

Este concepto de solución determina como solución el conjunto de perfiles estratégicos $S^{EIE} = \{(s_1, ..., s_n) \in S_i^S \times ...S_i^S$, constituidos por estrategias que sobreviven EIE.

Entre las ventajas de este algoritmo, que llamaremos estándar, está una solución idéntica a la que obtenemos modificando el proceso de eliminación entorno a esta misma idea: Si en lugar de eliminar en cada etapa para cada jugador y simultáneamente todas las estrategias que estén estrictamente dominadas decidimos eliminarlas sucesivamente, jugador a jugador, si fuésemos eliminándolas una a una,... la solución que obtenemoss es misma. Esto supone beneficios evidentes en el ámbito de la programación computacional de soluciones, donde es habitual programar algoritmos que suponen modificaciones entorno al algoritmo estándar.

Una contrapartida importante se dá, sin embargo, en aquellos juegos donde no aparezcan o sean escasas las estrategias estrictamente dominadas.

Ejemplo (Cuando se sabe que el otro sabe). Recordamos el juego de dos jugadores $J = \{J_1, J_2\}$ que buscan obtener una u otra suma de dinero.

		J2	
		s	i
J1	S	15,8	1,4
	I	12,2	12,2

La solución según EIE será $S^{EIE} = \{(S,s);(S,i);(I,s);(I,i)\}$, esto es, ¡cualesquiera de los posibles resultados del juego original! En este juego habíamos visto que no existen estrategias estrictamente dominadas, de modo que no se elimina ninguna estrategia y el juego resultante resulta ser el mismo. Aunque EIE es aplicable a cualquier juego, en casos como el presente el concepto de solución EIE no será de mucha ayuda.

4.1.3. Eliminación Iterativa Débil

El concepto de solución EIE se basa en aplicar un criterio de eliminación de estrategias que es demasiado estricto, al exigir que las estrategias a eliminar estén estrictamente dominadas. Surge una superación del mismo cuando en su lugar somos más laxos, exigiendo exclusivamente que una estrategia esté dominada. Una apreciación: cualquier solución que obtengamos en este nuevo caso también la obtendríamos en el anterior.

Definición 4.7 (Concepto de solución: Eliminación Iterativa Débil (EID))**.** *Sea un juego $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, llamamos Eliminación Iterativa Débil, o Eliminación*

Iterativa de Estrategias Débilmente Dominadas, abreviadamente EID, al siguiente algoritmo:

1. *Se eliminan, para cada jugador, y simultáneamente, todas las estrategias que estén dominadas. Se construye un juego reducido resultante de proceder a tal eliminación en el juego anterior.*

2. *Se repite la etapa anterior hasta que no quede ninguna estrategia que eliminar, en cuyo caso termina el proceso.*

Al conjunto de estrategias de J_i que sobreviven EIE las llamaremos estrategias iterativamente no dominadas, y las denotaremos S_i^S .

Este concepto de solución determina como solución $S^{EID} = \{(s_1, ..., s_n) \in S_i^S \times ...S_i^S$, el conjunto de perfiles estratégicos constituidos por estrategias que sobreviven EID.

Llamando de nuevo a este algoritmo el proceso estándar, la contrapartida principal que resulta de aplicar EID frente a EIE radica en que, en este caso, la solución obtenida sí será sensible a alteraciones en el proceso de eliminación, lo que exigirá ser cuidadosos a la hora de implementarlo computacionalmente.

Ejemplo (Cuando se sabe que el otro sabe). Recordemos la estructura estructura del juego:

		J2	
		s	i
J1	S	15,8	1,4
	I	12,2	12,2

1. Para J_1, no se encuentran estrategias dominadas, y, para J_2 vemos que i está dominada por s, de modo que la eliminamos para construir el juego reducido:

		J2
		s
J1	S	15,8
	I	12,2

2. Para el juego reducido la estrategia I está dominada por la estrategia S ya que $u_1(S, s) > u_1(I, s)$, de modo que la eliminamos para construir el juego reducido:

		J2
		s
J1	S	15,8

3. No restan estrategias por eliminar, de modo que se acaba el proceso.

El método EID nos ha devuelto una única estrategia superviviente por jugador, de manera que la solución que aporta es única. Este perfil de estrategias (S, s) que ya habíamos anticipado en un análisis anterior más prosaico sólo puede justificarse si en efecto el juego es de información completa y es de dominio público que cada jugador es un agente racional.

