

# Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

## Modelización de la propagación de noticias falsas

Autora: Ángela Marcos González

---

Supervisado por:

Santiago Ibáñez Mesa y Pablo Pérez Riera

Curso 2022-2023



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Conceptos básicos . . . . .	9
2.2. Linealización . . . . .	11
<b>3. Un modelo simple</b>	<b>15</b>
3.1. Análisis del modelo . . . . .	16
3.1.1. Propiedades de las soluciones . . . . .	17
3.1.2. Retrato de fases . . . . .	19
3.1.3. Alcance total de la noticia . . . . .	20
3.1.4. Teorema del umbral . . . . .	22
3.2. Simulaciones . . . . .	23
<b>4. Modelo ISR</b>	<b>27</b>
4.1. Análisis del modelo . . . . .	28
4.1.1. Propiedades de las soluciones . . . . .	29
4.1.2. Puntos de equilibrio . . . . .	29
4.1.3. Retrato de fases . . . . .	30
4.2. Simulaciones . . . . .	31
4.2.1. Modelo ISR con $\alpha \neq \beta$ . . . . .	34
<b>5. Modelo SEIR</b>	<b>37</b>
5.1. Análisis del modelo . . . . .	39
5.1.1. Propiedades de las soluciones . . . . .	39
5.1.2. Puntos de equilibrio . . . . .	39

5.1.3. Simulaciones ilustrativas . . . . .	41
5.1.4. Puntos de equilibrio caso particular . . . . .	43
5.2. Simulaciones . . . . .	46
<b>6. Modelo SEIZ</b> . . . . .	<b>51</b>
6.1. Análisis del modelo . . . . .	53
6.1.1. Propiedades de las soluciones . . . . .	54
6.1.2. Puntos de equilibrio . . . . .	55
6.1.3. Estabilidad de los puntos de equilibrio de la forma $(0, 0, I)$ . . . . .	56
6.1.4. Simulaciones ilustrativas . . . . .	58
6.2. Simulaciones . . . . .	60
6.2.1. El <i>hashtag</i> #DCblackout . . . . .	61

# Capítulo 1

## Introducción

Antes de comenzar a analizar cómo se propagan las noticias falsas en una población es necesario dejar claro qué entendemos por noticia falsa, ya que podemos encontrar diferentes definiciones para este término. Las *fake-news* o noticias falsas son noticias engañosas creadas con intención de engañar o desinformar. Por lo general, se trata de noticias impactantes, que se hacen virales rápidamente sin antes ser contrastadas.

Existen también otros conceptos parecidos, como los rumores: estos se pueden definir como una historia que se transmite de persona a persona y en la que se proporciona información dudosa o cuya veracidad no ha sido contrastada. No obstante, en este trabajo nos centraremos exclusivamente en las noticias falsas.

Realmente, de una u otra forma, las *fake-news* siempre han existido, pero hoy en día tienen una gran influencia debido al auge de las redes sociales. Tal es así que el término *posverdad* (una distorsión deliberada de una realidad, que manipula creencias y emociones con el fin de influir en la opinión pública y en actitudes sociales) ha llegado a ser categorizado como palabra del año por el prestigioso diccionario de Oxford.

Debido a su carácter impactante, las noticias falsas se propagan mucho más rápido que las verdaderas; en redes sociales, como Twitter, se ha estudiado que las noticias falsas se *retuitean* hasta un 70 % más que las noticias ciertas [16]. Del mismo modo, se ha comprobado también que una noticia falsa se propaga 6 veces más rápido que una verdadera. Como ya hemos mencionado, esto se puede deber, entre otras causas, a que los titulares que generan las *fake-news* son, con toda la intención, más llamativos que los que generan las noticias que informan con veracidad sobre un suceso.

A lo largo de la historia se ha hecho uso de este tipo de noticias con diversos objetivos. Ya en el siglo I a.C., Augusto puso en marcha una campaña de difamación contra Marco Antonio, su rival en la lucha por el poder en Roma; si hablamos de difamación, hablamos de *fake-news*. En la actualidad, los ejemplos son más que abundantes. Entre otros, podemos citar la manipulación

de información que hubo durante las elecciones estadounidenses de 2016, o los intentos de desinformar a la población con el objetivo de frenar las campañas de vacunación durante la pandemia del COVID-19.

En el trabajo reciente de Franceschi y Pareschi [6] se hace una revisión de diferentes modelos que han sido utilizados en la literatura en el contexto de la propagación de noticias falsas. Esta referencia ha sido el punto de partida de este trabajo, en el que hemos estudiado una buena parte de los distintos sistemas propuestos.

Como no podía ser de otra forma, los modelos que estudian la propagación de noticias falsas han sido diseñados a partir de los modelos epidemiológicos. Fueron D.J. Daley y D.G. Kendall [2] los primeros en desarrollar la analogía; para entenderla estamos obligados a recordar las ecuaciones básicas de la epidemiología matemática: el modelo SIR de Kermack-McKendrick (ver [9]). Estos autores distinguen tres grupos dentro de una población afectada por una epidemia: los susceptibles ( $S$ ), los infecciosos ( $I$ ) y los recuperados ( $R$ ). Los primeros son aquellos individuos que todavía no han contraído la enfermedad; los infectados son aquellos que han sido contagiados y que todavía pueden contagiar a otros; por último, los recuperados son aquellos que han superado la enfermedad y ya no son contagiosos. Ahora, si pensamos en la propagación de una noticia falsa, tenemos una correspondencia clara: podemos identificar como individuos susceptibles a quienes desconocen la noticia, los infecciosos son aquellos que ya la han recibido y además se la están contando a otros y los recuperados son los que conocen la noticia pero han dejado de propagarla. Si introducimos las variables:

- $S$ : individuos que aún no han escuchado la noticia,
- $I$ : individuos que están propagando la noticia,
- $R$ : individuos que ya han dejado de propagar la noticia,

podríamos trasladarlas a las ecuaciones del modelo SIR y ya tendríamos un primer modelo de propagación de *fake-news*. Esto es lo que hicieron Daley y Kendall adaptando el modelo de Kermack-McKendrick a la propagación de noticias falsas. Nos ocuparemos del estudio de este modelo simple en el Capítulo 3, donde nuestras principales referencias serán [5, 9, 11].

En el Capítulo 4 se introduce una primera variante en el modelo de Kermack-McKendrick, la incorporación del valor de novedad de la noticia, es decir, la pérdida de interés en propagarla conforme la conocen más y más personas. Nos referiremos a esta variante como modelo ISR y su análisis lo realizaremos siguiendo [13, 14].

En los dos modelos anteriores se considera que un individuo que ha conocido la noticia se convierte de inmediato en propagador, mientras que no pase al grupo de recuperados. Podemos pensar en una modificación en el sentido de que un individuo que haya conocido la noticia pueda tomarse su tiempo antes de decidir si la propaga o no, es decir, si se incorpora a la clase  $I$  o a la clase

---

$R$ ; nos referimos a este nuevo grupo como la clase  $E$  de los expuestos. Esta variante se conoce como modelo SEIR y la estudiaremos en el Capítulo 5 basándonos en [6].

El modelo SEIZ que estudiamos en el Capítulo 6 considera una nueva clase de individuos, los escépticos ( $Z$ ), que son aquellos que directamente deciden no creerse la noticia, aunque sí la comentan. Este modelo se plantea como adecuado en escenarios del tipo *Twitter* y tiene la particularidad adicional de no considerar la clase de recuperados, ya que la actividad de cada usuario en la red social perdura en el tiempo. Para el estudio de este modelo seguiremos [1, 10].

El esquema de trabajo con cada modelo será siempre el mismo. En primer lugar, utilizando la existencia de integrales primeras elementales reduciremos en una unidad la dimensión de nuestros sistemas. En estos modelos simplificados nos ocuparemos del estudio de los comportamientos asintóticos de las soluciones utilizando herramientas analíticas; la dimensión en cada caso determinará la elección de unas técnicas u otras. La mayor parte serán resultados que han sido vistos en el grado, pero en ocasiones puntuales tendremos que hacer referencia a alguna técnica más avanzada. En cualquier caso, en el Capítulo 2 se recogen los resultados utilizados con más frecuencia. Por último, el análisis de cada modelo se completará con oportunas simulaciones numéricas.



# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo introduciremos algunos resultados que nos permitirán llevar a cabo un análisis cualitativo de los modelos que iremos presentando a lo largo del trabajo. Nos interesará conocer el comportamiento asintótico de las órbitas y estudiar la estabilidad de los posibles puntos de equilibrio que presenten los modelos. Esta información nos permitirá analizar la dinámica de los modelos que veremos en los próximos capítulos. Para esta recopilación de conceptos y resultados hemos seguido los libros de Fernández y Vegas [4] y Sotomayor [15].

### 2.1. Conceptos básicos

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y conexo, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$ . Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Sabemos que, bajo las hipótesis de continuidad y de lipschitzianidad local respecto a la variable  $x$ , el problema tiene una única solución.

Definimos la solución general de la ecuación  $x' = f(t, x)$  como la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \quad \Delta &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0) &\longmapsto \psi(t, t_0, x_0) \end{aligned}$$

donde  $\psi(\cdot, t_0, x_0)$  denota la solución del problema de Cauchy con condiciones iniciales  $(t_0, x_0)$ . Además,  $\Delta = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : (t_0, x_0) \in \Omega, t \in I_{t_0, x_0}\}$ , donde  $I_{t_0, x_0}$  es el intervalo maximal de definición.

## Ecuaciones diferenciales autónomas

Nos centraremos ahora en las ecuaciones diferenciales autónomas, es decir, aquellas en las que la función  $f$  no depende de la variable  $t$  (usualmente, el *tiempo*). Estas ecuaciones serán entonces de la forma

$$x' = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

donde  $D$  es un conjunto abierto.

Las ecuaciones autónomas presentan la propiedad de ser invariantes respecto a las traslaciones. Gracias a esta propiedad es posible trabajar con problemas de Cauchy cuyas condiciones iniciales sean de la forma  $x(0) = x_0 \in D$ , es decir, podemos considerar  $t_0 = 0$  como el instante inicial.

Tendremos entonces que, para el caso autónomo, la solución general será de la forma

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Delta &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_0) &\longmapsto \varphi(t, x_0) = \psi(t, 0, x_0) \end{aligned}$$

donde  $\Delta = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x_0 \in D, t \in I_{x_0}\}$  con  $I_{x_0} = I_{0, x_0}$  y verifica

$$\frac{d\varphi}{dt}(t, x_0) = f(\varphi(t, x_0)),$$

para cualquier  $t \in I_{x_0}$ .

## Órbitas

La órbita de un punto  $x_0 \in D$  se define como el conjunto

$$\gamma_{x_0} = \{\varphi(t, x_0) : t \in I_{x_0}\}.$$

Es posible distinguir entre órbita positiva ( $\gamma_{x_0}^+$ ) y órbita negativa ( $\gamma_{x_0}^-$ ):

$$\gamma_{x_0}^+ = \{\varphi(t, x_0) : t \in I_{x_0} \cap \mathbb{R}^+\} \quad \text{y} \quad \gamma_{x_0}^- = \{\varphi(t, x_0) : t \in I_{x_0} \cap \mathbb{R}^-\}.$$

A partir de estos conceptos es posible definir una relación de equivalencia: decimos que dos puntos  $x, y \in D$  están relacionados si y solo si  $y \in \gamma_x$ , es decir, si pertenecen a la misma órbita. Claramente las clases de conjugación de esta relación se corresponden con las órbitas; de esta forma, tenemos que a cada punto perteneciente al conjunto  $D$  le corresponde una única órbita, en modo tal que obtenemos así una partición de  $D$ . Nos referiremos a  $D$  como espacio de fases; por otro lado, el conjunto cociente respecto a la relación de equivalencia será el retrato de fases.

En los sistemas autónomos, si una solución toma un mismo valor en dos instantes de tiempo distintos habrá dos opciones:

- la solución es constante, es decir,  $\varphi(t, p) = p$  para todo  $t$ . En este caso la órbita queda reducida a un único punto. Los puntos en estas condiciones se denominan puntos de equilibrio y se caracterizan porque anulan el campo vectorial, es decir, verifican que  $f(p) = 0$ .
- la solución es periódica, es decir, existe  $T > 0$  tal que  $\varphi(t + T, x_0) = \varphi(t, x_0)$  para todo  $t$ . Cuando esto ocurra, tendremos que la órbita  $\gamma_{x_0}$  de  $x_0$  es una curva cerrada simple.

### Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio y en concreto su estabilidad cobrarán gran importancia durante el estudio de nuestros modelos; recordemos por lo tanto una clasificación de los mismos en función de esta propiedad. Denotamos para ello  $p$  a un punto de equilibrio genérico y diremos que:

- $p$  es estable si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|x - p\| < \delta$  entonces  $\varphi(t, x)$  está definida para todo  $t \geq 0$  y además  $\|\varphi(t, x) - p\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ .
- $p$  es asintóticamente estable si es estable y además  $\delta$  puede escogerse de forma que si  $\|x - p\| < \delta$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = p$ .
- $p$  es inestable si no es estable.

## 2.2. Linealización

Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f \in C^1(\Omega)$ . Decimos que  $p \in \Omega$  es un punto de equilibrio si  $f(p) = 0$ . Un punto que no es de equilibrio se dice regular. Además, diremos que un punto de equilibrio  $p \in \Omega$  es hiperbólico si todos los autovalores de  $Df(p)$  tienen parte real distinta de 0 (denotamos con  $Df(p)$  a la matriz jacobiana de  $f$  en  $p$ ).

En esta sección veremos cómo el estudio de los puntos de equilibrio de una ecuación autónoma de la forma (2.1) se puede reducir al análisis de la estabilidad del origen en el sistema lineal.

El sistema linealizado de (2.1) en el punto  $p$  viene dado por la siguiente ecuación:

$$y' = Df(p)y. \quad (2.2)$$

Veamos ahora un resultado que nos permitirá establecer una relación entre los puntos de equilibrio de los campos (2.1) y (2.2). Para ello será necesario definir en primer lugar el concepto de conjugación topológica.

**Definición 2.1.** Dos campos  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de clase  $C^1$  se dicen topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tal que  $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ , donde  $\varphi$  y  $\psi$  denotan los flujos correspondientes a  $f$  y  $g$ , respectivamente.

Dicho de otra forma, dos campos son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo entre los espacios de fases que lleva órbitas en órbitas conservando sentido y parametrización (con respecto a la variable independiente).

**Teorema 2.1** (Teorema de Hartman). *Sea  $p$  un punto de equilibrio hiperbólico. Existen entornos  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$  y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  que establece una conjugación entre el campo  $f$  restringido a  $U$  y el campo  $L$  restringido a  $V$ , siendo  $L(x) = Df(p)x$  (la parte lineal del campo  $f$  en  $p$ ).*

Aplicando este teorema a nuestros campos es posible concluir que las soluciones de (2.1) próximas al punto  $p$  tienen el mismo comportamiento que las soluciones de (2.2) próximas al origen, como queríamos comprobar.

### Clasificación de puntos de equilibrio

Veamos ahora algunos resultados que nos permitirán obtener más información sobre el comportamiento de los puntos de equilibrio según sean los valores propios de  $Df(p)$ .

**Definición 2.2.** Decimos que un punto de equilibrio  $p \in \Omega$  es atractor (respectivamente repulsor) si existe un entorno  $B$  de  $p$  tal que  $\varphi(t, x) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (respectivamente  $t \rightarrow -\infty$ ). Si el punto de equilibrio no se encuentra en ninguno de estos dos casos decimos que es de tipo silla.

**Teorema 2.2** (Adaptado de [15]). *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *el origen es un atractor del sistema linealizado,*
- *todos los autovalores de  $Df(p)$  tienen parte real negativa,*
- *el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

**Teorema 2.3** (Adaptado de [15]). *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *el origen es un repulsor del sistema linealizado,*
- *todos los autovalores de  $Df(p)$  tienen parte real positiva,*
- *el origen es un punto de equilibrio inestable.*

Finalmente, el resultado siguiente nos permitirá concluir la inestabilidad de un punto de equilibrio a partir de la existencia de un autovalor con parte real positiva en la parte lineal.

**Teorema 2.4** (Adaptado de [4]). *Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo de vectores de clase  $C^1$  y sea  $p \in \Omega$  un punto de equilibrio. Si  $Df(p)$  tiene un autovalor con parte real positiva, entonces  $p$  es inestable.*

Gracias a estos resultados nos damos cuenta de que para conocer el comportamiento de un punto de equilibrio hiperbólico  $p$  bastará conocer los valores propios de la matriz jacobiana  $Df(p)$ . Esto presenta un inconveniente, y es que el cálculo y el estudio de estos autovalores se complica conforme aumenta la dimensión de la matriz  $Df(p)$  y se complica aún más cuando entran en juego parámetros (como sucederá en los modelos que estudiaremos más adelante).