Cabe mencionar que todos estos métodos son evidentemente aplicables a juegos expresados en su forma extensiva:

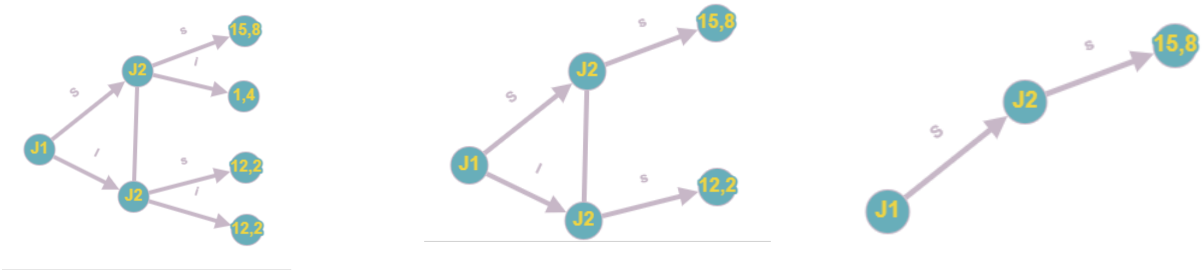


Figura 4.1: Primero, eliminamos la única estrategia dominada, i. Después, eliminamos la estrategia I, que ha pasado a estar dominada en el juego reducido.

En general, encontraremos juegos para los que EID no aporta soluciones satisfactorias. En particular, cuando no exista ninguna estrategia dominada en el juego original, la solución según este concepto será el conjunto de todos los posibles desarrollos del juego.

Ejemplo (Pares o nones). Recordemos la estructura del juego:

		J2	
		P	N
J1	P	1,-1	-1,1
	N	-1,1	1,-1

Figura 4.2: Representación en forma estratégica

Como no existen estrategias dominantes, no es aplicable UED. No encontramos estrategias estrictamente dominadas, con que aplicar EIE no es satisfactorio ya que nos devuelve como solución todos los posibles desarrollos del juego. Tampoco aparecen estrategias dominadas, de manera que EID también nos devuelve como solución todo posible perfil estratégico del juego original.

4.1.4. Juegos resolubles por dominación

Será interesante determinar para qué juegos sí resulta de utilidad aplicar alguno de los conceptos de solución mediante argumentos de dominación. En particular, buscamos identificar aquellos juegos que devuelven soluciones únicas.

Definición 4.8 (Resoluble por dominación)**.** *Decimos que un juego finito o infinito* $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ *es resoluble por dominación si las estrategias supervivientes a EID,* $S_1^S \subseteq S_1, ..., S_n^S \subseteq S_n$*, son tales que:*

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \;\; s_i, s_i' \in S_i^S \Rightarrow u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i', s_{-i}) \; \forall s_{-i} \in S_{-i}^S$$

Son juegos resolubles por dominación aquellos para los que EID aporta una solución "única", donde entendemos la unicidad en el sentido de que, o sobrevive un único perfil estratégico, o sobreviven varios perfiles tales que a cada jugador le es indiferente escoger entre las distintas estrategias supervivientes.

Nota 5. Cuando la solución que aportan UED o EIE sea única (en este sentido), también lo será la solución que aporte EID. Estaremos ante un juego resoluble por dominación.

Definición 4.9 (Equilibrio sofisticado)**.** *Sea un juego G soluble por dominación, llamamos equilibrio sofisticado a todo perfil de estrategias,* $s^S \in S_1^S \times ... \times S_n^S$*, solución de EID.*

En general consideramos un equilibrio sofisticado como solución suficientemente satisfactoria. Cuando un juego sea resoluble por dominación, no serán necesarios otros conceptos de solución más elaborados.

4.2. Argumentos de equilibrio: Equilibrio de Nash

Los argumentos de equilibrio pretenden un refinamiento de los conceptos de solución basados en la eliminación iterativa de estrategias dominadas. Según esta nueva línea de estudio, que llamaremos análisis de equilibrios, pasaremos a indagar acerca de qué propiedades ha de presentar un perfil estratégico para determinarlo como buena predicción del comportamiento de jugadores racionales y, en general, aceptarlo como solución de un juego. El equilibrio de Nash es quizás el más importante concepto de solución en Teoría de Juegos, ya determina aquellos perfiles estratégicos según los cuales ningún jugador está incentivado a cambiar unilateralmente su estrategia.