En el caso particular de que  $Df(p)$  sea una matriz de dimensión 2 es posible establecer condiciones alternativas que nos aseguren que los valores propios tengan, todos ellos, parte real negativa. Sabemos que todos los valores propios de  $Df(p)$  tienen parte real negativa si y solo si

$$\text{tr}(Df(p)) < 0 \quad \text{y} \quad \det(Df(p)) > 0.$$

Para concluir esta sección, ilustramos una clasificación de los puntos de equilibrio en función del valor de la traza y el determinante de la matriz jacobiana  $Df(p)$ . En la Figura 2.1 aparece información sobre la forma que toma en cada caso el retrato de fases en un entorno del punto de equilibrio.

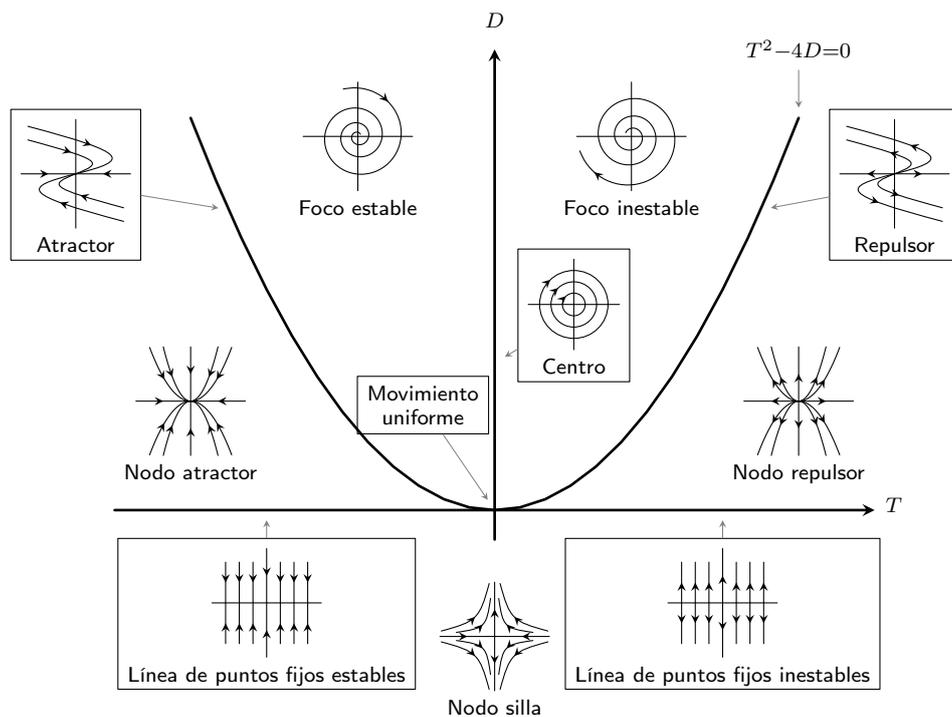


Figura 2.1: Clasificación de puntos de equilibrio según la traza ( $T$ ) y el determinante ( $D$ ) de la matriz jacobiana. La figura ha sido adaptada de <https://texample.net/tikz/examples/poincare/>.



## Capítulo 3

# Un modelo simple

El primer modelo que estudiaremos en profundidad será el modelo epidemiológico de Kermack-McKendrick. Este modelo es el más simple, pero no por ello menos interesante, para explicar la propagación de epidemias; en nuestro caso lo adaptaremos para poder ilustrar de manera sencilla cómo se propagan las noticias falsas.

Este modelo es también conocido como modelo SIR. Esta nomenclatura viene de los nombres que se dan a los distintos grupos en los que se divide a la población:

- $S$  (Susceptibles): individuos que aún no conocen la noticia falsa;
- $I$  (Infecciosos): individuos que están propagando la noticia;
- $R$  (Recuperados): individuos que ya han dejado de propagar la noticia.

La interacción entre estos tres grupos se rige mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S I, \\ I'(t) = \beta S I - \alpha I, \\ R'(t) = \alpha I, \end{cases} \quad (3.1)$$

con condiciones iniciales  $S(0) = S_0 > 0$ ,  $I(0) = I_0 > 0$  y  $R(0) = R_0 = 0$ .

En la Figura 3.1 se puede ver cómo es el flujo de individuos entre las clases.

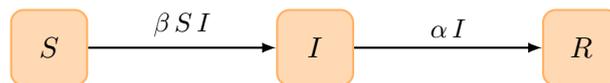


Figura 3.1: Diagrama de transferencia del modelo de Kermack-McKendrick.

Notamos que en las ecuaciones anteriores aparecen dos parámetros:  $\beta$  y  $\alpha$ . El primero de ellos,  $\beta$  se corresponde con la tasa de contacto entre individuos susceptibles e individuos infecciosos,

mientras que  $\alpha$  hace referencia a la probabilidad de que un individuo que estaba propagando la noticia deje de hacerlo, es decir, dicho en términos epidemiológicos, la probabilidad de que un infeccioso se recupere.

### 3.1. Análisis del modelo

Denotando el tamaño total de la población en el instante inicial por  $N_0$ , resulta evidente que  $N_0 = S_0 + I_0 + R_0$ . Sumando las ecuaciones del sistema se comprueba que, siendo  $N = S + I + R$ ,

$$N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0,$$

por lo que concluimos que el tamaño de la población permanece constante, es decir,  $N(t) = N_0$  para cualquier  $t \geq 0$ .

Haciendo uso de esta hipótesis será posible reducir el sistema inicial a un problema 2-dimensional, ya que el número de recuperados se puede obtener a partir de los susceptibles e infecciosos mediante la expresión

$$R(t) = N_0 - S(t) - I(t).$$

De esta forma es posible transformar (3.1) en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S I, \\ I'(t) = \beta S I - \alpha I. \end{cases} \quad (3.2)$$

Observamos que  $S'(t) < 0$  para cualquier  $t \geq 0$ . Esto significa que el número de susceptibles siempre disminuye; esto se debe a que una vez que un individuo entra en contacto con la noticia estará interactuando con ella de alguna manera, bien sea desde la clase de los infecciosos o desde la de los recuperados, pero no podrá volver a ser desconocedor de ella, es decir, regresar al grupo de los susceptibles.

En cambio, al observar la segunda ecuación del sistema,

$$I'(t) = \beta S I - \alpha I = (\beta S - \alpha) I,$$

nos damos cuenta de que en función del valor de  $S$  podemos tener  $I'(t) < 0$  o  $I'(t) > 0$ . Analicemos ambos casos:

- $I'(t) < 0$ : estaremos en este caso si  $S_0 < \frac{\alpha}{\beta}$ . Esta situación se traduce en que el número de infecciosos irá disminuyendo hasta convertirse en 0.
- $I'(t) > 0$ : esto ocurrirá cuando  $S_0 > \frac{\alpha}{\beta}$ . En esta situación el número de infecciosos aumentará hasta alcanzar su máximo (cuando  $S = \frac{\alpha}{\beta}$ ), después de eso comenzará a decrecer hasta

llegar a 0.

Concluimos por lo tanto que el valor  $\frac{\beta S_0}{\alpha}$  determina un cambio en la evolución de la propagación de la noticia falsa. Denotaremos a este valor por  $\mathcal{R}_0$  y nos referiremos a él como *número de reproducción básico*.

Por lo tanto, notamos que, cuando  $\mathcal{R}_0 < 1$ , la noticia falsa tiende a desaparecer sin llegar a causar demasiados perjuicios; mientras que, cuando  $\mathcal{R}_0 > 1$ , se produce una epidemia de desinformación entre la población.

A continuación realizaremos un estudio del modelo que nos permitirá probar de manera rigurosa las propiedades que acabamos de plantear.

### 3.1.1. Propiedades de las soluciones

Estudiando el sistema (3.1) sobre los planos de coordenadas y recordando que  $S + I + R = N_0$ , se puede probar que el conjunto  $\{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S + I + R = N_0\}$  es positivamente invariante<sup>1</sup>. Por otra parte, habíamos visto también que este sistema (3.1) se puede reducir a un campo 2-dimensional de la forma

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S I, \\ I'(t) = \beta S I - \alpha I. \end{cases}$$

Con esta reducción, el conjunto positivamente invariante al que tenemos que prestar atención es

$$\Gamma = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq N_0\},$$

que aparece representado en la Figura 3.2.

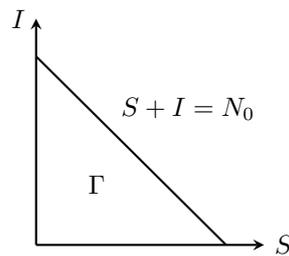


Figura 3.2: Representación del conjunto  $\Gamma$ .

Esta propiedad nos indica que las órbitas positivas de los puntos pertenecientes al conjunto están

<sup>1</sup>Se dice que un conjunto  $D$  es positivamente invariante si la órbita positiva de cualquier punto  $x \in D$  está contenida en  $D$ .

acotadas, es más, están contenidas en un compacto. Como consecuencia, las órbitas del sistema se pueden prolongar en el tiempo a todo el intervalo  $[0, +\infty)$ .

Además es posible tomar límites cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ , es decir, existen  $S_\infty, I_\infty, R_\infty \in \mathbb{R}$  tales que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t), I(t), R(t)) = (S_\infty, I_\infty, R_\infty).$$

A continuación probaremos la existencia de dicho límite y por ende conoceremos el comportamiento de las variables cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ .

Volviendo al sistema (3.1), sabemos que  $S'(t) = -\beta SI < 0$  con condición inicial  $S_0 \geq 0$ , por lo que  $S$  es una función decreciente que está acotada inferiormente por 0, luego existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_\infty \geq 0$ .

Pasando ahora a la ecuación  $R'(t) = \alpha I$ , observamos que  $R$  es una función creciente, ya que  $\alpha I > 0$ . Además, puesto que  $S(t) + I(t) + R(t) = N_0$ , con  $S(t), I(t), R(t) \geq 0$ , se trata de una función acotada por  $N_0$  por lo que podemos afirmar la existencia de  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = R_\infty \geq 0$ .

Para probar la existencia de  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$  bastará despejar  $I(t)$  en la igualdad  $S(t) + I(t) + R(t) = N_0$ . De este modo obtenemos  $I(t) = N_0 - S(t) - R(t)$  y tomando límites se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I_\infty = N_0 - S_\infty - R_\infty \geq 0$ .

Además, en cuanto al comportamiento de las variables cuando  $t \rightarrow +\infty$ , es posible enunciar la siguiente propiedad.

**Proposición 3.1.** *Si  $S_0 > 0$  e  $I_0 > 0$ , entonces se tiene que  $0 < S_\infty < S_0$  y que  $I_\infty = 0$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad suponemos  $R_0 = 0$ , en caso contrario bastaría considerar  $\hat{N}_0 = N_0 - R_0$ . Se tiene entonces que  $S(t) > 0$ ,  $I(t) > 0$ ,  $R(t) > 0$  para  $t > 0$ . Dividiendo la ecuación de  $S$  entre la de  $R$  obtenemos

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{\beta SI}{\alpha I} = -\frac{\beta S}{\alpha},$$

y resolviendo esta ecuación para  $S$  se obtiene

$$S(R) = S_0 e^{-\frac{\beta}{\alpha} R} \geq S_0 e^{-\frac{\beta}{\alpha} N_0} > 0.$$

Además, anteriormente ya habíamos observado que  $S$  es una función decreciente, por lo que se concluye que

$$0 < S_\infty < S_0.$$

Ahora probaremos que  $I_\infty = 0$ . Teniendo en cuenta la existencia de  $S_\infty$  y  $I_\infty$  y recordando la ecuación  $S' = -\beta SI$ , se tiene que existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \beta S(t) I(t) = -\beta S_\infty I_\infty.$$

Además este límite es igual a 0; para probarlo procedemos por reducción al absurdo: suponemos  $\lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = \delta < 0$  y llegaremos a contradicción. Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = \delta < 0$ , existirá  $\hat{t}$  suficientemente grande de manera que  $S'(t) < \frac{\delta}{2}$  para  $t > \hat{t}$ . Por el carácter monótono de la integral, es posible integrar a ambos lados y la desigualdad se mantiene, es decir,

$$\int_{\hat{t}}^t S'(x) dx < \int_{\hat{t}}^t \frac{\delta}{2} dx.$$

Integrando obtenemos

$$S(t) - S(\hat{t}) < \frac{\delta}{2}(t - \hat{t}) \quad \Rightarrow \quad S(t) < S(\hat{t}) + \frac{\delta}{2}(t - \hat{t}).$$

Por lo tanto, para  $t > \hat{t} - \frac{2S(\hat{t})}{\delta}$  se tendrá que  $S(t) < 0$ , lo que contradice la hipótesis  $S(t) \geq 0$  para todo  $t$ . Entonces necesariamente  $\lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = 0$ , lo que implica que  $-\beta S_{\infty} I_{\infty} = 0$  y, puesto que antes hemos probado que  $S_{\infty} > 0$ , la única opción es que  $I_{\infty} = 0$ .  $\square$

La propiedad anterior nos permite extraer las siguientes conclusiones:

- Por un lado, existirá una fracción  $S_{\infty}$  de los susceptibles que nunca llegan a conocer la noticia.
- Por otro lado, la noticia falsa, pasado un determinado tiempo, pierde toda la relevancia que pudo llegar a tener; cayendo de este modo en el olvido.

### 3.1.2. Retrato de fases

A la luz de las conclusiones que acabamos de obtener cabe preguntarse por qué una noticia falsa va alcanzando a más y más gente hasta llegar a su máximo alcance y posteriormente comienza a ir disminuyendo hasta desaparecer. Para ver por qué el comportamiento de una noticia falsa es exactamente ese y no otro, estudiaremos el retrato de fases del sistema (3.2), es decir, las ecuaciones que consideraremos para realizar este estudio serán:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S I, \\ I'(t) = \beta S I - \alpha I. \end{cases}$$

Dividiendo la segunda entre la primera se obtiene

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S},$$

e integrando a ambos lados se tiene

$$\int dI = \int \left(-1 + \frac{\alpha}{\beta S}\right) dS \quad \Rightarrow \quad \phi(S, I) = I + S - \frac{\alpha}{\beta} \ln S = C,$$

donde  $C$  es una constante de integración y por tanto puede ser determinada a partir de  $S_0$  e  $I_0$ .

La función  $\phi(S, I)$  es una integral primera<sup>2</sup> del sistema; en efecto, verifica que

$$\frac{d}{dt}\phi(S(t), I(t)) = I'(t) + S'(t) - \frac{\alpha S'(t)}{\beta S(t)} = -\alpha I(t) + \frac{\alpha}{\beta} \beta I(t) = 0,$$

para todo  $t$ .

Entonces, para conocer el retrato de fases del modelo (3.2), bastará con representar las curvas de nivel  $\phi(S(t), I(t)) = C$  para diferentes valores de la constante  $C$ ; el retrato de fases de este modelo aparece representado en la Figura 3.3.

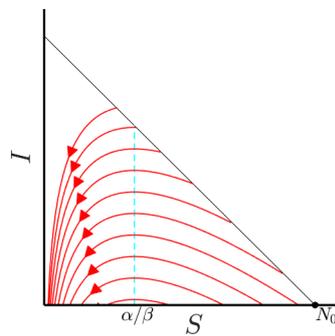


Figura 3.3: Retrato de fases.

Observando las órbitas podemos extraer varias conclusiones:

- El número máximo de individuos infecciosos se alcanza cuando  $S = \frac{\alpha}{\beta}$ .
- Si  $S_0 < \frac{\alpha}{\beta}$ , entonces  $I(t)$  decrece de manera monótona conforme pasa el tiempo.
- Si  $S_0 > \frac{\alpha}{\beta}$ , entonces  $I(t)$  crece monótonamente hasta alcanzar su máximo valor (cuando  $S = \frac{\alpha}{\beta}$ ), tras esto comienza a decrecer hasta cero.

En adelante, llamaremos *umbral de propagación* al valor  $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$ .

### 3.1.3. Alcance total de la noticia

Claramente resultará de gran interés conocer el alcance que tiene la noticia falsa. Veremos tres formas de cuantificar este alcance: la primera de ellas será calcular cuál es el número máximo de individuos infecciosos simultáneos; la segunda será calcular el número de individuos que nunca

<sup>2</sup>Se dice que una función  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una integral primera del campo  $f$  si no es una función constante pero permanece constante a lo largo de las órbitas de  $f$ , es decir, la derivada orbital de  $\phi$  respecto a  $f$  es nula.

llegan a conocer la noticia; y por último, la tercera consistirá en calcular el número final de individuos que han entrado en contacto con la noticia.

Por el desarrollo visto en el apartado anterior, sabemos que, dada una solución  $(S(t), I(t))$  del sistema de ecuaciones (3.2), existirá una constante  $C$  de manera que  $\phi(S(t), I(t)) = C$  para todo  $t$ .

Sea  $I_{\text{máx}}$  el número máximo de individuos infecciosos. Como ya hemos explicado, este valor se alcanza cuando  $S = \rho$  y puesto que  $\phi$  se mantiene constante a lo largo de las órbitas se tiene que

$$\phi(S_0, I_0) = \phi(\rho, I_{\text{máx}}).$$

Desarrollando la expresión de  $\phi$  resulta

$$I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 = I_{\text{máx}} + \rho - \rho \ln \rho,$$

y despejando  $I_{\text{máx}}$ ,

$$I_{\text{máx}} = I_0 + S_0 - \rho - \rho \ln S_0 + \rho \ln \rho,$$

que nos indica el número máximo de infecciosos.

En la Figura 3.3 observamos que cada órbita viaja desde un punto de equilibrio del eje horizontal hasta otro punto de equilibrio en el mismo eje. Sea  $(S^*, 0)$  el primero de los equilibrios y  $(S_\infty, 0)$  el segundo. Para cada condición inicial  $(S_0, I_0)$  sobre la órbita, el valor  $S_\infty$  representa el número de personas que nunca llegan a conocer la noticia y podemos relacionarlo con el valor  $S^*$ . Se tiene que

$$\phi(S^*, 0) = \phi(S_\infty, 0).$$

A partir de la expresión de  $\phi$ , resulta

$$S^* - \rho \ln S^* = S_\infty - \rho \ln S_\infty,$$

El escenario natural es considerar que el número inicial de infectados es muy pequeño y que por lo tanto el punto  $(S_0, I_0)$  está próximo a  $(S^*, 0)$ . En estas condiciones tendría sentido aproximar  $S^*$  por  $S_0$  para obtener el número  $S_\infty$  de personas que no llegan a conocer la noticia:

$$S_0 - \rho \ln S_0 \approx S_\infty - \rho \ln S_\infty. \quad (3.3)$$

Nos referiremos a la expresión (3.3) como *ecuación de tamaño final*.

Adicionalmente, a partir de estos cálculos es posible hallar el valor de  $S_0 - S_\infty$ , que representa el número final de individuos que han entrado en contacto con la noticia. Además, puesto que  $I_0 \approx 0$  y  $R_0 = 0$ , se tiene que

$$S_0 - S_\infty = R_\infty.$$

Despejando  $\rho$  en la expresión (3.3) se obtiene

$$\rho \approx \frac{S_0 - S_\infty}{\ln S_0 - \ln S_\infty}. \quad (3.4)$$

En este modelo el número de reproducción básico  $\mathcal{R}_0$  viene dado por

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta S_0}{\alpha} = \frac{S_0}{\rho}.$$

Si  $\mathcal{R}_0$  fuese conocido, entonces podríamos calcular el valor de  $\rho$  y estimar  $S_0$  a partir de la expresión (3.3). Recíprocamente, si conociésemos  $S_\infty$ , entonces podríamos obtener una estimación de  $\mathcal{R}_0$  usando la expresión (3.4).

### 3.1.4. Teorema del umbral

Para poner punto final al análisis de este modelo enunciaremos un resultado que nos proporcionará una estimación del número final de individuos que no han entrado en contacto con la noticia una vez que esta ya ha desaparecido.

**Teorema 3.2** (Teorema del umbral).

- *Tendremos una epidemia de desinformación si y solo si  $S_0$  es mayor que el umbral  $\rho$ .*
- *Si  $S_0 = \rho + v$ , con  $v > 0$  suficientemente pequeño, entonces una vez la noticia haya desaparecido, el número de susceptibles será aproximadamente  $S_\infty = \rho - v$ .*

*Demostración.* El primer apartado ya ha sido probado durante el estudio del retrato de fases. Para probar el segundo apartado, suponemos  $I_0 \approx 0$  y estudiaremos las curvas de nivel de la integral primera. Consideremos una curva de nivel

$$\phi(S, I) = I + S - \rho \ln S = C.$$

Despejando  $I$  se obtiene

$$I = C - S + \rho \ln S,$$

cuyo desarrollo de Taylor de orden dos centrado en  $\rho$  es de la forma

$$T_2(S) = C - \rho + \rho \ln \rho - \frac{1}{2\rho} (S - \rho)^2.$$

Observamos que se trata de una parábola cuyo vértice se encuentra en la recta  $S = \rho$ . Si el máximo de esta parábola es suficientemente pequeño, entonces la curva de nivel cortará al eje  $I = 0$  en dos puntos aproximadamente simétricos respecto a la recta  $S = \rho$ , como se muestra en la Figura 3.3. Con esto se concluye que  $S_\infty \approx \rho - v$ .  $\square$

## 3.2. Simulaciones

Nuestro objetivo en esta sección será comparar el impacto y propagación de las *fake-news* entre diferentes países. Consideraremos una muestra de países de distintos continentes para así tener (y obtener) datos más variados.

Recordemos que en este modelo entraban en juego los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$ :  $\beta$  se corresponde con la tasa de contacto entre infecciosos y susceptibles y  $\alpha$  con la tasa de recuperación. Estos parámetros están estrechamente relacionados con dos índices: el *índice de penetración de internet* y el *índice de desarrollo humano*, respectivamente. Estos dos índices son comúnmente utilizados para medir el crecimiento social, cultural y económico de la sociedad.

D'Ambrosio *et al.* [3] proponen una forma de estimar  $\beta$  y  $\alpha$  mediante el uso de estos índices:

$$\beta = \frac{i}{10}, \quad \alpha = \frac{h}{100},$$

donde  $i$  se corresponde con el *índice de penetración de Internet*<sup>3</sup> y  $h$  con el *índice de desarrollo humano*<sup>4</sup>.

Rápidamente nos damos cuenta de que, en general,  $\beta$  será mayor que  $\alpha$ ; esto se debe a que resulta mucho más sencillo propagar una mentira que reafirmar la verdad. Para entender esto es muy importante tener siempre en mente las diferencias entre las noticias falsas y las verdaderas. Recordemos que las noticias falsas se propagan *online* mucho más rápido que las que narran información contrastada. Las *fake-news*, por sus características, tienen muchas más posibilidades de ser compartidas y hacerse virales frente a las noticias ciertas. Además, si a esto le sumamos que en numerosas ocasiones entran en juego cuentas falsas y *bots* creados con el fin de viralizar estas noticias y confundir a la población, resulta evidente que la velocidad de propagación de este tipo de noticias será bastante rápida.

Por el contrario, a la hora de desmentir noticias falsas y difundir la verdad, por lo general, solo contamos con la ayuda de la población, por lo que se requiere de un gran compromiso por su parte para poder restaurar la verdad. Tenemos, además otros inconvenientes: como decíamos antes, las noticias contrastadas suelen alcanzar a menos personas y rara vez se hacen virales. Asimismo, si pensamos en el comportamiento humano, nos daremos cuenta de que no es frecuente ver cómo una persona que estaba compartiendo información falsa sobre un tema se desmiente a sí misma para comenzar a difundir la verdad, ya que esto supondría admitir públicamente su error.

Todo esto que acabamos de exponer es lo que además motiva la relación del parámetro  $\alpha$  con el desarrollo humano del país y  $\beta$  con lo extendido que está Internet en el territorio.

---

<sup>3</sup>Esta cifra se puede consultar en el informe anual publicado por el Programa De Las Naciones Unidas Para El Desarrollo. <https://hdr.undp.org/data-center/human-development-index>

<sup>4</sup>Esta cifra se puede consultar en las estadísticas elaboradas por la Unión Internacional de Telecomunicaciones. <https://www.itu.int/en/ITU-D/Statistics/Pages/stat/default.aspx>

Los países que consideraremos para realizar este estudio serán: España, Sri Lanka, Honduras y Níger. En la Tabla 3.1 vienen representados los valores de  $\beta$  y  $\alpha$  para estos países.

País	$\beta$	$\alpha$
España	0.094	0.00905
Sri Lanka	0.067	0.00782
Honduras	0.048	0.00621
Níger	0.022	0.00400

Tabla 3.1: Valores de la tasa de contacto  $\beta$  y de la tasa de recuperación  $\alpha$  en algunos países.

Hemos escrito un programa (con el lenguaje de MATLAB) que nos permite visualizar la evolución de la población para los distintos países. Realizaremos un seguimiento a lo largo de 500 unidades de tiempo (usualmente, la unidad de tiempo suele ser 15 minutos) y consideraremos como datos iniciales que el número de susceptibles es un 95 % de la población total del país, el de infecciosos un 5 % y el de recuperados 0.

Este estudio resulta muy interesante ya que además de permitirnos observar las diferencias en la propagación de noticias falsas entre unos países y otros, nos permite observar de forma clara las propiedades del modelo que habíamos estudiado al inicio de este capítulo.

En las gráficas que siguen a continuación podemos observar la evolución de la población en cada uno de los casos. Si comparamos por ejemplo la evolución de la noticia falsa en España (Figura 3.4(a)) con la evolución en Níger (Figura 3.4(d)) las diferencias son muy notables. De los países que abarca nuestro estudio, España es el que tiene los valores más altos tanto de  $\beta$  como de  $\alpha$ ; Níger, por el contrario, es el que presenta los valores más pequeños. Como consecuencia de este hecho, en España el contagio y la recuperación de los individuos se produce de forma mucho más rápida que en Níger, como se observa claramente en las figuras.

Fijémonos ahora en los casos de Sri Lanka (Figura 3.4(b)) y Honduras (Figura 3.4(c)). En Honduras el parámetro  $\beta$  tiene un valor menor que en Sri Lanka; como consecuencia el contagio será más rápido en el caso de Sri Lanka. La curva de infecciosos alcanza su máximo antes en Sri Lanka que en Honduras y también tiende a desvanecerse con mayor rapidez.

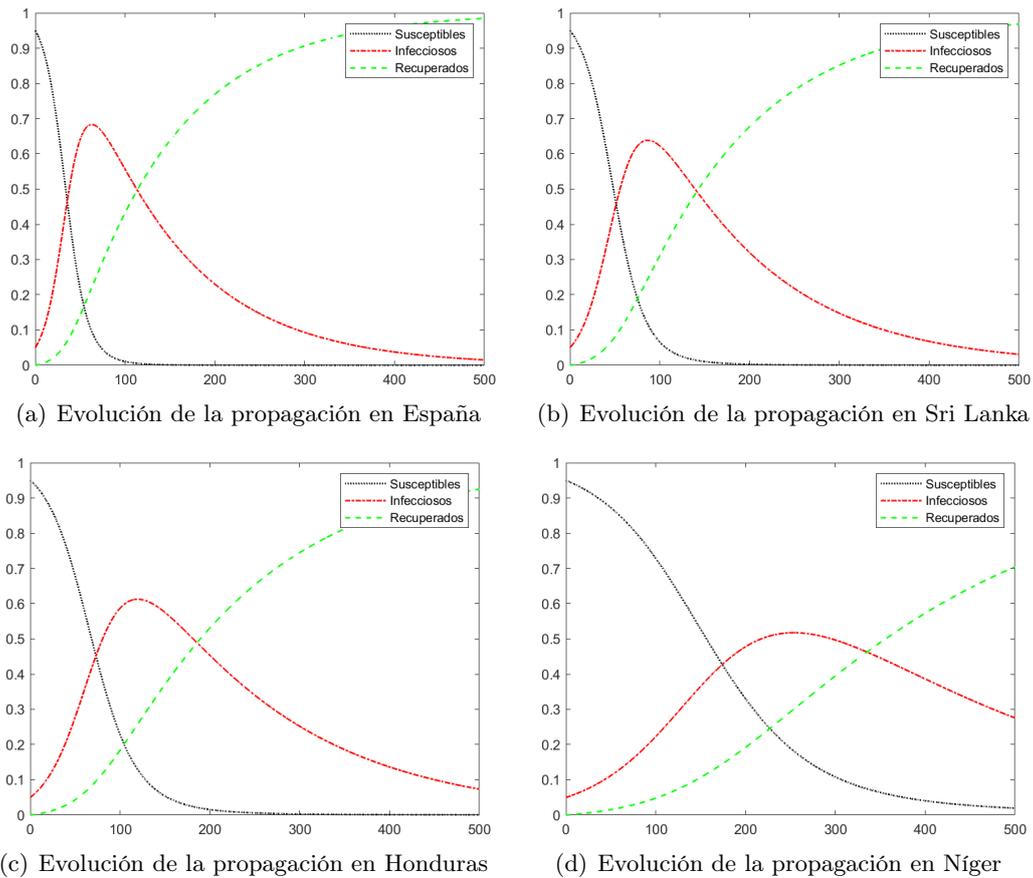


Figura 3.4: Evolución de la propagación de la noticia falsa en distintos países según el modelo SIR. El tamaño de población se mide en escala de proporción de 0 a 1.



## Capítulo 4

# Modelo ISR

En este modelo se realiza una división de la población en tres grupos<sup>1</sup>:

- $I$  (Ignorantes): son los individuos que aún no conocen la noticia falsa;
- $S$  (*Spreaders*): son aquellos que están propagando la noticia;
- $R$  (Recuperados): son aquellos que conocen la noticia pero no la están propagando.

La principal diferencia que aporta este modelo con respecto al modelo simple (SIR) reside en los motivos que empujan a un individuo perteneciente al grupo de los infecciosos a dejar de propagar la noticia falsa, convirtiéndose así en un recuperado. En este modelo aparece una novedad que explica este paso, y es que la noticia pierda su valor de novedad.

En relación con esta pérdida del valor de novedad, entrará en juego la tasa de contacto entre un individuo infeccioso con otro infeccioso o con un recuperado; este parámetro, que denotaremos con  $\alpha$ , se puede interpretar como la tasa de contacto entre una persona que está propagando la noticia con otra persona que ya la conoce. Si pensamos en los rumores resulta muy sencillo comprender que cuando alguien que está propagando uno comienza a encontrarse de manera continuada con personas que ya lo conocen, este perderá el interés en seguir con su propagación; a esto nos referimos cuando hablamos del valor de novedad de la noticia.

Las ecuaciones por las que se rige este modelo son las siguientes:

$$\begin{cases} I'(t) = -\beta I S, \\ S'(t) = \beta I S - \alpha S (S + R), \\ R'(t) = \alpha S (S + R). \end{cases} \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>En este caso no estamos usando la notación habitual Susceptibles-Infecciosos-Recuperados. Esto se debe a que hemos traducido del inglés parte de las siglas del modelo ISS (*Ignorants-Spreaders-Stiflers*).

En la Figura 4.1 podemos observar cómo es el flujo de individuos entre los grupos de población del modelo.

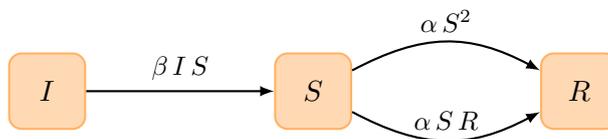


Figura 4.1: Diagrama de transferencia del modelo ISR.

## 4.1. Análisis del modelo

Si denotamos por  $N_0$  al tamaño de total de la población en el instante inicial, resulta evidente que  $N_0 = I_0 + S_0 + R_0$ . Además, si sumamos las ecuaciones del sistema se comprueba fácilmente que, denotando  $N = I + S + R$ , se cumple

$$N'(t) = I'(t) + S'(t) + R'(t) = 0,$$

por lo que concluimos que el tamaño de la población permanece constante, es decir,  $N(t) = N_0$  para cualquier  $t \geq 0$ .

Haciendo uso de esta hipótesis es posible reducir el sistema inicial a un problema en 2 dimensiones, ya que el número de recuperados se puede obtener a partir del número de ignorantes y *spreaders* de la siguiente manera:

$$R(t) = N_0 - I(t) - S(t).$$

De esta forma es posible transformar (4.1) en este sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} I'(t) = -\beta I S, \\ S'(t) = (\alpha + \beta) I S - \alpha N_0 S. \end{cases} \quad (4.2)$$

Observamos además que  $I'(t) < 0$  para cualquier  $t \geq 0$ . Esto significa que el número de ignorantes siempre disminuye, lo que es debido a que el modelo asume que todo el grupo de ignorantes está en contacto con el grupo de *spreaders*. No hay entrada en el grupo de ignorantes porque una vez que un individuo conoce la noticia nunca la olvida, como se ilustra en el diagrama de la Figura 4.1.

En cambio, si nos fijamos en la segunda ecuación del sistema, observamos que las zonas de monotonía de  $S$  dependerán de la elección de los parámetros y del valor de  $I$  en cada instante. Estudiaremos esto con más detalle cuando determinemos el *umbral de propagación*.

### 4.1.1. Propiedades de las soluciones

Estudiando el sistema (4.1) sobre cada uno de los planos de coordenadas y recordando que  $I + S + R = N_0$ , se prueba que el conjunto

$$\{(I, S, R) \in \mathbb{R}^3 : I \geq 0, S \geq 0, R \geq 0, I + S + R = N_0\}$$

es positivamente invariante. Por otra parte habíamos visto también que es posible reducir el sistema (4.1) a un problema 2-dimensional de la forma (4.2). Para este sistema reducido, resulta que el conjunto

$$\Gamma = \{(I, S) \in \mathbb{R}^2 : I \geq 0, S \geq 0, I + S \leq N_0\}$$

es positivamente invariante. Esta propiedad, junto con el carácter compacto de  $\Gamma$ , implica que todas las órbitas contenidas en  $\Gamma$  se pueden prolongar en el tiempo a todo el intervalo  $[0, +\infty)$ .