4.2.1. Equilibrio de Nash

Definición 4.10 (Equilibrio de Nash en estrategias puras)**.** *Sea un juego* $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$*, decimos que un perfil de estrategias puras,* $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_n$*, es un equilibrio de Nash (EN), si:*

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \; u_i(s^*) \equiv u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \; \forall s_i \in S_i$$

Denotamos S^{EN} *el conjunto de los perfiles estratégicos que son EN.*

Cuando $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$ sea un EN, se tiene que, para el jugador J_i, la estrategia s_i^* es una respuesta óptima a s_{-i}^*, esto es, es solución del problema de decisión $max\ u_i(s^*) = max\ u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, s_n^*)$ donde $s_{-i}^* \in S_{-i}$ se considera fijo y $s_i^* \in S_i$ es la variable de decisión.

Un inconveniente natural, pero importante, al que nos enfrentamos a la hora de determinar el EN como concepto de solución, es sencillamente que no todo juego tiene alguno.

Ejemplo (Pares o nones)*.* Recordemos la estructura del juego:

		J2	
		P	N
J1	P	1,-1	-1,1
	N	-1,1	1,-1

En este caso no existen EN: Cuando ambos juegan P, J_2 está incentivado a cambiar estrategia, y jugar N, ya que $u_2(P,P) = -1 < u_2(P,N) = 1$. En este otro supuesto, en que se juega (P,N) J_2, está satisfecho con su eleccion, pero ahora es J_1 quien prefiere cambiar estrategia, para jugar N, ya que $u_1(P,N) = -1 < u_1(N,N) = 1$, y así sucesivamente.

Otra dificultad que habremos de librar radica en que, además, no todo juego con EN tiene solamente uno, y en numerosas ocasiones no será difícil razonar que algunos son claramente más deseables que otros.

Ejemplo (Cuando se sabe que el otro sabe). Recordando la estructura del juego:

		J2	
		s	i
J1	S	15,8	1,4
	I	12,2	12,2

En seguida se hace evidente que la solución (S,s), que esperábamos, es un EN: por un lado, $u_1(S,s) = 15 > u_1(I,s) = 12$ asegura que a J_1 le conviene jugar S frente a la estrategia s de su rival, y, de igual manera, vemos cómo $u_2(S,s) = 8 > u_2(S,i) = 4$ implica que, ante la estrategia S nuestro segundo jugador, escogerá s.

Podemos, además, descartar los perfiles (S,i) y (I,s) como EN: Por un lado, (S,i) no es EN, porque como $u_2(S,i) = 4 \ngeq u_2(S,s) = 8$, resulta que J_2 está incentivado a cambiar estrategia. Lo mismo diremos de (I,s) al entender que $u_1(I,s) = 12 \ngeq u_1(S,s) = 15$ implica que J_1 haría mejor en jugar S.

Sin embargo, este ejemplo presenta dos EN. Uno de ellos es peculiar, en el sentido de que no resulta nada obvio entenderlo como respuesta óptima: Cuando se juega (I,i), por un lado, $u_1(I,i) = 12 > u_1(I,i) = 1$ asegura que a J_1 le conviene jugar I frente a la estrategia i de su rival. Como $u_2(I,i) = 4 = u_2(I,s) = 4$, entendemos que, ante la estrategia I por parte de J_1, a nuestro segundo jugador le es indiferente escoger entre s o i, esto es, no está motivado a cambiar de estrategia.

Manuales avanzados [8] en Teoría de Juegos refinan este primer concepto de equilibrio de Nash para evitar dar como solución alguno de ellos. Con todo, el propio EN no deja de ser un refinamiento del concepto de solución EIE, en el siguiente sentido:

Teorema 4.1. *Sea $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ un juego finito y sea $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_n$ un perfil de estrategias puras de dicho juego.*

1. $s^* \in S^{EN} \Rightarrow s^* \in S^{EIE}$
2. $\{s^*\} = S^{EIE} \Rightarrow \{s^*\} = S^{EN}$

Por un lado, vemos que si un perfil de estrategias es EN, entonces sobrevivirá al proceso EIE (aunque no podemos asegurar que sobreviva a EID). Nótese que, en particular, también todo perfil $s \in S^{UED}$ sobrevive a EIE. En este sentido, al menos, estamos asegurando que, de no encontrar una solución trámite el EN, tampoco la encontraríamos aplicando EIE o UED.

Por otro lado, si sólo un perfil de estrategias sobrevive a EIE -o a UED-, entonces también es el único EN.

Este teorema deja claro que el concepto de EN está relacionado con otros conceptos de solución basados en argumentos de dominación, y frente a estos presenta, fundamentalmente, una ventaja y un inconveniente.