### 4.1.2. Puntos de equilibrio

Se sigue fácilmente que los puntos de equilibrio del sistema (4.2) son todos aquellos de la forma  $(I^*, 0)$  con  $0 \leq I^* \leq N_0$ . Es inmediato comprobar que la diferencial del campo en un punto de equilibrio genérico es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta I^* \\ 0 & (\alpha + \beta)I^* - \alpha N_0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = (\alpha + \beta)I^* - \alpha N_0.$$

Si  $I^* > \frac{\alpha N_0}{\alpha + \beta}$ , el equilibrio es inestable. En otro caso, el criterio de linealización no es concluyente.

Este estudio que acabamos de realizar nos sirve también para determinar el valor del *umbral de propagación*, que será  $\rho = \frac{\alpha N_0}{\alpha + \beta}$ . Este parámetro nos proporciona la siguiente información:

- Si  $I < \rho$ , entonces  $S(t)$  decrecerá de manera monótona conforme pasa el tiempo.
- Si  $I > \rho$ , entonces  $S(t)$  crecerá hasta alcanzar su máximo valor (cuando  $I = \rho$ ) y posteriormente comenzará a decrecer hasta cero. Cuando nos encontremos en esta situación estaremos frente a una *epidemia de desinformación*.

En el próximo apartado, podremos observar este comportamiento gráficamente, ya que estudiaremos el retrato de fases del modelo.

### 4.1.3. Retrato de fases

Las ecuaciones a las que prestaremos atención para realizar este estudio serán las correspondientes al sistema 2-dimensional (4.2). Dividiendo una ecuación entre otra se obtiene

$$\frac{dS}{dI} = -1 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha N_0}{\beta I} \iff dS = \left(-1 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha N_0}{\beta I}\right) dI,$$

e integrando a ambos lados resulta

$$S = -\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) I + \frac{\alpha N_0}{\beta} \ln I + C,$$

donde  $C$  es una constante arbitraria de integración y por tanto puede ser determinada a partir de  $I_0$  y  $S_0$ .

Representar las gráficas de las funciones  $S(I)$  es un ejercicio elemental. La función está definida para todo  $I > 0$ , tiene un punto de máximo en  $I = \rho$  y es cóncava. En la Figura 4.2 se representa una gráfica para diversos valores de  $C$ . A partir de aquí, la reconstrucción del retrato de fases se puede seguir fácilmente, ver Figura 4.3.

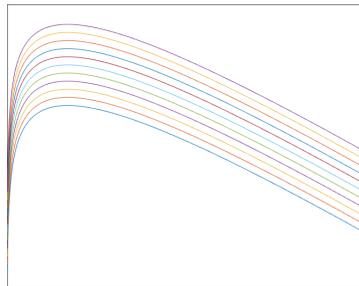


Figura 4.2: Curvas de nivel para diversos valores de  $C$ .

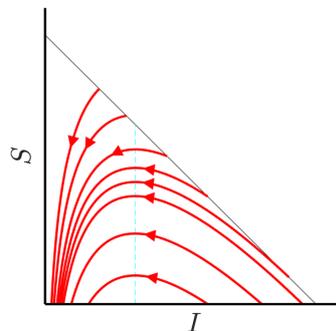


Figura 4.3: Retrato de fases del sistema (4.2).

## 4.2. Simulaciones

Realizaremos las simulaciones gráficas de este modelo con el mismo objetivo con el que realizamos las del modelo simple (SIR), es decir, para conocer las diferencias de la propagación de una noticia falsa entre unos países y otros.

En este modelo entran en juego los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ ; en este caso particular tomaremos  $\alpha = \beta$ . Además, para determinar su valor, recurriremos nuevamente al *índice de penetración de Internet*, de modo que

$$\alpha = \beta = \frac{i}{10},$$

donde  $i$  se corresponde con dicho índice.

Los países que seleccionaremos para este estudio serán los mismos que ya contemplábamos en las simulaciones del modelo simple, esta decisión se debe a que de este modo podremos también ver las diferencias en la propagación según empleemos un modelo u otro. El porcentaje de población que tiene acceso a Internet en estos países es lo suficientemente dispar como para poder observar de forma clara las diferencias que esto genera, por lo que constituirán una muestra de utilidad para observar las particularidades de este modelo.

En la Tabla 4.1 se recogen los países que formarán nuestro estudio, además se muestra el correspondiente valor de los parámetros que entran en juego en las ecuaciones que conforman al sistema.

País	$\alpha = \beta$
España	0.094
Sri Lanka	0.067
Honduras	0.048
Níger	0.022

Tabla 4.1: Valores de las tasas de contacto  $\alpha$  y  $\beta$  para algunos países.

Realizaremos ahora nuestras simulaciones en las cuales llevaremos a cabo un seguimiento a lo largo de 500 unidades de tiempo y consideraremos como datos iniciales que el número de ignorantes es un 95 % de la población total del país, el de *spreaders* es un 5 % y el de recuperados es 0.

En las gráficas que siguen a continuación podemos observar la evolución de la población en cada uno de los casos.

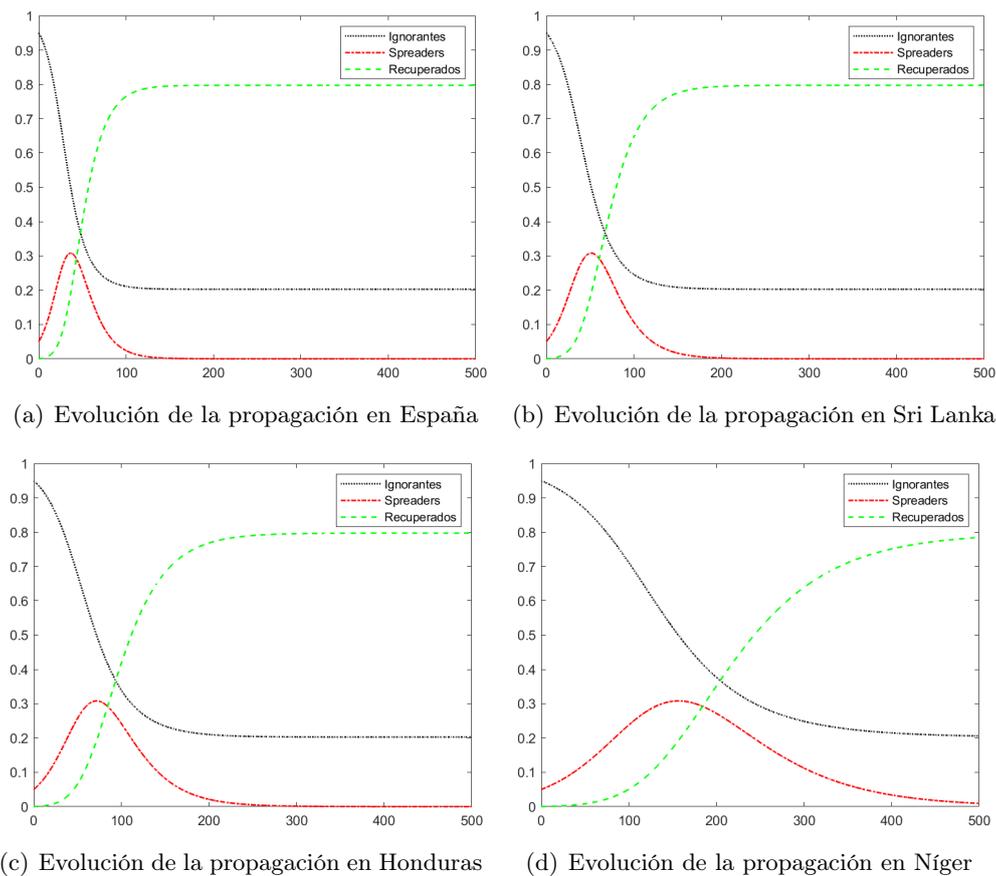


Figura 4.4: Evolución de la propagación de la noticia falsa en distintos países según el modelo ISR.

Como nos podíamos imaginar, una noticia falsa se propagará de forma más rápida en los países con mayor índice de penetración de Internet, pero de igual manera, en estos países la noticia desaparecerá antes.

Si llevamos nuestra atención al caso de España (Figura 4.4(a)), observamos que una vez transcurridas aproximadamente 100 unidades de tiempo, el número de *spreaders* tiende a 0 y ya no experimenta más cambios, es decir, la noticia deja de tener presencia entre la población.

Por el contrario, si observamos la evolución en Níger (Figura 4.4(d)) vemos que no tiene nada que ver con el caso anterior, ya que incluso una vez transcurridas 200 unidades de tiempo el número de *spreaders* continúa lejos de 0, es decir, aún queda un porcentaje de la población que continúa propagando la noticia. No obstante, sí que se puede observar una tendencia hacia el valor 0, como ocurre en el resto de países, solo que en este caso conlleva más tiempo.

Otra observación que podríamos hacer es que, en todas las figuras, las curvas de ignorantes y *spreaders* nunca se cortan. Esto se debe a que en este modelo los únicos parámetros que entran en juego son  $\alpha$  y  $\beta$ , cuyo valor estamos considerando igual; como consecuencia de esto tenemos que el ritmo al que los individuos se convierten en *spreaders* es el mismo que el ritmo con que

se recuperan. Resulta por lo tanto evidente que estas curvas (la de ignorantes y la de *spreaders*) nunca se cortarán, ya que para hacerlo el ritmo de infección tendría que ser mayor que el de recuperación.

Además, el hecho de  $\alpha$  y  $\beta$  sean iguales, es decir, que el ritmo de infección coincida con el de recuperación, tendrá otra consecuencia que puede ser claramente observada en las gráficas: el pico máximo de *spreaders* será el mismo en todos los países.

En conclusión, con este análisis podemos observar que en este modelo, cuando tomamos  $\alpha = \beta$ , el pico máximo de *spreaders* a lo largo del tiempo es el mismo para todos los países, en torno al 30 % de la población total; la diferencia que se observa entre unos países y otros es el momento en que se alcanza este número máximo de *spreaders* y por lo tanto también se observan diferencias en el tiempo de notoriedad de la noticia, siendo más corto para los países que tienen mayores valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

También cabe notar que el hecho de que  $\alpha$  sea igual a  $\beta$  implica que cuando se alcanza el estado estacionario, la situación se compone de un amplio porcentaje de recuperados, ningún *spreader* y algunos ignorantes, es decir, una gran parte de la población estará al tanto de la noticia.

Para finalizar este apartado, recordaremos el papel del *umbral de propagación*. Anteriormente, durante el análisis cualitativo del modelo, habíamos establecido que el valor de este parámetro para este modelo era

$$\rho = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} N_0.$$

Dado que estamos trabajando con  $\alpha = \beta$  y  $N_0 = 1$ , tendremos que  $\rho$  será igual a 0.5.

Este parámetro nos indica lo siguiente:

- Si  $I < \rho$  entonces  $S(t)$  decrece de manera monótona conforme pasa el tiempo.
- Si  $I > \rho$  entonces  $S(t)$  crecerá hasta alcanzar su máximo valor (cuando  $I = \rho$ ) y posteriormente comenzará a decrecer hasta cero.

Pese a que esto último ya se puede comprobar en las simulaciones anteriores, ya que en todas ellas tomamos  $I_0 = 0.95 (> \rho)$ , vamos a ver algún caso en el que el valor inicial del grupo de los ignorantes se encuentre más próximo al valor del umbral  $\rho$  para poder comprobar que se sigue observando este fenómeno.

Trabajaremos con los datos anteriores para el caso de España<sup>2</sup>, pero esta vez consideraremos que el número inicial de ignorantes es un 70 % y un 30 % de la población total respectivamente. Podemos observar la evolución de la propagación de la noticia en ambos casos en la Figura 4.5.

<sup>2</sup>Recordemos que estos datos eran  $\alpha = \beta = 0.094$ . No lo realizaremos para los demás países ya que el comportamiento será análogo en todos ellos.

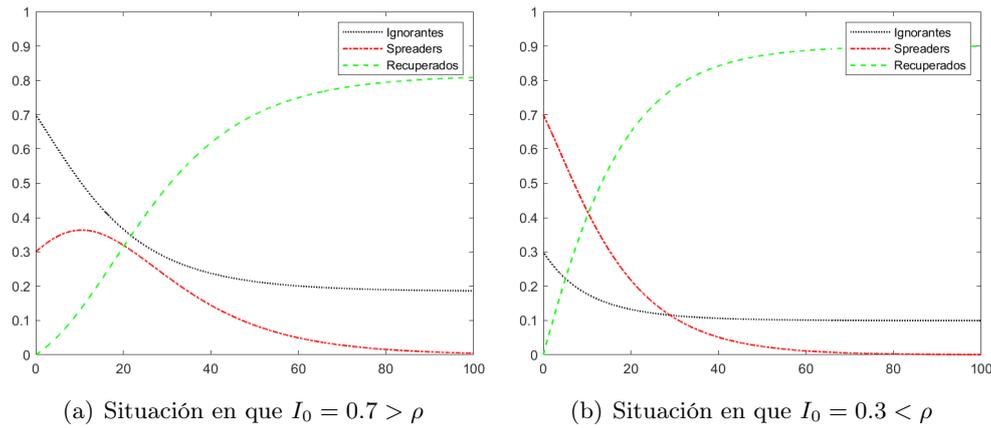


Figura 4.5: Evolución de la propagación de la noticia falsa para distintos valores iniciales del grupo de los ignorantes con respecto al umbral  $\rho$ .

En este caso de la Figura 4.5(a), se verifica que el número máximo de *spreaders* es 0.3636. Dado que el valor inicial era  $S_0 = 0.3$  se comprueba que efectivamente este valor ha crecido hasta alcanzar su máximo y posteriormente comienza a decrecer hasta cero. Además, es posible observar que este valor máximo de *spreaders* se alcanza cuando  $I = \rho = 0.5$ , como avanzamos en el análisis cualitativo del modelo.

Por el contrario en la Figura 4.5(b) se observa que el número máximo de *spreaders* es 0.7, que coincide con el valor inicial de este grupo, se verifica por lo tanto que este valor decrece de forma monótona hasta cero conforme pasa el tiempo.

Con esto damos por finalizadas las simulaciones de este modelo. En la siguiente sección comentaremos el caso en el que  $\alpha$  y  $\beta$  no son iguales.

#### 4.2.1. Modelo ISR con $\alpha \neq \beta$

Ahora veremos qué sucede cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son distintos. Para ello, veamos un caso en que  $\alpha$  sea mayor que  $\beta$  y otro caso en que  $\alpha$  sea menor que  $\beta$  para ilustrar ambas situaciones.

Puesto que con este análisis pretendemos ver que ocurriría en una situación cualquiera de este tipo, los datos que tomaremos no se corresponderán con una situación real en particular, sino que tomaremos dos valores cualquiera (de  $\alpha$  y  $\beta$ ) que nos permitan ilustrar de forma clara el comportamiento en ambos casos.

- Caso  $\alpha \ll \beta$ :

Cuando nos encontremos en una situación de este tipo, lo que ocurrirá será que la noticia falsa se propagará rápidamente entre la población y la tasa con que se recuperan los

individuos será muy baja en comparación a la de contagio. Como consecuencia de esto tendremos, en general, que toda la población se infectará en algún momento y posteriormente se irán recuperando poco a poco hasta alcanzar un estado estacionario en el que toda la población se compone de recuperados.

Para explicar esto de forma mas técnica, debemos recordar la expresión del *umbral de propagación*,  $\rho = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}N_0$ . Observamos que cuando nos encontremos en un caso en que  $\alpha \ll \beta$ , el valor de  $\rho$  estará próximo a 0; esto significa que solo tendremos estabilidad para valores muy pequeños de  $I$ .

Veamos ahora una simulación de esta situación, tomaremos para ello los siguientes datos iniciales:

$$N_0 = 1, \quad I_0 = 0.95, \quad S_0 = 0.05, \quad R_0 = 0, \quad \alpha = 0.05, \quad \beta = 0.5.$$

La evolución de la población en relación a la propagación de la noticia falsa en este caso, aparece representada a continuación en la Figura 4.6.

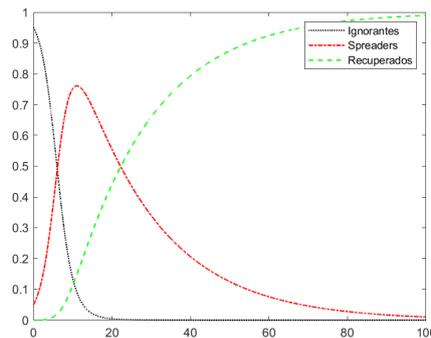


Figura 4.6: Evolución de la población en una situación con  $\alpha \ll \beta$ .

- Caso  $\beta \ll \alpha$ :

Supongamos ahora que nos encontramos en una situación de este tipo, lo que sucede en este caso es que la tasa de contagio es muy baja en comparación con la de recuperación. El resultado de esto es que cada vez que un individuo comience a propagar la noticia, la recuperación del mismo será casi inmediata, no llegando de este modo a causar demasiados perjuicios. El estado estacionario en este caso se compondrá por lo tanto de ignorantes y recuperados.

Para explicar esto, volvemos a estudiar el *umbral de propagación*, que este caso tomará un valor próximo a  $N_0$ . Esto nos indica que casi todos los puntos de equilibrio serán (asintóticamente) estables, es decir, que incluso comenzando con un gran número inicial de *spreaders* tendremos estabilidad.

Veamos una simulación de esta situación, tomando para ello los siguientes datos iniciales:

$$N_0 = 1, \quad I_0 = 0.5, \quad S_0 = 0.5, \quad R_0 = 0, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 0.05.$$

La evolución de la población en relación a la propagación de la noticia falsa en este caso, aparece representada a continuación en la Figura 4.7.

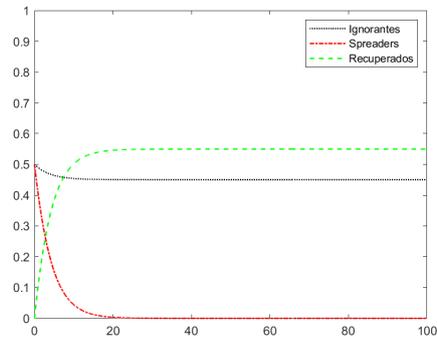


Figura 4.7: Evolución de la población en una situación con  $\beta \ll \alpha$ .

## Capítulo 5

# Modelo SEIR

Pasaremos ahora al estudio del que llamaremos modelo SEIR; la novedad que aporta este modelo con respecto a los anteriores reside en que incluye una nueva clase en la que se situarán los individuos que están reflexionando antes de decidir si compartir o no la noticia.

En este modelo se hace una división de la población en cuatro grupos,

- $S$  (Susceptibles), aquellos individuos que aún no conocen la noticia;
- $E$  (Expuestos), aquellos a los que acaba de llegar la noticia pero aún están decidiendo qué van a hacer, es decir, si van a compartirla o no;
- $I$  (Infecciosos), aquellos que están propagando la noticia;
- $R$  (Recuperados), aquellos que son conocedores de la noticia pero no están participando en su propagación.

En este modelo la interacción entre los grupos que acabamos de definir se rige mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S I + (1 - \alpha) \gamma I, \\ E'(t) = \beta S I - \delta E, \\ I'(t) = (1 - \eta) \delta E - \gamma I, \\ R'(t) = \eta \delta E + \alpha \gamma I \end{cases} \quad (5.1)$$

En la Figura 5.1 podemos observar cómo es el flujo de individuos entre las clases. Una diferencia notable con respecto a los modelos SIR e ISR es que los individuos infectados pueden volver a forma parte de los que ignoran la noticia (los susceptibles), debido a un proceso de olvido. Esta retroalimentación no se consideraba en los modelos previos.

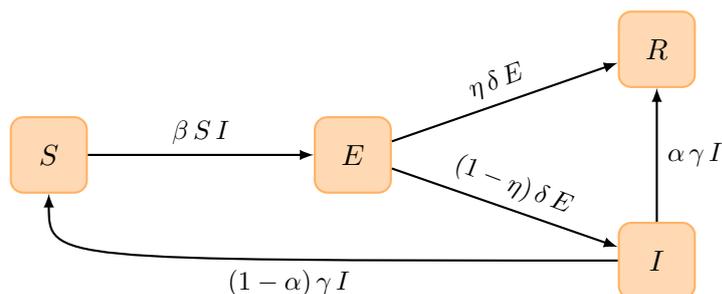


Figura 5.1: Diagrama de transferencia del modelo SEIR.

Los parámetros que intervienen en las ecuaciones anteriores tienen la siguiente interpretación:

- $\alpha$  es la probabilidad de que un individuo recuerde la noticia;
- $\beta$  es la tasa de contacto entre los *susceptibles* ( $S$ ) y los *infecciosos* ( $I$ );
- $\gamma$  es la probabilidad de que un individuo que estaba propagando la noticia deje de hacerlo;
- $\delta$  es la tasa intrínseca de salida del grupo de los expuestos;
- $\eta$  es la probabilidad de que un individuo decida que no va a compartir la noticia.

Además, en relación a  $\gamma$  se podría decir que los motivos que pueden llevar a un individuo que estaba propagando la noticia a que deje de hacerlo son, por ejemplo, que pierda el interés en compartirla o que se le olvide la noticia, lo que está estrechamente relacionado con el parámetro  $\alpha$ . Para dejar más clara la definición que hemos dado de  $\alpha$ , cabe mencionar que si este parámetro toma el valor 1 esto significa que la noticia tiene alguna particularidad que hace que sea fácilmente recordada por el lector, en modo tal que si el individuo se encuentra en varias ocasiones con la noticia este será capaz de reconocerla y no caer de nuevo en el engaño, es decir se podría hablar de una inmunidad ante la noticia falsa.

Para interpretar más fácilmente las ecuaciones del modelo, vamos a explicar con palabras las diferentes transiciones entre los grupos en que se divide la población. Si partimos del grupo de los susceptibles, cuando un individuo de este grupo entra en contacto con un infeccioso (con una tasa de contacto  $\beta$ ) este pasa inmediatamente al grupo de los expuestos. Ahora tenemos dos situaciones posibles, en primer lugar puede ocurrir que el individuo decida compartir la noticia, pasando así al grupo de los infecciosos (la probabilidad de que esto ocurra es de  $1 - \eta$ ). La otra opción es que decida no compartirla pasando así al grupo de los infectados, (la probabilidad de que esto ocurra es  $\eta$ ).

Por otro lado, en cuanto a los individuos infecciosos, puede suceder que al cabo de un tiempo dejen de propagar la noticia (lo cual ocurre con una probabilidad  $\gamma$ ), pasando así al grupo de los recuperados o de los susceptibles; que pase a un grupo o a otro dependerá del parámetro  $\alpha$  cuya interpretación vimos anteriormente.

## 5.1. Análisis del modelo

Si denotamos el tamaño total de la población en el instante inicial por  $N_0$ , resulta claro que  $N_0 = S_0 + E_0 + I_0 + R_0$ . Por otro lado, sumando las ecuaciones del sistema (5.1) se comprueba que, siendo  $N = S + E + I + R$ ,

$$N'(t) = S'(t) + E'(t) + I'(t) + R'(t) = 0,$$

por lo que concluimos que el tamaño de la población permanece constante, es decir,  $N(t) = N_0$  para cualquier  $t \geq 0$ .

Haciendo uso de esta hipótesis será posible reducir el sistema inicial a un problema en tres dimensiones, ya que el número de recuperados se puede obtener a partir de los susceptibles, expuestos e infecciosos mediante la expresión

$$R(t) = N_0 - S(t) - E(t) - I(t).$$

De este modo es posible transformar el sistema (5.1) en el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S I + (1 - \alpha) \gamma I, \\ E'(t) = \beta S I - \delta E, \\ I'(t) = (1 - \eta) \delta E - \gamma I. \end{cases} \quad (5.2)$$

### 5.1.1. Propiedades de las soluciones

Estudiando el sistema (5.2) sobre los planos de coordenadas y recordando que  $S + E + I + R = N_0$  se puede probar que el conjunto

$$\Gamma = \{(S, E, I) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, S + E + I \leq N_0\},$$

es positivamente invariante. Esta propiedad nos indica que las órbitas positivas de los puntos pertenecientes al conjunto están acotadas, es más, están contenidas en un compacto. Como consecuencia, las órbitas del sistema se pueden prolongar en el tiempo a todo el intervalo  $[0, +\infty)$ .

### 5.1.2. Puntos de equilibrio

En este apartado veremos cuáles son los puntos de equilibrio del sistema (5.2) y estudiaremos bajo qué condiciones son estables.

Tenemos dos situaciones de equilibrio para este modelo, por un lado la recta de equilibrios

$$(S, 0, 0), \quad \text{con } S \geq 0 \text{ arbitrario}, \quad (5.3)$$

y por otro lado el punto

$$\left( \frac{(1-\alpha)\gamma}{\beta}, \frac{(1-\alpha)\gamma}{\delta} I, I \right), \text{ cuando } \alpha + \eta = \alpha\eta. \quad (5.4)$$

Puesto que  $\alpha$  y  $\eta$  son mayores o iguales que cero, esta última condición solo se satisface si  $\alpha = \eta = 0$ , en cuyo caso el punto de equilibrio es

$$\left( \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta} I, I \right), \text{ con } I \geq 0 \text{ arbitrario.}$$

Observamos que el primer equilibrio se tiene siempre mientras que el segundo corresponde a un caso particular; distinguiremos por lo tanto ambas situaciones.

En primer lugar, estudiaremos el modelo en el caso  $\alpha \neq 0$  o  $\eta \neq 0$ . En este supuesto, la única situación de equilibrio del sistema se obtiene cuando tanto  $E$  como  $I$  son iguales a cero, es decir, será la recta de equilibrios dada en (5.3).

Para estudiar la estabilidad de esta situación de equilibrio calculamos la diferencial del campo asociado a las ecuaciones evaluada en un punto genérico perteneciente a la recta de equilibrios:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta S + (1-\alpha)\gamma \\ 0 & -\delta & \beta S \\ 0 & (1-\eta)\delta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz  $A$  son los siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= -\frac{\delta + \gamma}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 - 2\delta\gamma + \gamma^2 + 4S\beta\delta - 4S\beta\delta\eta}}{2}, \\ \lambda_3 &= -\frac{\delta + \gamma}{2} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 2\delta\gamma + \gamma^2 + 4S\beta\delta - 4S\beta\delta\eta}}{2}. \end{aligned}$$

En primer lugar es importante notar que si  $S \geq 0$  entonces se verifica

$$\delta^2 - 2\delta\gamma + \gamma^2 + 4S\beta\delta - 4S\beta\delta\eta = (\delta - \gamma)^2 + 4S\beta\delta(1-\eta) \geq 0,$$

por lo que todos los autovalores de  $A$  son reales. Esto, además, nos permite asegurar que el autovalor  $\lambda_2$  será negativo. Sin embargo, el autovalor  $\lambda_3$  podrá tomar valores positivos y negativos:

- El autovalor  $\lambda_3$  será negativo cuando  $S < \frac{\gamma}{\beta(1-\eta)}$ .
- El autovalor  $\lambda_3$  será positivo cuando  $S > \frac{\gamma}{\beta(1-\eta)}$ .

El estudio de la parte lineal en los puntos de equilibrio solo nos permite concluir la inestabilidad

de los puntos de equilibrio  $(S, 0, 0)$  cuando  $S > \frac{\gamma}{\beta(1-\eta)}$  puesto que en este caso uno de los autovalores es positivo.

Para determinar el comportamiento local en los demás puntos de equilibrio habría que hacer un análisis más fino, prestando atención a los términos de orden superior. No incluimos este estudio en el trabajo, en su lugar mostraremos simulaciones en las que se observa que las soluciones tienden asintóticamente a un punto de equilibrio que dependerá de las condiciones iniciales.

**Nota 5.1.** Técnicas similares a las que aplicaremos en la Sección 6.1.3 se podrían usar para estudiar las situaciones en las que, para este modelo, los criterios de linealización no permiten decidir propiedades de estabilidad.

### 5.1.3. Simulaciones ilustrativas

En la Figura 5.2 tenemos algunos ejemplos de estas simulaciones. En todas las gráficas se observa una tendencia hacia un estado estacionario en el que los expuestos e infecciosos tienden a desaparecer y la población queda por la tanto agrupada en susceptibles y recuperados.

El número “final” de susceptibles y recuperados que presenta el sistema en cada caso se corresponde aproximadamente con el punto de equilibrio al que las soluciones tienden asintóticamente, es decir, el punto será  $(S_{\text{fin}}, 0, 0)$ . Para cada una de estas simulaciones se tiene un punto de equilibrio distinto, en cada gráfica indicamos como leyenda el número de susceptibles que se obtiene en el instante final.

El valor que hemos dado en cada caso para las condiciones iniciales y los parámetros se puede consultar en la Tabla 5.1.

Referencia	$S_0$	$E_0$	$I_0$	$R_0$	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\gamma$	$\eta$
Figura 5.2(a)	95	0	5	0	0.2	0.01	0.1	0.1	0.2
Figura 5.2(b)	90	5	5	0	0.2	0.01	0.1	0.2	0.2
Figura 5.2(c)	85	10	5	0	0.5	0.005	0.1	0.2	0.3
Figura 5.2(d)	95	0	5	0	0.5	0.003	0.1	0.1	0.5

Tabla 5.1: Valores de las condiciones iniciales y los parámetros de las figuras que conforman el panel de la Figura 5.2

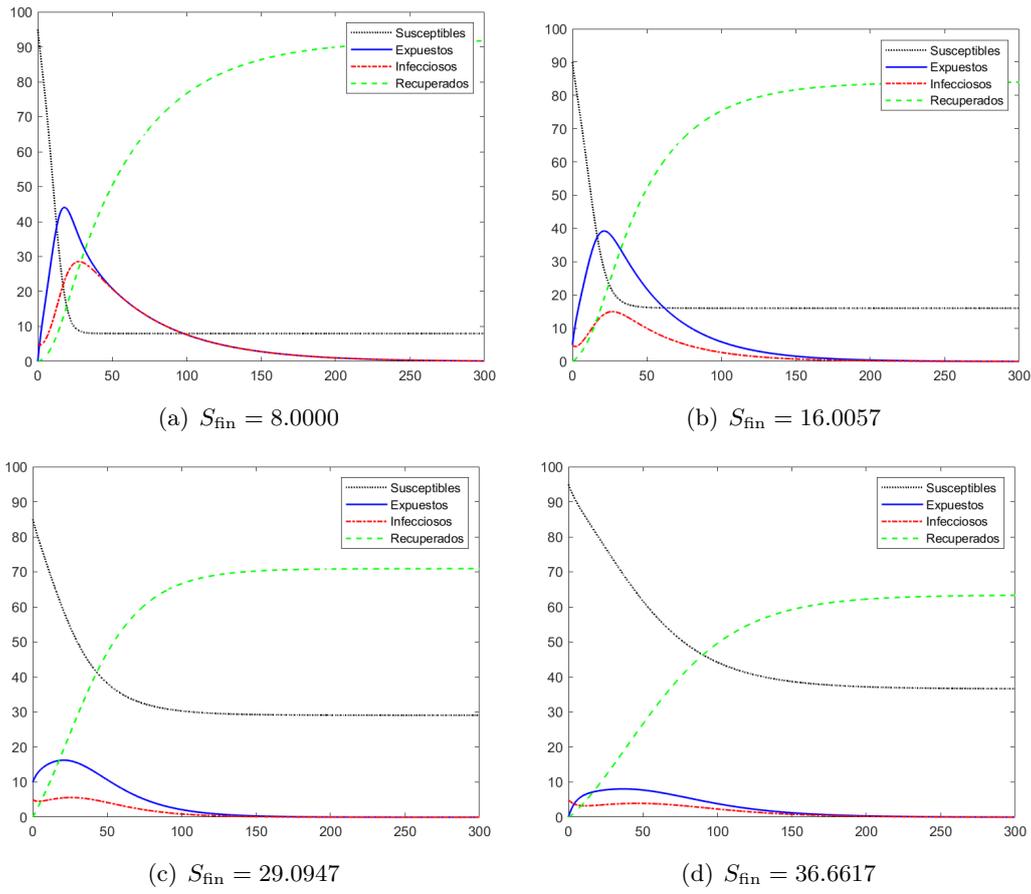


Figura 5.2: Ejemplos de simulaciones ilustrativas del modelo SEIR variando parámetros y condiciones iniciales.

Adicionalmente, si calculamos el valor de  $\frac{\gamma}{\beta(1-\eta)}$  teniendo en cuenta el valor que le hemos dado a cada parámetro en cada simulación se obtienen los valores que aparecen en la tabla 5.2.

Referencia	Valor de $\frac{\gamma}{\beta(1-\eta)}$
Figura 5.2(a)	12.5
Figura 5.2(b)	25
Figura 5.2(c)	57.1429
Figura 5.2(d)	66.6667

Tabla 5.2: Valor de  $\frac{\gamma}{\beta(1-\eta)}$  en cada una de las simulaciones de la Figura 5.2.

En cada simulación se comprueba que el valor de  $S_{\text{fin}}$  es menor que el correspondiente valor de  $\frac{\gamma}{\beta(1-\eta)}$ . De este estudio resulta posible intuir la estabilidad del punto  $(S, 0, 0)$  en el caso  $S < \frac{\gamma}{\beta(1-\eta)}$ .

### 5.1.4. Puntos de equilibrio caso particular

Nos situamos ahora en el caso particular en que  $\alpha = \eta = 0$ . Esta situación particular se corresponde con que nunca se llegue a alcanzar una inmunidad contra la noticia falsa, es decir, es equivalente a eliminar el grupo de los recuperados, ya que si tomamos esos dos parámetros como 0 desaparece toda posibilidad de acceder a dicho grupo y el problema (5.2) se reduce al siguiente:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S I + \gamma I, \\ E'(t) = \beta S I - \delta E, \\ I'(t) = \delta E - \gamma I, \end{cases} \quad (5.5)$$

con  $S + E + I = N_0$ . El flujo de individuos entre las clases para este escenario viene representado en la Figura 5.3.