La parte ventajosa radica en que es más resolutivo, dado que $S^{EN} \subseteq S^{EIE}$. En este sentido, el EN aporta como solución un número de perfiles estratégicos a menudo mucho menor que el que obtenemos por EIE, esto es, es más operativo.

El inconveniente radica en una pérdida de seguridad cuando proponemos como razonable que el resultado del juego sea un EN. El precio a pagar puede antojarse costoso y como tal necesita ser elaborado: en efecto, es de sentido común que ningún jugador -cumpliéndose las hipótesis adecuadas sobre lo racionales e informados que estén- jugará estrategias eliminables según EIE. En multitud de situaciones, sin embargo, prever que un EN será lo que efectivamente se juegue no resultará ni remotamente así de obvio.

Ejemplo (Guerra de sexos). Una pareja planea su tarde romántica, sin llegar a concretar si el plan consistirá en ir al cine, o al teatro, cuando de pronto se ven incomunicados. Ambos saben que J_1 prefiere ir al cine, mientras que J_2 abogaba por el teatro. En cualquier caso, la prioridad para ambos consiste en pasar la tarde juntos. Podemos representar este juego en su forma estratégica:

		J2	
		C	T
J1	C	3,2	1,1
	T	0 , 0	2,3

Es directo comprobar que no existen estrategias dominantes, por lo que no podemos aplicar UED.

Además, tampoco existe ninguna estrategia dominada, por lo que S^{EIE} y S^{EID} están constituidas por todos los perfiles estratégicos posibles. No aportan soluciones satisfactorias.

En este caso, encontramos dos EN: (C, C) y (T, T). Por una parte, $u_1(C, C) = 3 > u_1(T, C) = 0$, así como $u_2(C, C) = 2 > u_2(C, T) = 1$ y, por otra, $u_1(T, T) = 2 > u_1(C, T) = 1$, así como $u_2(T, T) = 3 > u_2(T, C) = 0$, nos indican que, en caso de darse cualquiera de esos dos perfiles, ninguno de los enamorados querría cambiar unilateralmente de decisión. Es también inmediato comprobar que ni (C, T) ni (T, C) son EN.

Encontramos así, en este ejemplo, una situación donde el concepto de equilibrio de Nash es más resolutivo frente a los conceptos de solución que basábamos en argumentos de dominación, diferenciando los dos resultados del juego que resultan más ventajosos, frente a los cuatro posibles.

Sin embargo, también en este caso es palpable su desventaja. Sabemos qué dos perfiles de estrategias se consideran solución válida de acuerdo a este criterio, pero ¿cómo podrían nuestros novios asegurarse alcanzar alguno de ellos? Para ello se haría necesaria, además de las habituales condiciones sobre la racionalidad y la información de los jugadores, una coordinación de expectativas, que no ha lugar en este caso. Una línea de razonamientos fortuitamente coordinada (J_1 razona "mi pareja sabe que quiero ir al teatro, así que espero que vaya al teatro, por lo que yo también he de ir al teatro", mientras que J_2 piensa "se que J_1 quiere ir al teatro así que es donde iré") sería ideal, pero difícilmente podremos darla por segura. Sencillamente, debemos resignar que los argumentos basados en el equilibrio de Nash no siempre alcanzan para prever las acciones de los jugadores.

Pese a cargar con esta problemática, un perfil estratégico que sea equilibrio de Nash tiene connotaciones que no presenta otro que no lo sea, y, en ciertos sentidos, sí podremos decir que es más probable un resultado que sea EN. Analizando en detalle el concepto de solución basado en el equilibrio de Nash, debemos destacar que cada EN incluye dos aspectos:

- Está compuesto por estrategias que son respuesta óptima ante una conjetura relativa al comportamiento que los demás jugadores tendrán en el juego.
- Esa conjetura ha de ser información de dominio público.

Para que un EN sea eficiente al prever soluciones, debe estar formado por estrategias que maximicen los pagos dadas las estrategias que se supone jugarán los rivales, y, además, dichas predicciones han de ser correctas. La falta de esta segunda característica es lo que resta seguridad -frente a los conceptos de solución basados en argumentos de dominación- a la hora de predecir el resultado de algunos juegos según EN, pero huelga destacar que, cuando aparezcan estas situaciones, tampoco podría aportarnos seguridad los argumentos basados en conceptos de dominación. Como $S^{EN} \subset S^{EIE}$, los EN tal vez no parezcan rigurosos, pero los argumentos anteriores nos estarán dando respuestas demasiado amplias.