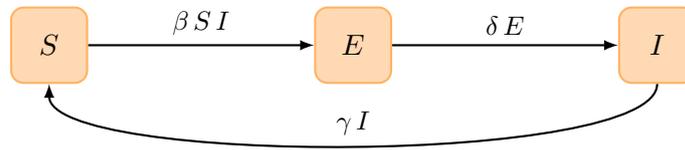


Figura 5.3: Diagrama de transferencia del modelo SEIR cuando  $\alpha = \eta = 0$ .

Como  $S + E + I$  permanece constante a lo largo de las órbitas, podemos escribir  $E = N_0 - S - I$  y reducir de este modo el sistema anterior a un problema en dos dimensiones de la forma

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S I + \gamma I, \\ I'(t) = \delta (N_0 - S - I) - \gamma I. \end{cases} \quad (5.6)$$

El punto de equilibrio dado en (5.4) se corresponde con el punto de equilibrio

$$(\tilde{S}, \tilde{I}) = \left( \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\delta}{\gamma + \delta} (N_0 - \frac{\gamma}{\beta}) \right)$$

del sistema (5.6). Además, seguimos teniendo el punto de equilibrio

$$(\hat{S}, \hat{I}) = (N_0, 0),$$

correspondiente a la intersección entre la recta de puntos de equilibrios (5.3) y el plano invariante  $S + E + I = N_0$ . Estudiaremos la estabilidad y el comportamiento de ambos puntos de equilibrio.

Las posibles soluciones al sistema (5.6) que resultarán de nuestro interés serán aquellas que se encuentren dentro del conjunto

$$\Gamma_1 = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq N_0\}.$$

Este conjunto es positivamente invariante y se corresponde con el triángulo representado en la Figura 5.4.

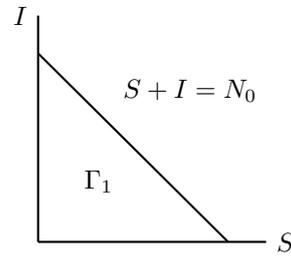


Figura 5.4: Conjunto  $\Gamma_1$  en el plano  $SI$ .

Por otro lado, tenemos que la diferencial del campo asociado a las ecuaciones en un punto genérico es de la forma

$$\begin{pmatrix} -\beta I & -\beta S + \gamma \\ -\delta & -\delta - \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Evaluando (5.7) en el punto  $(\hat{S}, \hat{I}) = (N_0, 0)$  obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta N_0 + \gamma \\ -\delta & -\delta - \gamma \end{pmatrix}.$$

Resulta sencillo calcular la traza y el determinante de esta matriz  $A$ , lo cual nos permitirá determinar la estabilidad del punto de equilibrio y su comportamiento,

- la traza de  $A$  es  $-\delta - \gamma$ , y siempre es negativa.
- $\det(A) = -\delta(\gamma - \beta N_0)$ ; tenemos dos posibles casos:
  - $\frac{\gamma}{\beta} > N_0$ : en este caso el determinante será positivo. Cuando esto ocurra el punto de equilibrio será asintóticamente estable y además se tratará de un atractor.
  - $\frac{\gamma}{\beta} < N_0$ : en este caso el determinante será negativo. Cuando esto suceda el punto de equilibrio será un punto de silla.

Vamos a trabajar ahora con el otro punto de equilibrio,  $(\tilde{S}, \tilde{I}) = (\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\delta}{\gamma + \delta}(N_0 - \frac{\gamma}{\beta}))$ . Evaluando (5.7) en este punto obtenemos

$$\begin{pmatrix} -\beta \tilde{I} & 0 \\ -\delta & -\delta - \gamma \end{pmatrix}.$$

Nos damos cuenta de que la traza de esta matriz será negativa y el determinante positivo siempre que  $\tilde{I}$  sea positivo. La condición de que  $\tilde{I}$  sea mayor que cero es equivalente a que  $N_0 > \frac{\gamma}{\beta}$ .

Cuando esto ocurra, este punto será asintóticamente estable y además se tratará de un atractor del sistema.

Cuando  $\tilde{I}$  sea negativo, el punto quedará fuera de nuestro conjunto de interés  $\Gamma_1$ , por lo que no lo estudiaremos. Esto se debe a que la consecuencia de que  $\tilde{I}$  sea menor que cero es que necesariamente  $N_0 < \frac{\gamma}{\beta}$  lo que significará que el número de susceptibles supera al número total de la población mientras que el de infecciosos y expuestos es negativo, lo cual carece de sentido en este contexto.

Como conclusión del estudio de ambos puntos de equilibrio, dentro del caso particular, es posible enunciar las siguientes afirmaciones.

- El sistema siempre presenta un atractor.
- El comportamiento del sistema cambia según  $\frac{\gamma}{\beta}$  sea mayor o menor que  $N_0$ .

Para concluir esta sección, como resumen del estudio del sistema en dos dimensiones, vamos a ilustrar la dinámica del modelo en cada uno de los casos, según  $N_0$  sea mayor o menor que  $\frac{\gamma}{\beta}$ . Para ello realizaremos el retrato de fases correspondiente a cada situación, de esta manera podremos ver qué dirección y sentido siguen las órbitas del sistema en cada caso.

La Figura 5.5 se corresponde con el retrato de fases del sistema (5.6) en el caso en que se verifica la condición  $N_0 > \frac{\gamma}{\beta}$ . En esta figura observamos que tenemos dos puntos de equilibrio: uno de ellos ( $P_2$ ) funciona como atractor del sistema, mientras que el otro ( $P_1$ ) es un punto de equilibrio de tipo silla.

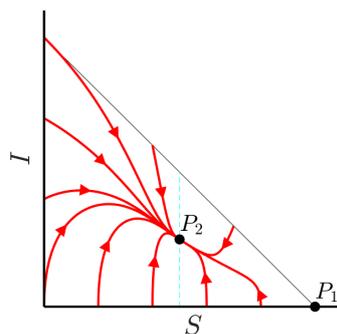


Figura 5.5: Retrato de fases del sistema (5.6) en el caso  $N_0 > \frac{\gamma}{\beta}$ .

Por otro lado, en la Figura 5.6 aparece representado el retrato de fases correspondiente al sistema (5.6) en el caso en que  $N_0 < \frac{\gamma}{\beta}$ . En esta figura podemos ver que solo hay un punto de equilibrio, el punto  $P_1$ , que actúa como atractor global del sistema.

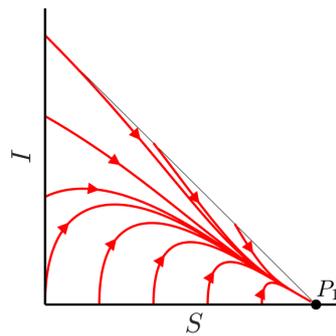


Figura 5.6: Retrato de fases del sistema (5.6) en el caso  $N_0 < \frac{\gamma}{\beta}$ .

## 5.2. Simulaciones

Nuestro objetivo en esta sección será observar las diferencias en la propagación de una noticia falsa dentro de una población según el nivel promedio de conocimientos y habilidades de sus individuos. Lo primero que debemos hacer será establecer los niveles en lo que se puede clasificar una población. Para ello, nos apoyaremos en la división realizada por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), en la cual se clasifica a los individuos en seis grupos o niveles en función del resultado obtenido por cada uno en su encuesta SAS (*Survey of Adult Skills*), ver [12].

Estas encuestas miden diferentes tipos de conocimientos y habilidades, en este caso solo nos fijaremos en los resultados obtenidos en cuanto a la habilidad de los encuestados para comprender, evaluar, utilizar e interactuar con textos escritos. Los resultados obtenidos en esta encuesta para este campo del conocimiento son los que se muestran en la Tabla 5.3.

Nivel	Puntuación	Porcentaje de adultos
Inferior al nivel 1	Menos de 176 puntos	4.5 %
Nivel 1	Entre 176 y 226 puntos	14.4 %
Nivel 2	Entre 226 y 276 puntos	33.9 %
Nivel 3	Entre 276 y 326 puntos	35.4 %
Nivel 4	Entre 326 y 376 puntos	10.0 %
Nivel 5	376 puntos o más	0.7 %

Tabla 5.3: Resultados de la encuesta SAS.

**Nota 5.2.** La suma de los porcentajes no alcanza el 100 %. Esto se debe a que existe un grupo de personas que no han podido completar el cuestionario debido a dificultades con el idioma o discapacidades. Este grupo representa el porcentaje restante de la población.

Recordemos ahora cuales eran los parámetros que entraban en juego en este modelo:

- $\alpha$ : probabilidad de recordar la noticia.
- $\beta$ : tasa de contacto entre susceptibles e infecciosos.
- $\delta$ : tasa de salida del grupo de los expuestos.
- $\gamma$ : probabilidad de que un individuo deje de propagar la noticia.
- $\eta$ : probabilidad de que un individuo decida no compartir la noticia.

Cabría pensar que el hecho de tener un mayor o menor nivel de conocimientos afectará directamente a la hora de decidir si compartir o no una noticia, es decir, al parámetro  $\eta$ . Pese a que esto pueda parecer razonable, no es del todo cierto ya que existen numerosos estudios que apuntan a que esta decisión va más ligada a otras características, como por ejemplo, la edad del individuo.

Por lo tanto nos preguntamos a qué afecta (en el contexto de la propagación de noticias falsas) que una persona pertenezca a un nivel de conocimientos o a otro. La respuesta es sencilla, afectará al tiempo que se tarda en tomar una decisión sobre si compartirla o no. Esto se debe a que mientras que una persona con un alto nivel de competencias se tomará su tiempo en el proceso de evaluar la noticia y tomar una decisión al respecto, una persona situada en un nivel bajo, generalmente, tomará una decisión de forma precipitada al encontrarse con la noticia.

Por lo tanto, teniendo esto en cuenta, concluimos que vamos a modificar el parámetro  $\delta$  (que mide la tasa de salida del grupo de los expuestos) en función del nivel promedio de conocimientos que muestren los individuos de una población, ya que cuanto más pequeño sea  $\delta$  mayor es el tiempo que se permanece en la clase de los expuestos y por tanto es mayor el tiempo que se tarda en tomar una decisión, y viceversa.

Para hacer nuestras simulaciones fijaremos el valor de los siguientes parámetros:

$$\alpha = 0.2, \quad \gamma = 0.1, \quad \eta = 0.1.$$

El parámetro  $\delta$  tomará, como habíamos visto antes, distintos valores en función del nivel promedio de conocimientos de los individuos de la población en estudio y serán los que aparecen recogidos en la [Tabla 5.4](#).

Falta entonces por determinar el valor de  $\beta$ . Este valor será fijo pero haremos tres simulaciones para ver la curva de los infecciosos en diferentes situaciones, en cada una de ellas el valor de  $\beta$  será:

$$\beta = 0.01, \quad \beta = 0.03, \quad \beta = 0.1.$$

Nivel	Valor $\delta$
Inferior al nivel 1	0.95
Nivel 1	0.8
Nivel 2	0.65
Nivel 3	0.5
Nivel 4	0.35
Nivel 5	0.2

Tabla 5.4: Valor del parámetro  $\delta$  para cada nivel.

En el panel de la Figura 5.7 podemos observar la curva de los infecciosos de cada nivel de población en estas tres situaciones, una para cada valor de  $\beta$ . En cada una de las gráficas estamos realizando un seguimiento de la propagación de una noticia falsa a lo largo de 100 unidades de tiempo, trabajamos con porcentajes de población y consideramos que el número inicial de susceptibles se corresponde con un 95 % de la población total, el de infecciosos con un 5 % de la población y el de recuperados con un 0 %.

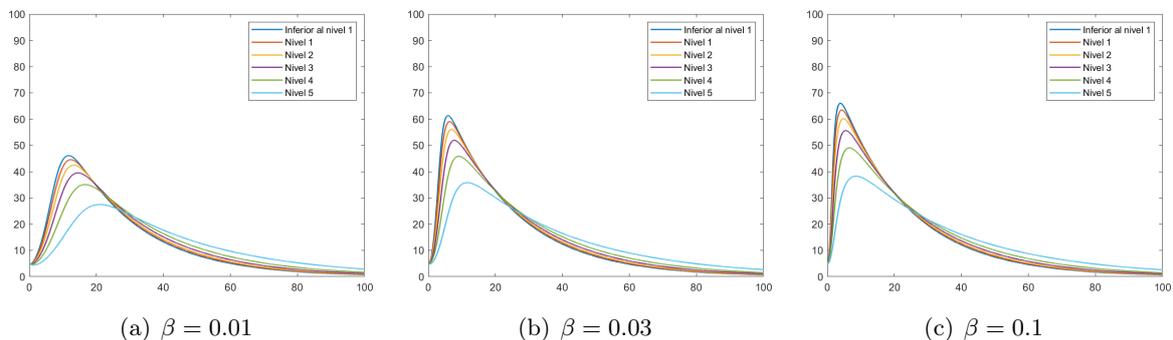


Figura 5.7: Curvas de infecciosos según el nivel para diferentes valores del parámetro  $\beta$ .

En estas cuatro representaciones que acabamos de ver es posible observar, en todas ellas, un comportamiento similar para cada grupo de individuos. Los individuos pertenecientes al nivel inferior al 1 son los que presentan una curva de infecciosos con mayor inclinación, es decir, son los que más rápido alcanzan el pico máximo de infecciosos. Si ordenásemos a los distintos grupos siguiendo este criterio permanecerían en el mismo orden que los hemos presentado, es decir, el nivel inferior al 1 iría seguido del nivel 1, al que a su vez seguiría el nivel 2 y así sucesivamente hasta llegar al nivel 5, que es el que más tarda por tanto en alcanzar su pico de infecciosos.

En estas figuras, se observa además que el el pico máximo de infecciosos presenta su valor más alto en la curva correspondiente a los individuos del grupo inferior al nivel 1 y su valor más bajo

para el grupo del nivel 5. Esto se debe a que como el único valor que estamos variando entre unos niveles y otros es  $\delta$ , el ritmo al que se van recuperando los individuos es el mismo en todos los niveles; por el contrario, el ritmo al que se infectan varía, siendo más lento para los niveles más altos. Como consecuencia de esto, el número de infecciosos que se tienen simultáneamente (y por tanto su pico máximo) será más bajos para los niveles superiores.

Finalmente veamos las diferencias entre unas figuras y otras. Lo que varía entre ellas es el valor del parámetro  $\beta$ . Las figuras aparecen ordenadas en orden creciente en función del valor de este parámetro. Como el valor de  $\beta$  se corresponde con la tasa de contacto entre susceptibles e infecciosos tendremos que el hecho de que  $\beta$  sea mayor o menor implicará un mayor o menor número de infecciosos respectivamente. Este hecho se observa de forma clara en las figuras ya que comparando unas con otras podemos ver como aumenta el número de infecciosos conforme lo hace el valor de  $\beta$ .



## Capítulo 6

# Modelo SEIZ

La diferencia que aporta este modelo con respecto a los anteriores es que tiene en cuenta la reacción de las personas al encontrarse con una noticia falsa; mientras que algunas personas son capaces de decidir instantáneamente que quieren compartir la noticia que se acaban de encontrar, otras necesitan un tiempo para pensar antes de hacerlo. Esto genera la posibilidad de que algunas personas que han sido expuestas a la noticia no lleguen a mostrar ninguna reacción a ella. Además, en este modelo desaparece el grupo de los recuperados dejando paso a un nuevo grupo, el de los escépticos.

En este modelo se divide a la población en cuatro grupos:

- $S$  (Susceptibles), representa a los individuos que aún no conocen la noticia falsa;
- $E$  (Expuestos), aquellos individuos que han sido expuestos a la noticia falsa pero se están tomando un tiempo para analizarla antes de compartirla
- $I$  (Infecciosos), aquellos individuos que comparten la noticia;
- $Z$  (Escépticos), representa a los individuos que conocen la noticia pero han decidido no creérsela.

La interacción entre estos cuatro grupos se rige mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S I - b S Z, \\ E'(t) = (1-p)\beta S I + (1-l)b S Z - \rho E I - \varepsilon E, \\ I'(t) = p\beta S I + \rho E I + \varepsilon E, \\ Z'(t) = l b S Z \end{cases} \quad (6.1)$$

En la Figura 6.1 podemos observar cómo es el flujo de individuos entre las clases.

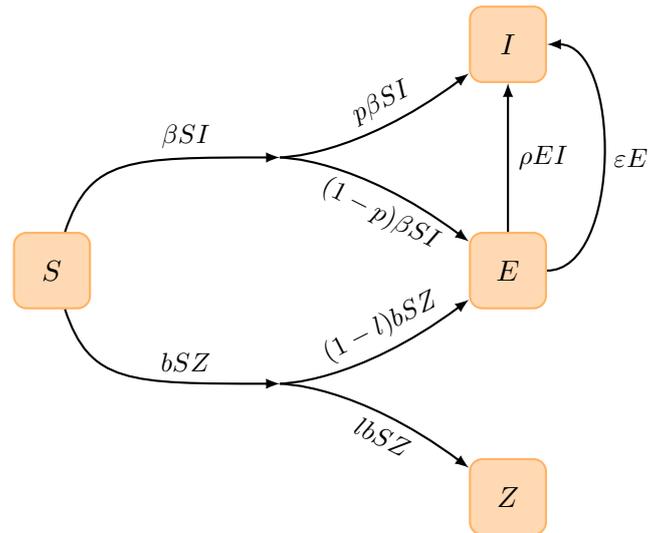


Figura 6.1: Diagrama de transferencia del modelo SEIZ.

Veamos ahora a qué corresponden los parámetros que aparecen en este modelo:

- $\beta$ : tasa de contacto entre los susceptibles y los infecciosos;
- $b$ : tasa de contacto entre los susceptibles y los escépticos;
- $\rho$ : tasa de contacto entre los expuestos y los infecciosos;
- $p$ : probabilidad de que un susceptible pase a ser infeccioso debido al contacto directo con individuos infecciosos;
- $1 - p$ : probabilidad de que un susceptible pase a la clase de los expuestos debido al contacto directo con individuos infecciosos;
- $\varepsilon$ : probabilidad de que un individuo de la clase de los expuestos pase a la de los infecciosos;
- $l$ : probabilidad de que un susceptible pase a ser escéptico debido al contacto directo con individuos escépticos;
- $1 - l$ : probabilidad de que un susceptible pase a la clase de los expuestos debido al contacto directo con individuos escépticos.

Supondremos que todos los parámetros son positivos y además  $p, l \in (0, 1)$ .

Para dejar más clara la estructura de este modelo, vamos a explicar con palabras las diferentes transiciones que podemos tener. Cuando un individuo susceptible entra en contacto con uno de los infecciosos (la tasa de contacto es  $\beta$ ) pueden ocurrir dos cosas: por un lado puede suceder que inmediatamente se crea la noticia y decida comenzar a propagarla, pasando así a la clase de los

infecciosos (esto ocurre con una probabilidad  $p$ ); la otra opción es que necesite un tiempo para analizar la información que acaba de recibir, pasando así al grupo de los expuestos (esto ocurre con una probabilidad  $1 - p$ ).

Por otro lado, también puede suceder que un individuo susceptible entre en contacto con una persona escéptica (lo cual sucede con una tasa de contacto  $b$ ); cuando esto sucede tenemos dos opciones; la primera sería que el individuo pase directamente a la clase de los escépticos, es decir, que el individuo decida no creerse la noticia (esto ocurre con una probabilidad  $l$ ); en cambio, también podría suceder que este contacto entre susceptibles y escépticos cause el efecto contrario, en modo tal que cuando el individuo conoce la noticia esta llame su atención y pase (con una probabilidad  $1 - l$ ) al grupo de los expuestos, pues va a analizar la noticia antes de decidir difundirla.

Finalmente nos queda por explicar la transición del grupo de los expuestos al de los infecciosos, este paso puede deberse a que pase el tiempo que el individuo necesitaba para reflexionar sobre la noticia y tras este decida que quiere compartirla con otras personas, pasando así a la clase de los infecciosos (esto ocurre con una probabilidad  $\varepsilon$ ). Por otro lado, cabe mencionar que los individuos expuestos no están aislados de la sociedad, por lo que continúan en contacto con más individuos infecciosos, este simple hecho puede generar el paso a la clase de los infecciosos (se debe a la tasa de contacto  $\rho$ ).

Observando de nuevo la Figura 6.1, cabe destacar que una vez que un individuo pasa a formar parte del grupo de los infecciosos nunca lo abandonará. Esto nos podría llevar a confusión, ya que si pensamos en el comportamiento humano es completamente natural que una persona pueda cambiar de opinión conforme conoce nuevos datos y puntos de vista. En cambio, si nos restringimos al ámbito de las redes sociales, como por ejemplo *Twitter*, este modelo cobra mucho sentido; esto se debe a que una vez que un usuario decide publicar o compartir un *tweet* desde su perfil, esta publicación permanecerá en la aplicación indefinidamente, de modo que cualquier otro usuario siempre tendrá acceso a ella.

## 6.1. Análisis del modelo

Denotemos el tamaño total de la población en el instante inicial por  $N_0$ , tendremos por lo tanto que  $N_0 = S_0 + E_0 + I_0 + Z_0$ . Si  $N = S + E + I + Z$ , se comprueba fácilmente que

$$N'(t) = S'(t) + E'(t) + I'(t) + Z'(t) = 0,$$

por lo que concluimos que el tamaño de la población permanece constante, es decir,  $N(t) = N_0$  para cualquier  $t \geq 0$ . Haciendo uso de esta hipótesis, el sistema inicial se puede reducir a un problema en tres dimensiones, ya que resulta posible obtener el número de escépticos ( $Z$ ) a partir

del número de susceptibles ( $S$ ), expuestos ( $E$ ) e infecciosos ( $I$ ) mediante la expresión

$$Z(t) = N_0 - S(t) - E(t) - I(t).$$

De este modo podremos transformar el sistema (6.1) en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta SI - bS(N_0 - S - E - I), \\ E'(t) = (1-p)\beta SI + (1-l)bS(N_0 - S - E - I) - \rho EI - \varepsilon E, \\ I'(t) = p\beta SI + \rho EI + \varepsilon E. \end{cases} \quad (6.2)$$

Observamos que  $S'(t) \leq 0$  para cualquier  $t \geq 0$ , esto significa que el número de susceptibles siempre disminuye, lo cual se puede observar también en la Figura 6.1, que representa los flujos entre grupos del modelo; esto se debe a que una vez que un individuo entra en contacto con la noticia estará interactuando con ella de alguna manera, bien sea desde el grupo de los expuestos, de los infecciosos o de los escépticos, pero nunca regresará al grupo de los susceptibles.

Si nos fijamos en la tercera ecuación del sistema (6.2) nos damos cuenta de que el número de infecciosos siempre aumenta, si además volvemos a observar la Figura 6.1, comprenderemos que esto se debe a que no existe salida del grupo de los infecciosos, por lo que el tamaño del grupo solo puede aumentar con el paso del tiempo.

### 6.1.1. Propiedades de las soluciones

Estudiando el sistema de ecuaciones (6.2) sobre cada uno de los planos de coordenadas y sobre el plano  $S + E + I = N_0$  se prueba que el conjunto

$$\Gamma = \{(S, E, I) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, S + E + I \leq N_0\} \quad (6.3)$$

es positivamente invariante. En efecto,  $S' = 0$  cuando  $S = 0$  y por lo tanto este plano es invariante. Por otra parte, sobre el plano  $E = 0$  se cumple que  $E' > 0$  si  $S > 0$  e  $I > 0$  y por lo tanto para cada condición inicial  $(S_0, 0, I_0) \in \Gamma$  con  $S_0 > 0$  e  $I_0 > 0$  se verifica que la órbita positiva entra en  $\Gamma$ . Análogamente, sobre el plano  $I = 0$  se cumple que  $I' > 0$  si  $E > 0$  y por lo tanto para cada condición inicial  $(S_0, E_0, 0) \in \Gamma$  con  $E_0 > 0$  se tiene que la órbita positiva entra en  $\Gamma$ . Cálculos adicionales permiten probar que para cada punto perteneciente a  $\Gamma$  que se sitúe sobre los ejes de coordenadas se cumple que la órbita positiva entra en  $\Gamma$ . Finalmente, para cualquier condición inicial sobre el plano  $S + E + I = N_0$ , la órbita positiva se mantiene en  $\Gamma$ , pues en caso contrario la suma  $S + E + I$  tomaría valores estrictamente mayores que  $N_0$ , lo cual no es posible.

Esta propiedad nos indica que las órbitas de los puntos pertenecientes al conjunto  $\Gamma$  están acotadas, es más, están contenidas en un compacto. Como consecuencia de esto tenemos que las

órbitas del sistema se pueden prolongar en el tiempo a todo el intervalo  $[0, +\infty)$ .

### 6.1.2. Puntos de equilibrio

Si se igualan a cero cada una de las ecuaciones que conforman el sistema (6.2), se obtienen los siguientes puntos de equilibrio:

$$(N_0, 0, 0), \quad (0, 0, I) \text{ y } (0, E, -\frac{\varepsilon}{\rho}).$$

El punto  $(0, E, -\frac{\varepsilon}{\rho})$  no pertenece a nuestro conjunto de interés  $\Gamma$ , por lo que lo descartamos de nuestro estudio. Explicado de otra forma, el motivo por el que no tendremos en cuenta este punto de equilibrio para nuestro estudio es que  $I$  sería igual a  $-\frac{\varepsilon}{\rho}$ , es decir, sería negativo, lo cual carece de sentido para este modelo.

Comenzaremos estudiando el punto  $(N_0, 0, 0)$ . La diferencial del campo asociado a las ecuaciones evaluada en este punto de equilibrio es

$$A_1 = \begin{pmatrix} bN_0 & bN_0 & -\beta N_0 + bN_0 \\ -(1-l)bN_0 & -(1-l)bN_0 - \varepsilon & (1-p)\beta N_0 - (1-l)bN_0 \\ 0 & \varepsilon & p\beta N_0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz  $A_1$  son los siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= N_0 b l, \\ \lambda_2 &= \frac{N_0 \beta p}{2} - \frac{\sqrt{N_0^2 \beta^2 p^2 - 2 N_0 \beta \varepsilon p + 4 N_0 \beta \varepsilon + \varepsilon^2}}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{\sqrt{N_0^2 \beta^2 p^2 - 2 N_0 \beta \varepsilon p + 4 N_0 \beta \varepsilon + \varepsilon^2}}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{N_0 \beta p}{2}. \end{aligned}$$

Observamos que el valor propio  $\lambda_1$  siempre tomará valores positivos; tendremos por lo tanto que al menos un valor propio será positivo, por lo que podemos asegurar que este punto de equilibrio será inestable.

Pasamos ahora al estudio de los puntos de equilibrio de la forma  $(0, 0, I)$ . En este caso, al evaluar la diferencial del campo asociado a las ecuaciones en un punto de equilibrio de esta forma se obtiene la matriz jacobiana  $A_2$ :

$$A_2 = \begin{pmatrix} b(I - N_0) - I\beta & 0 & 0 \\ b(I - N_0)(l - 1) - I\beta(p - 1) & -\varepsilon - I\rho & 0 \\ I\beta p & \varepsilon + I\rho & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son los siguientes:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\varepsilon - I\rho, \quad \lambda_3 = -b(N_0 - I) - I\beta.$$

Prestando atención a cada uno de estos valores, observamos en primer lugar que  $\lambda_1$  es siempre nulo; por otro lado, si nos fijamos en  $\lambda_2$  y en  $\lambda_3$  nos damos cuenta de que tomarán siempre valores negativos ya que  $I \in [0, N_0]$ .

El estudio de la parte lineal del campo en los puntos de equilibrio de este modelo no es definitivo a la hora de definir la estabilidad de los mismos. A continuación aplicaremos otro tipo de técnicas para dar respuesta a esta cuestión.

### 6.1.3. Estabilidad de los puntos de equilibrio de la forma $(0, 0, I)$

En esta sección vamos a necesitar dos resultados que enunciamos a continuación.

**Teorema 6.1** (Ver [7]). *Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo de vectores de clase  $C^1$  y sea  $L : V \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar de clase  $C^1$  definida en un abierto  $V$ . Sea  $\dot{L}$  la derivada orbital<sup>1</sup> de  $L$ . Supongamos que  $\dot{L}(x) \leq 0$  para todo  $x \in V$ . Si  $p \in V$  es tal que su órbita positiva está contenida en un compacto  $K \subset V$  entonces el  $\omega$ -límite<sup>2</sup> de  $p$  está contenido en  $\dot{L}^{-1}(0)$ .*

**Teorema 6.2** (Ver [8]). *Sea  $f$  un campo de vectores de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n$  con un punto de equilibrio en el origen. Supongamos que  $Df(0)$  tiene  $n_s$  autovalores con parte real negativa,  $n_u$  autovalores con parte real positiva y  $n_c$  autovalores con parte real cero.*

*Existe una variedad invariante  $n_c$ -dimensional  $W_{loc}^c(0)$  de clase  $C^r$  con  $r$  arbitrariamente grande, que es tangente al autoespacio generalizado asociado a los autovalores con parte real nula.*

*Además  $f$  es localmente topológicamente conjugado cerca del origen a un sistema de la forma:*

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u) \\ \dot{v} = Cv \end{cases} \quad (6.4)$$

*donde  $B$  es una matriz  $n_c \times n_c$  con todos sus autovalores con parte real nula,  $C$  es una matriz  $(n_s + n_u) \times (n_s + n_u)$  con  $n_s$  autovalores con parte real negativa y  $n_u$  autovalores con parte real positiva, y donde  $g$  es una función de clase  $C^r$ .*

Nos referiremos a  $W_{loc}^c$  como la variedad central en el punto de equilibrio. Obsérvese que las ecuaciones en (6.4) están desacopladas, la ecuación en la variable  $u$  corresponde al campo reducido a la variedad central.

<sup>1</sup>Sea  $f$  un campo de vectores de clase  $C^1$  definido en un espacio de fases  $\Omega$ . Sea  $L : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar de clase  $C^1$  en un abierto  $V \subset \Omega$ . La derivada orbital de  $L$  con respecto al campo  $f$  es la función escalar  $\dot{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\dot{L}(x) = \nabla L(x) \cdot f(x)$ .

<sup>2</sup>Sea  $p \in \Omega$  tal que su órbita positiva está definida para todo  $t \geq 0$ . Definimos el  $\omega$ -límite de  $p$  como el conjunto  $\omega(p) = \{q \in \Omega / \exists \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow \infty \text{ y } \varphi(t_n, p) \rightarrow q\}$ .

Como consecuencia del estudio de la parte lineal en los puntos de equilibrio de la forma  $(0, 0, I)$  sabemos que, para cada uno de ellos, se tiene un autovalor cero y dos autovalores negativos. Aplicando el Teorema 6.2 se sigue que el sistema (6.2) es localmente topológicamente conjugado en un entorno de  $(0, 0, I)$  a un campo de la forma

$$\begin{cases} \dot{u} = g(u) \\ \dot{v} = Cv \end{cases} \quad (6.5)$$

donde  $C$  es una matriz  $2 \times 2$  con todos sus autovalores con parte real negativa. Por otra parte, como ya hemos dicho, la ecuación  $\dot{u} = g(u)$  recoge la dinámica reducida a la variedad central, pero en este caso esta dinámica ya la conocemos porque tenemos un continuo de puntos de equilibrio y por lo tanto  $g \equiv 0$ . La dinámica del campo

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = Cv \end{cases} \quad (6.6)$$

es trivial, todos los planos  $u = u_0$  constante son invariantes y sobre ellos todas las órbitas tienden al punto de equilibrio  $(u_0, 0, 0)$ . Como consecuencia, para cada punto de equilibrio en las ecuaciones del sistema (6.2) existirá una variedad invariante 2-dimensional local de órbitas que tienden a dicho punto de equilibrio.

A continuación probaremos que para cada condición inicial  $(S_0, E_0, I_0)$  en el tetraedro  $\Gamma$  definido en (6.3) se cumple que la correspondiente órbita tiende a un punto de equilibrio de la forma  $(0, 0, I)$ . Si definimos  $L(S, E, I) = S$ , se cumple que  $\dot{L}(S, E, I) = S' \leq 0$ , y como sabemos que la órbita positiva del punto  $(S_0, E_0, I_0)$  está contenida en  $\Gamma$ , podemos aplicar el Teorema 6.1 para concluir que su  $\omega$ -límite está contenido en el plano  $S = 0$ .

Obsérvese que el retrato de fases sobre el plano invariante  $S = 0$  es muy simple, las órbitas sobre el triángulo invariante  $\Gamma \cap \{S = 0\}$  son segmentos de pendiente  $-1$  sobre los cuales el flujo tiende al punto de equilibrio sobre el eje vertical. Nosotros queremos concluir que el  $\omega$ -límite de  $(S_0, E_0, I_0)$  es un punto de la forma  $(0, 0, I)$ . Supongamos que el  $\omega$ -límite contiene un punto de la forma  $(0, E, I)$ , entonces también pertenecen al  $\omega$ -límite todos los puntos de su órbita incluidos puntos tan cercanos como queramos al corte del segmento con la vertical. Como consecuencia la órbita positiva de  $(S_0, E_0, I_0)$  entrará en un dominio donde antes se aplicó el Teorema 6.2 y por lo tanto la órbita tenderá a uno de los puntos de equilibrio sobre la vertical.

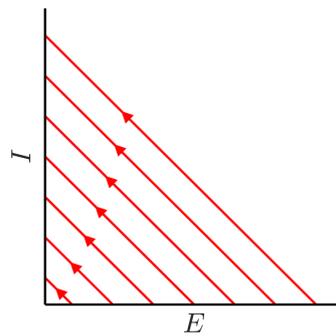


Figura 6.2: Retrato de fases sobre el plano invariante  $S = 0$ .