Cuando sea de dominio público que todos los jugadores son racionales, cabe destacar que sólo un perfil que sea EN tiene la propiedad de que los jugadores puedan predecirlo -aunque de existir más de uno, no necesariamente predirán el mismo-. Si, por el contrario, se conjetura sobre algún perfil que no sea EN, esto implica que, al menos, uno de los jugadores estará incentivado a jugar de manera distinta a la prevista. Lo que sí podemos afirmar es que, cuandoquiera que todos los jugadores de un juego prevean que se dará un mismo EN, efectivamente se dará dicho EN. En este sentido decimos que las estrategias que componen cualquier EN son mutuamente sostenibles. Por ejemplo:

- Cuando un arbitro neutral informa a los jugadores de las intenciones que tienen los demás, y estas se traducen en un EN, es probable que esto les anime a efectivamente jugar dicho EN. Si, por el contrario, dichas intenciones no resultasen en un EN, al menos alguno de ellos estaría interesado en cambiar la acción que tenía pensado realizar.

- Cuando los jugadores ya han jugado unas cuantas veces al mismo juego, y juegan una vez más, si la anterior ocasión se jugó un EN, es previsible que este mismo EN se repita. Si el anterior resultado del juego no se correspondiese con ningún EN, habrá algún jugador que está incentivado a cambiar su jugada.

Algunos autores (Kreps 1994 y 1995) fundamentan en esta realidad la idea de que ser EN es condición necesaria para la existencia de un modo evidente de jugar un juego.

En los ejemplos planteados hasta el momento, hemos realizado una comprobación exahustiva y detallada de cada perfil estratégico para determinar si era un EN. Este proceso es sencillo en los juegos más simples, pero se complica según aumenta la complejidad del juego a analizar, y es, evidentemente, inviable para resolver juegos infinitos. En multitud de situaciones será necesario un planteamiento más analítico, donde se requiere resolver un problema de optimización por cada jugador a un mismo tiempo, y, para ello, necesitaremos organizar la búsqueda de los EN de un modo más sistemático.

Definición 4.11 (Correspondencia de respuesta óptima)**.** *Sea el juego* $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, *llamamos correspondencia de respuesta óptima del jugador* J_i *a la regla que asigna a cualquier combinación de estrategias de los demás jugadores,* $s_{-i} \in S_{-i}$, *el conjunto* $R(s_{-i})$ *de estrategias que son respuesta óptima a dicha combinación.*

$$s_i' \in R(s_{-i}) \Leftrightarrow u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n) \geq u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) \forall s_i \in S_i$$

A partir de esta definición, y de la de equilibrio de Nash, es inmediato el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *Sea el juego* $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ *y sea* $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_n$ *un perfil de estrategias puras de dicho juego.*

$$s^* = (s_1^*, ..., s_n^*) \in S^{EN} \Leftrightarrow s_i^* \in R(s_{-i}^*) \ \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Para automatizar el cálculo de los EN, el proceso habitual consiste en calcular, para todo jugador, y para toda posible combinación de estrategias de estrategias de los demás jugadores, las estrategias de respuesta óptima. De esta manera, obtenemos la correspondencia de respuesta óptima de cada jugador, y los EN serán, si los hubiese, aquellos perfiles estratégicos que sean puntos de intersección de todas las correspondencias en respuesta óptima.

Ejemplo (Dilema del prisionero). La policía ha atrapado a dos reconocidos ladrones, sospechosos del último atraco de la ciudad. Las pruebas de que disponen contra ellos no son concluyentes, pero suficientes para condenarles por un delito menor. Deciden interrogarles en habitaciones separadas, de manera que no se puedan comunicar entre ellos. Los delincuentes saben que, si ambos callan, (C), serán condenados,1 año, por el delito menor. Si ambos hablan, (H), serán castigados por el robo, con una pequeña reducción de condena por haber cooperado con las fuerzas del orden (4 años). También tienen claro que, si sólo uno de ellos delata a su compinche, el delator se librará de su condena, pero el otro recibirá la pena en su totalidad (5 años).

El dilema del prisionero es quizá el más famoso de los juegos estáticos de información completa. Entendiendo la condena como una utilidad negativa, podríamos representarlo:

		J2	
		H	C
J1	H	1,1	5
	C	0,5	5,5

Busquemos, ahora, algún EN, según este proceso más organizado:

1. Calculamos la correspondencia en respuesta óptima de cada uno de los jugadores:

   - J_1 puede enfentrarse a estrategias rivales $\{H_2, C_2\} \in S_{-1} \equiv S_2$ y, frente a cada una, tenemos que $R(H_2) = H_1$ y $R(C_2) = H_1$.
   - J_2 puede enfentrarse a estrategias rivales $\{H_1, C_1\} \in S_{-2} \equiv S_1$ y, frente a cada una, tenemos que $R(H_1) = H_2$ y $R(C_1) = H_2$.

2. Obtenemos perfiles estratégicos que sean puntos de intersección de estas correspondencias óptimas:

   - La correspondencia en respuesta óptima de J_1 determina el conjunto de perfiles estratégicos $\{(H_1, H_2); (H_1, C_2)\}$.
   - La correspondencia en respuesta óptima de J_2 determina el conjunto de perfiles estratégicos $\{(H_1, H_2); (C_1, H_2)\}$.

El perfil estratégico $(H_1, H_2) = \{(H_1, H_2); (H_1, C_2)\} \cap \{(H_1, H_2); (C_1, H_2)\}$ es intersección de estos conjuntos y, como tal, EN.

Cuando trabajemos con juegos infinitos sin estrategias dominantes, que no pueden ser analizados por UED, no siempre podremos implementar EIE ni EID, aún cuando estos algoritmos sean teóricamente aplicables, por su dificultad operativa. Con este procedimiento ordenado, en muchos de estos casos, sí podremos obtener de manera relativamente sencilla los EN.

Ejemplo (Juego de las peticiones de Nash). Recordamos la estructura del juego de las peticiones de Nash que podrían implementar dos amigos para repartirse una tarta:

- Jugadores: $J = \{J_1, J_2\}$
- Estrategias: $S_1 = S_2 = [0, 1]$
- Utilidades:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1 & si \quad s_1 + s_2 \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad s_1 + s_2 > 1 \end{cases} \qquad u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} s_2 & si \quad s_1 + s_2 \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad s_1 + s_2 > 1 \end{cases}$$

Para entender su correspondencia en respuesta óptima el jugador J_i resuelve

$$\max{}_{s_i} \{s_i : 0 \leq s_i \leq 1, s_i + s_{-i} \leq 1\}$$

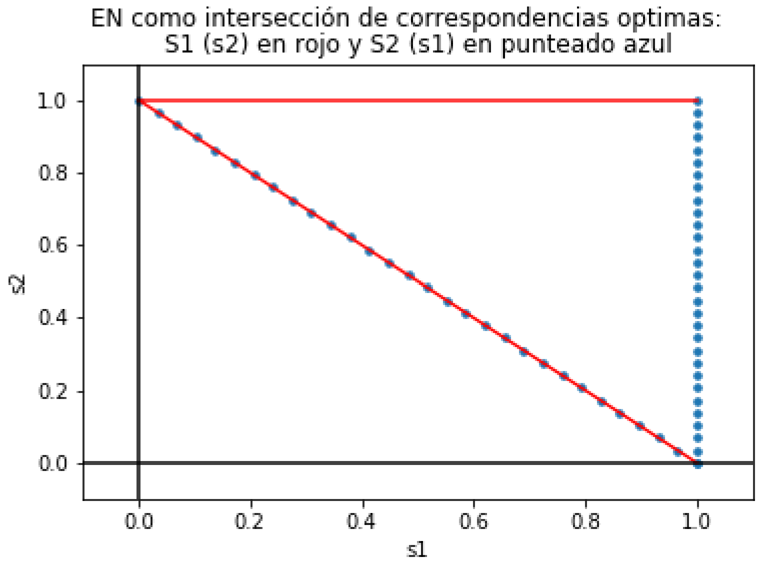
esto es, cada jugador intentará encontrar el mayor valor entre 0 y 1 tal que, sumado al que escoja su oponente, no supere la unidad.