#### 6.1.4. Simulaciones ilustrativas

En primer lugar teníamos el punto de equilibrio  $(N_0, 0, 0)$  sobre el que habíamos determinado su inestabilidad en todo caso. Esto se puede comprobar gráficamente ya que si nos situamos en un entorno de este punto, por pequeño que sea este entorno veremos como nos alejamos considerablemente del punto de partida.

Para verificar esto realizaremos dos simulaciones. En la primera de ellas tomaremos como condiciones iniciales que el número de susceptibles sea 9999 y el de infecciosos 1, siendo el total de la población 10000, es decir, nuestro punto de partida será  $(9999, 0, 1)$ . En la siguiente simulación consideraremos que la población total es también de 10000, pero esta vez tomaremos como condiciones iniciales que el número de susceptibles sea 9999 y el de escépticos 1, es decir el punto de partida será  $(9999, 0, 0)$ . Estas simulaciones aparecen representadas en la Figura 6.3.

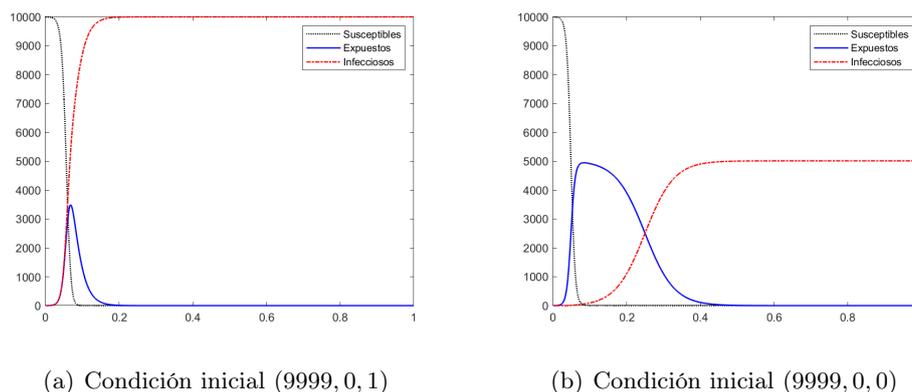


Figura 6.3: Evolución de la propagación de la noticia para distintas condiciones iniciales.

En ambos casos observamos cómo la curva de susceptibles disminuye, alejándose del valor de  $N_0 = 10000$ . Es decir, podemos comprobar cómo, según avanza la propagación de la noticia,

nos vamos alejando del punto de equilibrio, pese a haber comenzado situándonos muy próximos al mismo. Podemos de este modo verificar que efectivamente se trata de un punto de equilibrio inestable, como ya habíamos adelantado con anterioridad.

En estas simulaciones que acabamos de ver se observa además otra particularidad del modelo. Esta particularidad consiste en que las curvas tienden hacia un estado estacionario en que tanto los susceptibles como los expuestos tienden a desaparecer. Esta situación es la que se recoge en forma de nuestro segundo punto de equilibrio, dado por  $(0, 0, I)$ .

El valor exacto del punto de equilibrio dependerá de las condiciones iniciales y los parámetros elegidos en cada caso. Por ejemplo en la simulación de la Figura 6.3(a) este punto de equilibrio será de la forma  $(0, 0, 10000)$ . En cambio, en el caso de la Figura 6.3(b) el punto será de la forma  $(0, 0, 5014)$ .

Cabría entonces preguntarse si cualquier punto de la forma  $(0, 0, I)$  puede corresponderse con la situación estacionaria de un sistema de ecuaciones concreto o si por el contrario estos posibles puntos  $(0, 0, I)$  están limitados a algunos valores específicos de  $I$ . Para responder a esta pregunta observaremos la Figura 6.4; en ella aparece representado, en distintas situaciones posibles, el valor de  $S$  en el instante inicial con los respectivos valores que tendrían  $S, E$  e  $I$  en el instante final.

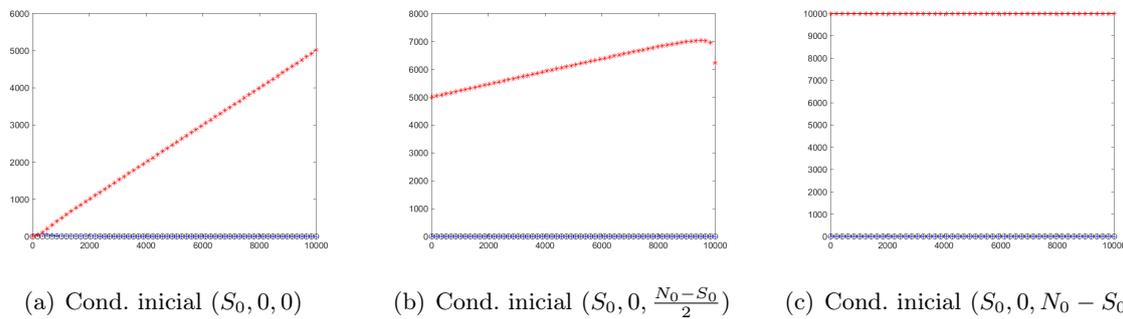


Figura 6.4: Situación final de la propagación de la noticia para diferentes condiciones iniciales.

**Nota 6.1.** En el eje horizontal viene representado el valor de  $S$  en el instante inicial, hemos dado valores equiespaciados comprendidos entre 1 y 9999.

En el eje vertical aparece el valor de  $S, E$  e  $I$  en el instante final para cada valor de  $S_0$ . El valor de  $S$  viene representado mediante círculos negros, el de  $E$  mediante cruces azules y el de  $I$  mediante asteriscos rojos.

**Nota 6.2.** En estas tres simulaciones hemos usado los mismos parámetros, evidentemente estas gráficas serían distintas para otra elección de parámetros. En la Figura 6.5 tenemos un ejemplo en el que las condiciones iniciales son  $(S_0, 0, \frac{N_0 - S_0}{2})$  (las mismas que en la Figura 6.4(b)) pero los parámetros elegidos son distintos a los de las tres figuras anteriores.

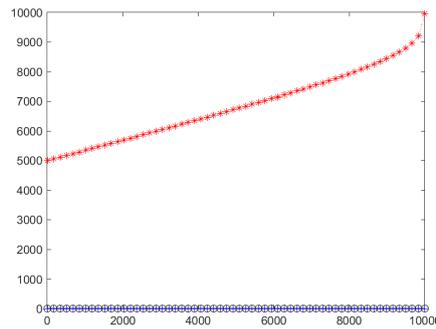


Figura 6.5: Situación final de la propagación de la noticia con condiciones iniciales  $(S_0, 0, \frac{N_0 - S_0}{2})$  y parámetros distintos a los tomados en las anteriores figuras.

En estas cuatro figuras se observa de forma clara que la situación final se puede expresar de la forma  $(0, 0, I)$ . Si observamos las cuatro figuras en su conjunto, nos podemos hacer una idea de que en función de las condiciones iniciales y de la elección de parámetros es posible obtener cualquier valor final para  $I$ , siempre dentro del intervalo  $[0, N_0]$ .

## 6.2. Simulaciones

Debido a la gran aplicabilidad de este modelo a redes sociales como *Twitter*, lo ideal sería poder obtener una base de datos directamente de la aplicación y trabajar con ella para comparar el ajuste del modelo a la realidad. Como esto queda fuera del alcance de este trabajo, nos limitaremos a utilizar los que aparecen en [10].

Si bien es cierto que estas simulaciones no nos permitirán hacer comparaciones y ver diferencias entre unos países y otros, como hicimos con los modelos anteriores, sí nos permitirán conocer de manera fidedigna cómo es la propagación de una noticia falsa en el mundo de las redes sociales.

Los parámetros que intervienen en estas simulaciones son aquellos que han mostrado un mayor ajuste a datos reales sobre cómo se han ido propagando diversas noticias, como por ejemplo aquellas relacionadas con el movimiento *Black Lives Matter*. La información en [10] proviene de bases de datos de *Twitter* sobre la cantidad de *tweets* en cada instante que se han publicado usando determinados *hashtags*; estos *hashtags* son los que permiten filtrar qué *tweets* tratan sobre un determinado tema.

El ejemplo siguiente nos ayudará a entender el gran valor de los *hashtags* y por qué nos serán de gran ayuda. Si pensamos en la pandemia del COVID-19, es obvio que nos podremos encontrar con una gran cantidad de *tweets* sobre el tema. Lógicamente, para estudiar la propagación de una información falsa sobre la pandemia no nos interesarán todos los *tweets* que contengan información sobre el COVID, sino solo aquellos que tengan que ver con el hecho concreto que

queremos estudiar, y ahí es precisamente donde entran en juego los *hashtags*. Pensemos por ejemplo en la información relativa a las vacunas contra el virus; si ponemos en el buscador el *hashtag* #Novaccineforme nos encontraremos con *tweets* provenientes de personas que no estaban a favor de las vacunas; en cambio, si filtramos usando el *hashtag* #Vaccinesavelives ocurrirá todo lo contrario, nos encontraremos con publicaciones a favor de la vacunación y de sus beneficios.

Resulta evidente pues que este hecho sobre el funcionamiento de *Twitter* y las herramientas que nos proporciona jugará a nuestro favor ya que, escogiendo el *hashtag* adecuado, tendremos una forma fácil y rápida de filtrar los *tweets* que nos resultarán de utilidad para estudiar cómo se propaga la información falsa en esta red social.

### 6.2.1. El *hashtag* #DCblackout

Maleki *et al.* [10] realizaron un estudio en relación a la desinformación relacionada con los disturbios que tuvieron lugar en Washington D.C. en el contexto del movimiento *Black Lives Matter*, surgido a raíz de la muerte de George Floyd. Más concretamente, este estudio gira entorno a un supuesto corte de comunicación ocurrido en la ciudad el lunes 1 de junio de 2020. La información relativa a este supuesto suceso se compartió en *Twitter* mediante el uso del *hashtag* #DCblackout.

Para realizar este estudio se extrajeron 27962 *tweets* que contenían este *hashtag*, publicados entre el 1 y el 4 de junio de 2020. Numerosos usuarios compartieron fotos de un gran incendio cerca del Monumento a Washington. Sin embargo, otros usuarios apuntaban a que las fotos habían sido extraídas de la serie de televisión *Designated Survivor* y no tenían relación alguna con los disturbios.

A partir de los datos obtenidos los autores han determinado que los parámetros que proporcionan el mejor ajuste son los siguientes:

- Las tasas de contacto tomarán los valores:

$$\beta = 4.3713, \quad b = 8.1967 \text{ y } \rho = 1.3833 \cdot 10^{-6}.$$

- Las probabilidades tomarán los valores:

$$p = 0.7905, \quad l = 0.8161 \text{ y } \varepsilon = 0.0373.$$

Empleando esta estimación de parámetros y tomando como valores iniciales

$$N = 9 \cdot 10^4, \quad S_0 = 6.5 \cdot 10^4, \quad E_0 = 0.5 \cdot 10^4, \quad I_0 = 0.5 \cdot 10^4 \text{ y } Z_0 = 1.5 \cdot 10^4,$$

se obtiene la gráfica que viene representada en la Figura 6.6.

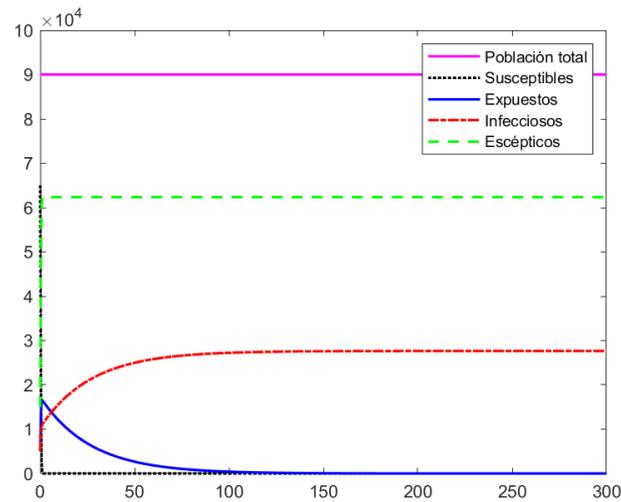


Figura 6.6: Evolución del hashtag #DCblackout en Twitter.

El intervalo de tiempo representado en el eje horizontal va desde 0 hasta 288, esto se debe a que cada unidad de tiempo corresponde a 15 minutos, completando así la franja del 1 al 4 de junio, que era el objeto del estudio. En el eje vertical se representa en este caso el número acumulado de *tweets*.

Al observar la gráfica, claramente nos damos cuenta de que los cambios se producen en los primeros intervalos de tiempo y luego cada grupo permanece constante. Para poder observar mejor qué sucede en los primeros momentos haremos una representación de los 96 primeros intervalos de tiempo, es decir, las primeras doce horas; véase la Figura 6.7.

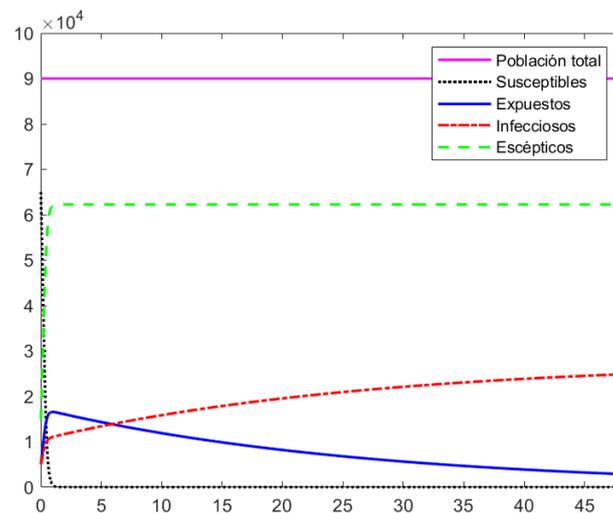


Figura 6.7: Evolución del hashtag #DCblackout durante las primeras 12 horas.

Observando ambas gráficas y teniendo en cuenta el valor de los parámetros que hemos utilizado es posible extraer algunas conclusiones.

- La mayoría de los susceptibles, al encontrarse con un *tweet* desinformando sobre la situación decidieron no publicar inmediatamente ningún *tweet* al respecto.
- La mayoría de las personas que se convirtieron en infecciosos necesitaron un tiempo de deliberación antes de publicar sobre la noticia, es decir, pasaron por el grupo de los expuestos.
- La mayor parte de los individuos que pasaron por el grupo de los expuestos abandonaron este grupo, es decir, se decidieron a publicar sobre la noticia, por motivos distintos a seguir en contacto con infecciosos (personas usando el *hashtag*). Un motivo que explicaría por ejemplo el paso al grupo de los infecciosos sería que estos individuos hayan visto nueva información relativa a este suceso en otras plataformas.
- La mayor parte de las interacciones con el *hashtag* se produjeron en las primeras 12 horas. Además observamos que los primeros momentos de aparición del *hashtag* fueron claves, ya que se pueden observar cambios bruscos en la evolución de la propagación durante los primeros intervalos de tiempo.



# Bibliografía

- [1] L.M. Bettencourt, A. Cintrón-Arias, D.I. Kaiser y C. Castillo-Chávez. The power of a good idea: Quantitative modeling of the spread of ideas from epidemiological models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 364:513–536, 2006.
- [2] D.J. Daley y D.G. Kendall. Epidemics and rumours. *Nature*, 204(496):1118, 1964.
- [3] R. D’Ambrosio, G. Giordano, S. Mottola y B. Paternoster. Stiffness analysis to predict the spread out of fake information. *Future Internet*, 13(9):222, 2021.
- [4] C. Fernández y J.M. Vegas. *Ecuaciones diferenciales*. Editorial Pirámide, 1996.
- [5] P. Ferrero. *Modelos epidemiológicos*. Trabajo fin de grado, Universidad de Oviedo, 2020.
- [6] J. Franceschi y L. Pareschi. Spreading of fake news, competence and learning: kinetic modelling and numerical approximation. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 380(2224), 2022.
- [7] J.K. Hale y H. Koçak. *Dynamics and bifurcations*, volumen 3. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] Y.A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volumen 112. Springer, 1998.
- [9] M.Y. Li. *An introduction to mathematical modeling of infectious diseases*, volumen 2 of *Mathematics of Planet Earth*. Springer, Cham, 2018.
- [10] M. Maleki, E. Mead, M. Arani y N. Agarwal. Using an epidemiological model to study the spread of misinformation during the black lives matter movement. En *International Conference on Fake News, Social Media Manipulation and Misinformation (ICFNSMMM)*, *arXiv:2103.12191*, 2021.
- [11] M. Martcheva. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1<sup>a</sup> edición, 2015.
- [12] OCDE. OECD skills studies: Skills matter: Further results from the survey of adult skills. 2016.

- [13] J.R.C. Piqueira. Rumor propagation model: an equilibrium study. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010.
- [14] J.R.C Piqueira, M. Zilbovicius y C.M. Batistela. Daley–Kendall models in fake-news scenario. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 548:123406, 2020.
- [15] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [16] S. Vosoughi, D. Roy y S. Aral. The spread of true and false news online. *Science*, 359(6380):1146–1151, 2018.