Obtenemos así las correspondencias de respuesta óptima:

$$R_1(s_2) = \begin{cases} 1 - s_2 & si \quad s_2 < 1 \\ \\ [0, 1] & si \quad s_2 = 1 \end{cases} \quad \text{y } R_2(s_1) = \begin{cases} 1 - s_1 & si \quad s_1 < 1 \\ \\ [0, 1] & si \quad s_1 = 1 \end{cases}$$

La correspondencia en respuesta óptima de J_1 determina los perfiles estratégicos $\{(s_1, s_2) : s_2 < 1, s_1 + s_2 = 1\} \cup \{(s_1, s_2) : s_2 = 1, s_1 \in [0, 1]\}$ y la de J_2 determina los perfiles estratégicos $\{(s_1, s_2) : s_1 < 1, s_1 + s_2 = 1\} \cup \{(s_1, s_2) : s_1 = 1, s_2 \in [0, 1]\}$. Los infinitos EN de este juego son intersección de estos conjuntos, $S^{EN} = \{(s_1, s_2) : s^1 + s_2 = 1\} \cup \{(1, 1)\}$

A menudo se representa la búsqueda de EN gráficamente:



Encontramos así infinitos EN. Sería deseable encontrar algún mecanismo que separe, de los perfiles $\{(s_1, s_2) : s^1 + s_2 = 1\}$, en que se reparte la tarta en su totalidad, el perfil $(1, 1)$, ya que es el único EN del juego en que ningún jugador recibe nada.

4.2.2. Eficiencia de Pareto

Decimos que el equilibrio de Nash se articula bajo una óptica individualista, en el sentido de que cada jugador se centra en cuál es la estrategia que a él más le conviene, sin atender a los posibles perjuicios ajenos y, en general, no tiene en cuenta a los demás jugadores, más allá de razonar cómo las estrategias que estos adopten afectarán a sus resultados del juego.

Ejemplo (Dilema del prisionero). Recordemos la estructura del juego:

		J2	
		H	C
J1	H	1,1	5
	C	0,5	5,5

Hemos visto que el EN consistía en (H, H), y era también perfil solución según los distintos conceptos basados en argumentos de dominación. Con todo, ¿no resulta más deseable para los jugadores el perfil (C, C)?

Definición 4.12 (Dominación en el sentido de Pareto). *Sea un juego, $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, y sean $s = (s_1, ..., s_n), s' = (s'_1, ..., s'_n) \in S_1 \times ... \times S_n$, dos perfiles de estrategias puras de dicho juego. Decimos que s está dominado en el sentido de Pareto por s' si y sólo si se cumple $u_i(s') \geq u_i(s)$ para todo jugador y, además, se cumple de manera estricta para al menos uno de ellos.*

Un perfil dominado en el sentido de Pareto es tal que se puede cambiar a algún otro perfil estratégico sin que ningún jugador salga perdiendo con el cambio, y al menos uno de ellos salga ganando.

Definición 4.13 (Óptimo de Pareto). *Sea un juego, $G = \{J; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ y sea $s = (s_1, ..., s_n) \in S_1 \times ... \times S_n$, un perfil de estrategias puras de dicho juego. Decimos que s es un óptimo de Pareto, o que es eficiente en el sentido de Pareto, si y sólo si no está dominado en el sentido de Pareto por ningún otro perfil. Si algún otro lo domina, diremos que es ineficiente en el sentido de Pareto.*

Con los anteriores conceptos de dominación pretendímos optimizar la elección de la estrategia particular de cada jugador, con el objeto de maximizar su utilidad. Este nuevo concepto hace referencia, no a las elecciones de estrategias individuales, sino a perfiles estratégicos completos. En este sentido, la dominación de Pareto estudia el comportamiento del grupo de jugadores en su conjunto. Es, por tanto, una herramienta de análisis del comportamiento social, y servirá de base sobre la que construir conceptos de solución para juegos cooperativos, donde los jugadores sí pueden alcanzar acuerdos. Como los anteriores conceptos de solución estaban fundamentados en herramientas de análisis de la eficiencia individual, será habitual que resulten en soluciones y prescripciones completamente diferentes.

Ejemplo (Juego de las peticiones de Nash). Recordamos la estructura del juego:

- Jugadores: $J = \{J_1, J_2\}$
- Estrategias: $S_1 = S_2 = [0, 1]$

- Utilidades:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1 & si \quad s_1 + s_2 \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad s_1 + s_2 > 1 \end{cases} \qquad u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} s_2 & si \quad s_1 + s_2 \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad s_1 + s_2 > 1 \end{cases}$$

Encontrábamos $S^{EN} = \{(s_1, s_2) : s^1 + s_2 = 1\} \cup \{(1, 1)\}$

Los perfiles $\{(s_1, s_2) : s^1 + s_2 = 1\}$ en que se reparte la tarta en su totalidad son evidentemente óptimos de Pareto, mientras que el único EN del juego en que ningún jugador recibe nada $(1, 1)$ es efectivamente ineficiente en el sentido de Pareto.

Ejemplo (Dilema del prisionero). Recordemos la estructura del juego:

		J2	
		H	C
J1	H	1,1	5
	C	0,5	5,5

El perfiles (H, C) no está dominado en el sentido de Pareto por ningún otro perfil: Cambiarlo, tanto por (H, H), como por (C, C), sería perjudicial para J_1, mientras que el cambio al perfil (C, H) perjudica a J_2. También los perfiles (C, H) y (H, H) son eficientes en el sentido de Pareto.

Curiosamente, el perfil que resulta solución, (H, H), según todos los argumentos anteriores es el único ineficiente en el sentido de Pareto, ya que (C, C) sí lo domina. Independientemente de que un jugador decida hablar o callarse, si el otro vive preocupado de su situación, siempre le resultará beneficioso delatarlo. Si, por el contrario, cada jugador se hiciese responsable, no sólo de su situación individual, sino de la de ambos en su totalidad, o si cambiase alguna otra característica del juego, muy probablemente la solución del mismo fuese otra. ¿Es tan poco realista una idealización así, donde un jugador no tiene porqué centrarse exclusivamente en su beneficio directo, sin posibilidad alguna de concretarse en una realidad? La vida nos aborda continuamente con situaciones de lo más variado y peculiar...

Si nuestros dos cacos resultasen ser padre e hijo, no resulta difícil predecir que los jugadores no se delatarán alegremente, y, quizá, la manera más adecuada de modificar la modelización de nuestro juego, para adaptarse a estas nuevas situaciones, pase por redefinir la utilidad con que cada jugador percibe delatar a su "rival".

¿Tan factible es mantener a los sospechosos incomunicados? Antes bien, lo más normal será, sin duda alguna, que puedan llegar a acuerdos. En esta situación tal vez podamos mantener intactas las utilidades del esquema de juego original, pero seguramente sea un óptimo de Pareto, y no un equilibrio de Nash, el perfil que nuestros bandidos busquen como respuesta estratégica, siempre y cuando se les permita cooperar.

¿Y si nuestros dos sospechosos se han dedicado a robar en otros tres países, resultando en cuatro procesos completamente idénticos al primero, pero independientes entre sí? Sería esta una ocasión perfecta para hablar de un **juego repetido**, en que los jugadores han de jugar, sucesivamente, un número fijo de veces al juego original. En estos casos aún podemos entender el juego *madre* con idéntica estructura y las mismas características que cuando se juega aislado, ¡pero la mera repetición de un mismo juego generará un superjuego, el juego repetido, trabado de razonamientos que en muchos casos serán completamente innovadores!

Capítulo 5

Conclusiones

Llegamos al final de este trabajo con una miríada de ejemplos de juego lo más variado. En todos ellos, varios agentes se condicionan mutuamente al actuar de una u otra manera, y ya estamos en condiciones de entender cómo modelizar matemáticamente alguno de estos ejemplos.

Ha quedado claro que situaciones sin aparente relación pueden caracterizarse por razonamientos estratégicos tan similares que llegan a condensar en un mismo modelo de juego. También estamos en condiciones de entender porqué en otros casos, que tratan situaciones de brutal parecido, el más mínimo matiz o diferencia puede resultar en juegos radicalmente diferentes.

En su tarea de dar cuenta de situaciones reales, que acontecen plagadas de peculiaridades, la Teoría de Juegos refina y amplía los conceptos básicos que se han presentado en este trabajo. Apoyándose en ellos, no ha cesado de desarrollar modelos cada vez más sofisticados. Su exquisito manejo será, por tanto, crucial para explorar los últimos avances en este área. Espero resulten ahora más accesibles.

Bibliografía

[1] R. Myerson, "Game Theory. Analysis of conflict", Harvard University Press, 1991.

[2] J. E. Ricart, "Una introducción a la teoría de Juegos", IESE Business School Universidad de Navarra, 1988.

[3] J.Pérez, J.L.Jimeno, E.Cerdá,"Teoría de Juegos", Pearson, 2004.

[4] A. Torrejon, "Teoría de Juegos", Trabajo de Fin de Grado por la Universidad de Valladolid, 2020.

[5] Autor desconocido. Recuperado de: https://articulosdepoker.es/texas-holdem-poker/

[6] Autor desconocido. Recuperado de : https://cacm.acm.org/magazines/2017/11/222180-heads-up-limit-holdem-poker-is-solved/abstract

[7] P. Morris, "Introduction to Game Theory", Springer-Verlag, 1994.

[8] E. van Damme, "Stability and Perfection of Nash Equilibria, Springer-Verlag, 1996.